Università del Salento
Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"

RENÉ THOM: PREVEDERE NON È SPIEGARE

a cura di

G. De Cecco, G. Del Re, A. Rossi

Traduzione e commento di G. Del Re
con la collaborazione di G. Bonomi

Quaderno 3/2008: ISBN 978-88-8305-063-3
Università del Salento - Coordinamento SIBA

UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"ENNIO DE GIORGI"

RENÉ THOM: PREVEDERE NON È SPIEGARE

a cura di

G. De Cecco, G. Del Re, A. Rossi

Traduzione e commento di G. Del Re
con la collaborazione di G. Bonomi

Quaderno 3/2008: ISBN 978-88-8305-063-3
Università del Salento - Coordinamento SIBA

UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"ENNIO DE GIORGI"

RENÉ THOM: PREVEDERE NON È SPIEGARE

a cura di

Giuseppe De Cecco
Dipartimento di Matematica
Università del Salento

Giuseppe Del Re
Dipartimento di Chimica
Università Federico II Napoli

Arcangelo Rossi
Dipartimento di Fisica
Università del Salento

Traduzione e commento di Giuseppe Del Re con la collaborazione di Giovanna Bonomi

Quaderno 3/2008: ISBN 978-88-8305-063-3
Università del Salento - Coordinamento SIBA

Quaderni di Matematica

Una pubblicazione a cura del

Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"
Università del Salento

I Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

(1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
(2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
(3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 3/2008
ISBN 978-88-8305-063-3
Università del Salento - Coordinamento SIBA
Il titolo originale dell'opera tradotta è
René Thom, *Prédire n'est pas expliquer*

PREFAZIONE

René Thom è stato certamente uno dei grandi matematici del secolo scorso, che ha messo in evidenza l'importanza del pensiero matematico (in particolare la visione geometrica) come strumento di lettura del mondo reale. In particolare vuole studiare modelli che descrivono la "rottura della continuità" e quindi i concetti di bordo e di frontiera, partendo dall'osservazione che noi conosciamo perché riusciamo a distinguere i confini, i contorni delle cose e dei concetti. L'associazione tra la parola "bordo" e la concezione della realtà di Aristotele è chiaramente espressa in questo passo:

Da quando mi sono immerso nello studio della metafisica aristotelica, il concetto di bordo mi sembra ancora più importante. Per Aristotele, un essere, in generale, è ciò che c'è lì, separato: esso possiede un bordo ed è separato dall'ambiente. In sintesi, il bordo della cosa è la sua forma. Anche un concetto ha un bordo, che è la sua definizione.

Queste idee, che hanno portato al concetto di "bordismo" e alla teoria relativa, per la quale Thom ha ricevuto nel 1958 la Medaglia Fields, collegano la matematica ad altri rami del sapere e sono diffusamente trattate nel libro *Prédire n'est pas expliquer* (Ed. Eshel 1991, Flammarion 1993), che già nel titolo dichiara il suo intento.

Nasce così in Giuseppe Del Re, chimico quantistico e filosofo dell'Università di Napoli, l'idea di tradurre in italiano e commentare quel testo, coinvolgendo nel lavoro giovani studiosi della stessa Università, Giovanna Bonomi e Nicola Santucci, e un matematico, Giuseppe De Cecco, e uno storico della Scienza, Arcangelo Rossi, ambedue dell'Università del Salento, in cui è molto vivo l'insegnamento di E. De Giorgi, che ha sempre sostenuto che l'essenza della matematica non sta nel calcolo e che, spesso nelle fasi iniziali di introduzione di modelli, l'aspetto qualitativo è preminente rispetto a quello quantitativo. Egli infatti dice [1]

[1]cfr. *Valore sapienziale della matematica* in "Ennio De Giorgi: hanno detto di lui...", a cura di G. De Cecco, M.L. Rosato, Quad. Dip. Mat. Un. Lecce, 5/2004,

Spesso si legge sulla stampa che la matematizzazione rischia di banalizzare l'Universo, riducendo fatti qualitativi a fatti quantitativi; invece mi pare che la ricerca matematica, cercando di esplicitare le relazioni esistenti tra gli oggetti dell'Universo, ne riconosce in primo luogo le proprietà qualitative. Penso che questi fatti debbano essere ricordati ai nostri studenti di Facoltà di tipo applicativo che potranno trarre beneficio dalla matematica solo tenendo conto di questi caratteri, non banali, di una disciplina che non è una macchina da utilizzare ciecamente, ma un interlocutore ideale con cui confrontare costantemente la propria visione dei fatti e dei problemi.

Queste idee ci sembra opportuno ribadire oggi, dopo che negli ultimi decenni, in particolare in pedagogia, si è privilegiata una visione "funzionalista", che ha svuotato la matematica della sua funzione educativa e culturale[2].

«Ciò che limita il vero, non è il falso, è l'insignificante» - dice Thom; a lui è attribuito anche il detto *«Se devo scegliere tra rigore e significato, non esito un istante a scegliere il secondo»* . Infatti Thom di fronte ai virtuosismi tecnici e all'eccessivo astrattismo volge la sua attenzione alle basi intuitive della sua disciplina, riconoscendo che l'idea aristotelica di "forma" lo ha guidato nella costruzione della sua originale "teoria delle catastrofi" (che dal punto di vista matematico è uno studio delle singolarità di applicazioni differenziabili), il cui nome, privato del suo significato etimologico e tecnico, è stato frainteso. Egli dice:

Richiamandomi alle ricerche svolte da un matematico americano, Hassler Whitney, ho potuto sviluppare la classificazione dei modi con cui si può applicare uno spazio in un altro. Mi tuffai anche nella fisica: volevo verificare alcune idee matematiche con l'ottica geometrica. La teoria delle catrastrofi nacque da tutto questo lavoro.

Quando Thom si propone di studiare una proprietà geometrica del mondo ideale della Matematica, non perde di vista la realtà concreta della sua esperienza; la sta solo leggendo in un particolare modo,

---

pag.168, e M.L. Rosato, *Aspetti qualitativi-quantitativi in Matematica e riflessioni di Ennio De Giorgi.*

[2]cfr. G. Prodi,*La matematica e il suo ruolo formativo nella scuola secondaria superiore*, Nuova Secondaria, Ed. La Scuola, 02 (1983), pag.18-20; E. Agazzi,*La matematica componente essenziale della civiltà occidentale*, Nuova Secondaria, Ed. La Scuola,, Brescia, 4 (1983), pag.32-35; E. De Giorgi, *I giovani e la Matematica*, in "Ennio De Giorgi tra scienza e fede " (a cura di D. Pallara, M. Spedicato), Ed. Panico, Galatina, 2007, pag. 179-187

che fa parte in ultima analisi del suo approccio conoscitivo. Insomma Thom ha osservato con nuovi occhi alcuni aspetti che sembrano scontati, ha messo in discussione fatti comunemente accettati come ovvi e "naturali". È questa la caratteristica del "genio", un individuo "originale", perché è rimasto vicino all'origine della conoscenza!

La traduzione che è qui presentata non vuole sostituire quella eccellente già esistente (che peraltro abbiamo scoperto solo alla fine del lavoro) di Angelo Guerraggio e Pietro Nastasi del centro Eleusi dell'Università Bocconi di Milano ma vuol essere un documento critico che si aggiunge ai precedenti studi sul pensiero di Thom. L'opera di Guerraggio e Nastasi[3] (come è detto nella "Presentazione") è cresciuta intorno al testo dell'ultima "lezione" italiana di Thom, *Aristoteles redivivus*, tenuta a Perugia nel 1996; Tito Tonietti (docente all'Università di Pisa) propose di pubblicare quella lezione e Giulio Giorello (docente all'Università di Milano) suggerì di aggiungere la traduzione in italiano di *Prédire n'est pas expliquer*.

Il testo originale è la trascrizione di una intervista a Thom da parte di Emile Noël con in appendice un "Lexique " di Alain Chenciner (professore all'Università Parigi VII); nella presente traduzione (che non contiene il "Lexique ") è stata introdotta la figura del commentatore (Del Re), che da una parte chiarisce alcuni concetti filosofici che si incontrano, dall'altra ne dà una rilettura critica.

Dopo una breve biografia di Thom si trova un articolo di A. Rossi, che illustra l'eredità permanente del pensiero di Thom nel carattere più peculiare di fondazione qualitativa e dinamica dei concetti matematici e delle loro applicazioni in termini ispirati alla metafisica aristotelica e alle più universali ed invarianti metafore e strutture topologiche, identificate da Thom nelle cosiddette "catastrofi elementari".

In Appendice sono esposti da G. De Cecco, in forma il più possibile divulgativa, due argomenti squisitamente matematici (*Il concetto di bordo e di frontiera in Matematica. Cenni sulla Teoria di Morse*), che ci auguriamo contribuiscano a rendere più chiari i concetti matematici.

Alla redazione del presente volume ha contribuito validamente la dottoressa Giovanna Bonomi, biologa, che ha curato la stesura della traduzione preliminare eseguita da Del Re ed ha illustrato la "carta

[3]A. Guerraggio, P. Nastasi (a cura di), *René Thom e la Teoria delle Catastrofi* in PRISTEM/Storia. Note di Matematica, storia e cultura, n.10-11, che contiene *Prevedere non significa spiegare* di R. Thom e E. Noël, *Aristoteles redivivus* di R. Thom e *Postfazione* di T. Tonietti

del senso". Un ringraziamento va anche a Nicola Santucci, studente di Chimica, che con entusiasmo ha partecipato al gruppo di lettura, e ai colleghi del Dipartimento di Matematica, Gennaro Amendola, Francesco Paparella, Raffaele Vitolo, per i preziosi suggerimenti nella stesura del lavoro.

Ma la pubblicazione non sarebbe stata possibile senza l'interessamento di Pierre Bourguignon (curatore delle opere di Thom), di Christine Bontemps, di Maddalena C. Del Re e soprattutto di Sofia Marchiafava, che ha tenuto i rapporti con la casa editrice "Éditions Médicines & Hygiène" (Chêne-Bourg, Svizzera), depositaria attuale dei diritti di pubblicazione.

Ringraziamo le "Éditions Médicines & Hygiène" e in particolare la responsabile della casa editrice Laurence Gudin per aver gentilmente concesso (a titolo gratuito) l'autorizzazione a questa nuova traduzione in italiano.

Il Quaderno ha un carattere divulgativo e interdisciplinare e, a nostro avviso, può essere letto utilmente da matematici, da filosofi e da tutti quelli che hanno a cuore l'unità del sapere, che rimane la funzione essenziale e irrinunciabile dell'università.

Lecce, novembre 2008

G. De Cecco,
G. Del Re,
A. Rossi

LEGENDA: Le interpolazioni nel testo e il commento da parte dei curatori sono racchiuse tra [...]; tutte le note a pie' pagina sono anch'esse dei curatori (perciò viene omessa l'indicazione usuale NdC).

Le domande di E. Noël sono precedute da "D.", le risposte di Thom da "T.", il commento da "C.".

Indice

PREVEDERE

NON È SPIEGARE

(R.Thom, E. Noël)

Traduzione e commento di G. Del Re
con la collaborazione di G. Bonomi

CAPITOLO 1

COME SI DIVENTA MATEMATICO?

D. *Lei ha cominciato con la matematica ...*

T. Sì, è successo quasi automaticamente. Dopo aver superato la prima parte della maturità, bisognava scegliere tra il corso di filosofia e il corso di matematica elementare. Quest'ultima, come sapevamo, offriva più sbocchi della prima; d'altra parte, forse, era un'illusione, ma ne eravamo convinti. Soprattutto, eravamo nel 1939, al principio della guerra. E i nostri genitori, che avevano fatto la Prima Guerra Mondiale ci dicevano: cerca di essere artigliere: si è meno esposti che non in fanteria! Per essere artigliere poi bisognava aver fatto della matematica. E questo elemento probabilmente ha pesato molto sulla nascita della mia vocazione matematica.

D. *Si può fare Matematica elementare e non diventare matematici...*

T. Certo! Il fatto è che avevo un certo gusto per la matematica, soprattutto per la geometria euclidea, che mi ha molto interessato subito, e non per l'algebra, che non mi ha mai eccitato!

D.*Perché si vede, si può disegnare?*

T. Certo, ma ugualmente perché è anche eccitante per la mente come un indovinello. Invece, in algebra, mi sembra che ogni problema sia banale, sia indecidibile praticamente. La parte di eccitazione per la mente è molto minore...

D.*Ma non ci si trovano delle soddisfazioni?*

T. Si tratta di verificare che si sono acquisiti certi automatismi, che si sanno fare dei calcoli, insomma... È ciò che noi chiamavamo "far la talpa": si trattava di dare agli allievi un certo numero di formule, di metodi di calcolo, che avrebbero permesso loro di risolvere i problemi, e in particolare quelli dei grandi concorsi. Questo non mi sembra estremamente formativo, anche se non è affatto trascurabile come disciplina di base.

D. *Esiste una procedura complessa; ma quando io me ne impadronisco, se la applico correttamente, i problemi sono risolti quasi automaticamente?*

T. In un certo senso. I problemi del concorso sono tuttavia un po' più complicati di così: ci si attende dal candidato che prenda delle iniziative, ma è vero che esiste un piccolo numero di posizioni chiave in cui si tratta, per riuscire, di non sbagliare.

D.*La geometria, dunque, è più creativa?*

T. Senz'altro. È un campo infinitamente più formativo che non quello dell'algebra. I problemi sono graduali, cosa che non esiste praticamente in algebra, dove si passa, quasi senza transizione, dall'applicazione dopo tutto stupida di un formalismo appreso, a dei problemi effettivi di algebra, come la risoluzione dell'equazione di quinto grado, sapendo, d'altronde, che non si può risolvere! E inoltre bisogna, per arrivare a questa conclusione, produrre una teoria enorme, quella di Galois. La cosa è dunque estremamente complessa.

D.*Algebra e geometria non sono i soli campi della matematica...*

T. Sono quelli che caratterizzano l'insegnamento secondario. C'è poi l'aritmetica; però essa non va mai molto lontano. Ma dà origine a problemi di una difficoltà estrema, come quelli della teoria dei numeri. Certi problemi molto semplici aspettano perciò ancora la loro soluzione! Ma io non me ne sono mai troppo interessato. Li sentivo forse troppo difficili. Non mi sento alcuna sensibilità in questo campo.

D. *Lei è partito perciò dalla geometria...*

T. Sì, essenzialmente. Scelsi Matematica elementare. Ero uno studente molto capace, e non solo in matematica, ma nella maggior parte delle discipline, comprese quelle letterarie. Sono potuto entrare, in seguito alla segnalazione di un professore di lettere, nel liceo Saint-Louis, un grande liceo di Parigi. Eravamo allora sotto l' occupazione tedesca alla fine del 1940. Feci l' Ipotalpa, poi la Talpa. [1] Entrai nella Scuola Normale Superiore nel 1943.

A quell' epoca mi interessavano, come a molti giovani, gli aspetti fondazionali della matematica, la logica, la teoria degli insiemi. Ero in qualche modo un modernista ante litteram ... I nostri maestri erano quasi tutti in contatto col gruppo Bourbaki[2], che sosteneva appunto i concetti ed i metodi moderni.

La storia di questo movimento modernista, la cui influenza fu reale molti anni più tardi, sarebbe di vero interesse per un sociologo delle scienze. Sarebbe un bell'argomento di studio: la motivazione, lo sviluppo, e, infine, la situazione un po' ambigua di oggi.

D. *Qual è la sua posizione a questo proposito?*

T. Mi sono espresso molto come anti-modernista, in gran parte perché i modernisti hanno commesso degli eccessi. Quando, con l'appoggio del governo, hanno voluto trasformare l'insegnamento della matematica nel primo livello, sono stati creati in tutte le università degli istituti pedagogici, i famosi Istituti di ricerca sull'insegnamento della matematica (IREM). E questi hanno intrapreso un proselitismo negli ambienti dei maestri elementari. Si sono potuti vedere vecchi maestri canuti, che insegnavano il calcolo elementare con dei bastoncini, costretti a venire ad aggiornarsi. Si disse loro: Signori, quel che fate è ridicolo; non conoscete niente della teoria degli insiemi, e non si può fare aritmetica senza capirla. E quei vecchi maestri furono costretti a venire a sedersi sui banchi della scuola per ascoltare giovani pretenziosi che spiegavano loro che non avevano capito niente dei numeri!

D. *Ma non le sembra utile l'introduzione, con molte precauzioni e prudenza, di questo modo di avvicinarsi alla matematica nella formazione dei giovani?*

---

[1] Sono corsi di matematica speciali che vengono impartiti a studenti particolarmente capaci alla fine del liceo in Francia e preparano ai concorsi delle Grandi Scuole. Il termine "taupin"(talpa) è gergale; infatti un tale allievo studia in modo continuo e cieco come una talpa. Il nome è usato fin dal 1840 e dal 1912 esistono anche le "taupine".

[2] Un gruppo di matematici, fondato alla fine del 1934 da A. Weil e H. Cartan per "mettere ordine" nel campo della matematica. Il nome, scelto per scherzo, è quello di un generale di origine greca Nicolas Bourbaki (1816-1897). Il gruppo sostanzialmente ha cessato di vivere nel 1998.

T. Certamente è utile, ma a partire da quindici o sedici anni. Prima di quell'età, l'utilizzazione dei concetti di algebra pura, come la commutatività, l'associatività, la teoria degli insiemi nel senso stretto, cioè quella delle potenze, non mi sembra utile. Il resto, si può continuare ad apprenderlo empiricamente, come facevamo in altri tempi. Quando ero io stesso alla scuola elementare, imparavamo le tabelline di addizione e di moltiplicazione. Era una buona cosa! Sono convinto che autorizzando l'uso del calcolatore fin dall'età di sei o sette anni si arriva a una conoscenza del numero meno intima di quella a cui accedevamo noi grazie alla pratica del calcolo mentale. In qualche modo, abbiamo tolto la calcolatrice dalle nostre teste.

D. *Perché e come lei diventò ricercatore?*

T. Anche questo, avvenne automaticamente. Una volta entrato alla Scuola normale, fui capace di risolvere pressappoco tutti i problemi; potei discutere con i nostri maestri, ed essi mi concessero fiducia. Quando il mio maestro, Henri Cartan, mi procurò il posto al CNRS [3], disse: questo studente sembra avere delle capacità di intuizione solide e si può aver fiducia in lui. E tuttavia non giustificai questa fiducia se non abbastanza tardi, perché presentai la mia tesi solo sei anni più tardi. Questo non è né particolarmente brillante, né molto folgorante! Certi temperamenti sono delle specie di miracoli matematici. Quando ero Talpa, per esempio, alcuni dei miei condiscepoli sapevano risolvere tutti i problemi rapidissimamente. Io non sono stato mai capace di miracoli del genere. Ma in fondo la mia natura forse è più filosofica che matematica...

D. *Ma questo fatto come si manifestò a quel tempo?*

T. Avevo appunto una tendenza per la filosofia. Lo confessai al vice direttore scientifico, Georges Bruhat, che ci dirigeva a quell'epoca. Quando gli dissi che mi interessava la filosofia della matematica, nella direzione di Cavaillès e di Lautman, alzò le braccia al cielo esclamando: "Soprattutto, consegua al più presto il titolo di *aggregato*!"[4] Era un consiglio saggio.

[3] Si tratta dell'equivalente francese del nostro CNR (Consiglio Nazionale delle Ricerche).
[4] In Francia il titolo di *agrégé* è più o meno equivalente a quello che da noi era *libero docente*

D. *Considerava questo interesse come un ostacolo per il suo lavoro di matematico?*

T. Aveva probabilmente l'idea che chi si interessa alla filosofia della scienza cerca in realtà di nascondere le sue debolezze tecniche. Era probabilmente una reazione di difesa tipica del professore. Se si è realmente matematici nell'anima non ci si preoccupa tanto della filosofia; se questo avviene, è una specie di deragliamento... Mi viene in mente ciò che successe al mio collega Alexandre Grothendieck: era, credo, un matematico nell'anima. E poi, negli anni settanta (forse era un seguito del 1968?), si convertì al naturalismo, ai problemi ecologici. E allora rifiutò più o meno ciò che prima l'aveva appassionato.

D.*Ma cosa si cerca diventando matematici? Cos'è che spinge un matematico a questo investimento di se stesso?*

T. È proprio di un investimento che si tratta, è piuttosto duro, pesante, vincolante. Quando ci si interessa ad un problema, si sprofonda in uno stato di alienazione molto penoso per chi ci circonda. Non si può più pensare a nient'altro. Ma è in qualche modo automatico: non vi si può sfuggire. E poi, quando si entra nel CNRS, ci si sente obbligati a produrre qualcosa! Al principio, non ci si aspetta da noi una scoperta sensazionale: si lavora su delle questioni un po' tecniche... Per me però le cose non andarono in questo modo: il mio primo lavoro pubblicato fu una scoperta abbastanza spettacolare!

1. Primi lavori

D. *Quale fu questa scoperta?*

T. È difficile parlarne altrimenti che in termini tecnici. Per riassumere, si trattava di capire ciò che si chiama la teoria di Morse in termini di decomposizione di una varietà in celle, invece di farne una teoria omologica, come aveva fatto il suo autore. Era il ritorno, a partire da una situazione formalizzata con un algoritmo algebrico, ad una situazione geometrica che l'aveva in qualche modo generata. Perché è la geometria che genera l'algebra, contrariamente a quello che si pensa comunemente.

D.*Davvero se ne può parlare solo in termini tecnici? Che cosa è che la anima quando lavora su un problema di questo tipo?*

T. Si può cercare di farlo. L'idea di base è relativamente semplice e potente. È la teoria di Morse: si tratta di trasformare l'intuizione geometrica globale in costruzione. Uno spazio è dato, nella sua globalità, da un'intuizione topologica. Ma per qualcuno che non abbia questa intuizione globale, è senza effetto! Si tratta dunque di trovare una procedura che gli permetta lo stesso di ricostruire questo spazio. L'idea era dunque di tagliare a pezzi lo spazio. La tecnica della teoria di Morse è un po' come studiare un salame tagliandolo a fettine. Se si conosce l'insieme delle fettine e il modo di ordinarle le une sulle altre nell'ordine in cui sono state tagliate, si sarà capaci di ricostituirlo. Questa è l'idea di base.

Non ci si interessa,in questo caso, della metrica, delle dimensioni delle fette; ci si interessa della loro struttura topologica. Quali sono i punti di taglio? Come cambia il tipo topologico del taglio particolare? Se si perviene a caratterizzare questi tipi topologici, se ne dà una classificazione. Specificandoli, si può allora ricostruire la forma globale dello spazio. In sé l'idea è naturale: è una specie di gioco d'incastro; lo spazio si può costruire come un gioco d'incastro. Ma questo caso è il più semplice possibile, perché tutti i pezzi sono ordinati e resta da attaccarli l'uno all'altro, da combinarli gli uni con gli altri secondo lo schema dato dalla teoria.

D. *È dunque un lavoro di analisi: si decompone in piccoli pezzi che poi si numerano...*

T. È la vecchia formula di Cartesio: si tratta di ridurre tutto a situazioni abbastanza semplici perché poi si possa poter descrivere. E questo equivale dunque a ricostruire ciò che è complesso a partire da ciò che è semplice. È quel che si fa oggi in informatica dove si decompone una superficie in pixels. Ogni forma diviene un blocco di pixels. È d'altronde molto più barbaro che non la teoria di Morse, che è più concettuale e, in fin dei conti, molto più semplice!

D. *Si prende in considerazione dunque uno spazio in tre dimensioni.*

T. Non necessariamente: la teoria di Morse si può fare in tutte le dimensioni. Il modernismo in matematica, ha, d'altronde, fra le altre cose, instaurato l'uso di fare le cose in una dimensione qualunque, e non soltanto in dimensioni 1, 2 o 3 come si faceva in altri tempi.

D. *Questo concetto di dimensione, al di là delle tre che ci sono familiari, è difficile da cogliere. La dimensione 4 è la stessa per tutti?*

T. Per i matematici, non c'è nessuna ambiguità sul concetto di dimensione. D'altra parte, il modo in cui si domina l'intuizione negli spazi a 4, 5, 6 o n dimensioni risponde sempre alla stessa tecnica. Non si vede mai in uno spazio che non sia a due o tre dimensioni, non di più. Ma si sa che si può sezionare uno spazio di grande dimensione in spazi di dimensione più piccola; certi parametri allora si possono manipolare. Si arriva così in qualche modo a spezzare lo spazio di grandi dimensioni in spazi più piccoli. Si può allora studiare quel che avviene in questi spazi di piccole dimensioni, 2 o 3.

D. *Ma come rappresentarseli?*

T. Esiste un certo numero di concetti che permette di raggruppare le cose. Quello di spazio fibrato (che esiste da circa cinquant'anni ormai) ne fa parte: si può immaginare una struttura fibrata; si sa ciò che avviene in ciascuna delle fibre e si può immaginare ciò che avviene nello spazio completo. È manipolando questo tipo di oggetti che si arriva a formarsi una sorta di intuizione dello spazio ad n dimensioni. Se si immaginano degli spaghetti in una scatola, ma si suppone che ciascuno di essi abbia uno spessore tale che li si possa assimilare a delle linee, si può allora mettere un'infinità di spaghetti in una scatola cilindrica. Questa è una struttura fibrata.

La scatola (piena) ha dimensione 3. Gli spaghetti, che non hanno spessore, sono dunque delle linee, e di dimensione 1. La base della fibra è un disco di dimensione 2. Dimensione di lunghezza + dimensione del disco = dimensione dello spazio totale. Si può giocare su questo per farsi un'intuizione dello spazio. Non si tratta di altro che di $1 + 2 = 3$ ...Ma si può anche fare 7 - 4 = 3, e allora è molto più difficile. Faccia questo esercizio di intuizione: cominci con l'immaginarsi una sfera di dimensione 3. Per questo lei deve immaginare lo spazio con le solite tre dimensioni ma deve anche immaginare che quando si segue un raggio luminoso in una direzione, verso l'infinito, si trova lo stesso punto luminoso nella direzione opposta. Si identificano allora tutte le coppie di punti ottenute in questo modo.

Poi si identificano tutti in un solo punto, che si chiama il punto all'infinito. Lo spazio $\mathbb{R}^3$ si chiude allora con un punto all'infinito: questo diviene la sfera $\mathbb{S}^3$, la sfera a tre dimensioni. Essa è il bordo del disco [o sfera piena] a quattro dimensioni. Ma questo è già più difficile vederlo...

D. *Qual è la quarta dimensione di questo disco?*

T. È abbastanza facile immaginare che si tratta di un prodotto di spazi. A meno che, come M. Changeux, non si dica che si tratta solo di una costrutto mentale, che non ha alcuna realtà nel mondo esterno!

Proviamo. Ho qui un quadernetto, e lì una scatola. Se prendo un punto situato sulla faccia del mio quadernetto e un altro situato sulla superficie di quella scatola, posso considerare questa coppia di punti come un punto in uno spazio che è il prodotto dei due spazi. Questo punto apparterrà ad uno spazio a quattro dimensioni.

D. *Uno spazio in cui questi due punti separati divengono un unico punto e uno solo?*

T. Esattamente. Una coppia di punti presi nei due piani definisce un punto nello spazio a quattro dimensioni. Questo esige naturalmente uno sforzo intellettuale. I matematici topologi sono condotti perciò a esercitare un pensiero prelogico, ma se è possibile in modo molto controllato, un pensiero prelogico applicato logicamente, insomma!

2. Produrre... La teoria delle catastrofi: genesi

D. *Lei non mi ancora parlato della sua "motivazione": come si arriva a questa concentrazione, a questo investimento del proprio tempo in matematica?*

T. La motivazione può essere puramente sociale. Bisogna pur sempre giustificare il fatto che lo Stato ci paga apparentemente per non fare niente! Passare per il CNRS aveva d'altronde una funzione completamente diversa da quella che ha oggi: vi si restava il tempo necessario per terminare la tesi. Era in un certo senso una borsa di dottorato. E poi si ritornava all'Università. Da qualche anno, i matematici avevano decretato, sull'esempio delle altre corporazioni scientifiche, che doveva esserci una certa percentuale di persone capaci di fare carriera in matematica per tutta la vita. Ma in realtà è molto difficile. Da parte mia, benché nominato in un istituto in cui non dovevo fare altro che questo, sono convinto di non essere stato molto produttivo.

D. *Cosa intende per matematica produttiva? Si tratta di matematica applicata o applicabile?*

T. Semplicemente di matematica che dà luogo ad una pubblicazione. Pubblicai per la prima volta nel 1949. Penso di essere stato produttivo dal 1951-1952 al 1958-1959. Non ho scritto molti articoli, ma alcuni di questi sono ancora citati oggi. È a quell'epoca che misi in piedi una disciplina (gli inglesi direbbero un gadget [5]): il cobordismo. Era una teoria abbastanza graziosa e piuttosto profonda. È ciò che mi valse la medaglia Fields nel 1958. Credo di aver cessato di essere produttivo negli anni che hanno seguito quel premio.

A quel tempo, costruii una sorta di semi-filosofia. È così che definisco la teoria delle catastrofi. Alcuni hanno detto che si tratta di cattiva scienza sommata ad una cattiva filosofia, forse hanno ragione. Mi sembra tuttavia che si tratti di qualcosa di abbastanza originale, e in fin dei conti di abbastanza valido.

D. *E tuttavia, tra i suoi lavori, è quello che le è valso la risonanza pubblica più grande. Non è perché si chiamava "teoria delle catastrofi", appunto?*

T. Mi si è rimproverato molto di aver imitato i mass-media, con questa terminologia. Ma non era affatto mia intenzione!

In verità, esiste una unità reale nella mia riflessione. Io me ne rendo conto solo oggi, dopo averci molto riflettuto sul piano filosofico. E questa unità, la trovo precisamente nel concetto di bordo. Quella di cobordismo gli era legata.

Sappiamo tutti che cosa è il bordo di qualcosa, il bordo di questa scrivania, il bordo del muro, la frontiera insomma [6].

D. *Lei fa differenza fra bordo, frontiera e limite?*

T. Quello di limite è un concetto piuttosto tecnico; non è veramente un concetto topologico. Esiste in analisi, tuttavia, la nozione di limite superiore di una successione. Il concetto di bordo se ne distingue nettamente. Parlare di limite costringe a considerare l'infinito, in un certo senso, come successione infinita di numeri: si considera il loro limite superiore. Il bordo è qualcosa di più concreto, di più immediato, più vicino alla fisica, insomma.

[5] La parola gadget in inglese significa più o meno "aggeggio". L'applicazione di questo termine a una teoria suona un po' curioso, ma il lettore capirà senz'altro che cosa vuol dire Thom.

[6] In Appendice si chiarirà, dal punto di vista matematico, la differenza tra bordo e frontiera.

Il concetto di bordo mi sembra oggi ancora più importante dato che mi sono immerso nella metafisica aristotelica. Per Aristotele, un essere, in generale, è ciò che c'è lì, separato. Possiede un bordo, è separato dallo spazio ambiente. Insomma, il bordo della cosa è la sua forma. Il concetto, anche lui, ha un bordo: è la definizione di questo concetto. Quest'idea che il bordo definisce la cosa, d'altronde, non è del tutto esatta per un topologo. È vera solo nello spazio ordinario.

Comunque sia, partendo da questo concetto di bordo, sviluppai alcune teorie matematiche che mi servirono; poi mi sono dedicato alle applicazioni, vale a dire alle possibilità di inviare [7] uno spazio in un altro, in modo continuo. Da qui arrivai a studiare le rughe e le pieghe, oggetti suscettibili di una formalizzazione matematica. Per questo ripresi i lavori di un matematico americano, morto recentemente, Hassler Whitney [1907-1989]. Partendo di là, riuscii a sviluppare la classificazione dei modi in cui si può inviare uno spazio in un altro. Ciò che scoprii in questa direzione fu abbastanza interessante. Pervenni ad alcune classificazioni. Mi immersi anche nella fisica, quando ero professore a Strasburgo: volevo verificare alcune idee matematiche con l'ottica geometrica: ciò che trovai non mancava di interesse.

La teoria delle catastrofi nacque da quel lavoro. C'è proprio un'unità in quell'approccio; non deve nulla alla volontà di captare l'attenzione dei mass media.

D. *Studiando i bordi, le pieghe e le rughe, lei ha stabilito che ogni spazio presenta un certo numero di caratteristiche che conducono a rotture, e che si possono costruire modelli che consentono di spiegarle...*

T. Gli spazi che si considerano in generale sono spazi omogenei, localmente omogenei. Questi spazi sono ciò che chiamiamo varietà. Lo spazio euclideo è una varietà. Ma le singolarità appaiono quando in qualche modo si sottopone lo spazio a un vincolo. La manica della mia giacca, se la comprimo, fa comparire delle pieghe. È una situazione generale. Questo non dipende dalla meccanica dei materiali. Enuncio in realtà un teorema astratto: quando uno spazio viene sottoposto a un vincolo, vale a dire quando lo si proietta su qualcosa di più piccolo della sua dimensione, esso accetta il vincolo, salvo in un certo numero di punti in cui concentra, per così dire, tutta la sua individualità primaria. Ed è nella presenza di queste singolarità che

[7] Cioè "mettere in corrispondenza" punto per punto

si ha la resistenza. Il concetto di singolarità è il modo di assumere in un punto tutta una struttura globale. È un argomento delicato, che meriterebbe sviluppi più ampi.

D. *Si tratta di una riflessione puramente concettuale, distaccata da ogni materialità, vale a dire qualunque sia la natura del materiale?*

T. In effetti non c'è nessuna materialità. Tuttavia, per certi materiali, questa concettualizzazione è importante.

Il grande merito (e il grande scandalo!) della teoria delle catastrofi fu di dire che si poteva costruire una teoria degli accidenti, delle forme, del mondo esterno, indipendentemente dal substrato, dalla sua natura materiale. La collettività scientifica non lo ammise.

Arrivai così a un elenco delle catastrofi elementari, che sono sette: la piega, la ruga, la coda di rondine, la farfalla, e i tre tipi di ombelichi. Questa idea che ci fossero sette tipi di accidenti ha affascinato molti. Nella vita corrente si vedono in realtà solo i più semplici. Gli altri si possono scoprire solo a prezzo di un'analisi sottile.

[C. Il termine filosofico "accidente" lascia un po' perplesso un lettore affrettato, ma si dovrebbe capire dal contesto che Thom lo usa, come la filosofia scolastica, per indicare quelle differenze che si possono riscontrare fra diversi esemplari di uno stesso ente, senza che venga cambiata la natura di questo.]

T. Questa teoria, ripresa da altri, d'altronde, ha dato, sul piano matematico, delle cose belle e profonde! Quanto a me, mi ero dal principio preoccupato delle applicazioni prima di affrontare l'aspetto matematico. I matematici sono arrivati; hanno fatto il rapporto con certe tecniche utilizzate in fisica, in particolare con i metodi utilizzati per correlare la meccanica quantistica con la meccanica classica: il metodo Brillouin-Kramer-Wenzel (BKW)[8]. Questo metodo utilizza precisamente argomenti di singolarità, il metodo detto del valico di montagna. I valichi sono punti singolari dell'altezza. È così che si recuperano in qualche modo gli oggetti classici a partire dagli oggetti quantistici. Gli oggetti classici sono più o meno associati a singolarità del processo quantistico. Ciò che dico d'altronde è corretto solo in senso lato.

[8] È un metodo (introdotto nel 1925) che fornisce soluzioni asintotiche di equazioni differenziali o alle derivate parziali.

D. *Lei ha alluso al suo interesse persistente per la filosofia; ha detto che ha trovato in Aristotele il filo conduttore delle sue ricerche, ma a posteriori, insomma... Qual è l'ambiente filosofico che la condusse alla teoria delle catastrofi?*

T. A partire dal 1950, abbandonai appunto queste preoccupazioni filosofiche per dedicarmi alla matematica. Questo durò fino al 1956-1957. Conobbi, in seguito, una sorta di fase di depressione: alcuni progressi in matematica furono realizzati da altri, e mi condussero a teorie così complicate sul piano algebrico che non riuscivo a seguirli. Dovetti "lasciare i pedali"...

Ma bisogna pur sempre far qualcosa! Mi misi dunque a cercare possibili applicazioni delle teorie matematiche che conoscevo. Fu così che mi orientai verso la teoria delle catastrofi.

Fu dunque per reazione alla sensazione di essere superato dal corso della matematica, come si stava sviluppando in parte e in seguito grazie proprio alle mie stesse idee, che mi orientai così. Non riuscendo più a stare al passo, tornai, in un certo senso, a situazioni più concrete. Insomma, ed è un processo classico, la matematica andò verso l'astrazione, verso l'algebra. Ora, a me l'algebra non piace, e non riuscii ad adeguarmi. Mi dedicai dunque alle applicazioni verso il mondo reale.

La teoria delle catastrofi ebbe un successo considerevole nei media nel 1974-1975; una critica piuttosto virulenta si abbatté in seguito su questa teoria. Essa proveniva essenzialmente da oltre-Atlantico, dalla scienza affermata, che in fondo non ha accettato questo genere di teoria.

Il successo nei mezzi di comunicazione si è sgonfiato come una bolla. Alcuni epigoni si erano precipitati su una teoria che sembrava promettere una bella carriera; quando parve che non avrebbe condotto a nulla, passarono ad altro! Infine, negli anni 1975-1980, la teoria conobbe un periodo di stasi. Fu allora che cercai di rispondere alle critiche epistemologiche che mi erano state opposte. Dovetti prendere questa strada, immergermi nella filosofia della scienza, salvo passare, in seguito, a una filosofia più generale.

Così, partendo da una polemica sulla validità della teoria delle catastrofi, finii per interessarmi della posizione della scienza in generale, e di ciò che ci si può aspettare da essa dal punto di vista della conoscenza. Questo comprendeva una riflessione sugli strumenti che la scienza utilizza per acquisire la conoscenza.

D. *Torniamo, se non le dispiace, al contesto che la orientò verso la teoria delle catastrofi.*

T. Ci arrivai in modo abbastanza naturale, come ho detto: fu un'evoluzione che mi condusse, a partire da un problema di matematica pura, quello noto come "singolarità generiche di un'applicazione", a verificare se questo teorema aveva applicazioni pratiche. Ero allora all'Università di Strasburgo e potei fare qualche esperimento d'Ottica. Un collega fisico mi prestò alcuni strumenti: uno specchio sferico, un prisma, un diottro. Potei realizzare alcune caustiche, e le feci variare cambiando un poco la posizione dei parametri; osservai come esse si deformavano. Era proprio questo che mi interessava.

Partii dunque dalla deformazione delle caustiche. Non è forse inutile dire qualche parola su che cos'è una caustica.

Per farcene un'idea, si può prendere una ciotola di porcellana, il cui interno sia molto riflettente. Si riempie questa ciotola di caffè, preferibilmente molto nero. Si pone la ciotola così riempita sotto una lampada, la meno divergente possibile, che dispensi una sorgente luminosa puntiforme: i raggi che vengono dalla lampada, riflessi sulle pareti della ciotola, costituiscono una curva luminosa che presenta ciò che si chiama un ripiegamento all'indietro, nel piano di simmetria della figura. Questo ripiegamento all'indietro possiede la proprietà meravigliosa di essere stabile. Se si cambia leggermente l'orientamento dei raggi luminosi, si vede che il ripiegamento sussiste ancora. È l'effetto fisico di un teorema di matematica. D'altra parte, questo non ha nulla di sorprendente: l'ottica geometrica, non è fisica, è geometria. La meccanica, invece, appartiene pienamente alla fisica. Questa affermazione mi è rimasta in mente da quando, molto tempo fa, la sentii pronunciare da un professore di matematica superiore del liceo Saint-Louis. Ed è vero!

Partii di là per la teoria delle catastrofi: constatai che c'erano dei tipi, delle variazioni di caustiche che non prevedevo, che bisognava che io mi spieghassi la comparsa di queste singolarità. Mi ci vollero due o tre anni per capire da dove provenivano.

