

IL CONCETTO DI BORDO E DI FRONTIERA IN MATEMATICA

1. Introduzione

In matematica, i due concetti di “bordo” e di “frontiera”, anche se spesso sono identificati, non sono equivalenti. Del resto anche nel linguaggio comune non sono sinonimi. Diciamo “le frontiere della scienza”, ma non diciamo “il bordo della scienza”, mentre diciamo “il bordo di un quadro” e non “la frontiera di un quadro”.

“Frontiera” evoca qualcosa che sta di fronte ad un’altra. (La terminazione aggettivale “iera” che proviene dal latino *area* è comune ad altre parole, come costiera, riviera e simili.) La frontiera è confine di uno Stato con un altro Stato. Invece “bordo” è legato al concetto di orlo, una parte esterna che sta intorno ad una parte centrale e quindi estremità di una cosa, margine, per esempio la parte di una nave che sporge dall’acqua.

I concetti di frontiera e di bordo sono difficili da formalizzare matematicamente, perché nel definirli si vuole dare una descrizione di ciò che si ha in mente. Invece, come è noto, in matematica le definizioni sono nominali, non descrivono l’oggetto supposto esistente (seppure in un mondo di idee), ma le parole usate per “de-finire” l’oggetto individuano l’oggetto stesso, delimitandolo. In tal senso Aristotele può affermare che la “definizione” di un concetto è il suo bordo, il “bordo di una cosa” è la sua forma.

Qui si cercherà d’illustrare i concetti di bordo e di frontiera dal punto di vista matematico, più precisamente nell’ambito della topologia (quella parte della matematica che considera “uguali” due figure che possono ottenersi l’una dall’altra mediante una trasformazione biunivoca e bicontinua).

2. Notazioni

Si userà il simbolismo della teoria degli insiemi come una “steno-grafia per certe articolazioni del ragionamento” (R. Thom). L’intento

non è di formalizzare troppo, ma quello di esporre delicati concetti in modo il più possibile non ambiguo. Tuttavia in una prima lettura si possono tralasciare le parti segnate con un asterisco (*[...]).

Sia E un insieme. Come al solito, con la notazione $x \in E$ intendiamo che x è un elemento di E ; con la notazione $X \subset E$ che X è un *sottoinsieme* di E (non escludendo che possa essere $X = E$).

Se $X \subset E$, l'insieme degli elementi di E che non appartengono ad X è detto *differenza E meno X* , o *insieme complementare* (o più semplicemente *complemento*) di X in E . In simboli si scrive

$$E \setminus X = \{x \in E \mid x \notin X\}$$

I simboli “ \cap ” e “ \cup ” indicano rispettivamente l'intersezione e l'unione di due sottoinsiemi.

Si considera noto il concetto di spazio ordinario a tre dimensioni \mathbb{R}^3 , i cui punti hanno tre coordinate (x_1, x_2, x_3) con x_i in \mathbb{R} (dove \mathbb{R} è l'insieme dei numeri reali).

Se consideriamo le n -uple (x_1, \dots, x_n) di numeri reali, l'insieme

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

è detto *spazio cartesiano (reale) ad n dimensioni*.

La funzione $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_i$ ($i = 1, \dots, n$), che associa ad un punto la sua i -esima coordinata, si chiama *proiezione sull'asse x_i* .

In \mathbb{R}^3 , la superficie sferica \mathbb{S}^2 (detta anche sfera di centro l'origine e raggio uguale ad 1) è così caratterizzata:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Ciò suggerisce la seguente definizione di sfera (superficie sferica) dello spazio \mathbb{R}^{n+1} come

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\},$$

mentre

$$\mathbb{D}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$$

rappresenta la *sfera piena* o *disco n -dimensionale chiuso* di centro O e raggio uguale ad 1 (brevemente *n -disco*). \mathbb{S}^1 è la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario, \mathbb{S}^0 è la coppia di punti della retta numerica reale individuata da $x = 1$ e $x = -1$; \mathbb{D}^1 è costituito dal segmento $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ e \mathbb{D}^2 dal cerchio del piano di centro O e raggio uguale ad 1.