È un fenomeno banale, ma è di là che partii.

D. *Quale fu poi il cammino del suo pensiero?*

T. Lasciai Strasburgo e venni all'IHES, rispondendo all'appello del fondatore. Ero più libero, ero meno preoccupato dall'insegnamento e dai compiti amministrativi. La mia produttività puramente matematica mi sembrava in declino e cominciai ad interessarmi di più della periferia, vale a dire delle applicazioni possibili. Oltre all'ottica, mi domandai se non ci fossero applicazioni possibili alla biologia. Finii per capire da dove venivano quelle singolarità eccezionali: esse sono legate al fatto che le traiettorie dei raggi luminosi sono speciali, perché soddisfano il principio di Fermat, un principio variazionale; esse hanno proprietà speciali che fanno sì che le caustiche "aggancino" le singolarità più facilmente di quanto non dovrebbero. È l'estrapolazione di questa idea che mi portò alla teoria delle catastrofi, alla parte matematica che conduce ad essa.

D. *Queste singolarità sono forme particolari apparentemente inaspettate?*

T. C'è un problema di semantica: per me, qualunque discontinuità nei fenomeni è una catastrofe. Il bordo di questa tavola, là dove il legno diventa aria: è una superficie di separazione, è un luogo di catastrofe. La catastrofe è dunque permanente, noi non ne abbiamo coscienza.

Ma la parola presenta una difficoltà: è una parola che fa pensare a una trasformazione brutale, temporale, con una durata ben determinata (benché io abbia trovato recentemente l'espressione "catastrofe che vegeta", applicata alla situazione dell'URSS prima della perestrojka! L'espressione sembra essere stata ripresa da Céline, d'altronde). Mi hanno molto rimproverato questa scelta.

D. *Ci sono anche eventi catastrofici nel campo delle relazioni umane, delle evoluzioni sociali...*

T. Per me, c'è una catastrofe ogni volta che c'è discontinuità fenomenologica. Forse è eccessivo usare una parola così drammatica per una cosa così generale. Ma non ho ricercato questo effetto. La parola mi è venuta naturalmente: i fisici hanno introdotto l'espressione catastrofe infrarossa e catastrofe ultravioletta per i fenomeni di divergenza delle serie nei loro calcoli. L'uso era già in vigore. Ma io ho voluto indicare con questa parola che si trattava di qualcosa di dinamico, che esisteva una dinamica soggiacente.

D. *Si potrebbe trovare un sinonimo che soddisfi ciò che lei vuol dire?*

T. Ho usato l'espressione "discontinuità fenomenologica". È un po' pesante, e, per me, la parola catastrofe coincide perfettamente. Il bordo di una nuvola è una catastrofe. Evidentemente, quando questa nuvola si fonde in modo continuo con una sorta di nebbia, è ben difficile parlarne in questi termini. Se non c'è una frontiera netta, se non c'è un bordo della nuvola, allora non posso più parlare di catastrofe.

3. Destino della teoria delle catastrofi

D. *Quali, secondo lei, le applicazioni o le orientazioni di tipo applicativo si impongono?*

T. Se ci si mette dal punto di vista della terminologia solita, nel senso di applicazione della scienza (come, per esempio, quando se ne parla nelle istanze governative), il bilancio è piuttosto modesto. Non c'è campo specifico in cui si possa dire che la teoria delle catastrofi abbia permesso la scoperta di una certa tecnica, di un certo strumento, di un certo mezzo per risolvere un certo problema concreto. La teoria delle catastrofi è piuttosto una metodologia che permette di capire, in molti casi, e di fare modelli in un certo numero di casi, di situazioni che, altrimenti, sarebbero molto difficili da afferrare, di sistemi di cui non si potrebbe ottenere una descrizione, perché troppo complicati.

D. *È dunque un metodo che permette di capire, che ha una vocazione esplicativa?*

T. È effettivamente il suo interesse essenziale. Offre dei mezzi di intellegibilità in situazioni che sono in generale troppo complesse per essere analizzate secondo metodi riduzionisti.

D. *Non è poco! Si tratta dell'accesso alla comprensione!*

T. È effettivamente un programma, un progetto del tutto ragionevole. Ma presenta l'inconveniente di essere una teoria qualitativa, topologica, e di non fornire limiti quantitativi alla deformazione delle forme che si considerano. Non permette dunque realmente l'azione. Per agire - si agisce sempre hic et nunc- occorre disporre di una localizzazione spazio-temporale. Altrimenti l'azione cade nel vuoto.

D. *Non autorizza dunque la previsione?*

T. Dà una sorta di descrizione locale di un sistema, in uno spazio di parametri di controllo. Si possono far variare i controlli a partire da un certo sistema di valori e descrivere, mediante opportune superfici scelte in questo spazio, dove hanno luogo le catastrofi, se ce ne sono, e dove hanno luogo le variazioni continue.

D. *Come far comprendere meglio l'interesse di tutto questo?*

T. Torniamo alla genesi di questa teoria. Io la proposi nel mio libro *Stabilità strutturale e morfogenesi* scritto negli anni 1967-1968 e pubblicato nel 1972. Nel frattempo, questo libro circolò sotterraneamente. Trovò un lettore attento nella persona di Christopher Zeeman. Questi riprese l' idea in un quadro molto più generale, quello della teoria generale dei sistemi[9]: è l'idea che ogni sistema può essere rappresentato come una scatola nera con terminali di ingresso e di uscita. Si studia la corrispondenza fra i segnali di ingresso e i segnali di uscita e, mediante l'analisi di questa corrispondenza, si tenta di comprendere i meccanismi all'opera nella scatola. D'altronde, questo indica chiaramente che la teoria delle catastrofi, sotto la sua forma più pura in un certo senso, è proprio un'ermeneutica. Essa non ha nulla di demiurgico come la fisica. In fisica, si dice: ci sono delle leggi, le scopriremo. La teoria delle catastrofi dice semplicemente: c'è continuità, continuità delle funzioni, delle loro derivate. Per conseguenza si può trattare l'oggetto come un oggetto analitico e fare dei diagrammi, delle figure del tipo delle singolarità analitiche. Questa è la filosofia soggiacente.

Per tornare alle applicazioni, Christopher Zeeman ne propone un gran numero: l'aggressività del cane, il crollo della borsa, le rivolte nelle prigioni, l'analisi del comportamento dei pirati dell'aria, le malattie maniaco-depressive, in psicologia, in neurofisiologia, i battiti del cuore, la propagazione dell'impulso nervoso.Tutto questo si può descrivere con modelli catastrofistici. Per alcuni, si arriva a delle equazioni esplicite: è il caso della propagazione dell'impulso nervoso nella membrana dell'assone. Il modello catastrofista dunque non serve più a niente, perché si dispone di equazioni.

In fisica questa teoria suscita poco interesse: il proprio del fenomeno fisico, è di essere descritto, grazie alle leggi della fisica, con dei modelli quantitativi; vi sono dunque delle equazioni date dalle leggi. Esse non fanno appello all'intuizione, salvo eccezioni rarissime.

[9]Una panoramica eccellente si trova in E. Agazzi (a cura di), *I sistemi tra scienza e filosofia* (Torino, SEI 1978)

Per contro, nei campi in cui non ci sono equazioni, ma in cui si osserva un comportamento globale abbastanza regolare, i modelli catastrofisti non mancano di interesse. I modelli proposti da Zeeman conferiscono alle situazioni considerate una certa intellegibilità. Essi non permettono l'azione, né la previsione, ma ciononostante non è una cosa da nulla. Se uno è un pragmatista puro e duro, dirà: "Non serve certo a gran cosa, se poi non si può agire! A che mi serve capire se non posso agire? ". Ma la natura è così fatta in modo tale che capire e agire non sono sinonimi. Si arriva spesso a capire le situazioni senza poter agire: è il caso di quel signore che, vittima di una inondazione, sale sul tetto quando il livello dell'acqua sale! In altri casi, si agisce efficacemente senza capire bene il perché. L'aspirina fa parte di questi fenomeni! È d'altronde una storia molto interessante (di cui purtroppo non posso garantire l'autenticità). La sua scoperta sarebbe stata dovuta al meccanismo psicologico seguente: molti soffrivano di dolori reumatici, e avevano constatato che questi dolori aumentavano col tempo umido. A chi è venuta l'idea? Sono forse i grandi pensatori magici del XV e XVI secolo, come Paracelso, che rifletterono sul problema: se si volevano guarire i dolori di questo tipo, bisognava guardare le piante che sopportano molto bene l'acqua. I salici sono tra quelli che gradiscono più di tutti l'umidità. Si fecero dunque dei decotti di foglie di salice: essi furono efficaci contro i dolori. Fu così che sarebbe nato l'acido salicilico. D'altronde, "salex " vuol dire salice in latino. Non so quanto vale questa teoria, ma è un esempio chiaro, che mostra come delle idee, a priori aberranti, possono ciononostante condurre a risultati concreti. L'aspirina, dopotutto, è una delle medicine migliori di cui si disponga e la cui diffusione è quasi universale.

D. *Ma non è su questo punto che si sono manifestate delle critiche?*

T. A dire il vero, non ho mai saputo di una critica circostanziata dei miei lavori. Ci furono affermazioni brutali del tipo: «Thom pretende che la conferma sperimentale delle sue idee non abbia importanza; si può dunque pensare con perfetta logica che le sue idee siano delle fantasie ». È un argomento di cui non bisogna sottovalutare la forza. Ma riposa su una ambiguità. La gente dice volentieri che si deve verificare tutto con l'esperienza. Sarebbe più giusto fare la distinzione fra esperienza e sperimentazione. Se si estende la sperimentazione all'esperienza, ci sono poche cose che ho detto di cui non si possa trovare una rappresentazione o una conferma nell'esperienza.

Ma oggi non ci si accontenta soltanto dell'esperienza: si vuole sperimentazione. Ora, io penso che la sperimentazione diventa necessaria e utile se non alla condizione di disporre di uno schema teorico soggiacente che sia abbastanza preciso, che permetta effettivamente di fare previsioni. Ora, lo schema delle catastrofi non permette in linea di principio di fare previsioni che siano suscettibili di un uso pragmatico. Per utilizzare una previsione in modo pragmatico, è necessario che essa sia quantitativa.

D. *Non è forse la differenza che c'è tra meditazione e azione?*

T. Forse, ma una meditazione che non sboccasse in una sorta di azione, non finirebbe che su se stessa, non sarebbe molto interessante.

D. *Cosa si può dire di questi due aspetti: spiegazione e previsione? La previsione rinvia alla formula che funziona bene e che, di conseguenza, quantifica correttamente, mentre la spiegazione può fornire un quadro di comprensione, che non quantifica né predice?*

T. Proprio così. È intorno a questo che gira il problema dei modelli catastrofisti. Talvolta, essi si possono rendere quantitativi; e allora hanno, in una certa misura, qualcosa a che fare con la modellizzazione. In altri casi, essi sono puramente qualitativi, e non è ragionevole volerli rendere quantitativi. Il primo modello che ci ha proposto Zeeman, quello dell'aggressività del cane, è fondamentalmente qualitativo. Non si può dare una misura quantitativa dell'aggressività di un cane.

D. *Si definiscono solamente le condizioni in cui essa si manifesta?*

T. Zeeman sottolinea una certa gradazione nel comportamento, non priva di interesse. Ma non è per nulla un modello quantitativo.

4. Le polemiche suscitate dalla teoria delle catastrofi...

D. *Questi lavori hanno suscitato reazioni diverse, e qualche volta delle critiche severe. Lei ha, ancora oggi, voglia di rispondere ai suoi detrattori?*

T. Bisogna distinguere due periodi. Quello che riguarda direttamente la teoria delle catastrofi merita di essere descritto un po' più in dettaglio. Io concepii la teoria nella sua forma matematica. In seguito essa si impiantò in Inghilterra dove Christopher Zeeman propose delle possibilità di applicazione della teoria molto più ampie di quelle a cui avevo pensato io. Nella mia visione iniziale, i soli parametri di cui ci si debba preoccupare - quelli in cui ha luogo la morfologia - sono quelli dello spazio e, a rigore, dello spazio-tempo. Zeeman ha portato un'idea più audace, dicendo che si potevano considerare tutti gli spazi di controllo utilizzati nella teoria dei sistemi.

Io vedevo la teoria delle catastrofi come essenzialmente agganciata alle discontinuità qualitative del mondo, alle forme, dunque. Ciò che si chiama usualmente una forma, è sempre, in ultima analisi, una discontinuità qualitativa su un certo fondo continuo. Volevo proporre una teoria su questo genere di situazioni. Mi sono ovviamente posto nell'ottica delle forme dello spazio ordinario. Christopher Zeeman vi apportò l'idea seguente: nella teoria dei sistemi, si cerca essenzialmente di rendere conto di ciò che avviene in una scatola nera, in un sistema perfettamente isolato dal mondo esterno, che può agire su questo mondo esterno solo attraverso delle vie perfettamente controllate. Si scambiano materia e energia con il sistema interno alla scatola nera, e ne escono materia e energia. A tempi discreti - $t = 0, 1, 2, 3$, ecc. -, si iniettano materia e energia nella scatola nera, secondo un certo protocollo, e poi si osserva quello che ne esce nello stesso istante; si può studiare allora il comportamento del sistema dal punto di vista dei segnali in ingresso e in uscita. La teoria riduzionista dirà: rompiamo le pareti di questa scatola per vedere ciò che c'è dentro. Quando si saprà esattamente che cosa c'è, allora potremo spiegare come funziona. I teorici dei sistemi rispondono: no! Non si può rompere la scatola, soprattutto se si tratta di un essere vivente! È d'altronde frequente che non si possa rompere la scatola nera. Quale di questi due metodi è il più fecondo? Mi guarderò bene dal distinguere con un taglio netto. Nella scienza contemporanea, tutti vi diranno che è il metodo riduzionista. È vero che il metodo della teoria generale dei sistemi richiede del cervello, una certa capacità di interpretazione. Non è dato a tutti. Invece realizzare una analisi chimica molto fine, esplorare qualche cosa con degli strumenti ben calibrati, questo lo può fare chiunque conosca la tecnica. Tanto più che nella filosofia sperimentale contemporanea, purché si abbiano dei criteri rigorosi di controllo, si ottiene il risultato. Nessuno vi darà fastidio su questo. Un'interpretazione, la si può sempre contestare. La tendenza attuale è dunque a ridurre il sistema ai suoi elementi e a vedere se si può modellizzare la dinamica del sistema a partire da questa decomposizione in elementi, supposti semplici. Ma questo metodo comporta un certo numero di ostacoli molto importanti. Il primo, è che un sistema è talora composto da un numero considerevole di elementi. Andando fino agli atomi, si raggiungono rapidamente dei numeri considerevoli, come 10^{22} o 10^{23} . È fuori questione modellizzarli uno per uno. L' approccio dinamico classico fallisce. La dinamica quantistica fallisce anch'essa : benché statistica, essa tratta dei fenomeni a una scala che non può in realtà abbandonare, quella dei fenomeni molto piccoli. L'approccio globalista, invece, procede diversamente : invio un certo flusso, un input nel mio sistema all'istante $t = 0$. Guardo l'output nel medesimo istante, e ripeto l'operazione. Se suppongo che entrate e uscite siano parametrizzate come vettori in uno spazio, per esempio con un numero, con X all'entrata, e Y all'uscita, segnando il punto (X, Y), ottengo un punto nel piano. Ripetendo l'operazione, ho alla fine una nuvola di punti che posso lasciar continuare indefinitamente. La filosofia generale di questo metodo consiste nel dire: tenterò di determinare l'andamento di questa nube di punti, e, passando all'interpretazione, troverò il meccanismo determinista più semplice che possa generare questa nuvola di punti.

L' ampliamento della mia teoria è consistito nel fare un' ipotesi generale sulla dinamica interna alla scatola. Essa è la seguente: ammettiamo che il sistema evolva nel corso del tempo in modo tale che, somministrando sempre lo stesso segnale di ingresso, si ottenga sempre lo stesso segnale di uscita. Si ha dunque una nube di punti ben definita nella scatola: si potrà allora interpretare questa nube di punti come un attrattore, cioè una specie di stato limite di traiettoria del sistema, o un insieme di stati limiti delle traiettorie del sistema. Se si ha per esempio un equilibrio chimico, e si studia la variazione delle concentrazioni delle sostanze che reagiscono, e se l'equilibrio è puntuale, si avrà un punto unico come attrattore del sistema. L'idea era che, per molti sistemi naturali, gli attrattori sono, in fondo, degli oggetti relativamente semplici. Il meccanismo può essere molto complicato, ma l'attrattore doveva essere relativamente semplice. E questo è il caso in quelli che si chiamano i sistemi di gradienti. Una caduta di corpi in cui non ci fosse energia cinetica, caduta di corpi di massa nulla, con una certa dissipazione di energia, questo dà una dinamica di gradienti. I corpi cadono, verso il punto più basso che possono raggiungere. Il minimo di potenziale ci dà, in questo caso, l'attrattore. Secondo questa idea, occorreva in primo luogo considerare i sistemi che sono retti da dinamiche di gradienti e studiare effettivamente ciò che avviene in questi sistemi. Lo spazio delle configurazioni si decompone in bacini di attrazione, ciascuno dei quali va verso un minimo. Lo si può immaginare pensando a una carta geografica : i fiumi scorrono in bacini, che sono in generale dei laghi o dei mari. Teoricamente, in una situazione matematica, si tratta di punti. Tutto il problema, quando si vuol fare del determinismo in un sistema di questo genere, consiste nel sapere in che bacino ci si trova. In geografia, se si è sull' altopiano di Langres, si avrà difficoltà a sapere se si va verso la Saône, verso la Meuse o verso la Marne. Versando dell'acqua per terra, per seguire la traiettoria, si dovrà prendere una carta molto precisa per sapere in quale bacino ci si trova . Il problema della previsione, nel caso della dinamica di gradienti, è un problema semplice: basta insomma determinare in quale bacino di attrattori ci si trova. Gli attrattori sono in generale dei punti. Eccezionalmente, questi possono essere delle curve o delle superfici; è una situazione instabile che, in generale, scompare rapidamente. Se si fanno delle ipotesi di stabilità del sistema, dal punto di vista della sua configurazione, allora non ci sono, per i gradienti, altro che dei punti. È una situazione molto favorevole che si presta volentieri alla matematica. Essa fa parte precisamente di ciò che ho chiamato "teoria delle catastrofi elementari". Questa terminologia, del resto, è rimasta.

L'idea di Zeeman era dunque quella di dire : se guardo una nube di punti nello spazio dei segnali di ingresso e prodotta dai segnali in uscita, cercherò di interpretare la figura che vedo, come associata ad un attrattore di un sistema dinamico. È perfettamente possibile. In quasi tutti i casi, si può interpretare il luogo in cui i punti si accumulano come delle specie di tovaglie, che saranno dei minimi di un certo potenziale; si potrà allora studiare questa famiglia di potenziali quando si fanno variare i parametri di controllo che agiscono sul sistema. I sistemi dipendono da variabili rapide (dette "interne") che parametrizzano lo spazio di configurazione, e da variabili lente (dette "esterne") che, nel caso del controllo, hanno valori fissati dallo sperimentatore. Lo spazio di questi valori è detto allora "spazio di controllo". Questi parametri di controllo, sono quelli che agiscono sul sistema, che ne modificano la dinamica: per esempio, la temperatura o la pressione, supposte costanti e definite globalmente. Ad ogni punto dello spazio di controllo corrisponde un certo attrattore ultimo. Si proietta allora l'insieme di questa configurazione sullo spazio di controllo e si hanno delle tovaglie, delle regioni in cui dominano gli attrattori. Un attrattore domina in una regione, un altro in un'altra regione. Ci si sforza di tracciare la linea separatrice fra queste regioni. Se è possibile, si può allora, fissando i valori di controllo, prevedere esattamente dove andrà a finire il sistema. Situazione estremamente favorevole. Ciò che apporta la teoria delle catastrofi, i teoremi matematici che le sono associati, sono dei mezzi di classificare ciò che avviene per questi bacini di attrazione e i loro limiti quando si suppone che tutta la configurazione sia strutturalmente stabile. Vale a dire che essa non varia qualitativamente quando si variano un po' i parametri di controllo o le variabili di ingresso e di uscita che possono presentarsi. Tutto questo fa sì che la teoria si presenti matematicamente molto bene, ma le possibilità di applicazione hanno subito costituito un problema.

Perciò Zeeman ha applicato la teoria in situazioni estremamente varie, tratte dalla sociologia, dalla biologia, dalla medicina[10].

D. *È il caso della sindrome maniaco-depressiva, per esempio...*

T. La può interpretare alla maniera dei catastrofisti come una lotta tra due regimi stabili che si dividono in qualche modo il comportamento dell'individuo. Seguendo la stessa linea un amico di Zeeman presentò un modello dell'anoressia mentale.

La risonanza nei mass-media fu considerevole quando Zeeman presentò queste conclusioni al congresso dei matematici di Vancouver, nel 1974. Si disse che era un mezzo straordinario per fare modelli dei fenomeni in cui non c'è apparentemente nessuna legge matematica soggiacente.

Le prime contestazioni vennero da oltre-Atlantico. Si dice perfidamente che il Nuovo Continente non accetta volentieri le innovazioni che gli vengono dal Vecchio Continente. Resta che le critiche sono venute da laggiù.

D. *Qual era la natura di queste critiche?*

T. Riguardavano due punti. Il primo riguardava una certa insufficienza concettuale dell'applicazione o, piuttosto, il fatto che le ipotesi richieste per far funzionare il modello della teoria delle catastrofi sono

---

[10]Queste riflessioni affascinanti si possono trovare trattate in modo più disteso e comprensibile (sia pure rigoroso) nella letteratura sul cosiddetto "caos deterministico" e sui frattali. Si veda fra gli altri il volume di H. -O. Peitgen e P. H. Richter, *La bellezza dei frattali*, Bollati Boringhieri, Torino, 1987). Una discussione legata al significato del caso nelle teorie sull'origine dell'uomo e dell'universo si troverà in: Giuseppe Del Re, *La Danza del Cosmo*, Utet, Torino, 2006.

ipotesi estremamente restrittive. Una dinamica dei gradienti è una dinamica molto speciale. Una dinamica di punti pesanti gettati nello spazio, non è una dinamica di gradienti. Quando si getta un corpo solido, pesante, nello spazio, la sua energia è composta di due parti : l'energia potenziale e l'energia cinetica. La prima darà effettivamente luogo a una dinamica di gradienti, per dissipatività. L'energia cinetica no. Essa dà piuttosto luogo a ciò che si chiama una dinamica hamiltoniana, una dinamica in cui non c'è perdita di energia per dissipazione. L'aspetto delle traiettorie ne viene notevolmente modificato. A seconda che si adotti un'ipotesi in cui c'è una sorta di attrito infinito (è in fondo l'ipotesi della fisica aristotelica) o un'ipotesi senza attrito, in cui le cose si svolgono assolutamente liberamente, senza perdita di energia, ci può essere una certa degradazione dell' energia, ma non ci può essere perdita. Questa osservazione si può fare per l'attrito : c'è anche conservazione dell'energia. Ma poiché non ci si interessa dell'energia termica, il calore che deriva da questo attrito viene trascurato. L'energia, quella che si chiama libera, dunque diminuisce.

C'è dunque un'obiezione.

Ce ne è un'altra, più sottile, che proviene da gente che studiava per lo più i sistemi dinamici che obbediscono alle leggi fisiche. Non sono sistemi dinamici gradienti.

Inoltre, per far funzionare il modello delle catastrofi, bisogna fare l'ipotesi di posizioni generali, di stabilità strutturale. Ci hanno dunque obiettato che l'universo è ciò che è, e che non se ne possono cambiare le leggi per rendere strutturalmente stabili i sistemi che non lo sono. Le leggi sono quelle che sono: non si possono perturbare. Bisogna dunque guardare le cose come sono e non divertirsi ad applicarci delle teorie matematiche più semplici, solo perché sarebbero più semplici.

D. *Le due obiezioni si ridurrebbero dunque ad indicare che la teoria delle catastrofi non si accorda veramente al reale manifesto...*

T. Ma ce n'è stata una terza, che ha ampiamente raffreddato gli entusiasmi: per ragioni teoriche, la teoria non permette la previsione quantitativa, una vera previsione, dunque. Un modello catastrofista non è fondato su equazioni; equazioni sulle quali ci si permette un certo numero di deformazioni: dei cambiamenti di variabili, in particolare, delle perturbazioni, delle deformazioni. È ciò che resta invariante, insomma, quando si fanno delle perturbazioni, che è il contenuto solido della teoria delle catastrofi. Ora, questo contenuto solido è qualitativo e non quantitativo. Tutti si sono subito ricordati la vecchia formula di Rutherford che cito all'inizio di *Stabilità strutturale e morfogenesi* :"Qualitativo non è altro che un quantitativo scadente". Mi dissero allora che effettivamente la teoria delle catastrofi in se stessa non permette la previsione esatta delle cose, e nemmeno una previsione quantitativamente approssimata, cosa più grave.

D. *Essa dunque spiega come si svolge il fenomeno, ma non può dire in quale punto e in quale momento esso avrà luogo?*

T. Gli obiettori mi hanno detto: lei ci propone una metafora. Bisogna interpretare questo rimprovero come un'obiezione o come un complimento? Io lo prendo personalmente come un complimento. Disporre di una metafora laddove non c'era niente, è già un bel progresso ! Ma la gente laggiù lavora solo sui calcolatori; vogliono poter disporre di dati numerici. Viene da confessare che, in questo campo, la teoria delle catastrofi fallisce in modo deplorevole. A mia conoscenza non ci sono modelli quantitativamente numerici, fondati sulla teoria delle catastrofi, che abbiano dato dei risultati veramente interessanti. Forse nel campo della statistica, ma bisognerebbe guardare più da vicino.

D. *Che risposta dà lei a questo primo gruppo di obiezioni?*

T. Sul problema dell'inefficacia predittiva della teoria, penso che abbiano ragione. L'ho detto subito, quasi un anno prima che queste obiezioni arrivassero dagli Stati Uniti. Ne avevo discusso con Christopher Zeeman. Lui, molto ottimista, pensava che potesse funzionare numericamente. Io gli rispondevo che sarebbe stato un miracolo.

È effettivamente una teoria puramente matematica, che non dice nulla sulla natura dei fenomeni soggiacenti, sulla loro natura fisica, chimica, biologica. Postulare che possa dare dei risultati quantitativi, significa affermare che quasi qualunque tipo di fenomeno è retto da leggi quantitative esplicite. Non so se il determinista più convinto, che era Leibnitz, l'avrebbe accettato. La teoria delle catastrofi non ha il potere di matematizzare una situazione che, di per sé, non è matematizzabile, che non è soggetta a leggi che rientrino nel formalismo delle leggi fisiche. È una cosa di cui poca gente ha coscienza: pochi fenomeni della natura sono retti da leggi quantitative esatte e precise. Per definizione, è il campo della fisica, si potrebbe dire. Tutte le altre leggi sono approssimate.

D. *C'è tutta una serie di fenomeni che è il risultato di un numero così grande di concause incrociate che è difficile trovare un modello in grado di dare una descrizione precisa e che permetta di fare una previsione. E tuttavia si utilizzano le statistiche, le probabilità, per determinare almeno degli intervalli in cui sarà contenuto il valore.*

T. Esiste tutta una tecnica che appartiene a ciò che si chiama analisi numerica, cioè alla matematica applicata e permette di fare valutazioni approssimate nelle situazioni che in ultima analisi dovrebbero avere una radice fisica abbastanza precisa, ma sono talmente complesse, miste, che non si è in grado di trovare immediatamente una legge quantitativa precisa.

D. *Qual era allora lo statuto della teoria delle catastrofi? Lei parla di qualitativo opposto al quantitativo. Quella teoria non poteva fornire una sorta di quadro teorico astratto, una certa tendenza per un certo comportamento?*

T. L'uso del termine tendenza è abbastanza giusto. Ciò che offre la teoria delle catastrofi, soprattutto delle catastrofi elementari, è la descrizione dei conflitti di tendenze. Ma il numero di questi conflitti deve essere piccolo, due o tre al massimo, quattro al limite, anche se non mi sento in grado di citare un esempio convincente di morfologia dedotta dal conflitto di quattro tendenze. Si può dunque dedurre almeno una tassonomia delle situazioni di conflitto, che si traduce effettivamente in una ripartizione in bacini, in uno spazio di controllo, in cui ogni tendenza, ogni attrattore, domina un campo suo proprio. Ciò che dà la teoria delle catastrofi è la morfologia delle superfici, in cui si salta catastroficamente da un regime all'altro.

D. *Ciò che può sollevare polemiche è l'utilizzazione di queste tendenze, di queste morfologie spazio-temporali per fenomeni complessi come i comportamenti sociali o altri fenomeni di questo tipo.*

T. Non credo che le obiezioni siano venute dalle scienze umane, dalle scienze sociali, come si dice negli Stati Uniti. Quella gente, al contrario, è stata piuttosto contenta che si potesse iniettare un po' di matematica nei loro dati. Le obiezioni venivano dalla matematica applicata, dagli specialisti delle equazioni e delle derivate parziali, dall'idrodinamica, dalla meccanica dei fluidi, insomma, dalle discipline che direi semi-dure. Non volevano perdere il beneficio di avere equazioni che si potessero trattare e con le quali si potessero fare delle previsioni, a profitto di un modellismo un po' debole, che non avrebbe dato che interpretazioni qualitative. Era un po' una reazione corporativa; così tutta la corporazione dei matematici applicati si è levata contro questa teoria.

D. *È una teoria che propone in effetti delle procedure esplicative di cui la filosofia può trarre vantaggio.*

T. L'interesse essenziale di questa teoria è certamente di fornire nelle scienze e altrove degli schemi di intellegibilità. E questo mi sembra abbastanza prezioso. Anche se talvolta ci si inganna; anche se talvolta la realtà è retta da un genio maligno che ci propone delle pseudo-intellegibilità. Questa teoria ha per interesse principale di proporre una teoria matematica dell'analogia. L'analogia, è un'operazione mentale che, in linea di principio, non ha niente a che fare con un substrato ben definito. Si può applicare il pensiero analogico a delle situazioni molto diverse, senza preoccuparsi di avere a che fare con la fisica, la chimica, la biologia, la sociologia.

D. *La metafora è dunque un buono strumento.*

T. Certamente. Konrad Lorenz, nel discorso di accettazione del premio Nobel, fece un'osservazione che mi colpì molto quando la lessi, qualche anno più tardi. Disse : "Qualunque analogia è vera". È certamente una formulazione un po' eccessiva, ma se si aggiunge : "Ogni analogia, purché sia accettabile semanticamente, è vera", credo che divenga una formulazione perfettamente rigorosa. Altrimenti detto: se, con uno sforzo della mente, ci si convince che un'analogia è corretta, questa correttezza, che proviene da un esame puramente mentale dei termini dell'analogia, implica la verità dell'affermazione. In questa situazione, la *forma mentis* determina insomma la verità dell'analogia.

D. *Non c'è allora il rischio che ogni individuo abbia i suoi propri procedimenti analogici, e che nessuno di essi sia sufficientemente collettivo da potersi comunicare in maniera rigorosa?*

T. Ci sono dei casi in cui l'analogia è perfettamente esplicita. Se lei prende la vecchia analogia aristotelica: "Sera rispetto al giorno è come la vecchiaia rispetto alla vita" - analogia che prende la forma di una frazione, di una proporzione, di un'uguaglianza fra due rapporti. È chiaro che il nodo organizzatore dell'analogia, è questa idea di fine di uno stato stazionario, di fine di un periodo di tempo, ciò che si chiama vecchiaia da un lato e ciò che si chiama sera dall'altro. È una sorta di prossimità dell'istante terminale, del punto terminale dell'intervallo che uno considera. C'è qui una geometria soggiacente che esprime interamente il contenuto dell'analogia. Non ci si può obiettare nulla. La sua forza probatoria è confrontabile con quella dell'aritmetica.

D. *Questo è dunque il primo aspetto, il primo momento delle polemiche. E il secondo?*

T. Veniamo al secondo aspetto. La collettività scientifica ha manifestato una disaffezione progressiva riguardo a questa teoria. All'epoca del suo trionfo, ricevevo da due a tre modelli catastrofisti a settimana nella posta, e da tutti gli orizzonti. Se adesso ne ricevo uno al mese, è il massimo. Sociologicamente, si può dire che questa teoria ha fatto naufragio.

Ma in un certo senso è un naufragio sottile, perché la maggior parte dei concetti che ho introdotto hanno fatto il loro cammino. In effetti sono passate nel linguaggio di tutti i giorni, e tutti parlano di rughe, si sa che cosa è una coda di rondine, ecc. Queste idee sono penetrate nel bagaglio ordinario dei modellizzatori. Dunque, è vero che, in un certo senso, le ambizioni della teoria sono naufragate, ma la pratica, in quanto tale, ha avuto successo. Solo che i teoremi matematici non sono oggetto di brevetti, e non me ne è venuto alcun beneficio. D'altronde è una buona cosa: fa di questo campo scientifico uno degli ultimi che sia puro da ogni imperativo commerciale. Da questo punto di vista, almeno, tengo molto allo scacco della teoria delle catastrofi!

D. *Alcuni elementi costitutivi della teoria sono dunque usati attualmente?*

T. Certamente.

D. *E la teoria in generale invece, è abbandonata?*

T. La teoria nella sua ambizione, sì. Ci sono state divergenze tra Christopher Zeeman e me: lui è rimasto molto ottimista nel suo principio riguardo alle capacità modellizzatrici in senso quantitativo e predittivo; è un terreno che, da parte mia, abbandono volentieri alle critiche. La teoria generalizzata l'ho sviluppata piuttosto in campi a carattere filosofico. L'ambizione di avere dei risultati non è immediata. E non ci sono veramente polemiche in questo campo...

D. *Non le fecero obiezioni sul fatto che lei sviluppava una teoria che si applicava indipendentemente dal substrato?*

T. È certamente qualcosa di difficile da ingoiare, anche per una mente che non fosse strettamente scientifica: nessuno crederà che il comportamento di un solido sia lo stesso del comportamento di un liquido o di quello di un gas. E avrà ragione di non crederlo ! Ma questa obiezione, stranamente, non mi è stata rivolta. Forse perché era troppo evidente !

Tuttavia, quando si esaminano le cose più profondamente, ci si rende conto che la teoria delle catastrofi non cessa di avere una certa validità, malgrado le proprietà diverse dei substrati. Un esempio tipico è lo spigolo, qui, che separa la superficie orizzontale dalla superficie verticale di questo asse di legno della tavola. Ci vedo un luogo di catastrofe, perché c'è cambiamento da un regime verticale a un regime orizzontale. I due si incontrano secondo uno spigolo. Essa proviene dal taglio di una tavola che era inizialmente continua, e l'azione della sega sul legno è la realizzazione di una catastrofe elementare. È la ruga duale, in un certo senso l'anti-ruga. La catastrofe statica che abbiamo qui è la memoria di una catastrofe dinamica che ha avuto luogo nel momento in cui è stata fabbricata questa tavola. I solidi, dunque, conservano memoria di tutte le catastrofi che hanno subito. Il solido non è molto interessante dal punto di vista dinamico. Il solido è piuttosto statico. Ma ha l'interesse di essere depositario delle azioni passate, e questo lo rende interessante per l'interpretazione delle forme. È una memoria. Il liquido, quanto a lui, ha poca memoria, e il gas ancora di meno, perché prende la forma del recipiente che lo contiene.

D. *Questo modo di non tener conto del substrato la conduce a proporre dei quadri esplicativi.*

T. Le difficoltà riguardo al substrato non appaiono soltanto nella misura in cui dei fenomeni divengono in qualche modo statici. C'è un processo morfologico, ed esso si ferma : si ottiene una forma che si deve interpretare. Bisogna dunque risalire alla sua genesi. E lì, a quello stadio della genesi, la teoria delle catastrofi si può applicare senza prendere troppo in considerazione la natura del substrato. D'altronde ci si può benissimo ferire con un foglio di carta: esso non è molto rigido, ma se lo si urta abbastanza rapidamente, ci può ferire. È una questione di velocità relativa, che può annullare in una certa misura le flessibilità relative dei due mezzi. Ci sarebbe tutta un'analisi da fare sulla possibilità di far sparire le proprietà specifiche di un mezzo alle grandi velocità.

D. *Qual è stata la seconda categoria di polemiche?*

T. Si è usciti dalla teoria dei gradienti con la considerazione di ciò che viene chiamato il caos. È comparso negli anni 1975-1980: allora è nata la nozione di attrattore. E ci si è trovati dinanzi al problema della loro biforcazione. Purtroppo è un problema di una complessità straordinaria. Anche equazioni semplicissime, equazioni differenziali in cui ci sono due parametri, possono esibire un diagramma di biforcazione paurosamente complicato. Ed è legato ad un'altra problematica, il problema della stabilità strutturale, che ha avuto una grande parte nella controversia sulla teoria delle catastrofi. Ero partito con l'idea che quasi tutti i sistemi differenziali, e addirittura che in un certo senso un sistema dinamico, fossero strutturalmente stabili.. È vero in dimensione 2, e ciò è stato dimostrato su superfici orientabili da un matematico brasiliano amico mio, ma quando passammo alla dimensione 4, incontrammo uno scoglio. Constatammo che c'erano sistemi differenziali in cui, in questa dimensione, si poteva, con un piccolo cambiamento di parametri, ottenere un'infinità di tipi topologici del sistema corrispondente. Altrimenti detto, c'è un'instabilità topologica del sistema in quasi tutti i punti dello spazio di controllo. Fu in effetti la rovina del fondamento teorico della teoria delle catastrofi.

Questo rappresentò una certa delusione per me, perché speravo che con l'idea di stabilità strutturale, si potesse reintrodurre un po' di regolarità nel mondo. In realtà, bisogna ben rendersi conto che l'instabilità che dispiegano questi sistemi è poco visibile. L'attrattore è una struttura estremamente filamentosa, una struttura frattale come si dice oggi, e cambia allora continuamente la configurazione dei suoi filamenti. Se si guardano le cose da lontano, non ci si vede alcuna differenza. La struttura fine dell'attrattore cambia costantemente, ma il suo carattere attrattivo globale non cambia granché. Se non si fa una teoria matematica fine, si possono sviluppare considerazioni di stabilità strutturale che sono del tutto simili a quelle della teoria delle catastrofi. È una via che si sta esplorando in questo momento e c'è gente, all'università di Nizza per esempio, che segue questa direzione.

Lei ha certamente sentito parlare della moda del caos. È un qualcosa che è stato lanciato una decina di anni fa: hanno scoperto un vecchio risultato di matematica dovuto a Hadamard nel 1902. Questi disse che su una superficie di genere 2 - si pensi ad una ciambella con due buchi - , se si introduce una metrica appropriata, una metrica iperbolica costante, allora due traiettorie geodetiche, divergeranno sempre. Altrimenti detto, se si prendono due posizioni iniziali molto vicine, alla fine di un certo tempo, i punti che percorrono queste geodetiche si ritroveranno molto lontani l'uno dall'altro e in una situazione statisticamente caotica. I fisici non dettero gran peso alla cosa. Alla fine però, questo fenomeno, detto di "dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali", fu riscoperto soltanto negli anni 1975-1980. L'unico dato che resta allora è un dato statistico. Bisogna guardare le evoluzioni asintotiche e vedere se ci sono proprietà che consentono di fare una media del flusso nello spazio, proprietà che sono le sole invarianti. Un sistema del genere è stato chiamato "caotico".

[C. Qui la mente geniale di Thom ricollega più esplicitamente di prima la teoria delle catastrofi alla famosissima "scoperta" del caos deterministico, dei frattali, ecc.].

CAPITOLO 2

POSIZIONI FILOSOFICHE

D. *Lei è materialista?*

T. Non credo. Vedo la materia da un punto di vista aristotelico, una sorta di continuo che può acquistare delle forme. La forma può essere esterna, visibile, o interna. La forma interna è ciò che si chiamerebbe una qualità dal punto di vista semantico. La materia signata di Aristotele è una materia fornita di qualità. Secondo me, qualunque qualità si può precisamente vedere, in una certa misura, come una forma spaziale, una forma estesa in uno spazio astratto.

D. *Com' è lo spazio che riceve questa qualità?*

T. La materia originaria, se così si può dire, è un po' la materia prima di Aristotele, è il substrato che può ricevere qualunque specie di qualità, qualunque predicato. La materia prima è una specie di idealizzazione che, molto rapidamente, acquista delle qualità, delle forme...

D.*...che preesiste a tutto, insomma?*

T. In un certo senso, sì. Ma Aristotele non si dilunga molto sulla maniera in cui vede la materia prima. A mio parere, bisogna sempre ricondurla a un continuo, a una estensione. Io sono un topologo universale. Ho una vera metafisica del continuo.

D. *A sentirla, sembrerebbe che ci sia una sorta di identità fra la nozione di spazio astratto e quella di materia prima...*

T. Per me, è pressappoco la stessa cosa. Evidentemente, gli spazi astratti della matematica in generale hanno proprio delle forme di natura algebrica. Sono, per esempio, degli spazi vettoriali. Vi si possono fare delle operazioni. In qualche modo sono già troppo qualificati.

D. *Lei ha sempre avuto questo modo di vedere e di pensare, o si è evoluto man mano che portava a termine i suoi lavori?*

T. Mi sarebbe difficile dire in quale epoca esattamente ho concepito questa sorta di metafisica. Credo di non aver mai avuto simpatia per il materialismo-positivismo in generale. Ma, d'altra parte, ho ugualmente avuto una grande diffidenza nei confronti delle considerazioni metafisico-religiose. La mia situazione è veramente su una linea di cresta, una cresta assai stretta. Faccio del mio meglio per reggermici.

Mi sembra tuttavia di non avere cambiato molto nella mia esistenza a questo proposito. Non credo di essere cambiato molto. Appartenevo ad una famiglia di tradizione protestante. La mia città natale, Montbéliard, ha avuto un destino abbastanza particolare: restò sotto dominazione tedesca fino alla Rivoluzione. Tutto dipendeva dai duchi di Württemberg, e questi imposero la Riforma nel XVI secolo. Abbiamo avuto una chiesa luterana. Siamo tra i rari francofoni protestanti luterani. Nella mia famiglia, mio padre non era credente e così mia madre; erano le nonne che ci mandavano alla scuola domenicale, per rispetto della tradizione. Ma io ne sono rimasto comunque segnato abbastanza fortemente, in modo ambiguo, perché ero al tempo stesso interessato e respinto dalla maniera in cui vi si esponeva la Bibbia.

Ciò che mi interessava, era proprio l' aspetto più profondo dei testi biblici. Non si può leggere, ad esempio la Genesi, senza essere immediatamente affascinati da quel che c'è di universale in quel testo; è ad un tempo poetico e profondo. Si sa che sono forse menzogne, ma in quanto miti, direi... che non se ne son fatti di più veri! Ciò che mi respingeva, era il rituale: bisognava alzarsi, unire le mani per la preghiera, tutte cose che sentivo come delle costrizioni un po' assurde, perché non condividevo i sentimenti generali che si esigevano da un credente.

D. *Quel che la interessava, in fondo, era la descrizione, la spiegazione, mentre ciò che la annoiava, era la pratica di uno scambio più o meno illusorio...*

T. In fondo, ciò che mi respingeva, era la necessità di un certo impegno. Io ho sempre rifiutato l'impegno, in un certo senso, tanto sul piano religioso quanto su quello politico.

D. *Che pericoli ci trova? Una sorta di alienazione?*

T. Certo e poi, in fondo, credo che quelli che si impegnano sono, in un certo modo, quelli che mancano di personalità. Non avendo personalità propria, risorse interne che siano loro personali, le trovano proprio in quella alienazione che l'impegno procura.

D. *È forse un giustificarsi con azioni esterne?*

T. Sì, con l'utilità sociale, l'utilità del gruppo.

D. *Le descrizioni del mondo che le ha dato la Bibbia della sua infanzia, e quelle a cui lei si è dedicato facendo della matematica e della topologia, hanno qualche parentela?*

T. Non c'è un rapporto immediato tra la Bibbia e la matematica. Scavando abbastanza a fondo, forse si troverebbe qualcosa. Penso per esempio alle analogie. Ce n'è una che mi viene in mente: il mondo prima della "caduta" e il mondo dopo, nella Genesi; e poi il mondo sublunare e il mondo sopralunare di Aristotele; la dinamica classica opposta alla dinamica aristotelica, mi sembra che tutto questo rinvii dall'uno all'altro. Guadagnerai il pane col sudore della fronte: è la necessità dell'attrito, è la dissipazione, la dissipatività della dinamica terrestre. Mentre il mondo della dinamica hamiltoniana, è l'eternità permanente, senza attrito, un moto... quasi immobile!

D. *Se non ci sono punti di riferimento, il moto perde senso...*

T. E se si danno troppi cambiamenti di riferimenti, si finisce per uccidere il moto.

D. *Si potrebbe leggere la Bibbia cercandovi le rughe e le pieghe?*

T. Una specie di semiotica topologica della Bibbia? Non ci ho provato!

D. *Ma non ci sono delle catastrofi nel racconto biblico?*

T. Questo è troppo facile! Di catastrofi ce ne sono dappertutto. Non è molto facile trovare esempi puri. Non è l'aspetto puro che è interessante. Voglio dire con ciò che, quando ci si spiega il terremoto di San Francisco con la collisione della placca del Pacifico con la placca americana, questo non significa granché, non è una spiegazione. È esplicativo in quanto visione pura, ma non presenta alcun interesse dal punto di vista della vittima della catastrofe!

D. *Quando lei ha detto che spiegare il terremoto con l'urto di due placche, non è una spiegazione, ho creduto di capire: sarebbe una spiegazione dire le ragioni per cui due placche entrano in collisione. Le cause sono già dei risultati. Non si spiega che spostando il problema all'indietro. Si è sempre rinviati a una causa che precede, e questa causa non è mai spiegata. Si arriva sempre al problema della causa prima, che essa stessa non è spiegata. E anche se si risponde Dio, non si sa perché c'è...*

T. Aristotele aveva risolto il problema elegantemente dicendo che Dio era appunto la causa prima, per la quale, precisamente, il problema non si poneva. È eterno nei due sensi...

D. *Non le pare un postulato un po' facile?*

T. Senz'altro. Ma l'aristotelismo non vale per la sua teoria del sopralunare; vale piuttosto per la sua teoria del sublunare, a mio avviso. Dicendo questo, forse farò dispiacere a quelli che si interessano soprattutto della metafisica divina di Aristotele, il pensiero del pensiero, l'atto puro, come dicono gli Scolastici. Ma io credo che sia un aspetto abbastanza periferico nella visione del mondo di Aristotele.

D. *Ciò che propone Aristotele, non è soltanto una spiegazione del mondo, è anche una certa giustificazione della situazione dell'uomo, e degli elementi o dei riferimenti per una giusta condotta.*

T. In Aristotele c'è senz'altro questo aspetto. Ma confesso che non è quello che mi ha interessato. Io non ho fatto che scorrere l'*Etica Nicomachea* e ho soltanto sfiorato quell'aspetto sociale dell'aristotelismo. Non mi appassiona. In fondo è un ideale di saggezza e di moderazione che non ha nulla di trascendente. Non è la carità cristiana, e forse nemmeno il dedicarsi agli impegni politici...

D. *La filosofia come lei la intende, è suscettibile di portarle altre informazioni, altri elementi?*

T. Dirò brutalmente, per usare un linguaggio aristotelico, che dal punto di vista del sapere, si è sempre in uno stato di privazione. Si cerca di colmare questo vuoto. E questo conduce ad una ricerca che è praticamente senza uscita. Passiamo da un' aporia all'altra.

D. *Si passa da vicolo cieco a vicolo cieco? È vero anche delle scienze?*

T. In un certo senso sì. Anzitutto, la filosofia, quella vera, non è molto facile. Se si tenta di entrare nel sistema kantiano, se si tenta di capire Heidegger, sono convinto che non è più facile che fare della matematica superiore. Ma si ha l'illusione che sia più facile parlare di Heidegger che parlare del prolungamento analitico o della trasformazione di Fourier. Non è vero: anzi si arriverà più facilmente a dominare un argomento di matematica relativamente preciso e concreto che non una dottrina filosofica estremamente cespugliosa e ramificata come quella di Heidegger.

Bisogna, anche a questo proposito, fare uno sforzo tecnico. Si pensa spesso che la filosofia non richieda sforzi di questo tipo. Credo che sia falso. La vera filosofia esige molti sforzi relativamente tecnici. Non si può capire Husserl se non si è entrati realmente nel sistema per qualche mese o per qualche anno. Si può difficilmente capire Aristotele se non si sono studiate quattro o cinque opere fondamentali del *Corpus aristotelis*, senza contentarsi di leggere, ma facendo lo sforzo di capire. Credo che sia aberrante pretendere che la filosofia sia più semplice della matematica. Le difficoltà non sono probabilmente esattamente confrontabili, non sono della stessa natura. Ma bisogna reagire contro questa credenza erronea. Evidentemente, se si resta nell'etica, se ci si interessa dei problemi posti dai progressi della biologia per la società, si potrebbe suscitare l' interesse di tutti, perché ognuno si sente coinvolto. Ma i veri problemi, in fondo, non sono quelli in cui tutti si sentono coinvolti. Sono problemi ai quali si accede alla fine di un lungo apprendistato.

D. *Si può lo stesso tentare di far capire [almeno qualcosa], a persone che non hanno necessariamente i prerequisiti matematici?*

T. Sono abbastanza scettico sulla possibilità di divulgare la matematica. La matematica, si impara, non si divulga. L'idea della teoria delle catastrofi, non si può spiegare a chi non ha un rudimento di matematica, a livello dei corsi di matematica superiore, dei corsi di preparazione alle Grandi Scuole o dei primi anni di università. Neanche questo basterebbe d'altronde. Bisognerebbe andare un po' al di là. Se no, si fa del blabla, si parla di Eraclito, del conflitto, ecc.

In fondo, la divulgazione non ha forse interesse che per gli editori, ma abbastanza poco per il cammino del pensiero.

D. *Tuttavia - usando un' analogia che può sembrare un po' superficiale - per avere dei campioni di tennis, è necessario che molti* *sappiano giocare a tennis. Non si può pensare che, perché un paese abbia un certo numero di ricercatori occorre che la sua opinione pubblica sia informata, nella misura del possibile, di ciò che avviene nella scienza?*

T. Questa teoria, che implica in sostanza l'esistenza di un humus, è stata abbastanza corretta fino all'epoca napoleonica: fare della scienza era un'attività disinteressata. Non ci si guadagnava la vita facendo lo scienziato. La Rivoluzione francese portò il dubbio vantaggio di fare della scienza un'attività sociale remunerata dallo Stato.

D. *Questa situazione renderebbe la divulgazione meno utile?*

T. Io non sono contro la divulgazione, perché è utile soddisfare la curiosità della gente. Ma non credo che si possano migliorare molto i periodici come *La recherche*, o *Scientific American*. Sono di ottimo livello, e rispondono alle aspettative di persone che hanno un livello di conoscenze abbastanza diffuso, malgrado tutto, in Francia. Le cose sono presentate in modo abbastanza rigoroso. Sono dei buoni organi di divulgazione. Non ho che un rimprovero da fare, in particolare a *La recherche*, ed è che essi sono i difensori della lobby scientifica di cui pubblicano regolarmente i contributi. Una giornalista mi ha risposto un giorno: "Innanzitutto: niente polemiche!". Non bisognava esibire in pubblico le discussioni tra gli uomini di scienza, spesso d'altronde discussioni di concorrenza bassamente commerciali, direi. Un fondo dato deve essere consumato da una parte piuttosto che da un'altra. Bisogna far vedere che ciò che fa l'altro non è così fondamentale come quello che faccio io. Mi sembra che la gran parte della controversia scientifica risponda a questa motivazione.

1. Il discreto e il continuo

D. *Lei ha detto che ha una vera e propria metafisica del continuo. Questo concetto del continuo sottende tutta la sua teoria delle catastrofi...*

T. Mi sembra che il problema della realtà esterna sia un problema molto delicato. Sapere se il fondo della natura è continuo o discontinuo, è un problema metafisico, ed io non credo che ci sia qualcuno che disponga di una risposta. Personalmente, sono effettivamente un continuista, malgrado il fatto che metto l'accento sulle discontinuità fenomenologiche. La mia convinzione di base è il carattere continuo dell'universo e dei fenomeni, e del substrato dei fenomeni. E, appunto, l'essenza della teoria delle catastrofi è di ricondurre le discontinuità apparenti alla manifestazione di una lenta evoluzione soggiacente. Il problema è allora quella di determinare questa lenta evoluzione che, a sua volta, esige in generale l'introduzione di nuove dimensioni, di nuovi parametri.

D. *Sarebbe dunque non l'evoluzione di piccoli punti discreti, ma proprio un'evoluzione continua?*

T. È l'evoluzione di un oggetto continuo. Bisogna immaginare ciò che si chiama in matematica un fronte d'onda, cioè una superficie variabile nel corso del tempo, che può piegarsi, cogliere degli accidenti [in senso aristotelico, cioè come variazioni occasionali] diversi, ramificarsi, e subire un gran numero di trasformazioni.

D. *Se siamo fatti per percepire le discontinuità, questo non è una prova né una confutazione dell'esistenza materiale della discontinuità.*

T. Dire che il continuo esiste non esclude la possibilità di una discontinuità che opera sul continuo. Io mi oppongo soltanto ad una sorta di vulgata[1] moderna che ci viene essenzialmente dall'informatica, e che consiste nel dire che tutto si esprime in bit.

Prenda un qualsiasi oggetto dell'universo: lei potrà sempre realizzare una modellizzazione matematica di quest'oggetto, e rappresentarlo con un oggetto matematico di carattere algebrico. Lo si descriverà in un computer con un certo numero di bit. L'informatica dispone di un potere di persuasione considerevole sull'opinione pubblica. Si finisce per credere che in natura tutto si può ridurre a dei bit! Prendiamo un esempio tipico: quando si guarda la televisione si ha l'impressione che le cose siano continue. Ma se si sa come funziona, si scopre che si tratta di un numero infinito di cellette luminose sullo schermo, che si possono considerare come dei punti; questo reticolo piano di punti viene spazzato da un fascio, che, successivamente, illumina i punti. Se si diffonde nel mondo la convinzione che tutto in esso è come uno schermo televisivo, si giunge a dire che, in fin

[1] Ormai non tutti sanno che con il termine 'vulgata' si intende principalmente la versione latina della Bibbia curata da San Girolamo (347-420) adottata come testo ufficiale della Chiesa Cattolica Romana. v: Battaglia, Grande Dizionario della Lingua Italiana (Torino: Utet 2002).

dei conti, laddove vediamo una continuità, non c'è in realtà che il discreto, delle particelle discrete, e questo è tutto.

D. *Il discreto sarebbe allora legato alla nostra propria percezione?*

T. È spesso così: il carattere discreto di una trasformazione è una semplificazione realizzata dal nostro apparato percettivo. Siamo fatti per vedere essenzialmente le discontinuità. Soltanto esse sono significative. Per un animale, il riconoscimento della preda è essenziale: bisogna riconoscerla e localizzarla. Era dunque importante che esistessero nel sistema nervoso dei meccanismi che permettessero di riconoscere immediatamente ciò che è vivo da ciò che non lo è. Fra questi criteri, effettivamente, l'apprezzamento delle discontinuità e dei contorni apparenti degli oggetti è essenziale. E poi, ci sono attività, come nell'uomo il linguaggio, che presuppongono questa discretizzazione: noi discretizziamo i fonemi. Tuttavia, il fondo del fenomeno è qualcosa di continuo. Lo spettro di Fourier è molto complicato. Ma si può cambiare continuamente con l'aiuto di un sintetizzatore di suoni. Tra B e P, c'è una trasformazione continua piuttosto semplice. Ma fatele ascoltare a qualcuno; vi dirà "Questa è una B, questa è una P". Egli sentirà una discontinuità totale tra questi due suoni. La trasformazione continua da parte sua non gli sarà percettibile.

D. *Questo dipende dalla sua interpretazione?*

T. È ciò che si chiama la percezione categorica; è il fatto che il continuo uditivo è di colpo attirato da attrattori, ed ogni attrattore dà una sensazione specifica, come se applicasse un'etichetta definita.

D. *Il cervello, nell'interpretare, settorizza...*

T. È lui che discretizza. Ma non discretizza tutto. Non discretizza lo spazio, per esempio. Noi conserviamo un'intuizione continua. Allo stesso modo il tempo ci appare continuo.

D. *Perché, secondo lei, noi discretizziamo certe cose, mentre conserviamo l'intuizione del continuo in altri casi?*

T. Nel caso dei fonemi, è abbastanza semplice: essendo il linguaggio una combinazione discreta di fonemi, è importante non prendere un fonema per un altro. Bisogna dunque tracciare una frontiera netta tra i fonemi. Ora che il mio udito si indebolisce, mi rendo conto che non è sempre così semplice! Io confondo i fonemi, e questo nuoce sgradevolmente alla comprensione.

Ci sono ben inteso situazioni in cui è importante discretizzare. Ce ne sono altre in cui è utile, al contrario, conservare la continuità: la cattura degli oggetti spaziali è fondata sulla continuità. Abbiamo degli apparecchi mobili, nei nostri muscoli, nelle nostre articolazioni, che ci permettono praticamente, col dito, di toccare tutti i punti di un dominio. Noi realizziamo in pratica il continuo con la motricità. Lo valutiamo dunque con la sensibilità innata. Per lo spazio, il sistema funziona su una base essenzialmente continua. Questo farebbe certamente saltare i neurofisiologi, ma dal punto di vista della soggettività, non c'è alcun dubbio che funzioni così.

D. *Lei parla del vissuto dell'evento. Ma, se si pensa al moto studiato attracerso immagini di sintesi, è chiaro che queste immagini sono per definizione discretizzate, e che il moto è analizzato immagine per immagine. È la persistenza sulla retina che ci dà quell'impressione di continuità, mentre in verità siamo nel mondo più discretizzato che esista...*

T. Certo, ed è un problema interessante. Ci danno spesso quest'esempio per dire che la nostra intuizione del continuo è falsa. Un film, al cinema, non richiede che un numero finito di immagini, ma abbiamo l'impressione del continuo; il continuo sarebbe dunque un'illusione. Non credo tuttavia che questo ragionamento regga: dopotutto, l'illusione stessa esiste, ha uno statuto ontologico in quanto illusione. Non vedo come potrebbe formarsi interiormente, se all'esterno il continuo non esistesse.

Più fondamentalmente, credo che il fascino della scienza contemporanea per il discreto sia di origine essenzialmente strumentale. Quando gli informatici vogliono registrare una superficie esterna, la decompongono in pixel: si fa un diagramma di piccoli quadrati, ognuno riceve un segnale, "sì" o "no". Alla fine, la forma si riduce a un aggregato di quadrati. È ben inteso un modo molto barbaro di rappresentare le forme.

D. *Ma quando l'unità discreta è così piccola...*

T. Se la scala è molto fine, si correggerà mentalmente e si avrà l'impressione del continuo. Dopotutto, la nostra retina non ha che un numero finito di recettori, e noi abbiamo nonostante questo l'impressione della continuità degli oggetti.

Se si difende una filosofia come quella di Changeux, si dice che tutto è discreto...

D. *Qual è l'altra filosofia?*

T. Io sono un matematico, ho perciò l'abitudine di pensare all'infinito. Mi limito a dirle: se lei crede che non ha che un numero finito di neuroni, che ogni neurone non ha che un numero finito di stati, come può pensare all'infinito con una macchina del genere?

D. *Cosa risponde lei a questa obiezione?*

T. Rispondo che l'ipotesi è falsa, e che siamo ben altro che un numero finito di neuroni, con ogni neurone che ha un numero finito di stati. Il continuo esiste anche a livello del cervello.

D. *Ma in che modo? Vorrei poterle credere, ma d'altra parte quando leggo i libri, mi sento obbligato a credere che ci sono cento miliardi di neuroni al massimo nella testa di un uomo, con un certo numero di connessioni.*

T. Ce ne sono 10^{11}, effettivamente. Ma ogni neurone è composto da un numero considerevole di molecole. E se lei permette alla molecola di vibrare un poco, lei è obbligato a prendere in considerazione i parametri di posizione di questa molecola. Ottiene subito una dimensione gigantesca, inconcepibile. E, inoltre, se ammette che lo spazio nel quale vibra la molecola sia continuo, allora si finisce per arrivare a dei parametri continui. Non si sfugge al continuo.

Ma se lei ragiona come un neurofisiologo banale, che le dice che il neurone non ha che due stati, uno stato eccitato e uno stato inibito, uno stato di riposo e uno stato eccitato, non andrà certamente molto lontano. Ma tutti riconosceranno che dire che il neurone non ha che due stati risulta da una semplificazione straordinaria! Il neurone è un oggetto molto complicato, il cui spazio rappresentativo degli stati ha certamente una dimensione considerevole. I neurofisiologi hanno esaminato una bestiola che si chiama l'aplisia. Non so se è un cefalopode o un mollusco che vive nelle acque del porto di Marsiglia o da qualche parte sulle rive della Provenza. Hanno constatato che non c'erano che sei o otto neuroni nel sistema nervoso di questo animale, ed hanno detto: "Ecco, vedete! Non ci sono che sei o otto neuroni! Finalmente capiremo come funziona il sistema nervoso". Ed hanno constatato che questo animale ha un comportamento tanto complicato, non direi quanto un uomo, ma molto complicato, e non si può renderne conto semplicemente con una piccola analisi combinatoria che mette in gioco solo sei o otto neuroni suscettibili di assumere un piccolissimo numero di stati.

D. *Seguendo il suo ragionamento, posso capire che essendo già il neurone un oggetto molto complesso, l'insieme dei neuroni aumenterà di complessità in conseguenza. Ma non è l' infinito! È effettivamente un'indeterminazione o un numero veramente considerevole. Ma, possono dei numeri veramente considerevoli divenire l'equivalente dell'infinito?*

T. Certo che no! Ma il problema di sapere se lo spazio degli stati di un neurone, o di un oggetto qualunque, è di dimensione finita o infinita, non è un problema facile da risolvere. Poiché gli stati di dimensione infinita sono molto difficili da manipolare (salvo lo spazio di Fourier o di Hilbert di cui tutti vanno pazzi), la gente preferisce fare l'ipotesi che il sistema non abbia che un numero finito e molto piccolo di stati, perché se questo numero è grande, non ci si può lavorare. È dunque un'ipotesi tecnica quella della discretizzazione dell'universo. È il pensiero tecnico che lo impone, il pensiero algoritmico.

D. *Lei dice che non le piace manipolare l'infinito ... perché?*

T. Perché sfugge all'intuizione. In topologia, la dimensione in generale è difficile da definire, e io non mi sento a mio agio negli spazi di dimensione infinita. So che sono oggetti matematici perfettamente repertoriati, in molti casi perfettamente conosciuti, ma non mi piace essere in uno spazio di dimensione infinita.

D. *È angoscioso?*

T. Certamente.

D. *Anche per un matematico?*

T. No, è una questione di formazione. Alcuni dei miei colleghi al contrario stanno bene solo quando si occupano degli spazi dell' analisi funzionale, vale a dire spazi di dimensione infinita. Non è il caso mio.

2. Di aporia in aporia...

D. *Lei dice che questa discretizzazione deriva da una visione tecnologica della scienza. Ma non è una costante della ricerca scientifica oscillare costantemente fra accumulazioni di conoscenze parziali e grandi salti in avanti?*

[C. Forse val la pena di ricordare che qui l'intervistatore usa in senso lato "aporia", un termine della logica che significa "difficoltà d'ordine razionale apparentemente senza uscita".]

T. Fondamentalmente, credo che il procedimento scientifico rinvii sempre a un problema centrale, una sorta di aporia fondatrice. La scienza cerca di risolverla, essa trova soluzioni che, in capo a un certo tempo, appaiono come fondamentalmente illusorie. Si ricomincia allora, con un piccolo perfezionamento, e si finisce per scoprire che anche quello è illusorio, e così di seguito. Il problema fondamentale rimane, e con esso, l'aporia...

D. *Il problema è sempre formulato esplicitamente? O piuttosto è sepolto nell'inconscio, come direbbero gli psicoanalisti?*

T. In certi casi, gli specialisti ritrovano la domanda, ma in linea di principio rifiutano di vederla direttamente: non la percepiscono che attraverso un certo equipaggiamento formale e concettuale. Ciò è vero soprattutto nelle scienze "dure" come la matematica o la fisica. Nelle scienze più "molli", la cosa è un po' diversa probabilmente.

L'aporia della biologia fondamentale, per esempio, mi sembra risiedere nell' incongruità del comportamento della materia vivente. Checché si dica, essa non si comporta nello stesso modo della materia inanimata. Benché secondo la dottrina ufficiale "la materia vivente deve essere soggetta alle stesse leggi della materia inanimata", ciò non impedisce che sia qualitativamente diversa. Dunque, quando il dogma riduzionista afferma che bisogna ridurre la vita al meccanismo e alla chimica, si soffre implicitamente di quella specie di violenza che vien fatta all'intuizione immediata; quella violenza nutre la pratica dello scienziato e, allo stesso tempo, la sua angoscia soggiacente.

D. *Ma lo scienziato non ha sempre, dietro un lavoro particolare, una domanda non formulata, eventualmente più metafisica, nel senso buono della parola, naturalmente?*

T. L'aporia che fonda ogni disciplina è effettivamente spesso un problema metafisico. Questi problemi sono stati d'altronde classificati dai metafisici. Leggiamo la tavola delle aporie kantiane, o quella delle categorie di Aristotele... C'era una volta un libro molto carino, oggi dimenticato, che si intitolava "I dilemmi della metafisica pura" di Charles Renouvier. Queste domande sono ancora ai nostri giorni al centro di tutte le grandi discipline, e anche delle scienze umane. Evidentemente, più si va verso le discipline periferiche, più specializzate, e più l'aporia fondatrice si tecnicizza in qualche modo, più essa diviene un problema concreto, diretto, per cui si possono prendere in considerazione delle soluzioni.

D. *Le scienze umane, le scienze sociali sono più suscettibili di parlare in modo esplicito di questi problemi?*

T. Non so. Per me, per esempio, la sociologia cerca di rispondere a un problema fondamentale, quello della stabilità del potere e della sua origine. Origine e stabilità del potere politico: che cos'è che produce il fenomeno del potere nelle società umane? Se ci si dirige verso un'epoca storica ben delimitata, questo problema prenderà un forma più specifica. Si cercherà di comprendere perché la repubblica romana divenne un impero, perché la monarchia francese partorì una repubblica nel 1789-1793. Il problema generale non fa che localizzarsi, che specificarsi.

D. *È facile condurre a termine questo interrogativo essenzialmente personale in un quadro in cui certe discipline scientifiche suppongono un lavoro più o meno collettivo? Non è forse altrettanto vero per la matematica, in cui si può condurre un lavoro isolato, ma esistono pur sempre delle società di matematici...*

T. Una parte del lavoro è personale e individuale, un'altra è collettiva: è il confronto delle prove con le altre. In matematica, bisogna prima dimostrare a se stessi e poi dimostrare agli altri. Quando si è molto dotati, si possono scrivere da soli fin da principio dimostrazioni complesse; il che esige una mente molto solida. Temo che non sia il mio caso.

D. *Che cos'è una forma mentale non solida?*

T. Sono le persone che sono capaci di vedere delle cose, ma che non sono in grado di formularle in modo da renderle plausibili o credibili per altri. È una difficoltà di trasformare una convinzione personale in una credenza sociale. La distanza è immensa fra la convinzione personale e la dimostrazione: si può benissimo essere convinti di qualcosa e non riuscire a dimostrarla nel senso tecnico del termine.

Avviene spesso che si abbia un'intuizione che non è completamente precisata; si è sicuri che sia vera, ma se si cerca di formularla, in un quadro diciamo accettabile per gli altri, si può essere condotti a formulazioni di cui non si è più sicuri, perché non si saprebbe più dimostrarle. È il problema: formulare prima, formalizzare dopo. Passare da un'intuizione personale al linguaggio dei nostri pari!

D. *E la comunità scientifica non è molto tenera! Ha ragione di non esserlo, d'altronde: è la chiave del rispetto che si porta alla scienza. Bisogna veramente dimostrare in modo convincente.*

T. Talora è abbastanza doloroso: quando X... fa una congettura che non è riuscito a delucidare completamente, e Y... viene a portargli la soluzione di quella congettura, X è felice di aver formulato quella congettura, ma soffre di non averne trovata egli stesso la dimostrazione...

D. *Per tornare a questo cammino di aporia in aporia: lei aveva coscienza, quando ha cominciato con la matematica, che sarebbe entrato in questa ricerca senza fine?*

T. No, perché esiste malgrado tutto una sorta di materiale acquisito. La matematica, da questo punto di vista, è malgrado tutto una scienza che fornisce un materiale del genere. Quando nella vita si è trovato un teorema, ci si dice che si partecipa ad una certa forma di immortalità, checchè si faccia. Illusione, forse...

D. *È una metafora dell'immortalità?*

T. Certo, ma fra tutte le immortalità fittizie con le quali ci prendiamo in giro, è pur sempre una delle più solide.

D. *Ma è per questo che si diventa matematici?*

T. L'esperienza del matematico non conduce a delle aporie. Ci sono certamente delle aporie particolarmente impressionanti anche in questo campo: c'è per esempio il dibattito sul teorema di Gödel; è il fatto che si tenta di dimostrare la non-contraddizione dell'aritmetica, nel quadro concettuale ammesso più correntemente in matematica, l'assiomatica di Zermelo-Fränkel, per essere tecnici... Si arriva a dimostrare che la non-contraddizione dell'aritmetica non è dimostrabile. C'è qui un aspetto aporetico, è evidente. Ma ce la si può cavare dicendo: bisogna forse cambiare assiomatica, e le cose si sistemeranno. In realtà, la maggior parte delle menti è convinta che questa aporia sia qui per restare, quale che sia il modo in cui la si affronta. Insomma, sotto questo aspetto matematico, si finisce per vedere che tutte le analisi di fondamento che si propongono in matematica sono analisi che possono avere un certo interesse locale, ma che non risolveranno il problema filosofico di sapere da dove vengono le strutture matematiche.

D. *Insomma, la motivazione per diventare matematici e, soprattutto, per proseguire e orientarsi verso un tipo o l' altro di ricerca, come si spiega? A quale domanda voleva rispondere lei diventando matematico?*

T. Guardando all'indietro, penso ora che la matematica dia una *forma mentis* che è difficile avere senza praticarla. Credo che sia la sua prima virtù. Permette di vedere le cose da un angolo in cui, nel pensiero concettuale ordinario, non si vede. È così che sento il suo ruolo essenziale. Non è il calcolo, contrariamente a ciò che crede la maggior parte delle persone. La parte di realtà che si può descrivere veramente bene con leggi calcolabili è estremamente limitata. Ma la possibilità di astrarre situazioni concrete in enti matematici, questo mi sembra molto prezioso.

D. *Questa astrazione permetterebbe di trovare sistemi di relazione fra gli oggetti, o una combinazione di strutture, in cui la natura epifenomenica, aneddotica, dell'oggetto è meno importante che non un certo numero di configurazioni che possono esistere?*

T. È così che percepisco le cose nella teoria delle catastrofi. Questo è legato al fatto che l'analogia non è qualcosa di arbitrario. L'analogia, la metafora, contrariamente al modo di vedere comune che ne fa qualcosa di approssimativo, di fluido, mi appare come una relazione stretta e che si può, in molti casi, esprimere matematicamente, anche se questa espressione matematica in sé non ha interesse nel processo mentale che induce uno a prendere in considerazione l'analogia. Le ho già parlato di quella analogia formulata da Aristotele sulla sera e la vecchiaia, in rapporto al giorno e alla vita. La vecchiaia è la sera della vita; la sera è la vecchiezza del giorno. Ci sono lì due formulazioni di cui una si accetta molto più facilmente dell'altra; è interessante capire perché, ma ciò che è interessante soprattutto, è che questa analogia, in un certo senso, è perfettamente corretta.

La struttura formale di questa analogia è semplicemente la nozione di bordo. Lei ha qui un intervallo temporale; questo intervallo ha una fine; si chiama "sera" o "vecchiaia" l'intorno "tubulare", se così posso esprimermi, della parola "fine", e la catastrofe corrispondente è per me la piega. C'è un regime stabile e un altro instabile che si incontrano. Ora, ciò che vi è di curioso, è che quando si guarda geograficamente come si presenta la distinzione fra il giorno e la notte, è un grande circolo sulla terra. Lei ha il sole, e i suoi raggi formano un cilindro circoscritto alla terra; il meridiano di contatto esiste in ogni istante. La terra gira, e questo meridiano si sposta sulla terra. Ma, dal punto di vista del raggio solare, questo meridiano di contatto è precisamente una piega, nel senso della teoria delle catastrofi. Da questo punto di vista, dunque, la distinzione fra giorno e notte è realmente la manifestazione di una piega. È un po' meno evidente per la vita e la morte.

D. *Perché funzioni l'analogia, bisognerebbe che una volta morti, si possa resuscitare...*

T. Perché funzioni in modo circolare, sì.

D. *In questo approccio, si fa necessariamente appello all'intuito, alla fantasia. Si potrebbe forse tentare un raccordo fra la creazione artistica e la creazione matematica. Nei due casi, esiste una certa tensione verso un formalismo. Lei ha alluso alla matematica come a un mezzo per controllare il disordine. La creazione artistica, in qualche modo, cerca anch'essa di mettere un po' di ordine. Questo parallelo le sembra accettabile?*

T. Il problema dell'estetica è difficile. Ho scritto un po' a questo proposito, ma devo confessare che avere una teoria soddisfacente è ben difficile. Al fondo dell'estetica mi sembra che ci sia il sacro. Che cosa è il sacro? Questo mi conduce alla mia teoria delle pregnanze e delle salienze. L'idea iniziale è che, già nel mondo animale, quasi tutto il comportamento è retto dal fatto che in presenza di certe forme percepite dall'animale, si scatenano delle reazioni di attrazione e di repulsione nei confronti di quella forma, sia essa visiva, uditiva, olfattiva, eccetera. Nei casi più rudimentali, ci sono sempre questi fenomeni di attrazione e di repulsione.

Io credo che il sacro, nell'uomo, sia stato caratterizzato dal fatto che questo asse di attrazione-repulsione può, in un certo senso, tornare su se stesso, compattato in un punto all'infinito. Questo punto all'infinito è precisamente il sacro. Altrimenti detto, il sacro si realizza ogni volta che noi siamo in presenza di una forma che ci pare rivestita di un potere infinito, che è fatto al tempo stesso di attrazione e di repulsione. Poiché questi due infiniti si compensano, si è immobilizzati in rapporto a questa forma, se ne è affascinati e non ci si muove più. A partire da questa situazione estrema che non si può sopportare a lungo, compaiono dei modi di accomodamento, degli addolcimenti di questa paralisi prodotta dal sacro. Questo agisce in due direzioni: ci sono l'attrazione e la repulsione, e c'è la fonte del sacro e dell'individuo, il soggetto umano. Può avvenire allora che venga reintrodotta una certa interazione tra il soggetto e la forma, fonte del sacro. Ciò può avvenire in due modi diversi: o è la forma che agisce o è il soggetto. Se è il soggetto che agisce sulla forma sorgente, si è nel campo della pragmatica. Se è al contrario la forma che agisce sul soggetto, si è piuttosto nel campo dell'affettivo. E questo affettivo si decompone in attrattivo e in repulsivo. Io vedo questa specie di dispiegarsi del sacro in un piano riferito a due assi: il primo che va dal pragmatico all'affettivo, o ancora dal pragmatico al puramente estetico o puramente soggettivo, il sentimento soggettivo senza reazione; il secondo sarebbe il piano attrazione-repulsione. Il piano che dispiega l'azione è sotteso dall'efficacia-inefficacia. C'è un altro piano di spiegamento che è il carattere attrattivo-repulsivo. Abbiamo allora degli oggetti efficaci-attrattivi (è il caso degli alimenti, sotto la loro forma biologica più pura). Per opposizione, ci sono quelli che sono inutili e repulsivi: l'escremento. D'altra parte, c'è l'efficacia repulsiva e l'inefficacia attrattiva.

Penso che l'arte sia essenzialmente lo spiegamento dal lato dell'inefficacia attrattiva. L'oggetto d'arte in se stesso non è efficace, ma realizza un certo piacere della sensazione: realizza una certa attrazione.

L'efficacia repulsiva è al contrario lo spiegamento dall'alto della scienza e della magia.

D. *Torno alla mia domanda: il fatto che per comporre un oggetto artistico si sia condotti a fare ordine a partire dal disordine, a formalizzare, e per conseguenza a fare appello a dei sistemi al tempo stesso* *di rivelazione e di composizione, questo non ha forse un carattere di omologia con il modo di procedere del matematico?*

T. In un certo senso, credo che l'arte vada molto più lontano del modo di procedere del matematico. Quest'ultimo è abbastanza strettamente controllato. È controllato socialmente. Il procedere dell'artista, da parte sua, non sfugge a un certo controllo sociale, ma l'oggetto d'arte non è proprio suscettibile di un criterio oggettivo, e nemmeno di un criterio sociologico valido. Non mi sembra troppo audace pensare che vi siano granai in cui giacciano abbandonate opere valide che nessuno conosce. Mentre non credo che esistano in natura esseri mezzi matti che pensino nel loro angolino senza cercare di pubblicare, e che possano esistere dei risultati di matematica che potrebbero rivoluzionare la scienza esistente. La differenza mi sembra abbastanza fondamentale.

Ma dopo tutto, non sono che delle riflessioni.

3. Qualitativo-quantitativo, continuo e discontinuo: materia e pensiero...

D. *Parlando della teoria delle catastrofi, lei ha insistito sulla sua natura eminentemente qualitativa: essa non risponde a certi criteri quantitativi che spesso si esigono. Ha delle virtù esplicative, lei ha detto, ma non è assolutamente predittiva.*

Vorrei che precisasse questi concetti di qualitativo-quantitativo. Così, lei dà l'esempio dell'aggressività del cane, ma aggiunge subito che non è questione di dare una misura di questa aggressività. Certo. Ma se non se ne può dare una misura esatta, non si possono lo stesso instaurare, come si fa talvolta in quella psicologia che si chiama sperimentale, dei livelli che permettano di classificare l'aggressività? Non è un principio di quantificazione? Dove è la frontiera fra qualitativo e quantitativo?

T. Torno sempre alla mia citazione di Rutherford: "Qualitative is nothing but poor quantitative". Sono, ben inteso, perfettamente convinto che il qualitativo è molto di più del quantitativo mediocre. Tutta la topologia andrebbe collocata nel capitolo degli esempi di questa convinzione. In che cosa è diversa una sfera da una palla [piena]? La differenza non è veramente quantitativa. In che cosa differisce una circonferenza da un disco? Non è una questione di quantità, è un problema di qualità.

Ciò che è topologico è essenzialmente qualitativo, non quantitativo. Così, nel campo della matematica, abbiamo strutture che sono interessanti, e che non sono quantitative. Vi è tuttavia in ciò che dice Rutherford un aspetto interessante. Non si può affermare senz'altro che è grottesco. Questo sarebbe certamente insufficiente.