Nel linguaggio comune diciamo che \mathbb{S}^n è il bordo di \mathbb{D}^{n+1} . L'insieme

$$\mathring{\mathbb{D}}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\} \subset \mathbb{D}^n$$

è chiamato *n-disco aperto* (di centro O e raggio 1); ovviamente \mathbb{D}^n meno $\mathring{\mathbb{D}}^n$ è uguale a \mathbb{S}^{n-1} .

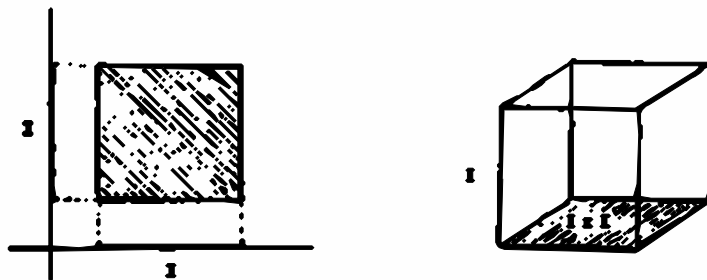
Indichiamo con $A \times B$ il *prodotto cartesiano* di A per B definito da

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

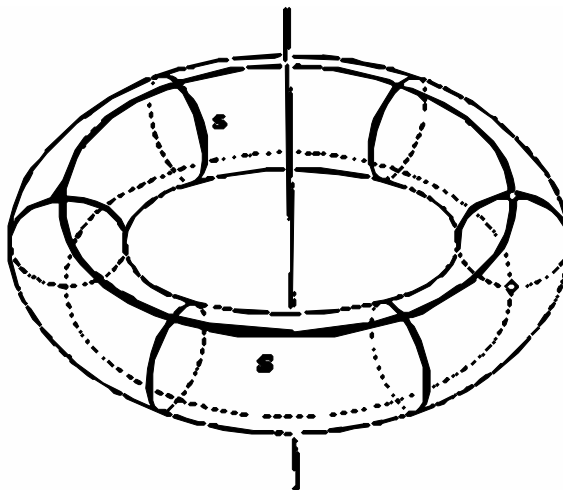
Naturalmente si ha

$$A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A\}.$$

Se I è un segmento, allora I^2 è il quadrato (pieno) di lato I , I^3 è il cubo solido e I^n ($n > 3$) l'ipercubo di lato I .



Il prodotto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ è il *toro* \mathbb{T}^2 (superficie torica, una camera d'aria di uno pneumatico), che può pensarsi ottenuto facendo ruotare una circonferenza S (realizzazione concreta di \mathbb{S}^1) intorno ad una retta complanare con S e che non intersechi S ; ogni punto di S , ruotando intorno alla retta, descrive un parallelo del toro, mentre ogni posizione di S individua un meridiano del toro. Se facciamo ruotare il disco D (realizzazione concreta di \mathbb{D}^2) che ha come bordo S , otteniamo il *toro solido* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ (intuitivamente una ciambella).



3. Il concetto di frontiera

Per comodità consideriamo come spazio ambiente $E = \mathbb{R}^n$, ma le considerazioni valgono in tutti gli spazi in cui c'è la nozione di *distanza* tra punti ([C-T-V]).

Indicata con $d(x, y) \in \mathbb{R}$ la distanza tra i punti x e y , l'insieme dei punti di E equidistanti da x , cioè $\{y \in E \mid d(x, y) = r\}$, costituisce la *sfera (di E) di centro x e raggio r* , mentre

$$\{y \in E \mid d(x, y) < r\}$$

è il *disco aperto di centro x e raggio r* , detto anche *intorno sferico di x di raggio r* . Nello spazio ordinario si tratta proprio della sfera piena di centro x e raggio r privata del bordo; mentre se E è un semipiano ed s è la retta che lo delimita, un intorno di un punto x di s è un semidisco (di centro x e raggio r) privato della semicirconferenza del bordo.