D. *Poniamo la domanda in altro modo: traendo l'idea dalla formulazione della catastrofe, si può dire eventualmente che c'è un bordo che separa il qualitativo dal quantitativo? O abbiamo a che fare con enti di natura così diversi che non si può parlare né di continuità né di contiguità?*

T. C'è qualcosa come un bordo. Una fonte comune: il continuo. Per me, è il continuo geometrico, il continuo topologico, che soggiace al tempo stesso al qualitativo e al quantitativo. Ma la distinzione fra i due riappare quasi subito: quando un oggetto è connesso (quando ci sono due punti in questo oggetto, che si possono congiungere, si può far muovere un punto in modo continuo e farlo entrare nell'altro senza uscire dall'oggetto), la connessione di questo oggetto è una nozione qualitativa. Ma, se un un oggetto non è connesso, vuol dire che è fatto di parti, di parecchie componenti connesse; e allora queste si possono contare. L'essere connesso, a questo punto, ha la particolarità che ha qualcosa al tempo stesso di quantitativo e di qualitativo. Intrinsecamente, ha qualcosa di qualitativo; ma non appena si rifiuta la qualità di essere connesso a uno spazio o a un oggetto, esso genera automaticamente qualcosa di quantitativo. Questa distinzione in fondo è molto delicata. Il continuo è in un certo senso il substrato universale del pensiero, e del pensiero matematico in particolare. Ma non si può pensare a niente in modo effettivo senza avere qualcosa di discreto in questo svolgersi continuo dei processi mentali: ci sono delle parole, ci sono delle frasi, eccetera. Il logos, il discorso, è sempre qualcosa di discreto; sono parole che entrano in una certa successione, ma parole discrete. E il discreto richiama immediatamente il quantitativo. Ci sono dei punti: si contano; ci sono delle parole in una frase: si possono classificare qualitativamente secondo la funzione grammaticale che occupano nella frase, ma ciò non toglie che vi sia un'incontestabile molteplicità.

Questa risposta forse non è pienamente soddisfacente, ma non credo che si possa andare oltre.

Per me, l'aporia fondamentale della matematica sta proprio nell'opposizione discreto-continuo. E questa aporia domina nello stesso tempo tutto il pensiero.

D. *Lei mi ha detto che, nel corso dell'elaborazione della teoria delle catastrofi, ha tentato di ricondurre le discontinuità apparenti a un continuo soggiacente.*

Un secolo fa ebbe luogo una disputa a proposito del sistema nervoso centrale: è continuo o discontinuo? Si sa dopo tutto che nelle nostre percezioni c'è un aspetto discontinuo, e nessuno può discuterlo; la questione è stata risolta anatomicamente: Santiago Ramon di Cajal aveva ragione. I neuroni sono contigui. Forse questo non cambia nulla nello psichismo umano. Ma, malgrado ciò, come si pone lei riguardo a questi fatti?

T. Per cominciare, non sono d'accordo quando lei dice che sappiamo che le nostre percezioni sono discontinue. Quando io la vedo, la vedo in modo continuo!

D. *Ritiro "percezione". Volevo dire sensazione: i recettori sensoriali funzionano in modo discontinuo.*

T. Ecco, qui lei introduce le conoscenze di un neurofisiologo. Da parte mia, resto alle conoscenze che traggo dalla mia intuizione primaria. Con quale diritto dichiara che lo scienziato neurofisiologo ha delle conoscenze più pertinenti delle mie impressioni? Rifiuto questo argomento.

D. *E tuttavia ci sono cose acquisite. Lei, qualche tempo fa, ha preso l'esempio del cinema: si succedono delle immagini, e grazie ad una piccola astuzia, un otturatore, e alla persistenza retinica, ho la percezione del continuo. Ma se tento di capire come funzionano le cose, ho l'intuizione di un continuo sul quale si svolgono degli avvenimenti più o meno discretizzati. Fin dove posso credere al discontinuo e al rapporto fra il discreto ed il continuo?*

T. Da parte mia, concepisco più facilmente l'idea di fabbricare il discreto a partire dal continuo che di fabbricare il continuo a partire dal discreto. So bene che la teoria matematica standard è quella che si chiama definizione del numero secondo Dedekind, ottenuta con dei tagli[2]. Ciò permette teoricamente di costruire il continuo a partire dall'aritmetica, vale a dire a partire dal discontinuo. Ma questa operazione è in realtà altamente non costruttiva. Essa consiste nel dire:

[2] Il discorso si riferisce a quel capitolo della teoria dei numeri che nei testi liceali era chiamato "Studio delle coppie di classi contigue", in cui si dimostrava l'esistenza dei numeri irrazionali

il reale si costruisce prendendo dei numeri razionali, facendoli sempre più vicini l'uno all'altro, e poi, quando si prende un taglio, vale a dire un sistema di due classi, tale che ogni razionale della prima classe sia più piccolo di ogni razionale della seconda, e si accetta che la differenza fra i due possa avvicinarsi a zero, allora si definisce un numero reale. È il modo classico di costruzione del gruviera: si prendono dei buchi e ci si mette il formaggio intorno. Ma c'è molto poco formaggio e moltissimi buchi! E finisce anche per non esserci più formaggio; non restano che dei buchi! Come si può fabbricare una pasta omogenea continua soltanto con dei buchi? Confesso che questo va oltre le mie capacità...

L'origine del pensiero scientifico la si trova nelle aporie di Zenone di Elea: la storia di Achille e la tartaruga. C'è in essa l'opposizione cruciale tra discontinuo e continuo.

D. *La scienza ci induce a pensare in un certo modo: le immagini di sintesi divengono del tutto soddisfacenti a partire dal momento in cui sono fondate su dei "punti", dei pixel, praticamente impercettibili in quanto punti. La fisica quantistica parla anche di quel piccolo quanto minimo, che è al tempo stesso un quanto di spazio, di energia, eccetera. Sono le unità più piccole, le quantità più piccole che si possono concepire, anche teoricamente. La fisica quantistica parla a favore di un universo discontinuo? Non so, ma ne parla in questi termini.*

T. Prendiamo un esempio per capire bene. Personalmente, io sento la meccanica quantistica come uno spago arrotolato intorno a un tamburo. Se lei avesse uno spago di lunghezza infinita, potrebbe teoricamente arrotolarlo un numero indefinito di volte intorno al tamburo. Un giro di tamburo è il quanto. Sono d'accordo che si tratta di una metafora, ma è così che immagino la transizione quantistica. Perché non si sa: si vorrebbe vedere che questo avviene da qualche parte... L'enigma è che l'effetto quantistico, la transizione quantistica, un elettrone di un atomo che salta da un livello a un altro, questo influenza teoricamente tutto lo spazio, non soltanto lo spazio locale ma tutto il sistema planetario, fino alle galassie più lontane. È incomprensibile.

D. *Lei pensa che il concetto di quanto non sia un concetto operativo?*

T. Oh certo! È altamente operativo, ma non è intelligibile. Pensi al concetto di fotone molle... Quando la frequenza ν è molto grande, l'energia $h\nu$ del fotone stesso è molto grande, allora il fotone ha un marcato carattere di particella, lo si può localizzare; si può descrivere la sua traiettoria perché, in quel momento, si dice che c'è sovrapposizione delle ondulazioni; lo si può dunque trattare come un granello di energia che si localizza da qualche parte. Se, al contrario, la frequenza ν si fa tendere a zero, allora, per effetto del principio di Heisenberg[3], non si può più localizzare il fotone: esso si estende in qualche modo in tutto lo spazio, e, allo stesso tempo, le sue manifestazioni fisiche divengono sempre più difficili da cogliere, perché c'è molto poca energia in ogni punto. Teoricamente, quando ν è uguale a zero, esso si estende in tutto lo spazio e la sua energia locale è nulla. Si dice allora che il fotone è "molle"; dunque, è in fondo un oggetto che ha molto poca energia, e si dovrebbe poter dire che non significa granché, perché ha pochissima energia: si deve poterlo trascurare. In realtà, si estende su tutto lo spazio. È paradossale: un oggetto enorme dal punto di vista spaziale che può nello stesso tempo avere un'energia quasi nulla; è scandaloso per la mente!

D. *Io al contrario trovo questo molto soddisfacente. Riesco bene a immaginarmelo. Una grande quantità di energia su un punto diviene quasi un fatto materiale. Questa diluizione progressiva fa sparire la materialità dell'oggetto, ed esso si diluisce effettivamente nello spazio.*

T. Ma allora lei introduce qualcosa come un pensiero qualitativo, una specie di continuo soggiacente. È d'altronde così che si definisce la ψ della meccanica quantistica: il valore di ψ, la sua lunghezza, è la capacità di rivelare l'oggetto. Effettivamente, quando ψ, una somma di ψ quadrato è sempre uguale a 1, e quando la si estende su tutta la lunghezza dell'asse, in ogni punto, non resta granché da raccogliere...

D. *Si può dire che si è allora nella percezione di una certa idea di continuo, con la possibilità di definire, di individuare un certo numero di fasi intermedie che potrebbero essere l'equivalente delle pieghe e delle catastrofi del suo linguaggio.*

[3]Nella fisica quantistica, il principio di indeterminazione di Werner Heisenberg (formulato nel 1927) stabilisce che *non è possibile conoscere simultaneamente posizione e quantità di moto di un dato oggetto con precisione arbitraria*. Questo principio si applica a qualsiasi coppia di variabili canonicamente coniugate. Nelle formulazioni moderne della meccanica quantistica il principio è derivabile dai postulati della teoria, per cui diventa un teorema.

T. Sono convinto che c'è una dinamica continua, infra-particellare, soggiacente alla meccanica quantistica. Prenda l'esperienza dei buchi di Young: ha una sorgente luminosa, e la radiazione passa attraverso due fori, e poi, su uno schermo, si vedono le interferenze. Questo ha luogo anche se, come si dice, è fotone per fotone, cioè se la radiazione è discontinua. È ciò che si dice. Bisogna allora immaginarsi la radiazione come un processo continuo che influenza tutto lo spazio, che si cristallizza nei fori, in una certa misura, e si rimescola poi. Ma il ricordo che ha conservato delle perturbazioni subite, non potrà avere effetto che là dove le frange sono luminose; non ce ne sarà quando le frange sono oscure. È evidentemente difficile da concepire, ma non è mostruoso in sé.

D. *Quando è che si deve discretizzare? È per capire? E quando si deve preservare questa percezione della continuità? È forse che per sentire, per presentire, si ha bisogno della trama continua, e per repertoriare, comprendere, classificare, si ha bisogno di discretizzare? In fin dei conti, lei stesso pratica questa alternanza permanente fra un atteggiamento che discretizza e un pensiero che rimette in un quadro continuo.*

T. Certo. Non so più quale matematico del XIX secolo, disse che la matematica rifletteva questi due bisogni irreprimibili del cervello umano: il bisogno di vedere, e noi non possiamo vedere che l'estensione continua; e il bisogno di comprendere, e noi non possiamo comprendere che il finito, e dunque il discreto.

D. *Somiglia un po' alle relazioni di indeterminazione di Heisenberg: non si possono avere tutte e due le cose contemporaneamente.*

T. Certamente. Se si vede, non si capisce più. Sempre che si possa praticare il principio di Heisenberg. Lo si pratica, ma non lo si capisce. I fisici, a forza di praticarlo, finiscono per acquistare una certa flessibilità.

La meccanica quantistica è incontestabilmente lo scandalo intellettuale del secolo!

D. *Cosa intende lei quando parla di scandalo?*

T. È che la scienza ha rinunciato all'intelligibilità del mondo; ci ha realmente rinunciato! È qualcosa che si impone e che non è intelligibile.

4. Il pensiero e la materia

D. *Sembra decisamente che lei si situi proprio su una linea di cresta tra materialismo e spiritualismo.*

T. Penso in effetti che il famoso dilemma fra Platone e Aristotele esista ancora, ben inteso, ma sotto molti aspetti, si può pensare di risolverlo, almeno parzialmente.

D. *Quale sarebbe la sua posizione?*

T. Direi che, da una parte, se mi pongo da un punto di vista idealista e spiritualista, non esistono che oggetti del pensiero. È d'altronde ciò a cui giunge, in fondo, il materialismo, quando lo si guarda in un certo modo.

D. *In quale modo?*

T. La materia stessa è un oggetto del pensiero. In ultima analisi, penso effettivamente che ogni esistenza sia un oggetto del pensiero. Dovrei piuttosto scegliere di dire: in prima analisi.

Ma dall'altro lato, abbiamo perfettamente coscienza della realtà del mondo che ci circonda. Per quel che riguarda i vincoli materiali che pesano sull'apparizione del pensiero, non vi è alcun dubbio che esistano. È ciò che chiamo l'argomento "manganello". Il materialismo ha un argomento di questo tipo: se mi precipito su di lei con un manganello e colpisco il suo cranio, non penserà più! Questo argomento ha un certo valore, non bisogna nasconderselo. Ma allo stesso tempo, per qualcuno che tiene alle forme, come me, penso che l'argomento-manganello possa essere interpretato anche da un punto di vista platonico: se il manganello mi impedisce di pensare, è perché il manganello distrugge la forma del mio cervello; ora questa forma è necessaria in un certo senso a realizzare quelle forme spirituali che sono le idee.

D. *Che cosa preesiste a che cosa?*

T. Certo: che cosa è anteriore, ontologicamente anteriore? Penso che il problema del carattere anteriore e primitivo di una modalità di esistenza rispetto ad un altro non sia fondamentale. E lo penso ancor di più dato che ciò che si chiama materia, in fondo, è un'entità difficilmente definita; quando si guarda molto attentamente la materia, lo si capisce: si vedono prima i dettagli dalla tessitura, poi si scoprono le molecole, poi gli atomi. Si vanno poi a cercare le particelle. Insomma, più si analizza nei particolari la materia, più essa si riassorbe in una sorta di nebbia. Cosicché se si pone la virtù del materialismo nel primato della materia, vale a dire, in fondo, nel primato del modo di esistenza scientifico delle cose, si rischia di ritrovarsi nella nebbia in questione. Il vero problema, come lo sento io, è piuttosto questo: quando si discute dell'anteriorità ontologica dello spirito e della materia, non si dovrebbe forse discutere piuttosto dell'anteriorità ontologica relativa, di ciò che chiamerei esistenza ingenua e esistenza scientifica? L'esistenza ingenua esiste senz'altro a livello della realtà ordinaria. Siamo degli oggetti, parliamo, abbiamo una coscienza netta che siamo in un universo che esiste, che esistiamo l'uno e l'altro, e che è una forma, diciamo, abbastanza primitiva dell'esistenza. Arriva poi la scienza che ci dice: no, in realtà, questa scrivania è fatta di atomi legati da relazioni e dal vuoto. E laddove crediamo che sia pieno, non è affatto pieno, è perfettamente cavo, ci sono pochissime cose. Bisogna credere allora che la realtà, come ce la dipinge la scienza, sia più fondamentale di quella che viviamo a livello usuale? E quest'ultima contiene i due ingredienti: la solidità della materia e, d'altra parte, l'evidenza immediata dello psichismo. È piuttosto su questo piano che io sento le cose. Sono tentato di dire che, per me, è la realtà ingenua che è ontologicamente anteriore alla realtà scientifica. Questa è sempre costruita, e la sua esistenza vale ciò che valgono le costruzioni scientifiche: delle cose eminentemente rivedibili e temporanee. Invece per la realtà immediata, si hanno tutte le ragioni di pensare che la concezione che abbiamo di un albero o di una pietra non sia molto diversa da quella che ne avevano i nostri antenati del paleolitico [4].

D. *Si tratta, in questo caso, di una conoscenza sensibile piuttosto che di una capacità di spiegare le cose in modo fondamentale.*

T. Che cosa è che lei chiama: spiegare a livello fondamentale? Avviene che, a livello di questa realtà ingenua, della vita di tutti i giorni, disponiamo di uno strumento che ci permette di arrivare realmente a non poche spiegazioni: il linguaggio. Il linguaggio ordinario è un mezzo di rappresentare le cose dotato di una capacità di descrizione e di spiegazione considerevole. E i fenomeni che la scienza pretende

[4] Questa argomentazione è stata sollevata con forza da almeno due filosofi moderni, M. Heidegger e B. Russel.

di spiegare sono in effetti dei fenomeni difficilmente suscettibili di apprendimento nella vita di tutti i giorni. È del tutto eccezionale che un teorema scientifico possa essere verificato direttamente. Dal tempo di Archimede, ognuno poteva, nel suo bagno, verificare la validità del suo principio. Oggi, non siamo più al punto in cui si può procedere a questa verifica con l'esperienza immediata, piuttosto con una riflessione elaborata a partire da un'esperienza un po' ricca. Tutto va molto più lontano, tutto è di gran lunga troppo raffinato. E penso che questa elaborazione conduca comunque a un certo allontanamento dal mondo quale lo conosciamo nell'immediato. È certamente grave!

CAPITOLO 3

SULLA SCIENZA

D. *Lei ha parlato della necessità di fronte a cui si è trovato, di dedicarsi all'epistemologia per rispondere alle critiche che le venivano fatte riguardo alla teoria delle catastrofi. Da che punto di vista ha avuto bisogno dell'epistemologia?*

T. Il fatto è che effettivamente sono stato oggetto di critiche sul terreno epistemologico. Mi sono dedicato un po' alla filosofia della scienza prima di impegnarmi nella filosofia più generale di cui abbiamo appena parlato.

Sono partito in qualche modo dalla validità della teoria delle catastrofi, e sono arrivato a interessarmi della posizione della scienza in generale, di quel che ci si può attendere dal punto di vista della conoscenza. È lì che ho cominciato a sviluppare delle posizioni critiche nei confronti del metodo detto sperimentale e della credenza abbastanza ingenua che si ha in generale delle virtù dell'esperienza che ci condurrebbe a dei progressi. Credo che la sperimentazione in sé non possa realmente condurre a dei progressi. L'ho già detto. Le ho detto ugualmente che essa non può permettere di controllare se non si ha una teoria, dunque se non si dispone degli strumenti di estrapolazione necessari per la previsione. Ora, mi trovo come di fronte a un muro: in una scienza come la biologia, per esempio, la gente rifiuta la necessità dell'immaginario in teoria. La teorizzazione, per me, è legata alla possibilità di immergere il reale in un virtuale immaginario, dotato di proprietà generative, che permettono di fare delle previsioni.

D. *Vale anche per la matematica?*

T. Si può dire che la matematica è immaginaria per essenza... Soprattutto se si assume il punto di vista materialista di M. Changeux.

Lei conosce il libro che ha pubblicato qualche mese fa, *Matière à pensée*[1]?

D. *Le conversazioni con Alain Connes?*

T. Questo dibattito non mi pare che vada molto lontano, perché le argomentazioni presentate da una parte e dall'altra sono ambedue nell'ambito della fede. È lo scontro fra due certezze. Ho eventualmente molta più simpatia per la posizione di Connes[2] che per quella di Changeux. Ma nel complesso questo dibattito non mi ha dato molto.

D. *Più simpatia perché Connes è matematico, o perché lei ha, in qualche modo, dei presupposti ideologici della stessa natura?*

T. Sono certo di essere rimasto matematico in larga misura. Ho dunque più simpatia... codisciplinare con Alain Connes che con Changeux. Penso d'altronde che il punto di vista strettamente materialista di Changeux non porti molto lontano. Sono di quelli che pensano che, anche nella scienza, l'introspezione e l'esperienza mentale hanno una funzione importante. Tutti i grandi progressi teorici, a mio avviso, provengono dalla capacità degli inventori di "mettersi nella pelle delle cose", per potersi identificare per empatia con qualunque entità del mondo esterno. E questa specie di identificazione trasforma un fenomeno oggettivo in una sorta di esperienza concreta e mentale.

D. *Lei ha dei ricordi personali di questo tuffo introspettivo?*

T. Non sono un fisico. In matematica non è la stessa cosa: si è nella situazione dei metodi, degli strumenti matematici, esattamente come davanti a degli strumenti materiali. Ci si serve di un metodo formale esattamente come ci si serve di un paio di forbici per tagliare un foglio di carta. È dello stesso tipo. C'è una specie di intuizione spaziale che entra in gioco in ambedue i casi. È questa specie di continuo universale che serve a inviluppare da una parte la formalizzazione, e dall'altra parte l'apparecchiatura spaziale abituale. È a mio avviso su questo terreno che si perviene a fare la giunzione tra i due modi di conoscenza, quella che si dice oggettiva e quella che io chiamerei intuitiva, introspettiva.

[1]Jean Pierre Changeux e Alain Connes, *Materia e pensiero,* Bollati Boringhieri, 1991.

[2]Cfr. anche A. Connes, A. Lichnerowicz, M.P. Schützenberger, *Triangolo di pensieri*, Borla Boringhieri, 2000.

1. Di nuovo sul rapporto qualitativo-quantitativo

D. *A proposito di metodo, di concezione del lavoro di ricerca scientifica: sui rapporti tra il rigoroso e l'approssimato, secondo lei la fisica, o i modelli quantitativi con la formula che funziona bene, sarebbe rigorosa, mentre il metodo che lei propone sarebbe approssimato?*

T. Così direbbero i fisici. Ma questo ci rinvia ancora una volta alla sentenza di Rutherford di cui ho parlato: "qualitativo non è che un mediocre quantitativo". Rutherford la pensa come lei: il qualitativo, è un cattivo quantitativo. Le ho già risposto che c'è un aspetto topologico del qualitativo. La topologia tratta la configurazione delle forme che non hanno niente a che fare con il dominio dello spazio, in linea di principio. Un'analisi topologica di una situazione ha un contenuto qualitativo che non è quantitativo. C'è, in questo senso, un contenuto qualitativo e non quantitativo nella teoria delle catastrofi.

D. *Un fisico potrebbe pensare in questo modo, lei diceva. Per tornare all'epistemologia, ho potuto notare in diversi colloqui che esiste una rivalità, anzi un certo antagonismo, tra la posizione dei fisici, il modo in cui si esprimono, e quella dei matematici. Alain Connes, di cui parlavamo poco fa, fa un'osservazione di questo genere a J.-P. Changeux: i concetti matematici precedono spesso di gran lunga anche la teoria fisica, appaiono prima che il fenomeno fisico venga identificato.*

T. Lei pone così un problema generale: è quello dell'osservazione. In un paesaggio di fenomeni, è possibile riconoscere un oggetto o una cosa se non se ne ha prima il concetto? È questo il punto semplicissimo: se non si ha il concetto di un oggetto, non lo si riconoscerà. Oppure, ci si limiterà a delle osservazioni: lì, c'è un'onda, qui, un piccolo sprofondamento, una piccola fenditura, un buco. Ma sono degli accidenti quasi topologici. Non è quantitativo. La possibilità di riconoscere un essere in generale, un'entità in un paesaggio empirico, è sempre a mio avviso subordinato ad una concettualizzazione.

D. *Ho creduto di capire che alcuni matematici vanno più lontano di questo: alcuni dicono che lo strumento matematico era già disponibile, prima che la fisica potesse averne bisogno. Le metafore che la fanno parlare di oggetti matematici, mentre altri parlano di enti matematici, non sono certamente senza significato.*

T. Lo ripeto, mi sembra che si possa osservare solo ciò di cui si ha preventivamente il concetto. Tuttavia, gli sperimentatori possono arguire dal fatto che, partendo da un sistema di concetti esistenti, l'osservazione o la sperimentazione possono apportare delle modifiche di questo sistema di concetti, e obbligarlo in qualche modo a biforcarsi in altre direzioni, permettendo così la creazione di nuovi concetti. È perfettamente difendibile. E si troverebbero certamente degli esempi.

Ma se si guarda la nascita delle grandi teorie scientifiche, si può dire che l'immaginazione, la costruzione concettuale, hanno preceduto in generale i dati dell'esperienza. La maggior parte della gente crede di eliminare il problema affermando brutalmente che è il dialogo del pensiero e dell'esperienza che fa il progresso. La metafora del dialogo è bella, ma occorrerebbe cercare di sapere come si svolge.

Io credo che il grosso dei concetti matematici sia di origine endogena. Non credo proprio alla possibilità di un'origine sperimentale di un concetto matematico, di un principio suggerito dall'esperienza. Esiste bensì la trasformata di Fourier, ma essa è venuta fuori dalla necessità di quantificare qualche cosa che esisteva già da prima: gli strumenti della musica. E si tratta sempre di vibratori, che emettono dei suoni, che hanno uno spettro. Occorre capire come si organizza questo spettro. In questo senso, questa teoria è essenzialmente un risultato dello studio dei fenomeni vibratori, e cioè degli strumenti musicali. Cos'è che ha creato la musica? Probabilmente non la matematica. Ma la melodia e l'armonia sono state veramente una delle grandi scienze dell'Antichità greca; il fatto che si potessero associare gli accordi a dei rapporti relativamente semplici di lunghezza di corde ha avuto una sua parte.

D. *Lei pensa dunque che la matematica abbia una natura piuttosto endogena, vale a dire che si evolva da sola, che i concetti si concatenino gli uni con gli altri, si arricchiscano, facciano dei progressi. La matematica si inventa...*

T. Direi piuttosto che si genera per una specie di dialettica interna che viene alla superficie solo molto progressivamente. Perché occorrono millenni affinché un concetto matematico acquisti realmente tutta la sua ricchezza. Certi epistemologi pretendono che il concetto di funzione non esistesse presso gli Antichi; altri affermano il contrario: nella Grecia antica, c'è pur stata la legge delle leve enunciata da Archimede. Una legge della meccanica, peraltro falsa, è stata proposta da Aristotele. È tuttavia probabile che non esistesse un concetto di funzione. Esso è apparso essenzialmente nel XVII e XVIII secolo, quando si sono cominciati a fabbricare dei polinomi in algebra, poi con questi polinomi si sono costruite funzioni più generali. Ma il concetto di funzione non è stato definito con precisione e in modo rigoroso se non da Leibnitz nel 1695, sembra. E allora, che prodigioso strumento per esprimere il determinismo delle leggi scientifiche! Prima della comparsa di questo concetto, era praticamente impossibile definire che cosa è il determinismo.

D. *La fisica si è messa in marcia?*

T. Certamente. Altrimenti detto, i progressi scientifici sono sempre subordinati alla possibilità di uno strumento mentale che permetta di esprimere le corrispondenze, le regolarità delle cose.

D. *Mi viene in mente una domanda: ci sono dei limiti alla scoperta matematica? C'è forse una questione un po' metafisica, ma, in altri termini, il numero dei concetti è finito o infinito?*

T. Basta pensare ai transfiniti di Cantor [3] per sapere che il numero dei concetti è infinito e anzi di un'infinità paurosa! Ma il problema è che questi transfiniti di Cantor sono oggetti che non hanno nessun interesse matematico. Il mio collega Dieudonné insiste molto su questo punto: sono degli oggetti che hanno affascinato alla fine del XIX secolo. Ci si rende conto finalmente che si tratta di enti del tutto inaccessibili. È una sorta di delirio. Si sono fabbricati degli enti, frutto di una fantasia delirante. Ma può succedere; c'è della matematica praticamente senza contenuto, della matematica vuota. C'è un'altra matematica che è pienamente significativa!

D. *Cosa è una matematica vuota? Si tratta di una matematica che non troverà mai applicazione? Mentre quelle che sono significative potrebbe eventualmente incrociare una scienza sperimentale?*

[3]Secondo Cantor, due insiemi A e B si dicono *equipotenti* se esiste una corrispondenza biunivoca tra A e B. L'equipotenza è una relazione di equivalenza; l'astrazione relativa a questa equivalenza è il "numero cardinale"(cioè A e B hanno lo stesso numero di elementi). Tale numero può essere finito o non finito (cioè transfinito). Il più piccolo numero cardinale transfinito (detto anche "alef zero") è la cardinalità dei numeri naturali. Un altro numero transfinito è il continuo, che è la cardinalità dei numeri reali, la cardinalità dei punti di una retta e di un segmento. Si vede facilmente che questa cardinalità è "maggiore" di quella dei numeri naturali: basta pensare ad una retta e ai suoi punti a coordinate intere.

T. Certamente c'è qualcosa di questo. Una matematica vuota è matematica che è stata costruita per semplice estrapolazione, a causa della generatività interna di una struttura. Se prendo tutti gli interi, 1, 2, 3, 4, ecc., l'addizione + 1 non si ferma mai. Vado dunque all'infinito. Qual è lo statuto ontologico di un intero molto grande, così grande che non lo si possa realizzare fisicamente? Si è molto rimproverato a Benveniste[4] la sua teoria dell'acqua. Egli pretendeva che l'acqua avesse una memoria, quando si fosse diluita la sostanza 10^{110} volte. L'argomentazione diceva: se si prendono tutte le particelle contenute in un universo conosciuto, non si raggiunge questo numero. Si raggiunge forse 10^{70} o qualcosa di vicino, ma non questo numero. Si è dunque considerata un'operazione che non si potrebbe realizzare nemmeno in tutto l'universo. Non so che valore abbia questo genere di argomentazione, ma è certo che un numero troppo grande dà sempre un po' le vertigini.

D. *Quale che sia il carattere virtuale dell'abbondanza matematica, la sua relazione con un reale concreto, sia pure più o meno vago, più o meno lontano, si trova sempre dietro ad esso?*

T. Sì, ma penso che ci sia qualcosa come un tronco comune della matematica, che si è obbligati ad apprendere se si vuol praticare la matematica. Questo tronco comune è costituito giustamente dalla parte della matematica che è servita a costruire le leggi fisiche, a dare il modo di rappresentare ciò che può venir rappresentato matematicamente nel mondo.

2. Sulla natura degli enti matematici...

D. *Lei parla spesso di enti matematici...*

T. Si potrebbero prendere in considerazione delle strutture o dei sistemi di associazione del tipo di quelle che una volta si chiamavano *categorie*. C'erano le categorie aristoteliche, le categorie kantiane, ecc. È un po' nello stesso spirito che ci sono, credo, in matematica degli enti fondamentali che, in un certo senso, possono dispiegarsi in strutture matematiche. Lo statuto di questi oggetti è evidentemente qualcosa di molto difficile da esplicitare perché si esita tra una situazione che si direbbe puramente psichica (tutto questo è nel nostro cervello, nelle nostre sinapsi, e se queste non esistessero, questi enti

[4]Jaques Benveniste (1935-2004)

non esisterebbero) e un'altra che ha qualcosa della realtà oggettiva. Penso personalmente che sia una visione errata e che si debba dare a questi enti un'esistenza che forse è deducibile per astrazione dagli oggetti concreti, ma che, ciononondimeno, essi hanno una tale ubiquità che si è obbligati a riconoscere che sono presenti in qualche modo dappertutto nel reale.

D. *Alcuni dei suoi colleghi non esitano a dire che questi enti matematici possono addirittura preesistere all'esperienza fisica per esempio, e che è la fisica che si serve eventualmente di questi concetti. Lei d'altronde dice cose molto simili.*

T. Certo. Personalmente credo che l'esperienza mentale, in molti casi, può andare molto più lontano della sperimentazione nel senso tecnico del termine. La prova migliore è d'altronde che le idee fondamentali che abbiamo sulla materia non differiscono granché da quelle che avevano proposto i presocratici 2500 anni fa. Andiamo molto più lontano perché abbiamo la matematica. Se le nostre concezioni dello spazio differicono da quelle dell'Antichità, è solo perché abbiamo la matematica, dunque strutture di cui si pretende che siano esse stesse psichiche.

D. *Si tratterebbe dunque di una sorta di elaborazione progressiva, perché c'è una certa continuità a partire dalle concezioni matematiche degli antichi Greci fino ai nostri giorni. Si è sviluppato un certo numero di cose che hanno arricchito i concetti, in qualche modo.*

T. Sento le cose in modo un po' diverso, nel senso che, anche se si accettasse un punto di vista strettamente materialista, dicendo che le strutture matematiche sono semplicemente il risultato delle acquisizioni delle nostre attività cerebrali, si potrebbe eliminare il fatto che le nostre attività cerebrali non sono esistite sempre. Esse sono state create da un organismo che si è formato, e se si è formato, non è solo a causa di una codificazione molecolare, come pensano i biologi. Ci sono costantemente leggi di carattere fisico che sono in gioco nella morfogenesi biologica, e in particolare in quella del cervello. Queste leggi si possono esprimere in modo astratto; nella misura in cui si possono realmente dominare, in cui si possono formulare, esse sono esprimibili in maniera astratta. In realtà, dunque, non si sfugge alla necessità di considerare degli enti astratti nella organizzazione della realtà.

D. *Le idee platoniche esistono in un universo virtuale: si potrebbe pensare secondo lei che le entità matematiche siano di natura confrontabile?*

T. Le idee matematiche sono prodotte nel nostro cervello nella misura in cui noi le pensiamo. Ma poiché esistono quando noi non le pensiamo, esse esistono da qualche parte, e non soltanto nella nostra memoria: esse esistono, direi, ugualmente altrove; sono all'opera in un gran numero di situazioni concrete.

D. *Esistono dunque ancor prima che siano state scoperte?*

T. Certamente! Si realizzano in un certo senso in un caso o nell'altro, in un materiale opportuno o in un altro. È la vecchia idea della partecipazione che era già in Platone e che rimane, credo, del tutto corretta. Non è incompatibile con l'idea di Aristotele di una materia e di una forma, giacché la materia si subordina a una forma.

D. *Lei parlava dell'idea secondo cui lo psichismo sarebbe prodotto dal cervello, come dice Changeux. Se si riprende questa ipotesi, quelli, che, alla maniera dei matematici parlano di enti matematici, dicono che c'è un'anima...*

T. Ciò che mi piace molto è la concezione aristotelica: l'anima come forma del corpo. Voglio ben credere, e Aristotele è formale su questo punto, che l'anima non si possa separare dal corpo: lo dice esplicitamente nel *De Anima*, e si è detto per questa ragione che era materialista. Ma, d'altra parte, la capacità di un corpo di essere il supporto di un'anima, è una cosa che si presenta come una struttura o come una legge a carattere formale, associata precisamente alla forma in senso morfologico, al senso spazio-temporale dell'organizzazione. Il tutto è evidentemente legato alla forma dei flussi che percorrono l'organismo: sanguigno, neuronale, metabolico in generale. Per me tutto questo è una forma, e ne esce come una forma residua a carattere organizzatore: l'anima.

Ma la struttura, il carattere in qualche modo intrinseco di questa forma residuale, è essa stessa qualcosa come il risultato di una struttura formale, a partire da quel gigantesco oggetto che è la considerazione della forma di tutti i movimenti molecolari e fisici del nostro organismo...

D. *...che è di una complessità straordinaria!*

T. Se ci si mette dal punto di vista molecolare... 22,4 litri contengono il numero di Avogadro (6×10^{23}). Il numero di molecole in gioco nel corpo umano dovrebbe dunque essere intorno a 3×10^{27}. Se si volesse rappresentare con un diagramma la configurazione del moto di queste molecole, occorrerebbe uno spazio di dimensioni almeno due volte 3×10^{27}... È abbastanza enorme! E il materialista convinto, in generale, fa grosso modo appello alle proprietà della materia, dato che si crede di conoscerle, mentre non si conoscono! Questo si dimentica troppo facilmente: la ragion d'essere delle proprietà della materia resta un enigma. Gli scienziati non hanno l'abitudine di confessare la loro ignoranza! Ma resta che gli stati fasici della materia (solido, liquido e gassoso) aspettano ancora una teoria completa che ne renda conto. Mi è stato detto recentemente che anche lo stato solido, che ha come prototipo lo stato cristallino, non ha una spiegazione fondamentale a livello delle leggi della meccanica quantistica. Ci si spiega ben inteso che possa esistere, ma non si ha una dimostrazione formale che non possa esistere qualcosa d'altro. La stabilità dello stato cristallino, in particolare, non è dimostrata in generale.

E infine, prendiamo un esempio semplice: se quadrettiamo un piano con rette verticali e orizzontali equidistanti, otteniamo una configurazione di punti equidistanti che delimitano delle celle quadrate. Questo può certamente essere stabile per un potenziale di interazione tra atomi che siano disposti sui vertici dei quadrati. Ma, accanto a questa prima configurazione, se ne potrebbe avere un'altra fatta di esagoni. Che cosa è che convincerà gli atomi ad andare a disporsi secondo la disposizione in quadrati piuttosto che secondo la disposizione in esagoni? È molto difficile rispondere; non so se esista una risposta precisa a questa domanda. E se si opera a tre dimensioni, questo diviene spaventosamente complicato. Si crede di capire le cose, ma non si capiscono. Non parliamo della chimica: anche il concetto di legame chimico resta oscuro. Dicevo un giorno ad un amico che spiegare la vita con la chimica, equivaleva a spiegare *obscurum per obscurius*! Non so se sia piaciuta la formula...

L'illusione ingenua dei materialisti, è che essi si immaginano di conoscere tutte le leggi. Non è vero! Ben lungi da ciò!

D. *Anche le più fondamentali? Disponiamo non solo di leggi, ma di un certo numero di formalizzazioni che spiegano il come delle cose...*

T. Anche il "come" pone abbastanza difficoltà. Non si risalirà al Big Bang e alla concentrazione del plasma in gluoni, in adroni, ecc. Navighiamo in piena mitologia moderna!

D. *Si fa appello all'immaginazione per poter spiegare, o dare un'apparenza di coesione alla spiegazione.*

T. Per parte mia, io sono ingenuo: credo che si debba partire dalla realtà macroscopica usuale, che tutti noi conosciamo: la realtà che lei ha, che io ho, che ha questa scatola sulla mia scrivania. E se rifiutiamo a priori ogni validità a questa realtà, siamo condannati al solipsismo o a dottrine di un soggettivismo davvero forsennato. Bisogna partire da questo realismo inevitabile, ed è a partire da esso, che si devono costruire gli enti scientifici che possono permettere di andare più in profondità nell'organizzazione delle cose. Non bisogna cercare di mettersi a testa in giù per tentare di dimostrare la realtà di questa penna, invocando il fatto che io la percepisco grazie alla mia retina, dal mio corpo geminato e tutto un intreccio di neuroni e di sinapsi. D'altronde, tra noi, se lei rifiuta la realtà di questa penna, perché la vede? Io dico sempre questo ai miei amici neurofisiologi: perché vorreste che io creda più alla realtà dei neuroni e delle sinapsi se rifiutate la realtà di questa penna?

3. La salienza e la pregnanza

D. *Lei ha chiamato la meccanica quantistica il "grande scandalo intellettuale del ventesimo secolo", perché manifesta che la scienza ha rinunciato all'intelligibilità del mondo. I suoi concetti di pregnanza e di salienza ci aiutano a renderla intelligibile?*

T. La salienza, si capisce subito di che si tratta[5]: una forma è saliente se si separa dal suo fondo. C'è dunque sempre una frontiera che limita l'oggetto e che separa l'interno dell'oggetto dal fondo. La discontinuità è in qualche modo inerente alla salienza. In fondo, solo la discontinuità in un certo senso si propaga , ed è abbastanza paradossale. Mi viene in mente che non ci avevo mai pensato...

La pregnanza appartiene piuttosto al mondo del continuo, ma è anche il supporto di enti propagativi, come il suono o la luce, ecc. Il

[5]Termine equivalente a sporgenza, prominenza, parte o elemento in rilievo. Proviene da "saliente" (che sale). In senso figurato: "particolare significativo". (Grande dizionario della lingua italiana, UTET).

discorso, il logos, è, esso stesso, portato dalle vibrazioni sonore, che non si può dire siano di natura fondamentalmente discreta, ma si può dire che contengono degli elementi discreti.

D. *Il senso delle parole è portato dalla discontinuità dei fonemi...*

T. Si ricostituisce il suono a partire dalle discontinuità fonologiche.

D. *Le è appena venuto in mente che si propaga solo la discontinuità, ma grazie a un supporto di diffusione che è rappresentato dalla pregnanza.*

T. Noi non vuviamo in un universo a una dimensione. Il solo universo in cui la discontinuità non si propaghi è la retta, il continuo unidimensionale. Se lei segna un punto su una retta, esso è dove è: in principio non si propagherà. Se si propaga, cessa di essere un punto. Ma se lei prende una figura bidimensionale come il disco, l'interno del cerchio, e se lei si pone su un punto del bordo, lei può dire che la discontinuità si propaga, perché c'è un piccolo arco di cerchio che passa per quel punto.

Lei sa che la teoria della pregnanza, la faccio derivare dall'animalità. Il fenomeno del condizionamento pavloviano è fondamentalmente la manifestazione della pregnanza. Se si fa suonare un campanello nelle orecchie del cane affamato, prima di dargli un pezzo di carne, e si ripete l'esperienza un certo numero di volte, il solo tintinnio del campanello lo fa salivare. Io interpreto questo dicendo che questo tintinnio, poiché c'è un intervallo sull'asse del tempo (c'è del silenzio prima e dopo), ha la funzione di una forma che sporge. È stata imbevuta, investita della pregnanza alimentare portata dalla carne. Quest'ultima è una forma pregnante del cane affamato, e questa pregnanza si comporta in qualche modo come un fluido che va a contaminare, a investire le forme sensoriali vicine alle forme sorgenti, sia nella continuità spazio-temporale, sia in similitudine.

Questo fluido penetra nel campo fenomenico attraverso quelle fessure che sono le forme sporgenti. Questo fluido ha delle proprietà molto speciali. Un'associazione come quella della carne e del tintinnio non durerà se non viene rinforzata. È artificiale, e dunque scomparirà se lo sperimentatore non la rinforza. Esistono invece delle associazioni che sono fondate sulla natura e che, per conseguenza, restano permanenti: è questo che è alla base del linguaggio umano.

La distinzione tra l'uomo e l'animale deriva dal fatto che quest'ultimo ha molte poche pregnanze: la fame, la paura, il desiderio sessuale, ma queste pregnanze sono estremamente labili; esse possono infiltrarsi in un gran numero di forme sporgenti. Questa infiltrazione, tuttavia, è costantemente reversibile, non è mai definitiva, salvo forse per il fenomeno dell'impronta originale, che ha maggiori caratteri di irreversibilità.

C'è una certa ambiguità nel concetto di salienza. La salienza tipica è visiva: vediamo delle cose che si separano dal loro fondo. Ma la notte tutti i gatti sono grigi. La sporgenza, in fondo, dipende da una sorgente luminosa che illumina l'oggetto; ed è l'irreversibilità della radiazione emessa dalla sorgente che fa in modo che la luce si rifletta, o venga diffusa dall'oggetto. Essa entrerà nei miei occhi ed ecciterà la mia retina. Dal punto di vista dei processi fisici, dunque, la sporgenza necessita, per manifestarsi, di una pregnanza originale emanata da una sorgente esterna.

D. *La pregnanza mi sembra simile a un boccale di energia, che verrebbe a nutrire certi effetti che divengono salienti...*

T. Il concetto di energia, da molti punti di vista, mi sembra effettivamente una sorta di concettualizzazione di una pregnanza non differenziata.

D. *Cosa intende dire quando dice che la pregnanza si può diffondere?*

T. Fu realizzato un passo enorme all'origine dello psichismo umano rispetto allo psichismo animale, anche se la discontinuità non è stata necessariamente altrettanto brutale. Nel caso della carne, del tintinnio del campanello che viene investito di impregnanza alimentare, si tratta di un fenomeno, in linea di principio, puramente soggettivo, relativo al cane che è stato condizionato. Oggettivamente, in quanto forma sonora, il tintinnio di un campanello non ha assolutamente niente a che fare con la fame del cane: è un'associazione che appartiene al dominio del biologico, e del soggetto che interpreta certe risposte. Ma avviene che un gran numero di agenti fisici nel mondo abbiano la stessa funzione delle pregnanze animali. Penso che bisogna cercare l'origine di questo nel carattere olfattivo delle pregnanze biologiche. Negli animali più primitivi, l'essenziale delle pregnanze è nel carattere chimico, e sono per conseguenza molecole che si diffondono. Esse in generale non sono visibili, e non possono essere localizzate se non con l'olfatto. Ma l'animale ha subito coscienza che queste forme hanno comunque una sorgente. E se sono pregnanti, si tratta precisamente di risalire alla sorgente: è una pregnanza attrattiva. Questo capita con i ferormoni degli insetti: la femmina, al momento dell'accoppiamento, diffonde un profumo, una serie di molecole messaggere, che possono essere percepite dal maschio a distanze considerevoli e a diluizioni infinitesime. Non appena il maschio riceve queste molecole, si orienta immediatamente, per un fenomeno chemiotattico in rapporto al gradiente di concentrazione della sostanza, e si precipita verso la sorgente. Per rivelare un gradiente, tra noi, occorre disporre di qualcosa di sottile, occorre la memoria e il senso dell'orientamento.

D. *Ma lei indica così un processo che si orienta grazie a una percezione del quantitativo...*

T. Certo: tutti i gradienti sono quantitativi. Ma hanno anche tutta una serie di aspetti qualitativi. Questa forma di orientamento biologico (in fondo, il chemiotattismo è già visibile nella vita), non è qualcosa che necessita delle sinapsi e di un sistema nervoso; la cellula libera, isolata, è già capace di tropismo; non c'è problema: è veramente qualcosa di molto primitivo nella materia vivente.

Ma vorrei venire al passaggio dalle pregnanze soggettive di tipo pavloviano alle pregnanze oggettive del campo fisico, prima di affrontare il piano sociologico.

Il carattere fondamentale della spiegazione è venuto precisamente quando si sono oggettivate in qualche modo le pregnanze, e si è pensato che certe forme salienti fossero investite di enti che hanno gli stessi effetti delle pregnanze biologiche. Un esempio semplice: la quantità di moto di un oggetto solido. Se avete un corpo solido che si dirige verso il vostro organismo, il movimento di quel corpo e la sua massa hanno un significato biologico importantissimo: si avrà immediatamente un movimento di arretramento, si interpreterà la traiettoria di questo corpo e si farà un movimento di arretramento per evitare l'urto. La quantità di moto, nella misura in cui è diretta verso di noi, ha, per così dire, al tempo stesso una definizione oggettiva e un significato soggettivo. C'è stato un momento in cui, quando si è osservata la collisione tra due corpi solidi, il soggetto pensante è stato in qualche modo oggetto di un sentimento di empatia per l'uno o l'altro dei due corpi (notate che si dice corpo tanto per una pietra quanto per il corpo umano: è tipico), e gli ottimisti si sono identificati col corpo che urta, mentre i pessimisti si sono identificati col corpo urtato, distinzione che non esiste più in linea di principio da Newton e Galilei, ma noi ciononostante la facciamo costantemente. Si possono dare criteri cinetici che, in un urto, permettono di determinare l'agente urtante e l'agente urtato, salvo situazioni rigorosamente simmetriche, che sono eccezionali. Questa distinzione fa sì che la quantità di moto partecipi al tempo stesso del soggettivo e dell'oggettivo: essa in un certo senso è stata generalizzata dal pensiero scientifico, che prima era osservativo ed empirico, poi propriamente scientifico; così certe quantità di carattere pregnante sono state oggettivate.

Prendiamo il colore: è evidente che è qualcosa di soggettivo, ma al tempo stesso di oggettivo. Il carattere rosso di un corpo caldo, ha al tempo stesso un valore soggettivo e un valore oggettivo.

Infine, sono arrivato alla conclusione che abbiamo presente alla mente, in maniera assolutamente fondamentale, quella struttura originale di un mondo in cui, all'inizio, abbiamo degli enti salienti; che questi enti emettono delle pregnanze, che possono essere catturate o ricevute da altri enti salienti, in seno alle quali esse producono effetti che si chiamano figurativi, che possono condurre l'ente investito a riemettere la pregnanza, o una pregnanza leggermente diversa secondo i casi. In realtà, abbiamo a che fare qui in qualche modo con la sorgente fondamentale di ogni tipo di sistema di interazione.

D. *Questo mi ricorda il discorso sul rapporto tra il fondo e la forma...*

T. Non lo vedrei a questo modo. Valéry diceva: "Il fondo non è che una forma impura". Ciò sta a significare giustamente che quando un ente subisce una dissociazione frattale, si frammenta in piccoli pezzi sempre più piccoli, e quando gli elementi diventano così piccoli che sono divenuti impercettibili, allora si è realizzata questa trasformazione di una forma in un fondo, geometricamente. È ciò che avevo tentato di chiamare "catastrofe generalizzata". In mancanza di teoremi, questa terminologia è fallita...

D. *Che legame vede lei fra salienza-pregnanza e continuità-contiguità?*

T. Come ho spiegato un momento fa, l'ente saliente è fondato, dispone della sua forma definita in virtù della discontinuità, quella del suo bordo. È un'idea molto profonda, chiave della fisica aristotelica. Ci sono citazioni della fisica di Aristotele che potrei darle, ma non ha interesse... Per lui, la forma di un oggetto fisico è qualcosa come il suo bordo; nel senso astratto della definizione, l'*eidos* è qualcosa come una forma in uno spazio astratto, con il suo bordo. C'è una materia intelligibile, che è in qualche modo compressa dalla sua definizione. *Orismos* significa definizione; è quasi la stessa parola di *oros* che vuol dire bordo. È abbastanza notevole.

D. *Definire, è dire le frontiere, disegnare le frontiere?*

T. È effettivamente delimitare le frontiere. E questa intuizione ha qualcosa di straordinariamente profondo, a mio avviso.

D. *Così, la contiguità è possibile solo per enti definiti da frontiere, per enti discretizzati?*

T. Gli enti possono subire delle trasformazioni seccanti. Essi possono, come dice Aristotele, entrare in privazione, la *sterèsis* aristotelica. Io concepisco un po' la privazione come una ferita: il bordo del bordo è vuoto; è il grande assioma della topologia, della geometria differenziale in matematica, ma esprime l'integrità spaziale del bordo dell'organismo. La privazione è la mutilazione, è il sangue che sprizza, ecc. È la lacuna nella forma: la forma diviene lacunare, e questo influisce sulla sua stabilità e sulla sua permanenza.

D. *Nel suo itinerario dalla matematica alla riflessione epistemologica, a partire dalla teoria delle catastrofi lei si è orientato verso la morfogenesi: è passato dalla catastrofe alla morfologia, in qualche modo...*

T. È passato molto tempo. Ho cominciato a interessarmi delle forme nel caso delle caustiche. Poi, ho avuto questa rivelazione al museo di Poppelsdorfer Schloss a Bonn, dove vidi i modelli dell'embrione di rana in fase di gastrulazione: quella bella geometria che tentavo di interpretare appunto in termini di dispiegamento di un fondo di onde in uno spazio opportuno che si riproietta sullo spazio ordinario. A partire da qui, effettivamente, tentai di applicare questo genere di idea all'embriologia.

D. *Non si può generalizzare? In fondo, non ci si può forse interrogare allo stesso modo sull'origine di tutte le forme, di tutte le formalizzazioni?*

T. Ci si può effettivamente porre il problema della morfogenesi per ogni specie di forma, e non soltanto per le forme viventi. Ciò che avviene, è che la maggior parte delle forme degli oggetti inanimati ha un determinismo difficile che, in linea di principio, non si ricava nettamente dalla teoria delle catastrofi. Anzitutto, ci sono le forme a cui siamo molto sensibili, quelle degli strumenti, degli arnesi, quelle dei mobili, delle abitazioni. E ci sono delle catastrofi, ma esse sono legate a un mucchio di ricordi: prenda la frontiera tra il soffitto e il muro; è una linea di discontinuità dal punto di vista dei materiali, della direzione. La sua origine è facile da capire: proviene dal conflitto fra la necessità di avere pareti verticali e superfici orizzontali su cui tenersi. Il conflitto dell'orizzontale e del verticale crea una linea che è precisamente quella che ci interessa. Il conflitto è in qualche modo formale, in questo caso, e trova la sua realizzazione, a un certo momento, nella mente dell'architetto; questa realizzazione, codificata socialmente, diviene un processo di fabbricazione delle travi, delle assi del pavimento. Non c'è alcun mistero, perché conosciamo il meccanismo psichico che ha dato nascita all'oggetto. Ma ciò non impedisce che in partenza ci fosse conflitto fra due gradienti fondamentali: il conflitto della polarità orizzontale e della direzione verticale, che sono duali nel nostro spazio.

Per gli oggetti inanimati della natura, è molto difficile dare regole semplici che permettano di capire come si genera questa forma. Prenda un vegetale: sappiamo che origina da un seme che germoglia e si ramifica, che produce delle foglie. Le leggi che permettono di descrivere questa generazione sono abbastanza ben conosciute attualmente, ma non sono tanto rigorose, non abbastanza da agire indipendentemente dai fattori ambientali, in modo che in realtà, i vegetali hanno esteriormente delle caratteristiche strutturali comuni, ma non poca variabilità individuale. Anche in quel caso, se si volesse penetrare nella natura intima di questi meccanismi, si incontrerebbero difficoltà considerevoli. La descrizione mediante leggi è possibile, c'è tutto un corpus considerevole di letteratura sulla morfologia vegetale, che d'altronde fa appello a una matematica abbastanza sottile, al rapporto aureo per esempio. Se si vuole spiegare la forma, bisogna entrare a livello cellulare, a livello molecolare, e questo diviene di una complessità che va al di là della comprensione.

4. Una metafora topologica per la complessità

[C.[6] La discussione si sposta ora dall'applicazione della terminologia topologica cara a Thom al concetto fondamentale su cui riposano

[6] Questo capitolo è intitolato nell'originale "Polemiche", ma abbiamo pensato che il titolo qui adottato sia meglio collegato al contenuto.

sia la concezione dell'"anima" in senso aristotelico, cioè l'"esser vivo" di un organismo, sia la concezione dei viventi come sistemi stazionari fuori di equilibrio introdotta da Ilya Prigogine intorno al 1950. I viventi sono sistemi complessi che si comportano come unità, interagendo in modo attivo e mirato con il loro ambiente. Questo induce ad attribuire loro una "psyché" ($\psi\upsilon\chi\acute{\eta}$), qui chiamata psichismo che poi diventa l'anima nel senso corrente quando si arriva all'uomo. L'unità di un vivente è realizzata dall'integrazione delle parti. Matematicamente questa integrazione si può vedere come quella che si ha in un solido in cui non vi sono regioni non connesse a tutte le altre: ecco perché matematicamente un vivente è una palla. Come abbiamo già visto, Thom vede in questo un'applicazione del suo modo tutto geometrico di interpretare il concetto di "forma" dell'ontologia aristotelica. Per spiegare quest'ultimo, l'analogia che forse è più familiare ai nostri giorni è quella con il dischetto di istallazione di una stampante su un computer. Come supporto materiale il dischetto potrebbe istallare qualunque periferica o svolgere qualunque funzione gestita da un programma; ma è un dischetto di avvio di una certa stampante perché porta registrato un particolare programma di computer. Pensando a questa analogia, forse possiamo capire meglio che un dato ente materiale è costituito da: (a), una "materia" che è in sostanza una porzione di spazio-tempo-energia, e potrebbe andar bene per un'infinità di enti diversi; (b), dall'insieme delle particolari caratteristiche che quella porzione di materia presenta in quel particolare ente. La forma aristotelica comprende in linea di principio la forma geometrica; ma il discorso di Thom è più sottile: la forma a cui lui pensa è un modello ideale delle relazioni - "connessioni" - delle parti di un tutto tra loro e con il resto di uno "spazio", che di fatto ne è l'ambiente.]

D. *Mi pare che a questo punto la riflessione sia passata dalla matematica alla filosofia. E questo passaggio ha suscitato qualche polemica...*

T. Poche, in verità. Da una parte perché i filosofi non sono scontenti di vedere che alcuni dei loro problemi vengono intravisti, anche se non per questo risolti, quando vengono trascritti in termini più vicini alla matematica; dall'altra perché le sole obiezioni che ho ricevuto sono appunto di carattere molto filosofico, e provengono per esempio dai difensori della metafisica. Alcuni mi hanno detto: lei vuole ricondurre l'individualità di un essere all'essere connesso; il fatto che un corpo abbia la forma di una palla [nel senso topologico, naturalmente, cioè che tutto vi è in relazione con tutto] non basta come criterio per garantire la presenza di uno psichismo. È vero! Sono pronto a riconoscere che avere un corpo a forma di palla non basta per dar prova di una individualità di tipo psichico. Ma è una condizione necessaria se non sufficiente per gli esseri viventi quali siamo noi. Se rompiamo la palla in due, lo psichismo sparisce... Non so in che misura si tratti di una manifestazione di materialismo soggiacente. Io credo piuttosto che si tratti di una prova dell'importanza della forma [in quanto sistema di relazioni]. Nelle discussioni su questo punto, l'argomentazione standard dei materialisti, come le ho detto, è la seguente (la rinvio al libro di Connes e Changeux): ≪Lei pretende, con la sua matematica, di avere a che fare con una realtà astratta e non materiale? E io le dico che se lei rovina il cervello a colpi di clava, i suoi enti intelligibili spariranno ≫. È incontestabile, e tuttavia non mi sembra convincente: se il nostro cervello è capace di ospitare parecchie strutture platoniche, è perché in questo magma di neuroni e di sinapsi e di altri dispositivi neuronici esistono delle forme. Nella misura in cui la forma scompare, è vero che gli enti platonici spariranno ugualmente! Questo sta semplicemente a testimonianza del fatto che questi enti possono aver bisogno semplicemente di una certa partecipazione a una struttura di altra natura, ma una struttura formata, dotata di una forma, una *materia signata* come diceva Aristotele, o piuttosto come dicevano i suoi lettori latini.

[C. Non si sta parlando delle idee platoniche in quanto enti ma piuttosto dell'impronta che le rappresenta nella mente di un individuo umano. A proposito dell'opera di Connes et Changeux, riportiamo alcune considerazioni di R. Luccio, su "L'Indice" 1992: ≪Nel leggere questo libro, si può tentare di rappresentarsi gli autori. Io mi sono figurato (del tutto arbitrariamente, ovvio) il neurobiologo Changeux come certi medici positivisti, materialisti e deterministi, cari a una tradizione letteraria un po' antiquata, sempre pronti a battagliare con il parroco nell'affermare che la scienza ha dimostrato che Dio con tutto il suo armamentario può essere tranquillamente messo in soffitta. E di contro mi sono figurato Connes, il matematico sicuro in qualche modo dell'esistenza degli enti matematici al di fuori di noi, da trovare e non da costruire con la nostra attività cerebrale, come uomo mite che finisce progressivamente per adeguarsi alla visione dell'incontenibile Changeux. Vi è un passo rivelatore del modo di ragionare di Changeux, che troviamo nella discussione relativa al principio di indeterminazione nella meccanica quantistica (pp. 67 sgg.). Invano Connes cerca di spiegare a Changeux che l'indeterminazione non è dovuta all'incompletezza della teoria, o alla incapacità di determinare dei parametri pertinenti da parte dei fisici, ma è insita nella teoria. Per Changeux si tratta di un "insuccesso " che "l'inconscio [dei fisici] si rifiuta di riconoscere" (p. 74); "non vi è indeterminazione fondamentale, [quanto osservato] potrebbe, in fin dei conti, essere spiegato un giorno o l'altro in forma deterministica " (p. 71); "forse esiste un altro modello cui i fisici non hanno ancora pensato" (ibid.); "un giorno si potrà giungere a una spiegazione più razionale" (p. 72); "Se conoscessimo gli eventi... renderemmo [il] fenomeno riproducibile" (p. 73); "la teoria [dell'indeterminazione] non funziona" (ibid.); "l'indeterminazione misteriosa di cui parlano un certo numero di fisici non ha molto senso... [è] lo stato delle nostre conoscenze [che] non ci permette ancora di dominare queste nozioni" (p. 74). Be', l'"intelligenza onnicomprensiva" di Laplace si prende la sua bella rivincita! Come dicevo all'inizio, Changeux e Connes sono appieno dei sostenitori della teoria dell'identità, che afferma che gli eventi mentali sono semplicemente eventi cerebrali; più in particolare, sono dei sostenitori (anche se non esplicitamente) della teoria dell'identità dei tipi. Secondo questa concezione ogni evento (stato, processo...) mentale si identifica sempre e necessariamente con un determinato evento cerebrale - ad essa si oppone la cosiddetta teoria dell'identità delle occorrenze, che si limita a dire che ogni evento mentale è uno stato particolare cerebrale.≫]

D. *Quando lei parla di palla, usa una metafora. Lei vuol dire che è un corpo che ha un limite, un dentro e un fuori?*

T. È ancor più preciso di questo: è una palla topologica. Non è un toro pieno, come una camera d'aria gonfiata.

D. *Il tubo digerente potrebbe far pensare che ci sono due tipi di "regioni interne" dell'organismo umano...*

T. Ho avuto parecchie controversie con alcune persone a questo proposito. Insisto nel dire che l'interno del tubo digerente è all'interno dell'organismo e che, effettivamente, bisogna prevedere una piccola zona frontiera con i denti, la lingua, gli sfinteri, ecc., per limitare, separare l'interno dall'esterno.

D. *In questo preciso caso c'è proprio un interno che, per così dire, è più interno dell'altro...*

T. Forse è vero, ma è difficile da valutare. L'interno del tubo digerente è un qualcosa di intermedio fra la carne esterna al tubo digerente e il mondo esterno.

D. *Nella sua metafora della palla, si tratta di uno spazio materiale che viene in qualche modo identificato dai suoi propri limiti, e dalle sue frontiere. Se si rompe la frontiera, non resta più niente del tutto.*

T. È proprio per questo che recentemente sono tornato ad Aristotele. Mi piace molto la sua definizione dell'ente come ciò che è dato, separato dal suo ambiente. Il bordo dell'ente, è precisamente la sua forma, il supporto della forma, la sua manifestazione. Per andare un po' più in là, beninteso per gli esseri viventi, la forma non si limita alla forma esterna, come per una statua; è anche la forma di tutti gli organi interni. C'è senz'altro una forma interna che prolunga in qualche modo la forma esterna e che, d'altronde, nell'embriologia, si costruisce per continuità e a partire dalla forma esterna. C'è continuità temporale fra i tessuti formati all'interno e il guscio iniziale della blastula, come dicono gli embriologi.

D. *Ma in realtà, una forma non è mai semplice ed è composta da un certo numero di altre forme...*

[C. L'intervistatore mette qui sul tappeto il famoso problema delle parti e del tutto che a partire dal '600 era stato trascurato dal riduzionismo meccanicista ed è riemerso solo dopo l'ascesa della biologia organismica e della cibernetica, in gran parte sotto il nome di complessità. La risposta di Thom rivela la profondità delle sue conoscenze in materia.]

T. Abbiamo a che fare in questo caso con una problematica molto difficile: quella delle parti. Che cos'è una parte di un ente? Questa è una aporia di Aristotele che rimane ancora oggi un problema molto delicato. Nel caso degli animali, ai quali Aristotele si interessava molto [7], si poneva il problema di sapere se una parte, nel senso tradizionale, per esempio la zampa, l'ala, il becco, si potesse considerare come un ente (in greco, ousia, $o\upsilon\sigma\iota\alpha$), nel senso metafisico che Aristotele dava a questa parola. È verosimile che, nella sua mente, non

[7] Thom si riferisce certamente al trattato *De partibus animalium* di Aristotele.

si trattasse veramente di enti di pieno diritto, perché sono subordinati alla realizzazione effettiva dell'organismo globale [Nella Scolastica sono stati chiamati "enti virtuali"].

D. *Si possono però distinguere diversi tipi di parti del corpo, diversi tipi di organi?*

T. Recentemente ho molto riflettuto su questo problema. Nel mio libro *L'esquisse d'une semiofisique* riprendo le riflessioni di Aristotele. Egli aveva introdotto due concetti interessanti: quello di omeomero[8] e quelli di anomeomero. Vorrei spiegare il concetto di omeomero, molto matematizzabile - e devo ammettere in proposito che io ho avuto almeno questo vantaggio su Aristotele, che ho una formazione di topologo migliore della sua! Dato uno spazio che possiede qualità diverse, uno spazio qualitativo, come ad esempio uno spazio colorato, si può definire una relazione di equivalenza tra due punti: un punto x sarà equivalente a un punto y se posso ritagliare un piccolo intorno di x e un piccolo intorno di y, e trasportare in modo continuo l'intorno di x sull'intorno di y in modo tale che nel corso di questo spostamento la struttura qualitativa dello spazio non cambi. Ciò definisce una relazione di equivalenza fra punti e, per gli spazi buoni, quelli che sono definiti classicamente in matematica con buone equazioni, si dimostra che questa relazione è in effetti pressappoco equivalente a una decomposizione in pezzi, ma dei pezzi di dimensioni strettamente decrescenti. Nella dimensione 3, per esempio, un poliedro: si prenda un cubo, come un dado. Se si classificano i punti con questo metodo, si vedrà che vi sono quattro tipi di punti: quelli che sono interni al dado, quelli che sono interni a una faccia, quelli che si trovano sugli spigoli e quelli sui vertici. Abbiamo dunque quattro classi di punti. Guardiamo poi le componenti connesse di ciascuna di queste classi: è ciò che si chiama uno strato. In questo modo, si stratifica l'intero spazio considerato. I poliedri si possono stratificare, perché il cubo si stratifica con uno strato di dimensione 3 (l'interno), sei strati di dimensione due (le facce) e 12 strati di dimensione 1 (gli spigoli), e 8 strati di dimensione 0 (i vertici). In questo modo, ho in qualche

[8]Secondo J. Hoffmeister, nel *Wörterbuch der Philosophischen Begriffe* (Hamburg: Meiner 1955), già Anassagora chiamava omeomeri i costituenti ultimi, determinati qualitativamente, dei diversi materiali, a differenza degli atomi, che sono da considerare privi di qualità e differiscono tra loro solo per la grandezza, il peso, la forma e la posizione. Sembrerebbe che Anassagora avesse avuto l'intuizione dell'esistenza delle molecole

modo decomposto la morfologia in parti che sono equi-singolari secondo ciascun pezzo. È una definizione perfettamente valida anche in biologia, a meno che non si guardino le cose troppo da vicino. Si può decomporre il viso in diversi elementi, gli occhi, le palpebre, le sopracciglia, la fronte, il naso, la bocca, ecc. Si hanno tuttavia delle difficoltà quando si vogliono ritrovare le parti del corpo come si intendono nel senso ordinario a partire da questa classificazione puramente geometrica. Si prenda la mano: il pollice, dal punto di vista della pelle, non è separato. Se dico che il pollice è una parte della mano, e se voglio definire la frontiera tra il pollice e il resto della mano, è molto facile dal punto di vista dello scheletro: è il metacarpo che si separa dalla falange. E la superficie di articolazione tra il metacarpo e la falange, ha una frontiera ben netta per definirla, perché è funzionale. Ma intorno ci sono i tendini; c'è tutta una serie di legami che li uniscono; e poi, ad avvolgere il tutto, quella specie di involucro costituito della pelle. Come definire allora la frontiera tra il pollice e la mano?

Aristotele non si preoccupò esplicitamente di questo tipo di problemi, ma aveva introdotto, a fianco al concetto di omeomero quello di anomeomero, dicendo: gli anomeomeri sono composti di parecchi omeomeri. Si considerano di solito gli organi come i membri, che hanno una certa individualità ma sono composti di parecchie parti.

Aristotele cadde su una piccola difficoltà con la parete intestinale: essa è relativamente omogenea in quanto parete ma si separa lo stesso dall'interno della carne, e da questo punto di vista, c'è una caratteristica che li differenzia: è un omeomero o un anomeomero?

Domande di questo tipo i biologi contemporanei le considerano come semplicemente semantiche, e dunque senza interesse. Si tratta invece di una problematica molto profonda, perché gli studi linguistici hanno mostrato che il modo in cui noi chiamiamo gli organi degli uomini e degli animali varia molto poco da una lingua all'altra. C'è un isomorfismo quasi totale fra i diversi modi di denominare le parti del corpo. Perché questo? Perché proviamo il bisogno di dare un nome alla mano, all'avambraccio, al braccio?

Ora, quasi tutti gli idiomi li distinguono.

D. *Forse perché queste diverse parti si impongono come tali, e dispongono di caratteristiche morfologiche abbastanza precise al punto tale che tutte le culture sentono il bisogno di dar loro un nome...*

T. Aristotele risponde nel suo libro sulle parti. Dice in sostanza che gli anomeomeri si trovano là dove passano le attività, i lavori. E in effetti è questo che determina l'unità di una parte del corpo nel senso usuale: è essenzialmente dal lato funzionale che la si trova e non dal lato strutturale. Al contrario, dal lato strutturale, c'è polimorfismo. Ma c'è anche una certa unità funzionale. Il grande problema è ritrovare questa unità...

D. *Soprattutto se si considerano funzioni che sono già funzioni integrate, come la respirazione, la circolazione, la digestione, e così via.*

T. Non è difficile arrivare a un quadro di tutte le grandi funzioni biologiche. Esse sono quasi tutte imposte da vincoli banali: lei ha una scatola nera con degli ingressi e delle uscite; bisogna classificarle secondo la loro natura; si può trattare di materia, o in modo più sottile, di forme. Se è materia, bisogna classificarla secondo la sua natura in termini di fasi [gassose, liquide, solide]. E quando si fa questa classificazione, si hanno già quasi tutte le grandi funzioni della fisiologia: la respirazione, che è sia espirazione che inspirazione dell'aria; l'alimentazione attraverso la bocca e lo stomaco, che è l'ingestione di solidi e di liquidi; si hanno le escrezioni corrispondenti alle tre fasi... È del tutto tipico. Ci sono inoltre alcune funzioni strettamente biologiche, come la riproduzione, l'irritabilità, ecc. Non si tratta d'altronde di una funzione: è una caratteristica della vita. Attualmente sono presidente della Società francese di biologia teorica, (lascerò il mio incarico abbastanza presto, d'altronde); ho potuto constatare che quel che diciamo attualmente non interessa i biologi...

D. *Per lei, è il prolungamento logico delle sue preoccupazioni topologiche e morfologiche?*

T. Sono sempre stato affascinato dai problemi dell'embriologia. Fin dal mio primo libro, avevo dedicato una buona metà dell'opera a una modellizzazione dell'embriologia, probabilmente prematura. Credo che il principio sia sano, ma il modo di arrivare realmente a una descrizione abbastanza precisa è difficile da acquisire. D'altronde lì in questo caso si tocca un'altra grande difficoltà della teoria delle catastrofi, che è il problema del substrato. La teoria delle catastrofi, nella sua forma pura, è indipendente dal substrato. Essa si occupa delle forme indipendentemente dalla natura del mezzo nel quale queste forme sono definite.

D. *Vi sono state polemiche più recenti. A che cosa si riferiscono?*

T. Non riguardano posizioni legate fondamentalmente alla teoria delle catastrofi. Esse rinviano piuttosto a posizioni che ho preso sul piano filosofico.

C'è da una parte la polemica che si è sviluppata nella rivista *Le débat* negli anni ottanta sul determinismo. "Fermare il caso, in silenzio il rumore!", era un articolo essenzialmente diretto contro le affermazioni della scuola di Prigogine sulla scomparsa del determinismo nella scienza, sulla necessità di rinunciare al formalismo differenziale e alle equazioni. Io mi presentai come difensore del determinismo, e resto in questa posizione. Credo che ogni scienza sia essenzialmente determinista. Essa è talvolta obbligata a trattare situazioni indeterminate, ma lo fa sempre a malincuore.

D. *Ho creduto di sentirla parlare di caos deterministico...*

T. È ciò che si intende a proposito dell'automorfismo del "toro" definito da una matrice[9] di due righe, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, o dalle formule $x' = x + y$ e $y' = x + 2y \quad (mod 1)$. Il toro è il prodotto di due cerchi, e in questo modo si invia il toro su se stesso. Questa trasformazione viene chiamata 'caotica'. Io trovo un po' scandaloso chiamare caotiche delle cose la cui descrizione non richiede che quattro numeri e due parentesi. C'è un abuso di terminologia!

[C. Qui René Thom trascura l'aspetto numerico della questione - cosa che non fa meraviglia, perché, come ha detto più volte, i numeri non gli piacciono molto. Ciò che chiamano caos deterministico riguarda il risultato di certi procedimenti iterativi quando si cambiano di pochissimo i valori iniziali.[10]]

T. Altre polemiche riguardano le chiusure incontrate negli ambienti scientifici. Per esempio, le mie idee sull'embriologia non hanno avuto finora alcuna eco da parte dei biologi. La loro obiezione unanime si può riassumere così: se lei ha dei suggerimenti, delle idee

---

[9] Il testo francese contiene un errore di stampa, che è stato qui corretto.

[10] La trasformazione del piano (che ne induce una sul toro) definita come $F(x_n, y_n) = (x_{n+1}, y_{n+1})$, dove $x_{n+1} = x_n + y_n$, $y_{n+1} = x_n + 2y_n$ è "caotica"; basta infatti iterarla poche volte per rendere irriconoscibile un'immagine contenuta nel quadrato unitario. In letteratura l'applicazione considerata è nota come "Arnold's cat map", poiché nel 1960 Vladimir Arnold ne studiò gli effetti, partendo dall'immagine stilizzata di un gatto.

sull'argomento, le dimostri sperimentalmente! Le apriamo i nostri laboratori, ci dia le idee per mettere su esperimenti, noi non domandiamo di meglio che realizzarle... E allora, messo al muro, mi sono lanciato nello studio della biologia contemporanea, e sono rimasto assolutamente stupefatto del modo in cui lavora la gente, o piuttosto, in cui la gente concepisce il proprio lavoro. Non dico che non lavorino in modo pulito: quel che fanno è certamente molto ben fatto. Ma oggi, se lei vuole spiegare l'embriologia, finché non ha fatto vedere un gene, un enzima o un qualche "congegno" di quel genere, la gente non le darà ascolto.

D.*E che cosa vorrebbe proporre loro? Complessità, punto di vista olistico e livelli di intelligibilità.*

[C. La versatilità e la genialità della mente di René Thom si rivelano a questo punto nella brillante proposta di applicare i concetti e i metodi della geometria moderna - di cui è data una visione schematica nel glossario che costituisce l'appendice di questo volume - come approccio generale della biologia. Anche se formulata alcuni decenni fa, questa proposta di guardare anzitutto all'organismo come un tutto, un '*όλον* (holon, da cui il termine olismo), è ancora attuale perché il riduzionismo, come dice più in là Thom stesso, continua a caratterizzare la *forma mentis* dei biologi. Il pensiero di Thom è un passo concreto nell'impostazione metodologica della teoria generale dei sistemi[11], fondata da L. von Bertalanffy a metà del '900 e applicata subito agli organismi come "biologia organismica", a sua volta capitolo della "biologia teorica". Non è un caso che all'epoca di questa intervista fosse presidente della Società francese di biologia teorica.]

T. Quello che propongo ai biologi è una formalizzazione dell'embriologia con degli enti astratti. C'è scienza solo nella misura in cui il reale viene immerso in un virtuale controllato. Con l'estensione del reale in un virtuale più grande si studiano poi i vincoli che definiscono la propagazione del reale all'interno di questo virtuale.

La meccanica non è altro che questo. Si ha lo spazio di tutte le posizioni e velocità possibili di un solido, e poi il prodotto per il tempo; si ha la traiettoria, si dà la realtà, che è la posizione iniziale con i dati iniziali. Ciò che dice il formalismo è: tutta la traiettoria

[11]E. Agazzi (a cura di), *I sistemi fra scienza e filosofia* (Torino, SEI 1978)

sarà percorsa dalla realtà. Il punto rappresentativo è l'iniezione del reale nel virtuale.

Lo si comprende bene nel campo della meccanica, ma è la stessa cosa in quello della biologia.

D. *Ma il livello di complessità non è tale che è difficile immaginare tutto questo?*

T. Ho scritto un articolo intitolato: Ambiguità della complessità in biologia, in cui rivolgo ai biologi il rimprovero di riempirsi di questa parola, quando ci sono cose molto semplici in biologia. Gli organismi complessi, per certi versi, hanno un comportamento molto semplice. In quell'articolo io pongo il problema seguente: "Se si osservano la locomozione di un gatto e il modo in cui una cellula si spinge avanti emettendo gli pseudopodi, che cosa le sembra più facile da capire?". E tuttavia, noi siamo composti di cellule, certamente siamo infinitamente più complessi di una cellula. Ma comprendiamo molto più facilmente come possa camminare un gatto di quanto non comprendiamo come si sposta una cellula. Soprattutto perché il gatto cammina sempre con le stesse zampe, mentre la cellula può emettere pseudopodi in qualunque direzione, almeno in teoria.

È evidente che esiste una sorta di ostacolo psicologico enorme che fa sì che la gente rifiuti di considerare l'autonomia di certi livelli di intelligibilità in biologia. Dicono subito che non è vero, quando si va a guardare molto finemente come si sposta un certo osso rispetto a un altro: chi assicura la sincronizzazione di una certa articolazione con un'altra? Come sono costituiti, con quali neuroni, i campi motori del camminare?... Si cade subito in complicazioni. È complicato, ne convengo volentieri. Ma se si cerca la complicazione, la si trova sempre.

D. *Ci sarebbero, secondo lei, dei modi semplici di delimitare e di trovare schemi esplicativi e poi, forse, progressivamente...*

T. Si può scendere progressivamente verso il più fine. A fianco del procedimento riduzionista, che scende per prima cosa a un livello molto fine e tenta da lì di ricostituire l'organismo, c'è secondo me un modo di procedere inverso che consiste nel partire dalle grosse strutture dell'organismo come ce le dà il linguaggio usuale, e questa decomposizione qualitativa degli organi ereditata dalle nostre lingue, forse dalla pratica della macellazione e delle tradizioni alimentari carnivore, da questa decomposizione ingenua dell'organismo, si dovrebbe poi poter risalire, affinando le nostre conoscenze di fisiologia, alla descrizione sempre più precisa delle strutture locali, e in particolare della loro embriogenesi.

È la mia ambizione e il mio programma.

Si può dare un esempio tipico: al tempo di Vésale e di Harvey, il cuore era una specie di pompa che immetteva il sangue in quei tubi che sono i vasi. C'era dunque l'analogia della pompa e dei tubi, che bastava per assicurare una certa intelligibilità al funzionamento cardiaco. Dei polmoni, si diceva che erano un soffietto. L'interpretazione della necessità di avere aria nel corpo non venne che con le conoscenze di chimica. Fu necessario fare, con Lavoisier, la distinzione tra ossigeno e azoto, e sapere che l'ossigeno è necessario. Poi bisognò assimilare l'essere vivente ad una macchina termica. Tutte queste, in fondo, non sono scoperte di biologia.

D. *Questi approcci sono analogici, metaforici.*

T. È vero che sono metafore, ma io penso anche che ci sia un nucleo comune, un nucleo matematico soggiacente alla nozione di metafora, che fa che sia corretto dire che il cuore è una pompa.

Ancora una volta, come diceva Aristotele, non è la natura che imita l'arte, è l'arte che imita la natura. È proprio perché abbiamo implicitamente lo schema della pompa realizzata nel cuore che abbiamo potuto poi costruire delle pompe tecnologiche. E oggi, la gente vi dice che il cervello è un computer! Si continua...