Si chiama *intorno* di x in E ogni sottoinsieme U di E che contiene un intorno sferico di centro x .

Sia X un sottoinsieme di E ; un punto x di E appartiene alla *frontiera* di X in E , indicata $Fr_E(X)$, se in ogni intorno di X cadono punti di X e del complementare di X (in E). Ovviamente la frontiera di X (in E) è uguale alla frontiera del complemento di X (in E). Si osservi che se X è pensato come sottoinsieme di E e di E' con $E \neq E'$, allora $Fr_E(X)$ può essere distinta da $Fr_{E'}(X)$; cioè la frontiera dipende dallo spazio ambiente. In particolare $Fr_E(E) = \emptyset$. Quando

non vi è luogo ad equivoci, ometteremo l'indicazione in basso dello spazio ambiente.

ESEMPIO 3.1. Se $X = \mathbb{D}^1 \subset \mathbb{R}$, allora $Fr_{\mathbb{R}}(X)$ è costituita dagli estremi del segmento \mathbb{D}^1 . Se \mathbb{D}^1 è pensato come sottoinsieme di \mathbb{R}^2 , allora ogni suo punto è anche punto di frontiera (esso rappresenta un ostacolo in \mathbb{R}^2).

Diciamo che $X \subset E$ è (topologicamente) *chiuso* se esso contiene la sua frontiera: in simboli

$$X \text{ chiuso} \Leftrightarrow Fr(X) \subset X.$$

Un punto x di E è *interno* ad X se esiste un intorno U di x tutto contenuto in X (cioè $x \in U \subset X$). L'insieme dei punti interni ad X è detto *interno (topologico)* di X e si indica $Int(X)$. Un punto x di E è *esterno* ad X se è interno al complementare di X in E . L'insieme dei punti esterni ad X è detto *esterno (topologico)* di X e si indica $Est(X)$.

Diciamo che X è (topologicamente) *aperto* in E se esso è vuoto (uguale a \emptyset) oppure coincide con il suo interno: in simboli

$$X \text{ aperto} \Leftrightarrow X = Int(X).$$

cioè X è unione di dischi aperti di E .

*[Si prova che

$$X \text{ aperto} \Leftrightarrow X \cap Fr(X) = \emptyset, \quad X \text{ chiuso} \Leftrightarrow X = Int(X) \cup Fr(X).$$

Si osservi che $Int(X) \cap Fr(X) = \emptyset$. Se X è aperto (risp. chiuso), allora $E \setminus X$ è chiuso (risp. aperto); inoltre $Fr(X)$ è un chiuso e $Int(X)$ è un aperto.]

L'insieme $Int(X) \cup Fr(X)$, unione dell'interno e della frontiera di X (che è un chiuso), si chiama *chiusura* di X e si indica con \bar{X} , quindi

$$X \text{ chiuso} \Leftrightarrow X = \bar{X}.$$

Si osservi che esistono insiemi aperti e chiusi contemporaneamente: per esempio l'insieme E pensato come sottoinsieme di E è contemporaneamente aperto e chiuso in E .

*[Un punto $x \in E$ è detto *punto di accumulazione* di X , se per ogni intorno U di x esiste qualche punto di U , distinto da x , che appartiene ad X .

L'insieme dei punti di accumulazione di X si chiama *derivato* di X e si indica $D(X)$. Si vede facilmente che

$$X \cup D(X) = \bar{X}.$$

L'insieme X si dice *denso* in $Y \subset E$, se $\bar{X} = Y$: per esempio, l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali è denso in \mathbb{R} , poiché $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 3.2. *Poiché $Fr(X)$ è un chiuso, segue $Fr(Fr(X)) \subset Fr(X)$ e vale l'uguaglianza se e solo se $Int(Fr(X)) = \emptyset$.*

Ad esempio se consideriamo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, si ha

$$Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}, \quad Fr(\mathbb{R}) = \emptyset \Rightarrow Fr(Fr(\mathbb{Q})) \neq Fr(\mathbb{Q}).$$

Si osservi che se X è un chiuso, allora $Fr(X) \subset X$ e $Int(Fr(X)) = \emptyset$; così pure se X è aperto, allora $X \cap Fr(X) = \emptyset$ e quindi $Int(Fr(X)) = \emptyset$. Quindi se X è aperto o chiuso, si ha $Fr(Fr(X)) = Fr(X)$.