D.*Lei dice che il linguaggio comune di cui l'uomo dispone gli permette di esplicitare un certo numero di stati di conoscenza. Ma l'utilizzazione di questo linguaggio per cercare di trasmettere degli approcci di carattere matematico è una sfida. Perché questa difficoltà?*

[C. Qui emerge una constatazione espressa molte volte da scienziati e filosofi: pensare è comunicare in un linguaggio che usa nomi, aggettivi e verbi per indicare le cose e le loro relazioni [12], che trova peraltro difficoltà nel mito che il linguaggio della scienza è il linguaggio matematico. Questo mito è nato per un'interpretazione troppo letterale dell'affermazione di Galileo, secondo cui il libro della natura è scritto in numeri e figure. In primo luogo, Galileo presupponeva il possesso dei concetti cui si riferivano quei numeri e quelle figure così

[12] Karl Jaspers, *Il linguaggio. Sul tragico.* Trad. it. dal tedesco 1990 (Napoli, Guida 1993), cap.2

come dire che un libro di Aristotele è scritto in caratteri greci non significa che saper leggere il greco significhi poter capire gli originali di Aristotele; in secondo luogo, in scienze come la biologia predomina ampiamente il qualitativo, e finora non si è sentito il bisogno di servirsi di modelli matematici. Qui Thom dà un contributo in questa direzione, ma si guarda bene dal credere che, quand'anche si potesse giungere a una formalizzazione importante, ciò consentirebbe di rinunciare ai significati, che sono appannaggio del linguaggio ordinario, anzi va oltre, confrontando il formalismo linguistico e il formalismo matematico. Si noti che qui per formalismo si intende il codice con cui vengono rappresentati i contenuti di un discorso.]

T. La difficoltà [di usare il linguaggio comune per gli approcci matematici] è anzitutto psicologica. Noi non ci siamo abituati; viviamo il formalismo linguistico e il formalismo matematico come due campi disgiunti dell'attività psichica. Sarei tentato personalmente di dire che in realtà il campo fondamentale è il campo linguistico. Il campo matematico ha un carattere particolare, specifico, legato in fondo all'impiego di immagini geometriche: la capacità di spazializzare le cose, e di avere dei gruppi di trasformazione che agiscono in questi spazi. È questo in fondo l'essenza della matematica.

Abbiamo poi il fatto che la matematica permette l'iterazione, vale a dire permette di ripetere indefinitamente la stessa cosa. L'esempio è quello dell'aritmetica: quando si conta si itera costantemente la stessa operazione. E tuttavia, gli oggetti che si raccolgono sono qualitativamente diversi. Nessun intero somiglia a un altro intero. C'è qui qualcosa di abbastanza paradossale: la matematica riposa su una sorta di monotonia intrinseca, la generatività delle strutture entra in funzione indefinitamente; d'altra parte, da questa monotonia escono distinzioni qualitative, un universo qualitativo. Questo è da una parte quello dell'aritmetica, che personalmente trovo noioso, ma è anche quello della topologia, degli oggetti geometrici, topologici; questi mi appassionano. Conoscendo questi oggetti matematici, il problema è di tornare agli oggetti mentali usuali, e di tentare di trovare una corrispondenza tra operazioni mentali e operazioni matematiche. Certe operazioni mentali si possono ricondurre a modelli o simulare con degli enti matematici.

Bisogna per esempio tornare alla radice matematica delle analogie. Prendo un esempio: in fondo, l'accelerazione e il rallentamento sono la stessa cosa, salvo che una è in positivo e l'altra in negativo...

La derivata a destra e la derivata a sinistra sono anch'esse la stessa cosa, salvo che non sono nello stesso senso. E d'altronde, anche derivata ed accelerazione sono la stessa cosa [dal punto di vista della matematica]. Si può capire così che un sistema di calcolo, come le derivate, permetta di definire oggetti estremamente diversi dal punto di vista sensibile. Da quest'ultimo punto di vista, derivata a destra e accelerazione sono molto diverse. Ora, si può trovare una formula matematica che calcoli questi due tipi di movimenti.

5. Prospettive della ricerca

D. *Quali prospettive attribuisce in questo momento alla scienza , e alle relazioni che la scienza ha con la matematica? In quale direzione può presentare interesse la ricerca scientifica, tenuto conto dello stato della nostra umanità attuale?*

T. Mi pare abbastanza vano domandarsi come si svilupperà la scienza. Ho sempre l'impressione che per il momento sia un'esplorazione, e fintanto che ha qualcosa da trovare, la troverà. La natura di ciò che trova può essere interessante. E può essere completamente insignificante. Ma c'è una cosa che facilita molto il compito degli uomini di scienza, ed è che al di fuori degli specialisti che si guardano bene dal dirlo, nessuno considera non significativo un risultato della scienza. Si continua dunque ad esplorare tutto quello che si può, e si cerca di interpretare quello che ne viene fuori.

D. *Potrebbe andare diversamente?*

T. Non credo. Ma comunque, secondo me, c'è stata una degradazione considerevole di quella che una volta si chiamava la casta universitaria. Quelli che la componevano, oltre a qualche vantaggio materiale, godevano di una considerazione, di un prestigio sociale abbastanza considerevole. Si è in gran parte degradato, forse a causa degli errori degli universitari stessi, che hanno avuto un po' troppo la tendenza a lasciarsi attirare dalle sirene dei media. Ma c'è anche il fatto che il titolo universitario non è più una condizione necessaria per riuscire nella vita. Probabilmente è sempre una condizione per uscire dagli strati più poveri, ma per "riuscire" nel senso pieno della parola, appartenere alla casta dei laureati oggi non basta più. I grandi successi del nostro tempo hanno un'altra origine. È per questo che i criteri di valore universitari hanno tendenza a perdere importanza nell'ambito sociale. La gente non vede più la necessità di fare grandi sforzi intellettuali, di dedicare dieci o quindici anni dell'esistenza a studi difficili, se non ne ricava una ricompensa sufficiente.

D. *Ma per l'orientamento della ricerca? Che incidenza può avere questa constatazione sul suo orientamento?*

T. Appunto, la ricerca ha finito col dare, in un certo modo, una possibilità di carriera a molta gente che non sarebbe stata capace di fare una carriera universitaria all'antica.

Ciò che avviene oggi nella scienza è molto istituzionale. E la parola è insufficiente: ciò presuppone qualche cosa di regolamentato, di regolamentare. È vero che esistono delle strutture per la ricerca. Ma i loro regolamenti non riguardano altro che l'aspetto materiale delle cose, le carriere dei ricercatori, le promozioni, e così via. L'orientamento della ricerca stessa non è più tanto l'oggetto di una ricerca molto seria di criteri [di scelta dei temi e delle modalità di lavoro].

È in gioco un determinismo essenzialmente sociologico. Le ricerche condotte dalla gente - penso a discipline come la biologia - vengono essenzialmente dirette da tradizioni di laboratorio. Questi sono equipaggiati, hanno dei "materiali", come dicono i biologi. Una volta acquisiti locali e materiali, si cerca di farli rendere facendo esperimenti. Ma è in una certa misura l'equipaggiamento, il materiale, che determina l'"esperimento", e non una teoria soggiacente.

D. *La situazione non è un po' diversa in fisica fondamentale?*

T. Sì, certamente, perché lì le somme impegnate sono talmente considerevoli che bisogna dare una giustificazione teorica affinché la società acconsenta ad impegnare somme così grandi. È diverso da ciò che avviene per la ricerca spaziale: lo spazio parla alla gente. Mandare una sonda come Voyager, in grado di fare fotografie dei pianeti a distanza ravvicinata, fotografie che poi si possono vedere, e di cui si possono apprezzare le qualità, fotografie che ci parlano, questo procura una soddisfazione... Mentre costruire un enorme acceleratore di trenta chilometri di diametro, capace di mettere in evidenza questa o quella particella, può interessare gli specialisti, ma nessun altro, o quasi. Sarà difficile far capire al grande pubblico di cosa che si tratta.

D. *E tuttavia, lei qualifica la meccanica quantistica come "scandalo intellettuale del XX secolo"...*

T. Ho l'impressione che se si fosse stanziato tanto denaro per rendere la meccanica quantistica intelligibile quanto se ne è stanziato per la costruzione dei grandi acceleratori, si sarebbe arrivati molto probabilmente a trovare un modello intellettualmente soddisfacente per spiegarla. È forse un'ipotesi gratuita, ma mi sembra che gli specialisti si siano detti: «Abbiamo una teoria che funziona; non andiamo oltre, e non cerchiamo di guardare per il sottile più di quanto non sia già fornito dal formalismo.»

[C. Forse quanto dice qui Thom sullo scandalo intellettuale della meccanica quantistica non è del tutto esatto. C'è senz'altro un problema di "descrivibilità" in termini di analogie macroscopiche degli oggetti che costituiscono il livello di realtà atomico e subatomico[13], ma esso non è stato affrontato non tanto per l'insufficienza dei fondi quanto per altre tre ragioni. In ordine cronologico queste sono: la popolarità che dava alla fisica il fascino dei paradossi che derivano dal dualismo onda-corpuscolo; la probabilità relativamente alta di realizzare progressi discutendo le proprietà delle equazioni piuttosto che le possibili interpretazioni mediante opportuni modelli fisici; la perdita di interesse per la teoria della conoscenza da parte dei fisici della generazione successiva ai padri fondatori della teoria dei quanti.]

D. *Una teoria che funziona, è una teoria che permette di prevedere correttamente un certo numero di cose?*

T. È una teoria che, in qualche modo, crea la sua propria sperimentazione, con una sorta di generatività interna del formalismo. È dunque difficilmente attaccabile dal punto di vista scientifico abituale. Siamo al punto in cui i fisici hanno bisogno di teorie per poter fabbricare realmente fenomeni che si possano effettivamente controllare. È questo il caso della meccanica delle alte energie, delle particelle elementari. È d'altronde un caso scientifico abbastanza curioso: la gente sembra perseguire una teoria essenzialmente con lo scopo di giustificare le esperienze. Questa sperimentazione diviene tanto costosa che occorre necessariamente che ci sia dietro una teoria. Non si accetterebbe che l'umanità spendesse somme così grandi per soddisfare solo pochi individui. La biologia, da questo punto di vista, non presenta gli stessi problemi: è una disciplina che non costa così tanto. Ecco perché non ha bisogno di una teoria: può farne a meno per sperimentare, senza parlare di eventuali ricadute per la clinica.

[13] V. p. es. B. D'Espagnat, *À la rscherche du réel*, Gauthier-Villars, Paris 1979

D. *Che vuol dire allora esattamente la sua dichiarazione che la scienza ha rinunciato all'intelligibilità?*

T. Dico semplicemente che se si riduce la scienza a nient'altro che un insieme di ricette che funzionano, dal punto di vista intellettuale non si è in una situazione superiore a quella del topo che sa che quando spinge una leva, il cibo cadrà nella sua scodella. La teoria pragmatista della scienza ci riconduce alla situazione del topo nella sua gabbia.

[C. Nel particolare contesto in cui si è posto, qui Thom richiama l'attenzione su una piaga del pensiero di oggi, la ricerca delle ricette per pensare. Questa piaga si è estesa fino all'ontologia aristotelico-tomista, divenuta "ontologia formale", cioè la ricerca di procedimenti di logica matematica per vedere se certe proposizioni implichino o meno l'esistenza degli enti di cui predicano qualcosa. Malgrado gli avvertimenti del logico Quine[14], si sta affermando cioè la tendenza a cercare regole per rispondere senza "inutili" riflessioni alla domanda "esiste una cosa che ha questa o quest'altra proprietà?" Nella stessa direzione si muove la pedagogia ispirata dalla teoria del comportamentismo di J. B. Watson e B. Skinner, seguaci di J. Dewey, che sono i teorici dell'applicazione agli uomini delle esperienze sui topi e sulle scimmie. Fra l'altro, nei testi per le scuole elementari si insegna a fare scienza in base al "metodo scientifico" come se i problemi si presentassero da soli, le ipotesi venissero spontanee e le verifiche fossero esperimenti ovvi.]

D. *Matematici e fisici rientrano in questa constatazione?*

T. A difesa dei fisici, bisogna dire che hanno fatto degli sforzi per sintetizzare le diverse "ricette". Esse derivano tutte da un certo numero di principi che si esprimono matematicamente: la meccanica newtoniana, la meccanica quantistica, la meccanica relativista. Sono stati individuati dei principi e a partire da essi, almeno teoricamente, si possono dedurre leggi che si applicano ai diversi fenomeni. Sul piano di questa formalizzazione della scienza, lo sforzo di sintesi corrisponde a uno sforzo metafisico, che consisterebbe nel dire che tutto ciò che esiste proviene da un Dio creatore e organizzatore. Questo equivale a rispondere a un bisogno della mente: il bisogno di unificazione è un bisogno fondamentale della mente.

[14]Cf. W. O. Quine, *Da un punto di vista logico*, Cortina, Milano 2004

D. *E le altre discipline?*

T. Le altre discipline non sono intellettualmente difficili. La scienza, a grandi linee, non è intellettualmente difficile. Per quanto sorprendente possa sembrare, a parte la matematica e la fisica teorica, la scienza non è intellettualmente difficile.

6. Filosofia, etica, sapienza

D. *Lei mi ha detto che considera la filosofia come qualcosa che non è semplice, mentre l'etica lo è. [Nello stesso contesto] ha anche detto che i veri problemi non sono quelli nei quali tutti si sentono coinvolti.*

[C. Nel seguito, occorre tener presente che quando parla di etica Thom non si riferisce a un capitolo dell'antropologia filosofica, cioè della riflessione filosofica sull'uomo, ma all'etica in quanto norme cui si deve adeguare l'azione. Un'altra distinzione importante è quella tra saggezza e sapienza, che in francese sono espresse con la stessa parola ("sagesse"). La sapienza si potrebbe chiamare "saggezza filosofica", nel senso che la riflessione filosofica, in quanto è sviluppo della capacità di giudizio critico, consente la decisione matura ed equilibrata propria del saggio anche senza una base empirica molto vasta e senza una particolare sensibilità mistica.]

T. Non sono convinto che l'etica appartenga alla filosofia. Si vive ancora in quella vecchia ideologia del rapporto tra filosofia e saggezza. Non è interamente errato pensare che la filosofia debba conferire una certa saggezza, e forse è questa la sua unica giustificazione...

È certo che gli Antichi consideravano l'acquisizione del sapere essenzialmente come un cammino verso la saggezza. Questa idea non si deve abbandonare completamente. Un sapere realmente cosciente e ben assimilato può costituire, secondo me, un'armatura che permette di accedere a una certa sapienza. Ma quando si parla di etica, si pensa a dei problemi concreti: l'aborto, l'utilizzazione degli embrioni, certe terapie mediche, cose di questo genere. È molto difficile prendere posizione senza avere una dottrina che in certo modo ha a che fare con la morale...

L' informazione che la scienza o la filosofia possono dare di fronte a questi problemi non è veramente fondamentale. Esse possono fornire una valutazione dei vincoli ai quali sono sottoposti i fatti, ed anche dei benefici che se ne possono trarre. Insomma, una sorta di bilancio contabile... Il guaio è che le cose sono complesse, e che compare sempre un nuovo elemento che rovina completamente le aspettative che si avevano e la validità delle posizioni adottate...

[C. In questa risposta Thom esprime un certo disagio riguardo alla definizione della filosofia come ricerca della sapienza. A nostro parere essa è dovuta da un lato al fatto che le norme morali in sé si possono rifiutare senza fare della filosofia formale, dall'altro alla curiosa circostanza che nel lessico francese è andata perduta la distinzione fra sapienza e saggezza. Se, come fa l'italiano, si intende per saggezza la sola capacità di ben giudicare riguardo ai comportamenti umani, è chiaro che essa non è condizionata da una preparazione filosofica generale; lo è invece la sapienza, che già nella sua forma indipendente dalla teologia e dalla fede - chiamata'sapienza filosofica' nell'Enciclica *Fides et Ratio* di Papa Wojtyla - "si fonda sulla capacità che l'intelletto ha, entro i limiti che gli sono connaturali, di indagare la realtà"[15].]

7. Una carta del senso...

[C. Per informazione storica e per cogliere certe sfumature ironiche dell'episodio narrato da Thom all'inizio di questo paragrafo saranno utili due notizie preliminari. Prima: Jacques Lacan (1901-1981) fu uno psicanalista francese che divenne molto popolare intorno agli anni '70 perché emerse come intellettuale rappresentativo, al pari di Louis Althusser e Claude Lévi-Strauss, del rifiuto dell'idea di persona umana portata avanti dalla contestazione giovanile. Il suo punto principale, esposto in una lunga serie di affollati seminari pubblici, era il rifiuto di quell'interpretazione di Freud che lasciava spazio all'esistenza nell'uomo di un aspetto dell'ego non soggetto ai conflitti neurotici dell'individuo, ma capace di agire e scegliere indipendentemente dai vincoli psicologici. Seconda: In greco $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (màthema), da cui viene il termine "matematica", vuol dire abbastanza genericamente "conoscenza", "esperienza", "dottrina", "arte". Restituiamo la parola a Thom.]

T. All'epoca di "gloria" della teoria delle catastrofi, pranzai con il dottor Lacan. Il Maestro mi aveva invitato, e mi fece parlare abbondantemente durante tutto il pasto, sulle mie concezioni della matematica, sulla mia carriera, sulla mia evoluzione in materia di idee

[15]Cfr. E. De Giorgi, *Riflessioni su Matematica e Sapienza,* (a cura di A. Marino e C. Sbordone), Quad. Acc. Pontaniana, 18, Napoli 1995.

matematiche, sui miei rapporti con il “matèma”. Non sapevo molto bene cosa fosse questo “matèma”!... E lui non disse praticamente niente. Alla fine del pasto, utilizzai una formula che lo fece reagire. Gli dissi: «Ciò che limita il vero, non è il falso, è l’insignificante». Assunse allora un’aria sognante e disse: «Questo mi fa pensare, questo mi fa pensare». Ecco: avevo “fatto pensare” il Maestro... Questa sentenza, che ho cercato di esplicitare in un articolo, non posso spiegarla meglio se non ricorrendo a un disegno, una sorta di “Carta del Tenero”[16].

In basso, si trova un oceano, il mare dell’Insignificanza. Sul continente, il vero è da una parte, e il falso dall’altra, separati da un fiume, il fiume del Senso. Perché è proprio il senso che separa il vero dal falso. È l’idea di Aristotele: la capacità di negare. Essa ci distingue dagli animali: per essi, quando un’informazione viene loro trasmessa, è immediatamente accettata, e determina l’obbedienza al segnale ricevuto. L’uomo, al contrario, ha la possibilità di tirarsi indietro e di negare il vero.

Seguendo questo fiume, che si getta nel Mare dell’Insignificanza, si cammina lungo una costa un po’ concava: ci sono da un lato i bassifondi dell’Ambiguità e dall’altro le paludi di La Palice [un eroe divenuto simbolo delle verità tautologiche]. In cima al delta del fiume, vediamo la fortezza della Tautologia: è lì che regnano i logici. Una rampa permette di salire verso un piccolo tempio, una sorta di Partenone: è la Matematica. A destra, le scienze esatte: l’Astronomia, con il suo osservatorio che domina il tempio, quasi nelle montagne che fanno da cintura al bacino; all’estrema destra, le grandi macchine dei fisici, gli anelli del CERN, i laboratori della biologia in cui si vedono degli animali in gabbia; da tutto questo deriva un piccolo ruscello che si getta nel Torrente delle Scienze sperimentali, che va a gettarsi nel Mare dell’Insignificanza. A sinistra, un grande viale sale verso il nord-est; raggiunge la città delle Lettere e delle Arti. Proseguendo, si arriva alla regione pedemontana dei Miti. Siamo nel regno delle scienze antropologiche. La catena di montagne, in alto, è l’Assurdo. La cresta è l’immagine della perdita del senso dei contrari, qualcosa come un eccesso di senso universale, che rende la vita impossibile.

[16] “Carta del Tenero” è un’espressione, registrata nel classico dizionario Robert, che indica la mappa del “Regno della Tenerezza” immaginata nel XVII secolo da M.lle De Scudéry. Per motivi grafici e per non appesantire l’esposizione, poniamo alla fine del capitolo la “mappa del senso” (leggermente modificata da G. Del Re) e il commento.

È un divertimento, ma riflette qualcosa che io credo abbastanza reale: il logos, la possibilità di rappresentare con il linguaggio, serve all'uomo soltanto in un quadro abbastanza limitato di situazioni, fra ciò che io chiamo il cosmo [notando che in greco $\kappa\acute{o}\sigma\mu o\sigma$ (kosmos) vuol dire "ordine" prima che "universo"] e il caos. Il cosmo nella sua forma più assoluta, è il cimitero. Niente di più tranquillo, è la calma dell'insignificante, il nulla dell'insignificante. In alto, al contrario, c'è il caos del dispiegarsi delle forze cosmiche. Esse sono sempre presenti, a minacciarci. Di fronte a queste minacce, l'opposizione vero/falso scompare dal lato dell'insignificanza, come scompare in fondo la verità degli assiomi in matematica. Essi divengono delle convenzioni. Si possono cambiare e l'assioma può essere considerato come falso. Si perde allora l'opposizione vero/falso maneggiando il contesto. Questo è variabile e l'opposizione vero/falso, alla fine, scompare nell'insignificanza.

In alto, questa opposizione scompare abbastanza bruscamente su questa catena di montagne, perché è là che l'essere umano è sottoposto allo scatenarsi delle forze della natura che lo minacciano: è obbligato a reagire in modo immediato. Se qualcuno grida "Al fuoco!" al cinema, non ci si pone il problema di sapere se il messaggio è vero o falso: bisogna comportarsi come se fosse vero, anche se è falso... l'opposizione vero/falso, anche in questo caso, scompare. Questa opposizione è realmente significativa solo nella stretta banda che è il bacino del fiume del senso. In alto c'è il caos delle forze naturali; in basso la pace del nulla; tra i due, una sorta di falce di luna che si può rovesciare, e che si può vedere come un canotto che galleggia sul ribollio delle forze della natura. In alto, la calma dei cieli... eterna. Rovesciando il senso dell'asse, ahimé, la serenità del nulla.

Questo dà un'idea abbastanza precisa della funzione della lingua come supporto di ciò che Heidegger chiama l'angoscia. Egli dice che l'esistenza è legata al sentimento di inquietudine, al bisogno che abbiamo di reagire al pericolo che ci minaccia. È forse una rappresentazione troppo concreta per un metafisico, ma è abbastanza reale. Il logos esiste soltanto in quella zona in cui regna il pericolo, ma questo può essere concettualizzato, e dunque trattato in funzione di conoscenze anteriori e, allo stesso tempo, neutralizzato. Poi, quando si va un po' più in alto nell'astrazione, si fabbricano degli enti linguistici che non hanno più corrispondenze nel reale, che dunque non ci minacciano più per niente, e diventa un gioco di linguaggio, della logica, la tautologia, una certa filosofia, o piuttosto una certa epistemologia. Là, il fiume del senso attraversa la fortezza della tautologia, passando per le fogne. Non lo si vede più... ma, in superficie, talvolta c'è un odore sgradevole.

D.*La mia prima domanda, per questa serie di colloqui, era: qual è stata la sua motivazione nel diventare matematico? La mia ultima domanda sarà: che cos'è che la motiva oggi? Cosa ha voglia di fare? Quale parte vorrebbe avere, in particolare perché si possa giungere a una migliore comprensione del mondo?*

T. Sono tentato di rispondere che non ho mai avuto voglia di fare una "parte". Credo che non sia mai stato il mio progetto. E se è avvenuto che io abbia preso delle posizioni talvolta controverse (e anche talvolta un po' provocatorie), è non tanto per il desiderio di partecipare all'azione quanto perché la mia sensibilità è sempre stata viva di fronte alla disonestà intellettuale. E mi sembra che gli esempi non manchino. E in quei casi mi è difficile non reagire.

Per il resto, non ho progetti. Non sono sicuro di averne mai avuti... Non ho mai pensato a costruire la mia vita in questo o in un altro modo. Mi sono lasciato portare dagli avvenimenti. Gli argomenti di interesse non mi mancano! Ma sento tutto questo come una sorta di mezzo nutriente. Non è l'oggetto di una scelta deliberata.

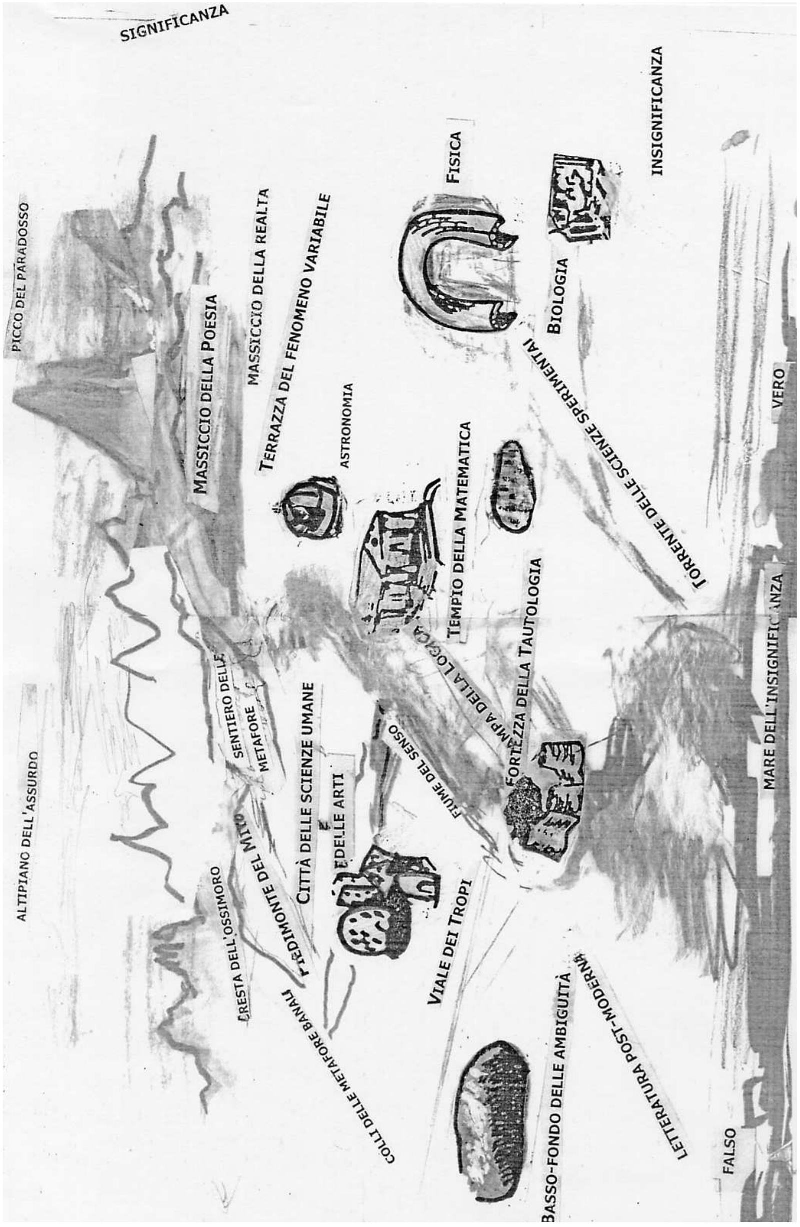
Ci sono molte domande attorno a cui ruoto. Fra esse, alcune questioni di matematica che vorrei vedere risolte negli anni che mi restano da vivere. Si tratta forse essenzialmente di curiosità.

Quanto alla situazione generale dell'umanità sul pianeta, penso come tutti che si dovrebbe arrivare il più rapidamente possibile a crescita zero, per arrivare a ristabilire un equilibrio abbastanza soddisfacente, come quello delle società primitive che vivevano in un ambiente che esse non danneggiavano... Bisognerebbe, come diceva Lévi-Strauss, "raffreddare" la nostra umanità, trasformarla allo stato di società fredda. Sarebbe forse meno eccitante di una società calda, ma dopo tutto... Ho fatto questa osservazione a molte persone: gli economisti sembrano convinti che l'economia debba necessariamente espandersi. Se è stazionaria o regredisce, le cose vanno male. Ho l'impressione che le nostre società abbiano tentato di aggirare il problema creando beni fittizi e produzioni fittizie, ma che hanno un prezzo, e ai quali l'umanità tiene. Si sviluppa dunque una produzione, ma con dei beni che hanno più un carattere psicologico o affettivo.

D.*E che ne dice della meditazione?*

T. La meditazione? Sì, d'accordo. È bellissima. Ma la meditazione da sola!... mi sembra che si debba arrivare allo stato di individuo unico, a un grado di ascetismo che personalmente non ho mai raggiunto. In effetti, mi piace presentare quelle poche idee che posso avere, e mi piacciono le reazioni che suscitano. Soffro di più dell'assenza di reazioni, anche sgradevoli, anche critiche, che non del silenzio.

Ma è normale in fin dei conti che le idee importanti non sollevino molte eco. Nietzsche diceva: «Le idee nuove arrivano sempre su zampe di colombo...».


SIGNIFICANZA
PICCO DEL PARADOSSO
MASSICCIO DELLA POESIA
MASSICCIO DELLA REALTA
TERRAZZA DEL FENOMENO VARIABILE
ASTRONOMIA
FISICA
BIOLOGIA
INSIGNIFICANZA
TORRENTE DELLE SCIENZE SPERIMENTALI
TEMPIO DELLA MATEMATICA
MPA DELLA LOGICA
FORTEZZA DELLA TAUTOLOGIA
VERO
MARE DELL'INSIGNIFICANZA
ALTIPIANO DELL'ASSURDO
SENTIERO DELLE METAFORE
CITTÀ DELLE SCIENZE UMANE E DELLE ARTI
FIUME DEL SENSO
PEDIMONTE DEL MITO
CRESTA DELL'OSSIMORO
VIALE DEI TROPI
COLLI DELLE METAFORE BANALI
BASSO-FONDO DELLE AMBIGUITÀ
LETTERATURA POST-MODERNA
FALSO

[C. Forse la caratteristica più affascinante del pensiero di René Thom è che Thom non era un matematico in senso generico, ma proprio un geometra, cioè una mente che idealizza il mondo del pensiero in forma di immagine. Questa sua caratteristica lo condusse addirittura a guardare al mondo del pensiero come a un vasto territorio di montagne e pianure, fiumi e torrenti, viali .

Il termine 'pensiero' notoriamente ha vari significati, ma nel mondo della cultura è certamente quello discusso da Karl Jaspers nel suo libro sul linguaggio[17]: è il pensiero espresso in parole, più precisamente formalizzato. Ecco perché Thom lo vede come un mondo racchiuso tra le catene montuose con cui terminano *l'Altopiano dell'Assurdo e il Mare dell'Insignificanza.* Non è facile interpretare il termine *Assurdo*, ma certamente indica quella fase del pensiero in cui le parole stesse non hanno senso. È qualcosa che ricorda l'essere quale è visto da Heidegger, cioè qualcosa da cui gli enti emergono per portarsi di fronte a noi come concetti. L'albero non esiste come tale nel *Sein als Grund* di Heidegger, è una pura manifestazione dell'essere.

Si tratta, insomma, della sorgente dei concetti in senso aristotelico e delle relazioni tra loro. Ricostruendo in sé il mondo percepito, infatti la mente costruisce anche i collegamenti, le associazioni significative di parole. Non meraviglia dunque che Thom - come dice nel suo libro - sia andato apprezzando sempre di più Aristotele.

Dal punto di vista dell'immaginifico di Thom sembra indiscutibile, anche se non è detto esplicitamente, che la vegetazione che cresce nel suo mondo sia fatta di strutture sintattiche mediante le quali si formulano giudizi di relazione e di valore, come si vedrà dalla sua stessa "carta del senso". Quelli che in un paesaggio campestre o alpino della nostra realtà sono alberi o arbusti o boschetti qui sono formazioni linguistiche anche molto varie ma dello stesso tipo, e perciò danno il nome a un'intera regione, come, a sinistra della carta, i *Colli delle Metafore Banali.*

Il punto di riferimento della "carta del senso" è il *Picco del Paradosso* , dal quale nasce il *Fiume del Senso.* Il paradosso è un'affermazione nella quale vi sono due elementi in contrasto anche se presumibilmente veri. Un'operazione fondamentale del pensiero è proprio di sciogliere questo contrasto; e da questa operazione segue la costruzione di ciò che chiamiamo conoscenza. È nato così il *Fiume del Senso*

[17] Karl Jaspers, *Die Sprache, Über das Tragische*, München, Piper 1990; Cf. *Von der Wahrheit*, (ibid. 1947), trad. it. di Donatella Di Cesare, *Il linguaggio. Sul tragico.*, Napoli, Guida 1993

perché dalla risoluzione dei paradossi emerge la nostra comprensione del luogo che ogni cosa ha nel mondo cioè del suo senso. Perché si chiami "fiume" lo si può capire interpretando il resto della carta.

A destra del *Fiume del Senso*, alla base del *Picco del Paradosso* si trova il *Massiccio della Poesia*.

Questo è simile a un terreno montuoso abbastanza dolce sul quale si levano alberi fioriti che formano a gruppi le affascinanti strutture di un parco, talora armoniose in modo quieto e sereno talora contorte ma con una loro armonia interiore, come i famosi faggi chiamati *faux de Verzy* della foresta della Marna[18].

Come abbiamo detto, la vegetazione del *Mondo del Senso* costituisce dunque la grande ricchezza di formulazioni linguistiche che consentono alla nostra mente di passare dalla semplice ricezione passiva del mondo delle cose alla conoscenza.

In questo processo, ognuno di noi cerca qualcosa che molti chiamano "il senso" delle cose che giungono alla nostra percezione, cioè la collocazione delle cose in una rete di relazioni. Un esempio efficacissimo è la metafora, che mette in relazione fra loro due concetti in qualche modo analoghi, anche se di contenuto diversissimo. La sua importanza è messa in luce dalla famosa metafora dell'orologio, che vede il mondo come un meccanismo ad orologeria messo in moto dal Divino Artefice. Alla luce della scienza, questa metafora va abbandonata a favore di quella secondo cui il mondo va paragonato a una grande *Danza delle Cose*, il cui ordine non è meno perfetto di quello che avrebbe un meccanismo ad orologeria, ma è vivo e cangiante[19].

Questo è un aspetto importantissimo del modo in cui ricostruiamo la realtà dentro di noi. Appena si supera il limite dell'invenzione dei nomi degli oggetti concreti, il nostro linguaggio è fatto di metafore perfino a livello di singole parole. Per esempio, come faceva notare un grammatico inglese, la stessa parola 'oggetto' è una metafora, perché viene dal latino ob-jectum, che indica qualcosa gettato davanti a noi.

Le metafore vere sono la prima forma di pensiero filosofico, come testimonia la filosofia greca, e si presentano allo stesso tempo come primo stadio di organizzazione della conoscenza. Ecco perché il Massiccio della Poesia contiene immagini come per esempio il paesaggio alla sommità del monte Spluga che il Carducci descrisse con i versi bellissimi:

[18]Si tratta di faggi che, per una strana alterazione genetica, tendono a crescere verso il basso (cfr. Internet, come già detto)

[19]Cfr. G. Del Re, *La danza del Cosmo*, UTET-libreria, Torino 2006, cap.I

…quasi un anfiteatro
ove elementi un giorno lottarono e secoli. Or tace
tutto: erran cavalli magri sulle magre acque: aconito,
perfido azzurro fiore, veste la grigia riva.[20].

Nel *Massiccio della Poesia* il pensiero ha un massimo di "significanza", cioè collegando fra loro le cose e le azioni in un modo che ci coinvolge al tempo stesso affettivamente ed intellettivamente, sia pure senza seguire rigide regole di logica o distinguendo i fatti della realtà concreta dalle fantasie. Per questo, secondo Thom, la poesia occupa una regione che oltre ad avere un massimo di significanza è vera nel senso più profondo del termine.

Alla sinistra del *Massiccio della Poesia*, superate le radici del *Picco del Paradosso*, da cui nasce il fiume di ciò che ha senso, si trova il *Sentiero delle Metafore*, ai piedi della *Cresta dell'Ossimoro*. Questa prende il nome dal fatto che è una selva disordinata e contorta di figure retoriche che esprimono concetti contrapposti, appunto gli "ossimori". Segue il *Piedimonte del Mito*, che si lascia a destra i *Colli delle Metafore Banali* tanto usate dalla sapienza popolare.

Il mito, nato in tutte le grandi civiltà, si serve ampiamente di analogie e quindi di metafore, e ha la funzione scientifico-religiosa di dare una spiegazione del mondo in termini di esseri superiori, come nel mito di Prometeo. Forse per questo le Metafore sono molto ricche di significato esistenziale; e il loro cammino consente di costeggiare finalmente il *Fiume del Senso*.

In un'ansa di quest'ultimo sorge la *Città delle Scienze Umane e delle Arti* che rappresenta tutte le attività del pensiero che sviluppano con metodo razionale e con criteri estetici l'interpretazione della nostra esistenza.

Dall'altro lato del fiume sorge l'Osservatorio astronomico che rappresenta l'*Astronomia*. Questa si presenta subito sotto il *Massiccio della Realtà*, il cui significato è evidente. Alla base di questo vi è la *Terrazza del Fenomeno Variabile* la quale contiene tutto ciò che è oggetto delle scienze matematiche e naturali.

Nella *Terrazza* sorge il *Tempio della Matematica*, un edificio dalle linee purissime di un tempio greco, e più a destra si apre un tunnel che rappresenta l'acme della ricerca della *Fisica*. Non lontano vi è una strana costruzuione che rappresenta la *Biologia*. Da questa regione scorre dunque il torrente delle *Scienze sperimentali*. Più a

[20] G. Carducci, *Elegia al Monte Spluga.*

sinistra vi è una palude che minaccia continuamente la scienza con il rischio di cadere nelle verità lapalissiane (*Palude di La Palice*). Ancora verso sinistra c'è la *Rampa della Logica* che collega il *Tempio della Matematica* alla *Fortezza della Tautologia*. Si tratta di una fortezza importante sia perché è inespugnabile sia perché le tautologie sono nascoste in molti discorsi scientifici apparentemente ricchi di informazioni.

Traversato il fiume, ancora verso sinistra, si incontrano i pericoli che minacciano il pensiero letterario. Il *Viale dei Tropi* ricorda appunto i tropi quali sono le espressioni ironiche del tipo "quell'uomo onestissimo" alludendo a un noto imbroglione.

Dai tropi nascono infinite ambiguità, raccolte nella carta del senso appunto nel *Bassofondo delle Ambiguità*.

Sempre a sinistra, verso la foce del Fiume del Senso, vi è la *Letteratura post-moderna*, una regione che costituisce dalla parte del "falso" la riva dell'immenso *Mare dell'Insignificanza*.

Attualizzazione della "Carta del Senso" di Thom;
riproduzione (in bianco e nero) di un acquerello
di Giovanna Bonomi e Fabio Simeone.

L'EREDITÀ DEL PENSIERO DI THOM

(Arcangelo Rossi)

Come ben sanno i lettori del saggio di René Thom *Prevedere non significa spiegare*, pubblicato a cura di A. Guerraggio e P. Nastasi (citato nella "Prefazione"), e qui riproposto in altra traduzione italiana, un lavoro di rifinitura e di applicazioni specifiche di teorie matematiche è cosa diversa da ciò che fa Thom con la sua teoria delle catastrofi, grande quadro interpretativo ed esplicativo della struttura della realtà in termini matematici topologico-qualitativi. Si supera infatti con essa senza esitazione la concezione puramente quantitativa della matematica (intesa come mero strumento di calcolo di previsione esatta) in una concezione della stessa (come schema esplicativo universale) riconciliata con la metafisica, in particolare con la metafisica ontologica aristotelica, da tempo invece erroneamente considerata contraria alla trattazione matematica della realtà proprio per il suo rifiuto di ridurre la conoscenza a mera misura quantitativa. In particolare, la nuova teoria o piuttosto schema esplicativo universale utilizza, come la metafisica di Aristotele, il concetto qualitativo di bordo o confine per definire le realtà individuali, sia fisiche (cose) sia mentali (concetti), mediante le forme che le definiscono separandole da tutto il resto.

La realtà si manifesta quindi già nell'esperienza attraverso i bordi che la delimitano, le forme distintive che essa assume, dando così origine anche a quelle nozioni geometriche che sono sì frutto di astrazione rispetto ad altre proprietà, ma restano pur sempre collegate all'esperienza concreta. La realtà non ci è quindi data nell'intuizione e nel concetto puri come per Kant, ma nelle forme topologiche concrete che la delimitano e la definiscono. Queste forme permettono in particolare di costruire analogie tra una cosa e l'altra mandando, come dice Thom, uno spazio in un altro: analogie formali che trovano espressione nella stessa fisica attraverso la sua trattazione matematica, come avviene nell'ottica geometrica. Thom studiò quindi il passaggio continuo da una varietà (spazio) ad un'altra, le connessioni tramite bordi comuni tra spazi anche di diverse dimensioni (questa ricerca sul cosiddetto cobordismo gli fruttò addirittura nel 1958 la medaglia Fields), fino ad individuare forme universali e quindi oggetti matematici che rappresentano catastrofi o transizioni brusche di forme, come in particolare le grinze e le pieghe. Queste rappresentano singolarità specifiche che appaiono quando un oggetto viene sottoposto a vincoli, come restrizioni rispetto alle sue dimensioni normali, che esso accetta, tranne che in punti particolari in cui oppone resistenza concentrando lì, per così dire, la sua struttura. La teoria delle catastrofi esprime appunto le concentrazioni di forme che vengono così a crearsi come irregolarità e accidenti dovuti a vincoli, indipendentemente dalla struttura materiale, fisica degli oggetti. Ha cioè carattere di universalità. Esempi sono gli spigoli negli oggetti solidi in cui, per così dire, le catastrofi vengono cristallizzate in forma statica, laddove le stesse svaniscono appena formate nei liquidi e nei gas, meno dotati di memoria (e tali da assumere, sempre provvisoriamente, la forma del recipiente che li contiene).

Sette sono i tipi elementari di catastrofi o singolarità generiche di un'applicazione, e Thom volle studiarne le applicazioni pratiche come nelle caustiche, superfici illuminate secondo diverse angolazioni, riflessioni e rifrazioni, per vedere appunto come si formano catastrofi attraverso deformazioni ottiche. La teoria delle catastrofi servì appunto inizialmente a spiegare la formazione delle caustiche e poi molti altri fenomeni senza fornire soluzioni quantitative o previsioni esatte, ma solo inquadrando qualitativamente situazioni non dominabili con soli metodi riduzionistici quantitativi (per somma a partire da unità elementari). Vi furono quindi dal 1975 in poi molte polemiche sulla validità della teoria che costrinsero Thom addirittura a riflettere sulla natura della scienza. Lo studio delle forme in situazioni irregolari, accidentali e perfino caotiche aveva per la verità portato già prima (cfr. J. Hadamard, inizio '900) ad individuare delle evoluzioni catastrofiche invarianti nei più disparati fenomeni, in termini di divergenze dovute a dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Il problema è che in tali casi non vi erano leggi esatte ma solo tendenze evolutive continue che appunto non permettevano predizioni esatte. Laddove invece queste ci sono, il modello catastrofico non serve più. E' ciò che è stato constatato nelle applicazioni della teoria da parte di Zeeman: rivolte nelle carceri, battito cardiaco, propagazione dell'impulso nervoso, ma in quest'ultimo caso l'applicazione fu superata dall'inizio da un approccio analitico rigoroso mediante equazioni. In realtà si può sempre procedere, a seconda dei casi, in modo attivo facendo previsioni esatte, o in modo contemplativo descrivendo processi globali catastrofici, in un caso prevedendo senza capire, nell'altro comprendendo il processo globale ma senza riuscire a prevederlo, come insegna un aneddoto di Thom relativo alla scoperta dell'aspirina. Secondo una versione dei fatti di cui però egli non potrebbe garantire l'autenticità, fu un atteggiamento attivo, non contemplativo, di intervento piuttosto che di comprensione, a sfruttare la proprietà dei salici di sopportare bene l'acqua per guarire dai dolori reumatici legati all'umidità mediante decotti di foglie di salice, che contenevano appunto l'acido acetilsalicilico alla base dell'aspirina, garantendone così una diffusione quasi universale. Altra contrapposizione, oltre a quella tra prevedere e spiegare, e ad essa connessa, è quella tra esperienza e sperimentazione. Solo quest'ultima infatti riguarda la previsione esatta, mentre la prima, se è in grado di riconoscere gli oggetti e quindi di spiegarli, ne presuppone il concetto. E' pur vero che un'osservazione ulteriore può modificarne il concetto anche attraverso esperimenti esatti, ma le grandi teorie non sono nate così, bensì come costruzioni concettuali anteriori ai dati dell'esperienza. In realtà le strutture psichiche, matematiche o comunque non empiriche, precedono sempre l'esperienza. Vediamo ancora le cose quasi come 2500 anni fa, all'epoca dei presocratici, solo che la matematica ha arricchito le nostre concezioni dello spazio, ma sempre per via mentale, endogena. Anche se ci poniamo da un punto di vista materialista, sono sempre enti astratti come le leggi della materia a caratterizzare la nostra organizzazione della realtà. In particolare le idee matematiche trovano comunque riscontro nella realtà, come voleva Platone.

Il concetto matematico di funzione proprio della scienza moderna in particolare è tutt'uno con il determinismo (almeno dalla sua prima formulazione accurata da parte di Leibniz nel 1695). La pretesa di Prigogine di negare il determinismo è infondata, non potendosene fare a meno anche quando si affrontano, seppure controvoglia, situazioni apparentemente indeterminate. Quanto poi alla complessità in biologia, contrariamente alla visione riduzionistica, è più semplice un organismo macroscopico che una cellula. Conviene quindi, fatto salvo il determinismo ma non il riduzionismo, procedere in senso inverso, dall'osservazione delle grandi strutture degli organismi alla loro decomposizione nelle parti e alla descrizione sempre più fine delle strutture locali. La teoria delle catastrofi studia comunque le forme come discontinuità qualitative, ma su un substrato continuo. Essa condivide dunque la concezione della materia di Aristotele come un continuo indefinito, un'estensione che può assumere diverse forme. Così le discontinuità fenomenologiche, forme e catastrofi, per Thom non contraddicono affatto la visione di un continuo in lenta evoluzione cui quelle discontinuità possono sempre essere ricondotte. In ogni caso le forme come fatti mentali sono immerse in una materia che è anche a sua volta oggetto di pensiero. Più si cerca di analizzarla più essa appare come una nebbia svelando attraverso le forme che viene assumendo una tessitura sempre più complessa man mano che si affina. Sempre più si constata infatti una complessità, una divergenza, fino a giungere ad un vero e proprio enigma se si vuole definire una volta per tutte la realtà che è immersa in un universo virtuale di grande astrazione con un numero elevato di dimensioni e oggetto quindi solo di esperienza mentale. In effetti gli stati della materia come lo stato solido non sono ancora scientificamente spiegati né dalla fisica classica né da quella quantistica. La realtà concreta è infatti più evidente di una sua spiegazione scientifica e l'ontologia ingenua ci appare così più concreta di quella scientifica: essa è stabile ed universale, mentre la seconda è sempre problematica e rivedibile. Inoltre, mentre la spiegazione ingenua del mondo si riflette immediatamente nel linguaggio ordinario accessibile a tutti, la pretesa spiegazione scientifica deve andare, con il suo gergo, oltre l'esperienza immediata (cfr. G. Bachelard), allontanandosi così dal mondo della vita che solo conosciamo immediatamente. Spiegare le cose nella scienza moderna, come ad esempio il Big Bang e la concentrazione del plasma, si fa così sempre più difficile. Conviene quindi sempre partire dal mondo della vita, dell'esperienza ordinaria e di qui semmai risalire al mondo della scienza, e non viceversa.

Quanto al carattere continuo della realtà, esso è contraddetto dall'attuale tendenza a ridurre tutto alle unità discrete di informazione (bit) dell'odierna informatica. Certamente ciò ha un valore pratico: un animale che individua una preda lo fa percependola come entità assolutamente distinta dallo sfondo, così come discretizziamo i fonemi nel linguaggio per imparare a parlare senza confonderli l'uno con l'altro. Ma resta pur sempre un fondo continuo, nonostante l'esigenza del cervello di discretizzare. Il fondo è ad esempio costituito dallo spazio e dal tempo. Inoltre, abbiamo bisogno dell'intuizione del continuo per muoverci nello spazio toccando tutti i punti di un dominio. Si dice che il continuo è un'illusione, portando ad esempio un film che a noi sembra continuo, mentre è fatto di fotogrammi discreti. E' vero, si tratta di un'illusione, ma essa ha una base reale, altrimenti non nascerebbe neppure e questa base è il continuo. In realtà noi vediamo il continuo, ma abbiamo bisogno del discreto per tenere le cose sotto controllo. Tuttavia la meccanica quantistica sembra invece introdurre il discreto in termini assoluti, qualcosa che non capiamo ma che è operativamente valida, efficace e tuttavia incomprensibile. Ad esempio un fotone con un'alta frequenza ha molta energia e si può quindi localizzare, se la frequenza però diminuisce a vantaggio della lunghezza d'onda, il fotone si delocalizza, estendendosi al limite su tutto lo spazio: un oggetto spazialmente enorme, ma con pochissima energia. Comunque, l'apparente discontinuità quantica cela una continuità, che è solo oscurata quando il ricordo delle perturbazioni subite da una particella non ha effetti, mentre è visibile quando tale ricordo ha effetti. In ogni caso le perturbazioni hanno sempre avuto luogo, sebbene talora risultino invisibili: difficile da concepire ma non mostruoso in sé. L'ipotesi poi secondo cui noi siamo finiti e discreti nella nostra struttura interna è falsa perché siamo più di questo. Abbiamo centinaia di miliardi di neuroni, i quali sono in movimento in modo continuo, essendo costituiti da molecole vibranti nello spazio in modo continuo, tanto da dar luogo ad infinite variazioni possibili in un numero considerevole di dimensioni. Non si tratta cioè di due soli stati, a riposo ed eccitato, come pensano alcuni biologi. In realtà poi ci si riduce effettivamente al numero il più piccolo possibile di stati e di dimensioni per poter trattare il sistema studiato, discretizzando l'universo, in ossequio ad un pensiero tecnico ed algoritmico praticamente motivato certo, ma non identificabile con la realtà.

La scienza cerca infatti soluzioni, ma si trova quindi di fronte ad aporie che rivelano irrisolto il problema, illusoria la soluzione. In matematica e fisica l'aporia è formalizzata e concettualizzata e quindi smorzata, mentre in biologia essa appare drammatica come problema metafisico, come quando si afferma che la vita è riducibile alle leggi della materia inanimata, fisiche e chimiche, contro l'intuizione immediata che suggerisce piuttosto un'irriducibilità. Ma anche in matematica si danno aporie impressionanti, come il teorema di Goedel: volendosi dimostrare la non contraddittorietà dell'aritmetica nel quadro concettuale ammesso, si arriva a dimostrare che tale non contraddizione non è dimostrabile. Se ne può uscire cambiando assiomatica? La maggior parte dei matematici pensa che ciò non sia possibile, quale che sia l'assiomatica. Si potranno al massimo chiarire aspetti locali relativi ai fondamenti della matematica, ma non il problema globale del fondamento, che peraltro rinvia sempre all'opposizione continuo-discreto. Il continuo è in effetti il substrato universale di tutto il pensiero, matematico in specie, ma senza assumere anche il discreto in tale continuità non si riesce a pensare nulla di effettivo. Ad esempio, come già si accennava, il linguaggio è sempre qualcosa di discreto per potersi esprimere: parole, frasi, discorsi, quantità, poi però la funzione delle parti, benché molteplici, discrete e quantitative, può essere compresa solo in connessioni qualitative e continue. Anche in matematica Thom preferisce risalire dal continuo al discreto che viceversa. Eppure Dedekind propose di definire il numero reale a partire dall'aritmetica dei numeri razionali, pur sempre separati e discreti, ma resi sempre più vicini l'uno all'altro fino a fare un taglio nella serie, tra numeri razionali di una classe inferiori al taglio e dell'altra classe superiori al taglio, la differenza tra le due classi approssimandosi a zero. In realtà, in tale serie tagliata resterà sempre un buco, una discontinuità insuperabile, come mostrano i paradossi di Zenone. Non è quindi meglio, suggerisce Thom, partire già dal continuo? La teoria dei sistemi in particolare interpreta subito globalmente questi come scatole nere che si scambiano tra loro materia ed energia come input ed output, solo esternamente osservabili come segnali di entrata ed uscita nella scatola nera. L'approccio riduzionista consiste invece nel rompere le scatole nere e vedere cosa c'è dentro, contro il parere dei teorici dei sistemi per i quali ciò comprometterebbe, specie se si tratta di esseri viventi, la globalità dell'oggetto e quindi la sua comprensione. Quale metodo è migliore? Il metodo riduzionista incontra difficoltà insormontabili. Volendo ridurre il sistema ai semplici elementi componenti arriva a numeri altissimi e fallisce quindi sia nella versione classica sia in quella quantistica (che tra l'altro non può neppure superare la scala microscopica). L'approccio sistemico globalizzante definisce i punti nello spazio delle fasi costituiti da entrate e uscite a formare una nube il cui andamento complessivo permette di ricostruirne il processo evolutivo e il meccanismo genetico.

La teoria delle catastrofi fornisce dunque un modello o meccanismo qualitativo piuttosto che equazioni che descrivano e prevedano alcuni invarianti delle deformazioni. Ciò ha generato molte critiche, a partire dalla frase di Rutherford: "Il qualitativo è quantitativo scadente". Altri hanno detto: "La teoria delle catastrofi produce solo metafore". Ma è sempre meglio che niente! Essa prescinde dalla natura fisica, biologica o chimica dei fenomeni e non li considera, alla stregua di quelli fisici in genere, come retti da leggi quantitative esatte, non può matematizzare in termini fisici correnti ciò che non è matematizzabile in termini quantitativi, sapendo che anche deterministi come Leibniz non dànno affatto per scontato che matematizzare significhi quantificare qualsiasi fenomeno, piuttosto che porre relazioni in generale. Per Thom al contrario pochi fenomeni naturali sono retti da leggi quantitative esatte, e sono fisici, mentre quasi tutte le altre leggi dei fenomeni, pur se quantitative, sono solo approssimate. La teoria delle catastrofi fornisce invece schemi di intelligibilità, che possono anche essere fallaci quando la realtà ci appare dominata da un genio maligno che ci inganna (cfr. Descartes). Essa prescinde dal campo specifico ed è applicabile alle più diverse situazioni. Secondo Konrad Lorentz qualsiasi analogia è vera, ma forse si può più correttamente dire che ogni analogia è vera purché sia semanticamente accettabile, cioè se ad un'analisi puramente mentale risulta corretta, basta che la mente la riconosca davvero come tale. Essa è comunque una relazione qualitativa stretta, non approssimativa, e può essere espressa matematicamente, anche se la sua valutazione non dipende necessariamente dalla sua forma matematica, può anche essere effettuata su una formulazione mentale non matematica. Ad esempio, dire con Aristotele che la sera è la vecchiaia del giorno o che la vecchiaia è la sera della vita, significa elaborare mentalmente, semanticamente un'analogia in due formulazioni di cui la seconda si impone come più convincente della prima alla stessa mente. La sua struttura implica la nozione fondamentale di bordo. Si parla infatti di un intervallo temporale, di cui si enuncia la fine o bordo, sera o vecchiaia, con analoga struttura di vicinanza tubulare della parola fine, la cui catastrofe è una piega: un regime stabile (vita o giorno) si incontra con uno instabile (vecchiaia o sera). Analogamente, il cuore fu compreso da Vesalio e Harvey come pompa che inietta il sangue nei vasi, mentre i polmoni come mantici, e il vivente in seguito come macchina termica. Si tratta sempre di metafore che assimilano qualcosa a qualcos'altro anche in termini matematici che rappresentino un nucleo comune. In questi casi l'efficacia della metafora è data dalla natura, di cui l'arte, la tecnica umana è imitatrice, "scimmia" come dice Aristotele. Per questo è lo schema della pompa del cuore che ha ispirato le più avanzate pompe tecnologiche e non viceversa. Oggi si dice che la mente è un computer, ma è in realtà il computer che si perfeziona imitando la mente. In questo senso la Bibbia esprime in metafore una forma universale, anche fosse menzognera essa appare alla mente corretta nelle sue analogie. Una di esse in particolare, che esprime il mondo prima e dopo la caduta di Adamo nella Genesi, rappresenta due diverse dinamiche, esprimibili anche matematicamente: "guadagnerai il pane con il sudore della fronte", opponendo appunto la dinamica aristotelica in cui è necessario l'attrito, la dissipazione, propria dell'esperienza quotidiana dei fenomeni terrestri, alla dinamica hamiltoniana priva di attriti, in cui il moto (inerziale) ha luogo incausato, senza sforzi, eternamente.

La filosofia comunque, che qui si esprime, è per Thom più difficile della matematica e richiede sforzi tecnici in più, essendo meno concreta, precisa e delimitata, sicuramente più complessa e richiedente un training assai più duro. Essa tratta di problemi in cui non tutti sono coinvolti, essendo essi in realtà i veri problemi, quelli di fondo, laddove perfino quelli etici e bioetici, pur essendo problemi che certamente coinvolgono tutti, non perciò sono quelli di fondo, che richiedono appunto sforzi superiori per essere affrontati. Secondo Thom inoltre la matematica è ormai un mestiere remunerato almeno fin dall'epoca napoleonica, e perciò le motivazioni per farlo non sono più legate al piacere disinteressato stimolato ad esempio dalla divulgazione del sapere, che non è più quindi strumento diffuso di reclutamento di nuovi ricercatori. Quanto alla spiegazione scientifica, essa si riduce infine a descrivere un fenomeno, ad esempio la collisione di due placche come causa di terremoto, cosa che non interessa certo alle vittime della catastrofe. Occorre quindi andare indietro alle ragioni della collisione, ma così si va fino alla causa prima, Dio, non spiegata a sua volta. Per Thom ancora una volta la metafisica di Aristotele risolve elegantemente il problema, con Dio concepito appunto come causa prima incausata. Il qualitativo in ogni caso non è quantitativo grossolano, la topologia matematica non si lascia ridurre a quantità, ma va oltre, quando ad esempio distingue una sfera da una palla o un cerchio da un disco in termini irriducibilmente qualitativi. Ancora Aristotele (*Parti degli animali*) si chiede: "una parte può considerarsi un ente?" e risponde di no, perché essa ha un'autonomia solo relativa (essendo funzionalmente subordinata alla realizzazione dell'intero organismo). Il problema delle parti (come peraltro quello del bordo da cui siamo partiti) è per Thom fondamentale, contro l'opinione dei biologi che lo considerano puramente semantico, non interessante. In realtà le diverse lingue esprimono partizioni corporee che sono invarianti: c'è a tale proposito isomorfismo tra esse, evidentemente certe distinzioni di parti sono universali. Alla base della sintesi fisico-matematica c'è comunque per Thom una metafisica, l'idea di un creatore/organizzatore, realizzandosi così un bisogno universale di unificazione. Per Nietzsche, nota infine Thom, le idee nuove arrivano sempre sulle zampe di un piccione, così unificando, tramite i loro spostamenti, parti anche assai lontane tra loro (e mostrando inoltre, si potrebbe aggiungere, la via della salvezza, come appunto il piccione che mostrò a Noé tra le zampe un ramo di ulivo di terre emerse dopo il diluvio).

RENÉ THOM

1. Cenni biografici

René Thom è nato da una famiglia di commercianti il 2 settembre 1923 à Montbéliard, Doubs, Francia, dove ha frequentato la Scuola primaria e il Collège Cuvier, ottenendo il Baccalaureato in Matematica elementare nel 1940. È stato allievo dell'École Normale Supérieure (1943-1946), Aggregato di Scienze Matematiche (1946), Dottore in Scienze Matematiche (1951), Ricercatore al CNRS (1947-1951), Borsista al Graduate College di Princeton (1951-1952), Maître de conférences presso la Faculté des Sciences di Grenoble (1953), Maître de confé-rences e poi Professore alla Faculté des Sciences di Strasbourg (1954-1963), distaccato all'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES) a Bures-sur-Yvette, come Professeur permanent (dal 1963), e poi come Professour émérite dal1988. È morto a Bures-sur-Yvette il 25 ottobre 2002.

René Thom è stato Chevalier de la Légion d'Honneur e Commandeur de l'ordre national du Mérite.

2. Cenni sull'opera scientifica

L'opera scientifica di René Thom riguarda essenzialmente la matematica e i suoi rapporti con la filosofia. Egli ha dato inizio a due discipline nuove: la topologia differenziale e lo studio delle singolarità.

Questi i suoi principali contributi:

1. Primi lavori di topologia algebrica: sulla teoria di Morse, gli spazi fibrati in bolle e in sfere, la relazione fra classi caratteristiche e operazioni coomologiche (quadrati di Steenrod) pervenendo all'invarianza omotopica delle classi di Stiefel-Whitney di una varietà.

2. Topologia differenziale: utilizzazione del lemma di trasversalità per la soluzione del problema di come riconoscere che una varietà è un bordo; determinazione dell'algebra di cobordismo (su $\mathbb{Z}_2, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$). Per aver fondato la teoria del cobordismo ricevette nel 1958 la Medaglia Fields, il massimo riconoscimento per un matematico (analogo al premio Nobel, che non esiste per la Matematica).

3. Studio e classificazione delle singolarità delle applicazioni differenziabili di varietà in varietà. Come conseguenza degli esempi studiati da H. Whitney nel caso delle piccole dimensioni, R. Thom introdusse la nozione generale di insiemi e di morfismi stratificati. Questi lavori ebbero numerosi sviluppi negli Stati Uniti, in Inghilterra, in Polonia e in Francia.

4. R. Thom è l'autore della teoria detta "delle catastrofi" esposta nel lavoro *Stabilité structurelle et Morphogenèse* del 1972, teoria generalizzata e "resa popolare" da E.C.Zeeman.

Come dice lo stesso Thom - "La teoria delle Catastrofi fu il frutto di una lunga genesi semi-cosciente. La terminologia delle Catastrofi mi è stata spesso rimproverata. Sicuramente non fu introdotta per attirare l'attenzione. Era inteso a segnalare la presenza di un particolare straordinariamente ricco di implicazioni all'interno di un continuo indifferenziato. Questa è la caratteristica fondamentale dell' "eidos" nel quadro del "genos", la più evidente manifestazione dell'esistenza della fenomenologia".

5. Applicazioni delle sue riflessioni sulla matematica a differenti campi della scienza e soprattutto alla linguistica e, in embriologia, alla morfogenesi. In filosofia delle scienze, René Thom ha analizzato i limiti del metodo sperimentale.

René Thom è stato membro straniero dell'*American Academy of Arts and Sciences* (1975), membro corrispondente dell'*Academia Brasileira de Ciencias* (1967), membro della *Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina* (1978), dell'*Académie Polonaise des Sciencies* (1988), membro della *London Mathematical Society* (1990), Dottore Honoris causa delle Università di Warwick (U.K.) (1970) , di Tübingen (1976) e di Nimègue (1983). Ha ricevuto il Prix des Laboratories de l'Académie des Sciences (1962), il Grand Prix des Sciences Mathématiques et Physiques (1971), il Grand Prix Scientifique de la Ville de Paris (1974), la Médaille L.E.J. Brouwer dell'Académie des Sciences des Pays-Bas (1970) e, come detto sopra, la Medaglia Fields (1958).[21]

3. Le principali opere di René Thom

Stabilité structurelle et Morphogenèse, Interéditions, Paris, 1972.

Paraboles et Catastrophes (Intervista di Giulio Giorello e Simona Morini), Flammarion, Paris, 1983.

Modèles mathématiques de la Morphogénèse, Accademia Nazionale dei Lincei, Scuola Normale superiore, Lezioni Fermiane, Pisa 1971; C. Bourgois, 10-18, 1974, riedizione nel 1980.

Esquisse d'une sémiophysique, Interéditions, Paris, 1990.

Apologie du Logos (Recueil d'articles), Hachette, Pari, 1980.

Oeuvres complètes, CDRom, Jean-Pierre Bourguignon (ed.), Buressur-Yvette, 2003, Institut des Hautes Études Scientifiques.

Les Mathématiques dans les sciences de la nature, in E. Donini, A. Rossi, T. Tonietti (a cura di), *Matematica e fisica:struttura e ideologia*, Bari, Dedalo, 1977

Mathématique et théorisation scientifique, in R. Apéry, M. Caveing, J.-P. Desclés, J. Dieudonné, R. Fraïssé, F. de Grandt, P. Gochet, J.-M. Lévy-Leblond, M.Loi, B. Mandelbrot, J.C. Pont, R. Thom, *Penser les mathématiques*, Ed. du Seuil, 1982

Stabilità strutturale e morfogenesi. Saggio di una teoria generale dei modelli, Torino, Einaudi,1980

[21]Tra i documenti di E. De Giorgi è stata trovata fotocopia di una lettera, datata 11 marzo 1996, inviata al Consiglio della Pontificia Accademia delle Scienze, in cui De Giorgi proponeva la nomina di Thom come nuovo accademico. Non risulta che ci siano stati sviluppi, anche perché il promotore morì nell'ottobre del 1996.

Parabole e catastrofi. Intervista su matematica, scienze e filosofia (a cura di G. Giorello e S. Morini), Milano, Il Saggiatore, 1980

Modelli matematici della morfogenesi, Torino, Einaudi,1985

Qualità/Quantità, voce della "Enciclopedia Einaudi", Torino, 1980, 460-476.

L'aporia fondatrice delle matematiche: continuo/discreto, nel volume "Sistematica" della "Enciclopedia Einaudi", Torino, 1982, 1135-1146.

Bibliografia

[1] V.I. Arnold, *Teoria delle catastrofi,* Bollati Boringhieri, Torino, 1990.

[2] F. Brambilla, A. Guerraggio, E. Salinelli, *Teoria delle catastrofi e applicazioni economiche,* Matematici n.5, Istituto di Metodi Quantitativi, Università "L. Bocconi", 1988

[3] R. Cardamone, *René Thom e la teoria delle catastrofi,* Ed. Lito, Pisa, 1981

[4] M. Galeotti, F. Gori, *Un modello geometrico per le configurazioni di equilibrio della bilancia commerciale. Catastrofi e stabilità del tasso di cambio,* preprint del Centro di Analisi Globale del CNR, 1980

[5] A. Guerraggio, P. Nastasi (a cura di), *René Thom e la Theoria delle Catastrofi,* 10-11 Pristem/Storia, Centro Eleusi, Università Bocconi

[6] S. Gilmore, *Catastrophe theory for scientists and engeneers,* Wiley, 1981

[7] Y. Lu, *Singularity theory and an introduction to catastrophe theory,* Springer-Verlag, 1976

[8] G. Marmo, B. Vitale, *La teoria delle catastrofi,* Sapere, 804, 1977, pp. 17-28

[9] E. Pietrabissa, *Un possibile utilizzo della teoria delle catastrofi nella costruzione di modelli econometrici,* Rivista di Statistica Applicata, Vol.12, No.3, 1979

[10] K. Pomian, *Catastrofi,* voce in "Enciclopedia Einaudi", Torino, 1977, pagg. 789-803

[11] T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications,* Pitman, 1978

[12] T. Tonietti, *Catastrofi e rivoluzioni (una lettura sociologica, ideologica e storica),* Testi & contesti, 1, 1979

[13] T. Tonietti, *Catastrofi. Una controversia scientifica,* Dedalo, Bari, 1983

[14] A. Woodcock, M. Davis, *La teoria delle catastrofi,* Garzanti, Milano, 1982

[15] E.C. Zeeman, *La teoria della catastrofe,* "Scientific American,", april 1976, trad. italiana, "Le Scienze", 96, 1976, pp. 16-29

[16] E.C. Zeeman, *Catastrophe theory, Selected-Papers 1972-1977,* Addison Wesley, 1977

APPENDICE

(Giuseppe De Cecco)

IL CONCETTO DI BORDO E DI FRONTIERA IN MATEMATICA

1. Introduzione

In matematica, i due concetti di "bordo" e di "frontiera", anche se spesso sono identificati, non sono equivalenti. Del resto anche nel linguaggio comune non sono sinonimi. Diciamo "le frontiere della scienza", ma non diciamo "il bordo della scienza", mentre diciamo "il bordo di un quadro" e non "la frontiera di un quadro".

"Frontiera" evoca qualcosa che sta di fronte ad un'altra. (La terminazione aggettivale "iera" che proviene dal latino *area* è comune ad altre parole, come costiera, riviera e simili.) La frontiera è confine di uno Stato con un altro Stato. Invece "bordo" è legato al concetto di orlo, una parte esterna che sta intorno ad una parte centrale e quindi estremità di una cosa, margine, per esempio la parte di una nave che sporge dall'acqua.

I concetti di frontiera e di bordo sono difficili da formalizzare matematicamente, perché nel definirli si vuole dare una descrizione di ciò che si ha in mente. Invece, come è noto, in matematica le definizioni sono nominali, non descrivono l'oggetto supposto esistente (seppure in un mondo di idee), ma le parole usate per "de-finire" l'oggetto individuano l'oggetto stesso, delimitandolo. In tal senso Aristotele può affermare che la "definizione" di un concetto è il suo bordo, il "bordo di una cosa" è la sua forma.

Qui si cercherà d'illustrare i concetti di bordo e di frontiera dal punto di vista matematico, più precisamente nell'àmbito della topologia (quella parte della matematica che considera "uguali" due figure che possono ottenersi l'una dall'altra mediante una trasformazione biunivoca e bicontinua).

2. Notazioni

Si userà il simbolismo della teoria degli insiemi come una "stenografia per certe articolazioni del ragionamento" (R. Thom). L'intento non è di formalizzare troppo, ma quello di esporre delicati concetti in modo il più possibile non ambiguo. Tuttavia in una prima lettura si possono tralasciare le parti segnate con un asterisco (*[...]).

Sia E un insieme. Come al solito, con la notazione $x \in E$ intendiamo che x è un elemento di E; con la notazione $X \subset E$ che X è un *sottoinsieme* di E (non escludendo che possa essere $X = E$).

Se $X \subset E$, l'insieme degli elementi di E che non appartengono ad X è detto *differenza* E meno X, o *insieme complementare* (o più semplicemente *complemento*) di X in E. In simboli si scrive

$$E \backslash X = \{x \in E | \ \ x \notin X\}$$

I simboli "$\cap$" e "$\cup$" indicano rispettivamente l'intersezione e l'unione di due sottoinsiemi.

Si considera noto il concetto di spazio ordinario a tre dimensioni $\mathbb{R}^3$, i cui punti hanno tre coordinate (x_1, x_2, x_3) con x_i in $\mathbb{R}$ (dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali).

Se consideriamo le n-uple $(x_1, ..., x_n)$ di numeri reali, l'insieme

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) | \ \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

è detto *spazio cartesiano (reale) ad n dimensioni.*

La funzione $(x_1, ..., x_n) \to x_i$ $(i = 1, ..., n)$, che associa ad un punto la sua i-esima coordinata, si chiama *proiezione* sull'asse x_i.

In $\mathbb{R}^3$, la superficie sferica $\mathbb{S}^2$ (detta anche sfera di centro l'origine e raggio uguale ad 1) è così caratterizzata:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \ \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Ciò suggerisce la seguente definizione di sfera (superficie sferica) dello spazio $\mathbb{R}^{n+1}$ come

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, ...x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\},$$

mentre

$$\mathbb{D}^n = \{(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\}$$

rappresenta la *sfera piena* o *disco n-dimensionale chiuso* di centro O e raggio uguale ad 1 (brevemente *n-disco*). $\mathbb{S}^1$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario, $\mathbb{S}^0$ è la coppia di punti della retta numerica reale individuata da $x = 1$ e $x = -1$; $\mathbb{D}^1$ è costituito dal segmento $\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$ e $\mathbb{D}^2$ dal cerchio del piano di centro O e raggio uguale ad 1.

Nel linguaggio comune diciamo che $\mathbb{S}^n$ è il bordo di $\mathbb{D}^{n+1}$. L'insieme

$$\mathring{\mathbb{D}}^n = \{(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1\} \subset \mathbb{D}^n$$

è chiamato *n-disco aperto* (di centro O e raggio 1); ovviamente $\mathbb{D}^n$ meno $\mathring{\mathbb{D}}^n$ è uguale a $\mathbb{S}^{n-1}$.

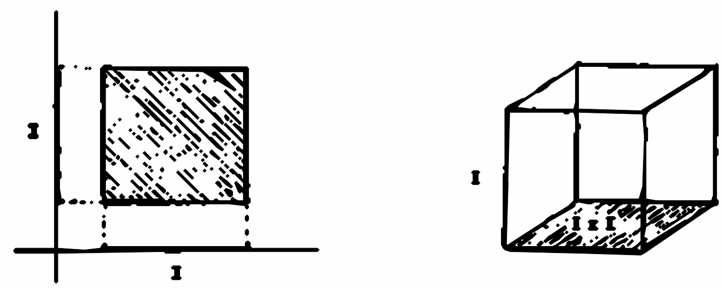
Indichiamo con $A \times B$ il *prodotto cartesiano* di A per B definito da

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

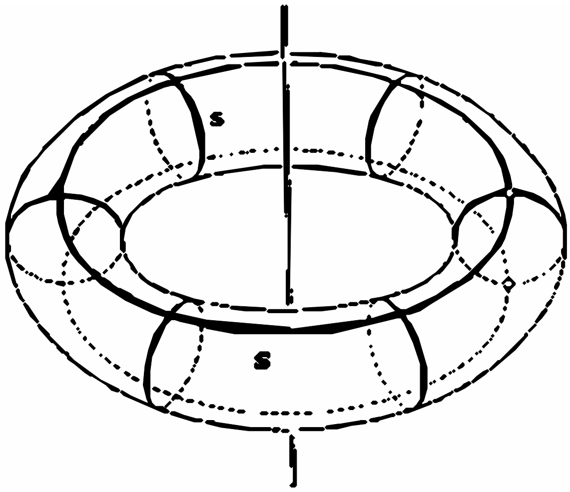
Naturalmente si ha

$$A^2 = A \times A = \{(a, b) | a \in A, b \in A\}.$$

Se I è un segmento, allora I^2 è il quadrato (pieno) di lato I, I^3 è il cubo solido e $I^n(n > 3)$ l'ipercubo di lato I.



Il prodotto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ è il *toro* $\mathbb{T}^2$ (superficie torica, una camera d'aria di uno pneumatico), che può pensarsi ottenuto facendo ruotare una circonferenza S (realizzazione concreta di $\mathbb{S}^1$) intorno ad una retta complanare con S e che non intersechi S; ogni punto di S, ruotando intorno alla retta, descrive un parallelo del toro, mentre ogni posizione di S individua un meridiano del toro. Se facciamo ruotare il disco D (realizzazione concreta di $\mathbb{D}^2$) che ha come bordo S, otteniamo il *toro solido* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ (intuitivamente una ciambella).



3. Il concetto di frontiera

Per comodità consideriamo come spazio ambiente $E = \mathbb{R}^n$, ma le considerazioni valgono in tutti gli spazi in cui c'è la nozione di *distanza* tra punti ([C-T-V]).

Indicata con $d(x, y) \in \mathbb{R}$ la distanza tra i punti x e y, l'insieme dei punti di E equidistanti da x, cioè $\{y \in E | \ d(x, y) = r\}$, costituisce la *sfera (di E) di centro x e raggio r*, mentre

$$\{y \in E | \ d(x, y) < r\}$$

è il *disco aperto di centro x e raggio r*, detto anche *intorno sferico di x di raggio r* . Nello spazio ordinario si tratta proprio della sfera piena di centro x e raggio r privata del bordo; mentre se E è un semipiano ed s è la retta che lo delimita, un intorno di un punto x di s è un semidisco (di centro x e raggio r) privato della semicirconferenza del bordo.

Si chiama *intorno* di x in E ogni sottoinsieme U di E che contiene un intorno sferico di centro x.

Sia X un sottoinsieme di E; un punto x di E appartiene alla *frontiera* di X in E, indicata $Fr_E(X)$, se in ogni intorno di X cadono punti di X e del complementare di X (in E). Ovviamente la frontiera di X (in E) è uguale alla frontiera del complemento di X (in E). Si osservi che se X è pensato come sottoinsieme di E e di E' con $E \neq E'$, allora $Fr_E(X)$ può essere distinta da $Fr_{E'}(X)$; cioè la frontiera dipende dallo spazio ambiente. In particolare $Fr_E(E) = \emptyset$. Quando non vi è luogo ad equivoci, ometteremo l'indicazione in basso dello spazio ambiente.

Esempio 3.1. *Se* $X = \mathbb{D}^1 \subset \mathbb{R}$*, allora* $Fr_{\mathbb{R}}(X)$ *è costituita dagli estremi del segmento* $\mathbb{D}^1$*. Se* $\mathbb{D}^1$ *è pensato come sottoinsieme di* $\mathbb{R}^2$*, allora ogni suo punto è anche punto di frontiera (esso rappresenta un ostacolo in* $\mathbb{R}^2$*).*

Diciamo che $X \subset E$ è (topologicamente) *chiuso* se esso contiene la sua frontiera: in simboli

$$X \quad chiuso \Leftrightarrow Fr(X) \subset X.$$

Un punto x di E è *interno* ad X se esiste un intorno U di x tutto contenuto in X (cioè $x \in U \subset X$). L'insieme dei punti interni ad X è detto *interno (topologico)* di X e si indica $Int(X)$. Un punto x di E è *esterno* ad X se è interno al complementare di X in E. L'insieme dei punti esterni ad X è detto *esterno (topologico)* di X e si indica $Est(X)$.

Diciamo che X è (topologicamente) *aperto* in E se esso è vuoto (uguale a $\emptyset$) oppure coincide con il suo interno: in simboli

$$X \quad aperto \Leftrightarrow X = Int(X).$$

cioè X è unione di dischi aperti di E.

*[Si prova che

$$X \quad aperto \Leftrightarrow X \cap Fr(X) = \emptyset, \qquad X \quad chiuso \Leftrightarrow X = Int(X) \cup Fr(X).$$

Si osservi che $Int(X) \cap Fr(X) = \emptyset$. Se X è aperto (risp. chiuso), allora $E \backslash X$ è chiuso (risp. aperto); inoltre $Fr(X)$ è un chiuso e $Int(X)$ è un aperto.]

L'insieme $Int(X) \cup Fr(X)$, unione dell'interno e della frontiera di X (che è un chiuso), si chiama *chiusura* di X e si indica con $\bar{X}$, quindi

$$X \quad chiuso \Leftrightarrow X = \bar{X}.$$

Si osservi che esistono insiemi aperti e chiusi contemporaneamente: per esempio l'insieme E pensato come sottoinsieme di E è contemporaneamente aperto e chiuso in E.

*[Un punto $x \in E$ è detto *punto di accumulazione* di X, se per ogni intorno U di x *esiste* qualche punto di U, distinto da x, che appartiene ad X.

L'insieme dei punti di accumulazione di X si chiama *derivato* di X e si indica $D(X)$. Si vede facilmente che

$$X \cup D(X) = \bar{X}.$$

L'insime X si dice *denso* in $Y \subset E$, se $\bar{X} = Y$: per esempio, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è denso in $\mathbb{R}$, poiché $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 3.2. *Poiché $Fr(X)$ è un chiuso, segue $Fr(Fr(X)) \subset Fr(X)$ e vale l'uguaglianza se e solo se $Int(Fr(X)) = \emptyset$.*

Ad esempio se consideriamo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, si ha

$$Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}, \quad Fr(\mathbb{R}) = \emptyset \Rightarrow Fr(Fr(\mathbb{Q})) \neq Fr(\mathbb{Q}).$$

Si osservi che se X è un chiuso, allora $Fr(X) \subset X$ e $Int(Fr(X)) = \emptyset$; così pure se X è aperto, allora $X \cap Fr(X) = \emptyset$ e quindi $Int(Fr(X)) = \emptyset$. Quindi se X è aperto o chiuso, si ha $Fr(Fr(X)) = Fr(X)$.