In ogni caso, poiché $Fr(X)$ è chiuso, si ha

$$Fr(Fr(Fr(X))) = Fr(Fr(X))$$

cioè vale una sorta di idempotenza:

$$Fr^h(X) = Fr^2(X) \quad h \geq 2.]$$

ESEMPIO 3.3. *Se a e b sono due numeri reali, consideriamo i seguenti sottoinsiemi*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\},$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

Considerati come sottoinsiemi di \mathbb{R} , l'intervallo $[a, b]$ è un chiuso, l'intervallo $]a, b[$ è un aperto, mentre $]a, b]$ non è né aperto né chiuso.

Però se $]a, b[$ è considerato come un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 , cioè

$$]a, b[= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b, y = 0\}$$

esso non è un aperto (del piano).

Osserviamo che, anche nel linguaggio comune, il segmento $[a, b]$, chiuso nel senso della Topologia generale, è una curva *non* chiusa, essendo dotata di estremi distinti, a e b .

Nel prossimo paragrafo vogliamo precisare una seconda accezione del concetto di aperto e chiuso, nell'ambito della Topologia combinatoria e in particolare della Geometria differenziale.

4. Il concetto di bordo

Le premesse matematiche per comprendere questo paragrafo non sono del tutto elementari ([CG-DC]).

Il concetto fondamentale è quello di *omeomorfismo*. Intuitivamente un omeomorfismo è una trasformazione biunivoca che porta due figure l'una sull'altra (in entrambi i sensi), in modo continuo (senza lacerazioni o tagli); tramite essa punti “vicini” vanno in punti “vicini” (l'essere “vicino” è precisato dalla topologia sulle figure).

Formalmente, se X ed Y sono due spazi topologici, un omeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ è un'applicazione biunivoca e bicontinua (cioè φ e la sua inversa $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ sono applicazioni continue).

Due figure X e Y , che si corrispondono tramite un omeomorfismo, sono dette *omeomorfe*, in simboli $X \cong Y$; esse sono topologicamente equivalenti, cioè sono indistinguibili dal punto di vista della Topologia, che è appunto quella branca della Matematica, che studia le proprietà che sono invarianti per omeomorfismi, così come la Geometria euclidea studia le proprietà che sono invarianti per movimenti (due figure sovrapponibili sono indistinguibili per la Geometria elementare).

Per esempio la poligonale che delimita un poligono ordinario è omeomorfa ad una circonferenza; una circonferenza non è omeomorfa ad un segmento; una corona circolare non è omeomorfa ad un cerchio (l'esistenza del “buco” non permette di passare con continuità dal cerchio alla corona circolare); una sfera piena è omeomorfa ad un prisma pieno, che può essere considerato perciò una *sfera topologica*; una sfera non è omeomorfa ad un toro (sempre a causa dell'esistenza del “buco”).

Tramite un omeomorfismo una curva va in una curva, una superficie va in una superficie, un solido va in un solido, infatti si conserva la “dimensione” (le curve, le superficie, i solidi hanno rispettivamente dimensione uguale a 1, 2, 3); mentre, in generale, le misure e la forma vengono alterate.

Siamo ora in grado di dare il concetto di *n-varietà con bordo*, partendo dalla configurazione più semplice.

Per $n \geq 1$, in \mathbb{R}^n l'iperpiano di equazione $x_n = 0$ è detto *bordo* del semispazio

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$$

e viene indicato con $\partial\mathbb{R}_+^n$.

Ad esempio \mathbb{R}_+^2 è il semipiano positivo delimitato dalla retta $y = 0$; \mathbb{R}_+^1 è la semiretta positiva delimitata dal punto O .