In ogni caso, poiché $Fr(X)$ è chiuso, si ha

$$Fr(Fr(Fr(X))) = Fr(Fr(X))$$

cioè vale una sorta di idempotenza:

$$Fr^h(X) = Fr^2(X) \qquad h \geq 2.]$$

ESEMPIO 3.3. *Se a e b sono due numeri reali, consideriamo i seguenti sottoinsiemi*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \qquad]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\},$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

Considerati come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, l'intervallo $[a, b]$ è un chiuso, l'intervallo $]a, b[$ è un aperto, mentre $]a, b]$ non è né aperto né chiuso.

Però se $]a, b[$ è considerato come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, cioè

$$]a, b[= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b, y = 0\}$$

esso non è un aperto (del piano).

Osserviamo che, anche nel linguaggio comune, il segmento $[a, b]$, chiuso nel senso della Topologia generale, è una curva *non* chiusa, essendo dotata di estremi distinti, a e b.

Nel prossimo paragrafo vogliamo precisare una seconda accezione del concetto di aperto e chiuso, nell'àmbito della Topologia combinatoria e in particolare della Geometria differenziale.

4. Il concetto di bordo

Le premesse matematiche per comprendere questo paragrafo non sono del tutto elementari ([CG-DC]).

Il concetto fondamentale è quello di *omeomorfismo*. Intuitivamente un omeomorfismo è una trasformazione biunovoca che porta due figure l'una sull'altra (in entrambi i sensi), in modo continuo (senza lacerazioni o tagli); tramite essa punti "vicini" vanno in punti "vicini" (l'essere "vicino" è precisato dalla topologia sulle figure).

Formalmente, se X ed Y sono due spazi topologici, un omeomorfismo $\varphi : X \to Y$ è un'applicazione biunivoca e bicontinua (cioè φ e la sua inversa $\varphi^{-1} : Y \to X$ sono applicazioni continue).

Due figure X e Y, che si corrispondono tramite un omeomorfismo, sono dette *omeomorfe*, in simboli $X \cong Y$; esse sono topologicamente equivalenti, cioè sono indistinguibili dal punto di vista della Topologia, che è appunto quella branca della Matematica, che studia le proprietà che sono invarianti per omeomorfismi, così come la Geometria euclidea studia le proprietà che sono invarianti per movimenti (due figure sovrapponibili sono indistinguibili per la Geometria elementare).

Per esempio la poligonale che delimita un poligono ordinario è omemorfa ad una circonferenza; una circonferenza non è omeomorfa ad un segmento; una corona circolare non è omeomorfa ad un cerchio (l'esistenza del "buco" non permette di passare con continuità dal cerchio alla corona circolare); una sfera piena è omeomorfa ad un prisma pieno, che può essere considerato perciò una *sfera topologica*; una sfera non è omeomorfa ad un toro (sempre a causa dell'esistenza del "buco").

Tramite un omeomorfismo una curva va in una curva, una superficie va in una superficie, un solido va in un solido, infatti si conserva la "dimensione" (le curve, le superficie, i solidi hanno rispettivamente dimensione uguale a $1, 2, 3$); mentre, in generale, le misure e la forma vengono alterate.

Siamo ora in grado di dare il concetto di *n-varietà con bordo*, partendo dalla configurazione più semplice.

Per $n \geq 1$, in $\mathbb{R}^n$ l'iperpiano di equazione $x_n = 0$ è detto *bordo* del semispazio

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$$

e viene indicato con $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Ad esempio $\mathbb{R}^2_+$ è il semipiano positivo delimitato dalla retta $y = 0$; $\mathbb{R}^1_+$ è la semiretta posiva delimitata dal punto O.

Intuitivamente, una n-varietà con bordo è una figura che localmente somiglia (cioè è localmente omeomorfa) ad un n-disco o ad un n-semidisco; i punti di M che hanno intorni che somigliano (cioè sono omeomorfi) ad un n-semidisco costituiscono il bordo ∂M di M. I punti di del bordo sono "intrinsecamente" differenti dai punti della varietà M privata del bordo ∂M.

*[In maniera più formale: una *n-varietà (topologica) M con bordo ∂M* è uno spazio topologico (di Hausdorff) munito di un *atlante* $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, dove

1) U_i è un aperto in $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ (cioè le *carte* (U_i, φ_i) coprono M);

2) φ_i è un omeomorfismo di U_i con $\varphi_i(U_i)$, aperto di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{R}^n_+$;

3) se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \to \varphi_j(U_j)$$

è un omeomorfismo (cioè se due carte non sono disgiunte, i punti che appartengono ad entrambe hanno due rappresentazioni legate da un omeomorfismo).

Poiché su $\mathbb{R}^n$ esistono coordinate, le carte (U_i, φ_i), sfruttando l'omeomorfismo φ_i^{-1}, permettono di definire *coordinate locali* sulla varietà. Le funzioni $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sono dette *funzioni di transizione.*

I punti p di M per i quali $\varphi_i(p)$ appartengono a $\partial\mathbb{R}^n_+$ costituiscono il *bordo* ∂M di M.]

Se $\partial M = \emptyset$ la varietà si dice senza bordo o semplicemente *n-varietà* (in tal caso ogni suo punto possiede intorni aperti omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$).

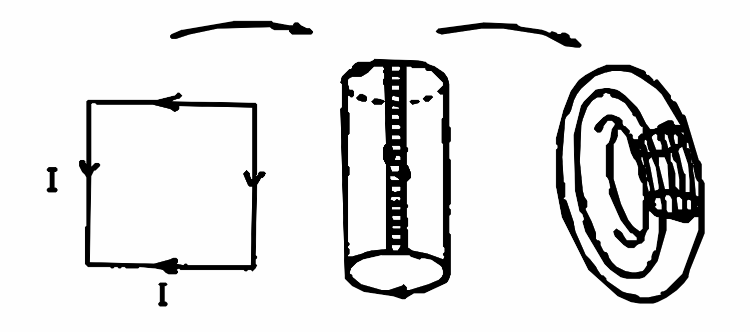
Si osservi che ∂M è una $(n-1)$-varietà (priva di bordo), cioè $\partial(\partial M) = \emptyset$. Ad esempio una semisfera è una 2-varietà con bordo; il suo bordo è una circonferenza, che è una 1-varietà senza bordo.

Se M è uno spazio *compatto* (cioè M è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$) e $\partial M = \emptyset$, allora M è detta (combinatoriamente) *chiusa.*

Il concetto di combinatoriamente chiuso traduce il concetto intuitivo di recipiente chiuso, ad esempio una pentola con il coperchio (senza manico). Una semisfera (cioè una scodella) è un chiuso dal punto di vista topologico, ma è una 2-varietà non chiusa, poiché il suo bordo non è vuoto; un barattolo con il coperchio è una superficie omeomorfa ad una sfera bidimensionale, quindi una 2-varietà priva di bordo. Così il segmento $[a, b]$ è una 1-varietà con bordo costituito dai punti a e b; se incolliamo a con b (senza fare intrecci) otteniamo una curva, che è omeomorfa ad una circonferenza.

*[È possibile ottenere una circonferenza anche da una retta, avvolgendola infinite volte intorno alla circonferenza stessa. In tal modo, ad ogni punto della circonferenza di raggio r corrispondono infiniti punti sulla retta a distanza $2\pi r$ l'uno dall'altro. Perciò se sulla retta poniamo la seguente relazione di equivalenza, $x \equiv x'(mod\ 1)$, cioè identifichiamo x con x' se $x - x' = n \cdot 1$ (n numero intero), otteniamo la circonferenza di raggio $r = \frac{1}{2\pi}$.]

Se consideriamo il quadrato unitario I^2, dove $I = [0,1]$, e identifichiamo il punto $(0, y)$ con $(1, y)$ per $0 \leq y \leq 1$, abbiamo una superficie omeomorfa al cilindro $\mathbb{S}^1 \times I$; se identifichiamo anche i punti $(x, 0)$ e $(x, 1)$, il quadrato I^2 (con gli incollamenti considerati) diventa omeomorfo al toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, bordo di $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$.



Si osservi che se M e N sono due varietà, allora

$$\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N,$$

(che giustifica anche il simbolo di bordo usato, simile al simbolo di "derivata").

Per esempio se M è il segmento unitario sull'asse x ed N il segmento unitario sull'asse y, allora il bordo del quadrato $M \times N$ del piano è costituito dall'unione dei lati verticali del quadrato (cioè $\partial M \times N$) e dei lati orizzontali (cioè $M \times \partial N$).

*[Le superfici compatte chiuse si possono classificare dal punto di vista topologico ([H-VC]): una superficie connessa M, compatta, chiusa ed orientabile (per la quale si possono distinguere due facce) è omeomorfa alla superficie di una ciambella con h buchi; il numero h, individuato da M, è detto *genere* di M ed è naturalmente un

invariante topologico. La sfera è una superficie di genere 0, il toro una superficie di genere 1.

Esempio 3.4. *Il seguente esempio fa vedere che i concetti di bordo e di frontiera sono distinti.*

Sia $M = \mathbb{D}^2 \backslash \tilde{S} \subset \mathbb{R}^2$ *dove* $\tilde{S}$ *è una circonferenza di centro* O *e raggio minore di* 1*.*

Se $p \in \overset{\circ}{\mathbb{D}}{}^2 \backslash \tilde{S}$*, ogni intorno aperto di* p *è omeomorfo ad un aperto di* $\mathbb{R}^2$*. Si vede facilmente che*

$$\partial M = \mathbb{S}^1, \qquad Fr(M) = \mathbb{S}^1 \cup \tilde{S},$$

quindi $\partial M \neq Fr(M)$*.]*

Osservazione 3.5. *I termini atlante e carte sono mutuati dalla geografia: la sfera (schematizzazione della superficie terrestre) può essere rappresentata sul piano tramite un atlante di carte geografiche, omeomorfismi che però non conservano le distanze; le carte permettono di introdurre coordinate locali (nel caso specifico la longitudine e la latitudine).*

Se, nella definizione di varietà, le funzioni di passaggio da una carta all'altra (funzioni di transizione) sono differenziabili (ammettono cioè derivate continue), si ha il concetto di varietà differenziabile *([S]).*

Intuitivamente una varietà differenziabile è una varietà topologica tale che ogni suo punto possiede uno spazio tangente che varia con continuità al variare del punto; le varietà differenziabili si dicono perciò anche varietà lisce*, cioè senza rugosità, senza punte.*

Per esempio una sfera $\mathbb{S}^2$ *è una varietà differenziabile, mentre* ∂I^3*, la superficie di un cubo, non è una varietà differenziabile: nei punti interni delle facce esiste il piano tangente (univocamente individuato) mentre nei punti degli spigoli (e in particolare nei vertici) non esiste il piano tangente. Se arrotondiamo gli spigoli e i vertici di* ∂I^3*, questa diventa una "sfera differenziabile"; i punti in cui non esiste il piano tangente sono detti "singolari", ma i punti interni agli spigoli sono "diversamente" singolari dai vertici, in cui la singolarità è maggiore.*

5. Teoremi di separazione

Nell'immaginario comune una superficie chiusa (una scatola chiusa) divide lo spazio in due parti disgiunte, l'interno e l'esterno. Vogliamo ora vedere come questo concetto si può formalizzare matematicamente ([DC]).

Cominciamo dal caso più semplice, quando M è una curva piana semplice e chiusa (cioè non intrecciata e tale che il punto iniziale coincida con quello finale); una tale curva è omeomorfa ad una circonferenza. Allora un teorema di C. Jordan (1838-1922) ci assicura che M divide il piano in due regioni aperte e connesse delle quali M è la frontiera comune. La regione limitata costituisce l'*interno* di M, quella illimitata l'*esterno*. In accordo con l'intuizione, M "divide" il piano in due regioni, cioè se si considerano due punti q e q', l'uno nell'interno e l'altro nell'esterno individuato da M, allora ogni poligonale di estremi q e q' incontra necessariamente M. Se invece i due punti sono presi nella stessa regione, è possibile trovare una poligonale che li congiunga e che non abbia alcun punto in comune con M.

Inoltre se p è un arbitrario punto di M, in ogni suo intorno cadono punti dell'interno e dell'esterno di M. Se invece consideriamo una curva C a forma del numero otto (omeomorfa ad una coppia di circonferenze tangenti in un punto), C divide il piano in tre regioni, ma solo il punto doppio è di frontiera per tutte e tre le regioni, gli altri punti sono di frontiera solo di due delle tre regioni. (Si osservi che C non è una 1-varietà per la presenza di un punto doppio).

Il teorema di Jordan si generalizza allo spazio n-dimensionale (Teorema di Jordan-Brouwer) pervenendo ad un generale teorema di separazione:

TEOREMA 3.6. *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà compatta $(n-1)$-dimensionale avente k componenti connesse, allora il complementare di M (in $\mathbb{R}^n$) ha $k+1$ componenti connesse.*

Così se M è una superficie (priva di bordo) compatta costituita da un solo pezzo ($k = 1$) e quindi omeomorfa ad una superficie di genere h, bordo di una ciambella con h buchi, allora lo spazio complementare è costituito da esattamente due regioni, che possono chiamarsi interno ed esterno anche nel senso ordinario.

Se q è un generico punto dello spazio non appartenente alla superficie connessa M ed s è una semiretta di origine q, allora o $s \cap M = \emptyset$ o

$$s \cap M = \{p_1, ..., p_m\}.$$

Ebbene se si procede lungo s (a partire da q), ogni volta che si incontra un punto $p_i (\in M)$ si passa da una regione all'altra (dall'interno all'esterno o viceversa). Poiché dopo aver attraversato p_m ci troviamo certamente nella regione illimitata (l'esterno), per avere informazioni sulla mutua posizione di q e M è decisivo sapere se m è pari o dispari. Inoltre si prova che se s' è un'altra semiretta uscente da q, il suo numero m' di punti in comune con M è pari se m è pari, è dispari se m è dispari; quindi se m è pari vuol dire che q era nell'esterno, se m è dispari q era nell'interno delimitato da M. (Si tratta di un criterio operativo molto semplice ([G]) per decidere se si è all'interno o all'esterno di una regione delimitata da una curva semplice e chiusa avente molte circonvoluzioni.)

6. Il concetto di bordismo

Ci occupiamo soltanto del caso elementare, cioè di varietà non singolari (per il caso generale si veda [D]).

Consideriamo varietà n-dimensionali senza bordo, compatte ed orientate, non necessariamente connesse; per esempio una 1-varietà può essere unione finita di circonferenze ciascuna disgiunta da tutte le altre.

Se M è una varietà con una data orientazione, indichiamo con $-M$ la stessa varietà con l'orientazione opposta; se M e N sono due n-varietà, indichiamo con $M + N$ l'unione disgiunta di copie di M e N, così $M - N$ sarà $M + (-N)$ e $M \cdot N$ la varietà di dimensione $2n$, prodotto cartesiano di M e N con l'orientazione indotta. (I simboli $\setminus, \cup, \times$ sono simboli insiemistici, mentre $-, +, \cdot$ sono simboli algebrici, che tengono conto dell'orientazione della varietà.)

Se per una n-varietà M esiste una $(n+1)$-varietà Λ compatta orientata con bordo $\partial\Lambda$ che è una copia di M, si dice che M è *bordante* (cioè M è bordo di qualcosa). Se $M - N$ è bordante, diciamo che M e N sono *cobordanti*, in simboli $M \sim N$. Se M è bordante, diciamo anche che M è cobordante alla varietà nulla O, in simboli $M \sim O$.

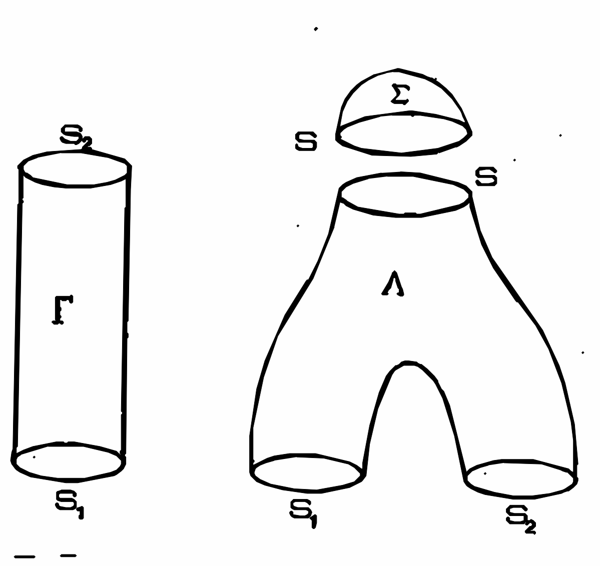
Esempi 3.7. *Affinché gli esempi possano essere visualizzati con l'intuizione ordinaria, considereremo varietà di dimensione* 1 *e* 2*.*

1) Se $M = S$ è una circonferenza ed $N = \emptyset$, allora il cobordismo tra M ed N, $M \sim N$, può realizzarsi tramite una semisfera Σ tale che $\partial\Sigma = S$.

2) Siano S_1 e S_2 due circonferenze complanari i cui corrispondenti dischi chiusi siano disgiunti. Allora è possibile considerare una superficie omeomorfa ad un cilindro Γ avente come bordo $S_1 - S_2$ (si pensi ad un manico di una tazza). Risulta allora che $S_1 \sim S_2$ tramite Γ.

3) Se $M = S_1 + S_2$ (dove S_1 e S_2 sono due circonferenze disgiunte per es. del piano $z = 0$), e $N = S$ (circonferenza per esempio del piano $z = 1$), allora $M \sim N$ tramite una superficie Λ a forma di "pantaloni" dove S è la circonferenza della vita mentre S_1 e S_2 sono le circonferenze dei bordi delle gambe.

4) Se sulla circonferenza S costruiamo la superficie Σ con bordo S e consideriamo la superficie Λ dell'esempio precedente, possiamo concludere che $\Lambda \cup \Sigma$ è un cilindro Γ. Inversamente un cilindro Γ si può decomporre in due superficie Σ e Λ tramite il "cobordismo" di due opportune curve.



La relazione di equivalenza "$\sim$" definisce *classi di cobordismo* e la suddivisione in classi è compatibile con l'addizione, che induce una struttura di gruppo nell'insieme Ω^n delle classi (delle varietà cobordanti n-dimensionali); la classe delle varietà bordanti costituisce l'elemento neutro.

La divisione in classi è compatibile anche con la moltiplicazione, che dota

$$\Omega = \Omega^0 + \Omega^1 + \Omega^2 + ...$$

di una struttura algebrica di anello, la cosiddetta *algebra di Thom*, utilizzata per lo studio in particolare delle varietà differenziabili.

≪Tutto ciò non è banale? Come è possibile che una definizione così ingenua possa essere l'origine di nuovi ed interessanti punti di vista?≫ - si chiedeva H. Hopf ([H]), presentando l'opera di Thom in occasione del conferimento della Medaglia Fields, e concludeva che la scoperta del cobordismo era stata una pietra miliare nella Topologia algebrica. Infatti il metodo caratteristico della Topologia algebrica (come secoli prima era accaduto per la Geometria analitica) è quello di tradurre problemi di Topologia in problemi di Algebra con la speranza di ottenere informazioni utili sul problema originario.

Spesso in queste traduzioni si perde di vista il problema geometrico, sopraffatto da quello algebrico. Ebbene, ancora H. Hopf nota che questo non è accaduto per Thom, che padroneggia ed usa moderni metodi algebrici, vede gli aspetti algebrici dei problemi, ma le sue idee basilari, che sono di grande semplicità, conservano la natura geometrica ed intuitiva da cui sono nate. Queste idee hanno significativamente arricchito la Matematica.

Bibliografia

[CG-DC] I. Cattaneo Gasparini, G. De Cecco, *Introduzione ai metodi della Geometria differenziale*, Ed. Veschi, Roma 1979.

[C-T-V] V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano 1968.

[DC] G. De Cecco, *Il teorema di sepazione di Jordan*, Archimede, XXVIII, **4**,(1976), 193-200.

[D] A. Dold, *Metodi moderni di topologia algebrica*, Lezioni raccolte da M. Bordoni, F. Cacciafesta, A. Del Fra, S. Marchiafava, G. Romani, Quaderni dei gruppi di Ricerca CNR, Ist. Mat. "G. Castenuovo" Univ. Roma, 1973.

[G] F. Ghione, *Tau Topologo*, La fiaba che racconta la matematica superiore ai bambini, illustrata da 16 pitture originali di M. Schifano, Ed. La Città del Sole, Roma 1985.

[H] H. Hopf, *The work of R. Thom*, Proc. Int. Congr. of Math., (1958), 67-70.

[H-VC] D. Hilbert, S. Cohen-Vossen, *Geometria intuitiva*, Complementi di topologia di P. Aleksandrov, Boringhieri, Torino 1960.

[S] M. Spivak, *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, seconda edizione 5 volumi, Publish or Perish, Wilmington, DE, 1979.

CENNI SULLA TEORIA DI MORSE

1. Introduzione

I primi lavori di Topologia algebrica di R. Thom riguardano proprio la "teoria di Morse" e lo studio dei punti critici di un'applicazione differenziabile è stato lo strumento fondamentale per studiare proprietà globali di varietà differenziabili. Per questi risultati, connessi con la teoria del cobordismo, Thom ha ricevuto la medaglia Fields nel 1958.

La teoria di Morse (H.C. Marston Morse 1892-1977) nacque nel 1925 con l'articolo *Relations between the critical points of a real-valued function of n independent variables*, che portava a compimento ricerche condotte da maestri dell'*Analysis situs* quali Poincaré, Veblen, Brouwer, Birkhoff, Lefscetz e Alexander ([B]) . Lo scopo principale è quello di avere informazioni sulla topologia della varietà a partire dalla conoscenza di una particolare funzione definita sulla stessa varietà; intuitivamente si può pensare a come una carta topografica può dare informazioni sulla conformazione del terreno.

Inoltre, con una successione finita di "operazioni chirurgiche", è possibile realizzare un cobordismo.

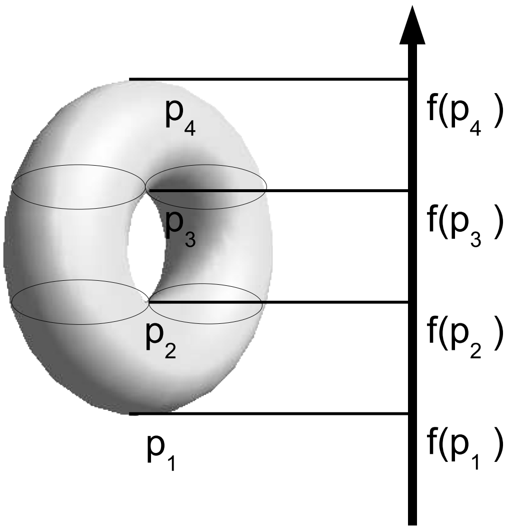
Esistono numerose applicazioni della teoria di Morse nell'àmbito della topologia differenziale (Bott 1960, Milnor 1963) e recentemente nella teoria quantistica dei campi (dopo i lavori di Witten 1982).

Quanto segue prende le mosse da alcune voci del "LEXIQUE " di Alain Chenciner, che compare come appendice al testo di R. Thom *Prédire n'est pas expliquer.* L'esposizione è abbastanza divulgativa e i periodi preceduti da un asterisco (*[...]) possono essere trascurati in una prima lettura.

2. Funzioni su una varietà differenziabile

Associamo ad ogni punto p di una varietà M un numero reale $f(p)$, valore della funzione f nel punto p, in modo che, in ogni "carta" di un "atlante" (vedi articolo precedente) f sia rappresentata da una funzione di classe C^k su $\mathbb{R}^n$, cioè una funzione ben approssimata nell'intorno di ogni punto da un polinomio di grado k a n variabili.

L'insieme dei punti aventi lo stesso valore è la cosiddetta "curva di livello", ben nota nelle carte topografiche, dove f rappresenta l'altitudine (rispetto al livello del mare) del luogo preso in considerazione.



Nella figura sono rappresentati i punti critici e le corrispondenti linee di livello sul toro relative alla funzione "altitudine" o "quota" $z = f(x, y)$, dove (x, y, z) è un punto del toro. Se tagliamo il toro con il fascio di piani perpendicolari all'asse z, vediamo che le linee di livello *cambiano forma* nel passaggio per i punti p_1, p_2, p_3, p_4, in cui il piano variabile del fascio diventa tangente al toro. Questi particolari punti, detti *punti critici*, sono punti di "resistenza" in cui Thom immagina siano contenute le informazioni essenziali per la forma della varietà. I punti critici significativi (per la forma di M) sono quelli "non degeneri", punti intorno ai quali la funzione f si rappresenta con un polinomio di grado 2. Nel caso di una supeficie, un punto critico sarà di uno dei tre tipi seguenti: di massimo, di minimo o di sella, che nelle carte topografiche corrispondono rispettivamente alle vette, alle valli e ai passi di montagna.

Ovviamente sulla sfera la funzione altitudine ha solo due punti critici (non degeneri): il massimo e il minimo; le curve di livello (tranne nei punti critici) sono sempre circonferenze.

Una funzione è detta *funzione di Morse* se tutti i suoi punti critici sono non degeneri.

*[Siano M una varietà differenziabile ed $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Un punto $p \in M$ è *critico* se in esso sono nulle tutte le derivate parziali prime di f rispetto alle coordinate locali intorno a p ([CG-DC]).

Ovviamente i punti di massimo e di minimo di f sono suoi punti critici. Se p è un punto critico, il valore critico $f(p)$ è detto anche *stazionario*, perché è legato alle condizioni di stazionarietà specialmente nella dinamica dei sistemi oscillatori con n gradi di libertà.

Un punto $p \in M$ è detto non degenere se in un sistema di coordinate locali (U, φ) (e quindi in ogni altro sistema) il determinante della matrice hessiana, $H_p(f)$, è non nullo. Un notevole risultato, dovuto a Morse, stabilisce che f ha una rappresentazione locale in p (punto critico non degenere) uguale proprio a $f(p) + \frac{1}{2}H_p(f)$.

Il numero degli autovalori strettamente negativi di $H_p(f)$ (contati con la loro molteplicità) è detto *indice del punto critico p di f*, in simboli $ind_f(p)$. Si ha

$$p \quad minimo\ locale \Leftrightarrow ind_f(p) = 0$$

$$p \quad massimo\ locale \Leftrightarrow ind_f(p) = \dim M$$

Se scambiamo f con $-f$, l'indice k del punto critico p si muta in $(\dim M - k)$.]

Se $f : M \to \mathbb{R}$ è la sua funzione "altitudine", chiamiamo *linee di gradiente* le "linee di massima pendenza", orientate secondo le altitudini crescenti; seguendo queste curve la funzione aumenta il più rapidamente possibile, cioè le linee di massima pendenza sono definite dalla proprietà di avere in ogni punto la massima pendenza compatibile con l'appartenenza alla superficie[22].

Il fatto che M sia una superficie immersa in $\mathbb{R}^3$ comporta che su M ci siano in modo naturale una nozione di perpendicolarità ed una nozione di lunghezza per le curve (la lunghezza di una curva su M è uguale a quella della stessa curva pensata in $\mathbb{R}^3$). Ciò posto, si prova che le linee di gradiente sono perpendicolari a quelle di livello, tanto nello spazio ambiente quanto in proiezione.

L'unione delle linee di gradiente che convergono in un punto critico non degenere p costituisce un disco topologico (senza bordo) di centro p, detto *cella di Thom* o *mappa discendente* del punto critico; la

[22]Si osservi che, in generale, una linea di massima pendenza non è la traiettoria di un punto materiale che si muove senza attrito su una superficie topografica. Questa traiettoria coincide con la linea di massima pendenza quando quest'ultima si trova in un piano verticale.

sua dimensione è l'*indice* del punto critico p (rispetto ad f). Se scambiamo f con $-f$, l'indice k diventa $2-k$ e la mappa diventa *ascendente.*

In accordo con l'intuizione, se p è un punto di massimo, cioè una vetta, l'unione delle traiettorie di massima pendenza convergenti in p costituisce un disco di dimensione 2, indice di p; se p è un minimo, cioè una valle, l'indice è 0; mentre se p è un punto di sella, cioè un passo, esistono solo due traiettorie di massima pendenza convergenti in p, cioè la loro unione costituisce una cella di dimensione 1, che è proprio l'indice di p. Considerando sull'asse z l'orientazione opposta, un punto di massimo diventa di minimo e viceversa, mentre quelli di sella rimangono di sella; come è intuitivo, nel nostro caso, la "forma" dell'intorno dei punti critici si conserva.

3. Teoria di Morse secondo Morse

Lo scopo principale della teoria è quello di ricostruire la "forma globale" di una varietà differenziabile M a partire dalla conoscenza di una particolare funzione di Morse su M ([M]). Il cuore della teoria è dato dalle *diseguaglianze di Morse*, che nel caso di una superficie (2-varietà) orientabile si scrivono

$$m_0 \geq b_0, \qquad m_1 - m_0 \geq b_1 - b_0, \qquad m_2 - m_1 + m_0 = b_2 - b_1 + b_0$$

dove m_k è il numero dei punti critici di indice k e b_k è il k-esimo numero di Betti di M: b_0 è il numero delle componenti connesse (cioè il numero dei pezzi) di M (quindi $b_0 = 1$ per il toro e per la sfera); $b_1 = 2h$ dove h è il *genere* di M (si ricordi che $h = 0$ per la sfera, $h = 1$ per il toro, $h = 2$ per il bitoro); $b_2 = b_0$ (poiché M è orientabile). I numeri di Betti sono invarianti topologici, cioè se M ed M' sono due varietà omeomorfe, allora i corrispondenti numeri di Betti sono uguali (ma non vale l'inverso).

Il numero intero

$$b_0 - b_1 + b_2 = \chi(M)$$

è la "caratteristica di Eulero-Poincaré" di M; anche esso chiaramente è un invariante topologico.

Per quanto sopra detto, se M è una 2-varietà (connessa) orientabile di genere h vale

$$\chi(M) = b_0 - b_1 + b_2 = 1 - 2h + 1 = 2 - 2h.$$

quindi $\chi(M) = 2$ se M è omeomorfa alla sfera $\mathbb{S}^2$ e $\chi(M) = 0$ se M è omeomorfa al toro $\mathbb{T}^2$.

Ritornando ai risultati di Morse, se $M = \mathbb{T}^2$ ed f è la funzione altitudine prima considerata, si ha $m_0 = 1, m_1 = 2, m_2 = 1$, e quindi $\chi(\mathbb{T}^2) = 1 - 2 + 1 = 0$.

Se $M = \mathbb{S}^2$ ed f è ancora la funzione "quota" del grafico della sfera, si ha $m_0 = 1 = m_2, m_1 = 0$ e qundi $\chi(\mathbb{S}^2) = 0$; se M è il geoide (omeomorfa a $\mathbb{S}^2$) ed f è la funzione altitudine sul livello del mare si ha

$$m_0 - m_1 + m_2 = 2$$

che è la cosiddetta "equazione del montanaro", già nota a L. Kronecker, grande matematico del diciannovesimo secolo ([G]). Se M è la parte di piano delimitata da una curva semplice e chiusa $\mathcal{C}$ (quindi M è omeomorfa ad un triangolo), già Newton aveva scoperto che

$$m_0 - m_1 + m_2 = 1,$$

dove m_0 è il numero delle valli, m_1 è il numero dei passi e m_2 il numero delle vette che cadono all'interno della curva di livello $\mathcal{C}$.

Le diseguaglianze di Morse si estendono al caso di varietà n-dimensionali.

4. La caratteristica di Eulero nel caso classico

Sia M una 2-varietà, anche con bordo. Se T è una sua "triangolazione", indichiamo con α_0 il numero dei vertici di T, con α_1 il numero dei lati o spigoli di T, con α_2 il numero dei triangoli o facce di T; alora si prova che

$$\chi(M) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

che è l'espressione originaria della caratteristica di Eulero.

Quindi se M ha due triangolazioni distinte T e T', allora

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0' - \alpha_1' + \alpha_2',$$

cioè $\chi(M)$ non dipende dalla triangolazione scelta; inoltre, poiché $\chi(M)$ è un invariante topologico, esso può essere calcolato considerando una triangolazione di una varietà M', omeomorfa a M, opportunamente scelta.

Per esempio, la sfera $\mathbb{S}^2$ è omeomorfa ad un tetraedro, che ha $(\alpha_0 =)4$ vertici, $(\alpha_1 =)6$ lati e $(\alpha_2 =)4$ facce, per cui $\chi(\mathbb{S}^2) = 4 - 6 + 4 = 2$. Invece la caratteristica di Eulero di un triangolo (pieno) vale 1, poiché $\alpha_0 = \alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = 1$; ciò prova che non possono essere omeomorfe una sfera ed un triangolo (o più in generale una figura piana delimitata da una curva semplice e chiusa).

La caratteristica di Eulero è un semplice e potente invariante topologico; la storia della Topologia - come osserva J.C. Pont ([P]) - fino al 1851 si confonde, a meno di rare eccezioni, con la storia del *teorema di Eulero* (nome latinizzato di Leonard Euler (1707-1783)), il cui enunciato originario (pubblicato nel 1752 in *Elementa doctrinae solidorum*) è

In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex angulorum solidorum et ex numero hedrorum binario excedit numerum acierum.

Chiamando con F il numero delle facce di un poliedro, con V quello dei vertici e con S quello degli spigoli, si ha la celebre formula

$$F + V = S + 2$$

che genrazioni di ragazzi hanno ricordato considerandola come acronimo della frase *Fatti Vedere Sabato alle 2* ([DC]).

Naturalmente, con il nostro simbolismo, si ha

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

se il bordo del poliedro è una poliedrica omeomora ad una sfera. Ma se la definione di poliedro usata da Eulero è quella del Libro XI degli *Elementi* di Euclide, cioè "solido delimitato da facce piane", la formula di Eulero non si applica a tutti i poliedri, come osservò già S. Lhuilier nel 1813, che esaminò i diversi casi *patologici*, introdusse il concetto di *genere* di un poliedro, concetto che giocherà un ruolo fondamentale in topologia.

Chi pose al teorema nel 1847 le ipotesi corrette è C. von Staudt, che sostanzialmente definì la nozione di poliedro semplicemente connesso (cioè di genere 0).

Infine nel 1850 L. Schläfli ottenne la prima generalizzazione per poliedri (euleriani) ad n dimensioni pervenendo alla relazione

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + ... + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1} + (-1)^n = 1$$

dove α_k è il numero delle facce k-dimensionali.

Successivamente J.B. Listing(1861) mette in luce il legame tra il teorema di Eulero e l'*Analysis situs*, che dopo di lui si chiamerà *Topologia.*

Una dimostrazione puramente topologica del teorema di Eulero è data nel 1900 da H. Poincaré (1854-1912), che si può considerare il fondatore della *Topologia combinatoria*, che dal 1940 in poi si è chiamata *Topologia algebrica*, nome più adatto ai metodi di questa disciplina.

Come afferma lo storico C.J. Pont ([P]), da cui sono tratte le notizie storiche): *dopo un secolo di storia, il teorema di Eulero ha percorso tutte le tappe di un onesto teorema: apparizione empirica, enunciato approssimativo, dimostrazione in un caso particolare, enunciato esatto, generalizzazione.*

A me non è sembrato fuori luogo accennare a questo itinerario, poiché la convinzione diffusa è che un teorema nasca già perfetto, nella forma compiuta. Quasi sempre la matematica, specialmente nelle trattazioni più formali, è presentata come un edificio perfetto, bello ma privo di vita. Per far amare la matematica è opportuno, penso, presentarla anche nella sua realtà storica: emerge così anche l'uomo con le sue pene, le sue gioie, i suoi sogni, le sue ambizioni. È chiaro che non possiamo ogni volta percorrere tutto il cammino seguito per giungere alla soperta di un teorema o all'elaborazione di una teoria, ma accennare che questo cammino c'è stato o almeno averne coscienza, è già un primo passo verso *l'umanizzazione della matematica*, che ha anche un valore "sapienziale".

L'eminente geometra russo I.R. Shafarevich (in una conferenza all'Accademia delle Scienze di Gottinga [23]) così si esprime: *Ad un'osservazione superficiale la matematica dà l'impressione di essere il risultato degli sforzi individuali separati di molte migliaia di studiosi in continenti ed epoche diversi. La logica interna del suo sviluppo, però, assomiglia molto di più all'opera di un singolo intelletto, che sviluppa il suo pensiero in modo continuo e sistematico, usando le differenti individualità umane solo come mezzi. Fa pensare ad una orchestra che esegua una sinfonia di un qualche autore. Il tema passa da uno strumento all'altro e quando uno strumentista termina la sua parte, questa viene ripresa da un altro esecutore che la sviluppa seguendo le indicazioni dello spartito.*

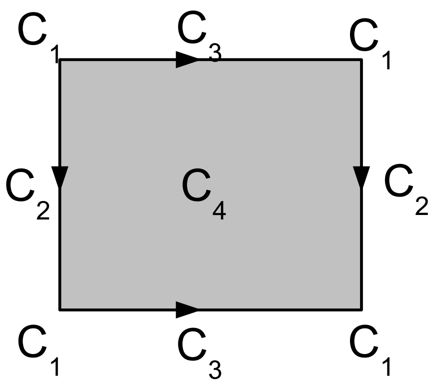
5. Teoria di Morse secondo Thom

Come detto nel paragrafo precedente, per ogni punto critico non degenere p, si può costruire una cella di Thom avente dimensione uguale all'indice del punto critico. In tal modo la varietà M viene decomposta in celle (ma la decomposizione cellulare non è necessariamente un complesso cellulare). Incollando opportunamente queste celle si può avere un "modello" della varietà originaria.

[23] Il testo, in russo, della conferenza, e la traduzione in tedesco di C.L. Siegel, sono apparsi nello *Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Göttingen* 1973, pp. 37-42.

Per esempio la sfera viene decomposta in una cella di dimensione 2 (indice del punto critico corrispondente al massimo) e in una cella di dimensione 0 (indice del punto critico corrispondente al minimo). Se identifichiamo il bordo della cella di dimensione 2 ad un punto (cella di dimensione 0), otteniamo una figura omeomorfa alla sfera: intuitivamente si pensi ad un fazzoletto del quale tutti i capi vengono congiunti (per esempio con un nodo).

Analogamente il toro (considerando la figura nel paragrafo 2) viene decomposto in una cella C_4 di dimensione 2 (indice del punto p_4), due celle C_3 e C_2 di dimensione 1 (indice dei punti p_3 e p_2) e una cella C_1 di dimensione 0 (indice di p_1). Questa decomposizione corrisponde a quella illustrata dalla seguente figura e già considerata come definizione del toro.



Esiste un altro procedimento, dovuto a Smale, che permette di “ricostruire ” la varietà incollando successivamente “manici ” (cioè tubi) sul bordo della varietà, fino ad allora costruita. Il procedimento è abbastanza tecnico ed esula da questa trattazione, che ha voluto dare soltanto un cenno della potenza e bellezza della teoria di Morse.

Bibliografia

[B] R. Bott, *Marston Morse and his mathematical works*, Bull. Amer. Math. Soc. 3 (3) (1980), 907-950.

[CG-DC] I. Cattaneo Gasparini, G. De Cecco, *Introduzione ai metodi della Geometria differenziale*, Ed. Veschi, Roma 1979.

[DC] G. De Cecco, *La caratteristica di Eulero in Geometria*, Seminari di Didattica, Dip. Matematica Univ. Lecce, Q3-1990, 63-77.

[G] H.B. Griffiths, *Surfaces*, Cambridge Univ. Press, 1974.

[M] J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. of Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, 1963.

[Mo] M. Morse, *The calculus of variations in the large*, Am. Math. Soc., New York, 1934.

[P] J.C. Pont, *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses Universitaires de France, 1974.

torgraf

Finito di stampare nel mese di dicembre 2008
presso lo stabilimento tipolitografico della TorGraf
S.P. 362 km. 15,300 - Zona Industriale · 73013 **GALATINA** (Lecce)
Telefono +39 0836.561417 · Fax +39 0836.569901
e-mail: stampa@torgraf.it