Intuitivamente, una n -varietà con bordo è una figura che localmente somiglia (cioè è localmente omeomorfa) ad un n -disco o ad un n -semidisco; i punti di M che hanno intorni che somigliano (cioè sono omeomorfi) ad un n -semidisco costituiscono il bordo ∂M di M . I punti di del bordo sono “intrinsecamente” differenti dai punti della varietà M privata del bordo ∂M .

*[In maniera più formale: una n -varietà (topologica) M con bordo ∂M è uno spazio topologico (di Hausdorff) munito di un atlante $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, dove

- 1) U_i è un aperto in $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ (cioè le carte (U_i, φ_i) coprono M);
- 2) φ_i è un omeomorfismo di U_i con $\varphi_i(U_i)$, aperto di \mathbb{R}^n o di \mathbb{R}_+^n ;
- 3) se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \varphi_j(U_j)$$

è un omeomorfismo (cioè se due carte non sono disgiunte, i punti che appartengono ad entrambe hanno due rappresentazioni legate da un omeomorfismo).

Poiché su \mathbb{R}^n esistono coordinate, le carte (U_i, φ_i) , sfruttando l'omeomorfismo φ_i^{-1} , permettono di definire *coordinate locali* sulla varietà. Le funzioni $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sono dette *funzioni di transizione*.

I punti p di M per i quali $\varphi_i(p)$ appartengono a $\partial \mathbb{R}_+^n$ costituiscono il bordo ∂M di M .]

Se $\partial M = \emptyset$ la varietà si dice senza bordo o semplicemente n -varietà (in tal caso ogni suo punto possiede intorni aperti omeomorfi ad \mathbb{R}^n).

Si osservi che ∂M è una $(n - 1)$ -varietà (priva di bordo), cioè $\partial(\partial M) = \emptyset$. Ad esempio una semisfera è una 2-varietà con bordo; il suo bordo è una circonferenza, che è una 1-varietà senza bordo.

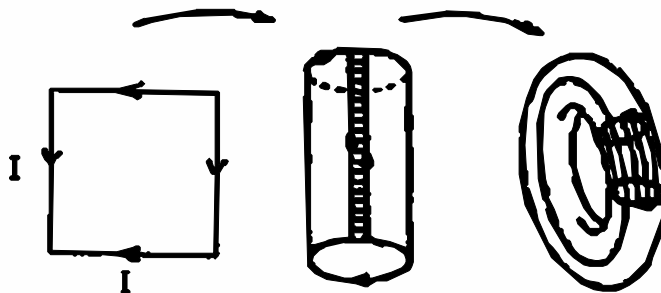
Se M è uno spazio *compatto* (cioè M è chiuso e limitato in \mathbb{R}^n) e $\partial M = \emptyset$, allora M è detta (combinatoriamente) *chiusa*.

Il concetto di combinatoriamente chiuso traduce il concetto intuitivo di recipiente chiuso, ad esempio una pentola con il coperchio (senza manico). Una semisfera (cioè una scodella) è un chiuso dal punto di vista topologico, ma è una 2-varietà non chiusa, poiché il suo bordo non è vuoto; un barattolo con il coperchio è una superficie omeomorfa ad una sfera bidimensionale, quindi una 2-varietà priva di bordo. Così il segmento $[a, b]$ è una 1-varietà con bordo costituito

dai punti a e b ; se incolliamo a con b (senza fare intrecci) otteniamo una curva, che è omeomorfa ad una circonferenza.

*[È possibile ottenere una circonferenza anche da una retta, avvolgendola infinite volte intorno alla circonferenza stessa. In tal modo, ad ogni punto della circonferenza di raggio r corrispondono infiniti punti sulla retta a distanza $2\pi r$ l'uno dall'altro. Perciò se sulla retta poniamo la seguente relazione di equivalenza, $x \equiv x' \pmod{1}$, cioè identifichiamo x con x' se $x - x' = n \cdot 1$ (n numero intero), otteniamo la circonferenza di raggio $r = \frac{1}{2\pi}$.]

Se consideriamo il quadrato unitario I^2 , dove $I = [0, 1]$, e identifichiamo il punto $(0, y)$ con $(1, y)$ per $0 \leq y \leq 1$, abbiamo una superficie omeomorfa al cilindro $\mathbb{S}^1 \times I$; se identifichiamo anche i punti $(x, 0)$ e $(x, 1)$, il quadrato I^2 (con gli incollamenti considerati) diventa omeomorfo al toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, bordo di $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$.



Si osservi che se M e N sono due varietà, allora

$$\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N,$$

(che giustifica anche il simbolo di bordo usato, simile al simbolo di “derivata”).

Per esempio se M è il segmento unitario sull’asse x ed N il segmento unitario sull’asse y , allora il bordo del quadrato $M \times N$ del piano è costituito dall’unione dei lati verticali del quadrato (cioè $\partial M \times N$) e dei lati orizzontali (cioè $M \times \partial N$).

*[Le superfici compatte chiuse si possono classificare dal punto di vista topologico ([H-VC]): una superficie connessa M , compatta, chiusa ed orientabile (per la quale si possono distinguere due facce) è omeomorfa alla superficie di una ciambella con h buchi; il numero h , individuato da M , è detto *genere* di M ed è naturalmente un

invariante topologico. La sfera è una superficie di genere 0, il toro una superficie di genere 1.

ESEMPIO 3.4. *Il seguente esempio fa vedere che i concetti di bordo e di frontiera sono distinti.*

Sia $M = \mathbb{D}^2 \setminus \tilde{S} \subset \mathbb{R}^2$ dove \tilde{S} è una circonferenza di centro O e raggio minore di 1.

Se $p \in \overset{\circ}{\mathbb{D}^2} \setminus \tilde{S}$, ogni intorno aperto di p è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^2 . Si vede facilmente che

$$\partial M = \mathbb{S}^1, \quad Fr(M) = \mathbb{S}^1 \cup \tilde{S},$$

quindi $\partial M \neq Fr(M)$.]

OSSERVAZIONE 3.5. *I termini atlante e carte sono mutuati dalla geografia: la sfera (schematizzazione della superficie terrestre) può essere rappresentata sul piano tramite un atlante di carte geografiche, omeomorfismi che però non conservano le distanze; le carte permettono di introdurre coordinate locali (nel caso specifico la longitudine e la latitudine).*

Se, nella definizione di varietà, le funzioni di passaggio da una carta all'altra (funzioni di transizione) sono differenziabili (ammettono cioè derivate continue), si ha il concetto di varietà differenziabile ([S]).

Intuitivamente una varietà differenziabile è una varietà topologica tale che ogni suo punto possiede uno spazio tangente che varia con continuità al variare del punto; le varietà differenziabili si dicono perciò anche varietà lisce, cioè senza rugosità, senza punte.

Per esempio una sfera \mathbb{S}^2 è una varietà differenziabile, mentre ∂I^3 , la superficie di un cubo, non è una varietà differenziabile: nei punti interni delle facce esiste il piano tangente (univocamente individuato) mentre nei punti degli spigoli (e in particolare nei vertici) non esiste il piano tangente. Se arrotondiamo gli spigoli e i vertici di ∂I^3 , questa diventa una "sfera differenziabile"; i punti in cui non esiste il piano tangente sono detti "singolari", ma i punti interni agli spigoli sono "diversamente" singolari dai vertici, in cui la singolarità è maggiore.

5. Teoremi di separazione

Nell'immaginario comune una superficie chiusa (una scatola chiusa) divide lo spazio in due parti disgiunte, l'interno e l'esterno. Vogliamo ora vedere come questo concetto si può formalizzare matematicamente ([DC]).

Cominciamo dal caso più semplice, quando M è una curva piana semplice e chiusa (cioè non intrecciata e tale che il punto iniziale coincida con quello finale); una tale curva è omeomorfa ad una circonferenza. Allora un teorema di C. Jordan (1838-1922) ci assicura che M divide il piano in due regioni aperte e connesse delle quali M è la frontiera comune. La regione limitata costituisce l'*interno* di M , quella illimitata l'*esterno*. In accordo con l'intuizione, M "divide" il piano in due regioni, cioè se si considerano due punti q e q' , l'uno nell'interno e l'altro nell'esterno individuato da M , allora ogni poligonale di estremi q e q' incontra necessariamente M . Se invece i due punti sono presi nella stessa regione, è possibile trovare una poligonale che li congiunga e che non abbia alcun punto in comune con M .

Inoltre se p è un arbitrario punto di M , in ogni suo intorno cadono punti dell'interno e dell'esterno di M . Se invece consideriamo una curva C a forma del numero otto (omeomorfa ad una coppia di circonferenze tangenti in un punto), C divide il piano in tre regioni, ma solo il punto doppio è di frontiera per tutte e tre le regioni, gli altri punti sono di frontiera solo di due delle tre regioni. (Si osservi che C non è una 1-varietà per la presenza di un punto doppio).

Il teorema di Jordan si generalizza allo spazio n -dimensionale (Teorema di Jordan-Brouwer) pervenendo ad un generale teorema di separazione:

TEOREMA 3.6. *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà compatta $(n - 1)$ -dimensionale avente k componenti connesse, allora il complementare di M (in \mathbb{R}^n) ha $k + 1$ componenti connesse.*

Così se M è una superficie (priva di bordo) compatta costituita da un solo pezzo ($k = 1$) e quindi omeomorfa ad una superficie di genere h , bordo di una ciambella con h buchi, allora lo spazio complementare è costituito da esattamente due regioni, che possono chiamarsi interno ed esterno anche nel senso ordinario.

Se q è un generico punto dello spazio non appartenente alla superficie connessa M ed s è una semiretta di origine q , allora o $s \cap M = \emptyset$ o

$$s \cap M = \{p_1, \dots, p_m\}.$$

Ebbene se si procede lungo s (a partire da q), ogni volta che si incontra un punto $p_i (\in M)$ si passa da una regione all'altra (dall'interno all'esterno o viceversa). Poiché dopo aver attraversato p_m ci troviamo certamente nella regione illimitata (l'esterno), per avere informazioni

sulla mutua posizione di q e M è decisivo sapere se m è pari o dispari. Inoltre si prova che se s' è un'altra semiretta uscente da q , il suo numero m' di punti in comune con M è pari se m è pari, è dispari se m è dispari; quindi se m è pari vuol dire che q era nell'esterno, se m è dispari q era nell'interno delimitato da M . (Si tratta di un criterio operativo molto semplice ([G]) per decidere se si è all'interno o all'esterno di una regione delimitata da una curva semplice e chiusa avente molte circonvoluzioni.)

6. Il concetto di bordismo

Ci occupiamo soltanto del caso elementare, cioè di varietà non singolari (per il caso generale si veda [D]).

Consideriamo varietà n -dimensionali senza bordo, compatte ed orientate, non necessariamente connesse; per esempio una 1-varietà può essere unione finita di circonferenze ciascuna disgiunta da tutte le altre.

Se M è una varietà con una data orientazione, indichiamo con $-M$ la stessa varietà con l'orientazione opposta; se M e N sono due n -varietà, indichiamo con $M + N$ l'unione disgiunta di copie di M e N , così $M - N$ sarà $M + (-N)$ e $M \cdot N$ la varietà di dimensione $2n$, prodotto cartesiano di M e N con l'orientazione indotta. (I simboli \setminus, \cup, \times sono simboli insiemistici, mentre $-, +, \cdot$ sono simboli algebrici, che tengono conto dell'orientazione della varietà.)

Se per una n -varietà M esiste una $(n + 1)$ -varietà Λ compatta orientata con bordo $\partial\Lambda$ che è una copia di M , si dice che M è *bordante* (cioè M è bordo di qualcosa). Se $M - N$ è bordante, diciamo che M e N sono *cobordanti*, in simboli $M \sim N$. Se M è bordante, diciamo anche che M è cobordante alla varietà nulla O , in simboli $M \sim O$.

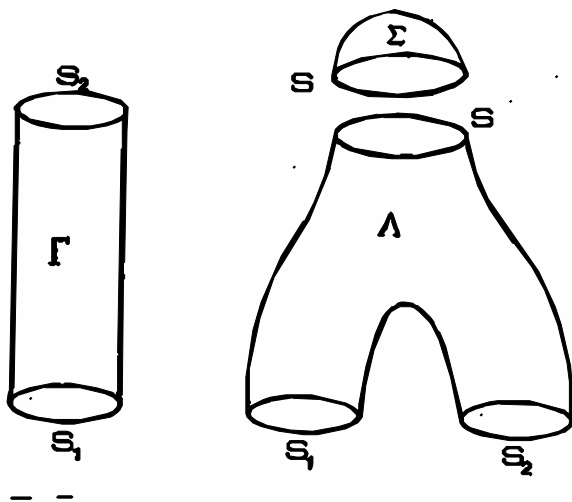
ESEMPI 3.7. *Affinché gli esempi possano essere visualizzati con l'intuizione ordinaria, considereremo varietà di dimensione 1 e 2.*

1) *Se $M = S$ è una circonferenza ed $N = \emptyset$, allora il cobordismo tra M ed N , $M \sim N$, può realizzarsi tramite una semisfera Σ tale che $\partial\Sigma = S$.*

2) *Siano S_1 e S_2 due circonferenze complanari i cui corrispondenti dischi chiusi siano disgiunti. Allora è possibile considerare una superficie omeomorfa ad un cilindro Γ avente come bordo $S_1 - S_2$ (si pensi ad un manico di una tazza). Risulta allora che $S_1 \sim S_2$ tramite Γ .*

3) Se $M = S_1 + S_2$ (dove S_1 e S_2 sono due circonferenze disgiunte per es. del piano $z = 0$), e $N = S$ (circonferenza per esempio del piano $z = 1$), allora $M \sim N$ tramite una superficie Λ a forma di "pantaloni" dove S è la circonferenza della vita mentre S_1 e S_2 sono le circonferenze dei bordi delle gambe.

4) Se sulla circonferenza S costruiamo la superficie Σ con bordo S e consideriamo la superficie Λ dell'esempio precedente, possiamo concludere che $\Lambda \cup \Sigma$ è un cilindro Γ . Inversamente un cilindro Γ si può decomporre in due superficie Σ e Λ tramite il "cobordismo" di due opportune curve.



La relazione di equivalenza " \sim " definisce *classi di cobordismo* e la suddivisione in classi è compatibile con l'addizione, che induce una struttura di gruppo nell'insieme Ω^n delle classi (delle varietà cobordanti n-dimensionali); la classe delle varietà bordanti costituisce l'elemento neutro.

La divisione in classi è compatibile anche con la moltiplicazione, che dota

$$\Omega = \Omega^0 + \Omega^1 + \Omega^2 + \dots$$

di una struttura algebrica di anello, la cosiddetta *algebra di Thom*, utilizzata per lo studio in particolare delle varietà differenziabili.

«Tutto ciò non è banale? Come è possibile che una definizione così ingenua possa essere l'origine di nuovi ed interessanti punti di vista?» - si chiedeva H. Hopf ([H]), presentando l'opera di Thom in

occasione del conferimento della Medaglia Fields, e concludeva che la scoperta del cobordismo era stata una pietra miliare nella Topologia algebrica. Infatti il metodo caratteristico della Topologia algebrica (come secoli prima era accaduto per la Geometria analitica) è quello di tradurre problemi di Topologia in problemi di Algebra con la speranza di ottenere informazioni utili sul problema originario.

Spesso in queste traduzioni si perde di vista il problema geometrico, sopraffatto da quello algebrico. Ebbene, ancora H. Hopf nota che questo non è accaduto per Thom, che padroneggia ed usa moderni metodi algebrici, vede gli aspetti algebrici dei problemi, ma le sue idee basilari, che sono di grande semplicità, conservano la natura geometrica ed intuitiva da cui sono nate. Queste idee hanno significativamente arricchito la Matematica.