CAPITOLO 8

Soluzioni intere non banali dell'equazione delle superficie minime

In questo capitolo costruiremo una funzione u definita su $\mathbb{R}^8$ e soluzione non banale dell'equazione delle superficie minime [**4**] e [**29**].

1. Preliminari

Iniziamo con il costruire due funzioni Φ_1 e Φ_2 tali che Φ_1 una sub-soluzione per l'operatore delle superficie minime e Φ_2 una super-soluzione con

$$0 < \Phi_1 < \Phi_2$$

nell'insieme

$$E = \{(x, y) : x, y \in R^4, x^2 - y^2 > 0\},$$

Φ_1 super-soluzione e Φ_2 sub-soluzione con $\Phi_2 < \Phi_1 < 0$ in $\mathrm{int}(E^c)$.

Più precisamente, stiamo cercando due funzioni $\Phi_i : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^8 \setminus \{(0,0)\}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^8)$ tali che:

- $\Phi_i(x, y) = -\Phi_i(y, x)$;
- in E si abbia $0 < \Phi_1 < \Phi_2$ e
$$M\Phi_1 > 0, \quad M\Phi_2 < 0;$$
- in $\mathrm{int}(E^c)$ si abbia $0 > \Phi_1 > \Phi_2$ e
$$M\Phi_1 < 0, \quad M\Phi_2 > 0.$$

Iniziamo con un po' di considerazioni preliminari. Siccome cercheremo due funzioni con la proprietà

$$\Phi_i(x, y) = -\Phi_i(y, x),$$

ci basta costruire tali funzioni in E con la condizione che $\Phi_i = 0$ su ∂E e $\Phi_i \in \mathcal{C}(\overline{E}) \cap \mathcal{C}^2(E \setminus (0, 0))$. Cercheremo le nostre funzioni come funzioni delle sole variabili

$$u = |x|, \quad v = |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^4.$$

Stiamo cercando quindi funzioni della forma

$$\Phi(x,y) = \Phi(u,v);$$

con queste ipotesi, si ottiene che

$$D_{x_i}\Phi = \Phi_u \frac{x_i}{|x|}, \quad D_{y_i}\Phi = \Phi_v \frac{y_i}{|y|},$$

mentre per le derivate seconde si ottiene

$$D_{x_i}D_{x_j}\Phi = \Phi_{uu}\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \Phi_u\left(\frac{\varepsilon_{i,j}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}\right),$$

$$D_{y_i}D_{y_j}\Phi = \Phi_{vv}\frac{y_i y_j}{|y|^2} + \Phi_v\left(\frac{\varepsilon_{i,j}}{|y|} - \frac{y_i y_j}{|y|^3}\right),$$

$$D_{x_i}D_{y_j}\Phi = \Phi_{uv}\frac{x_i y_j}{|x||y|}.$$

In questo modo il Laplaciano di Φ diventa:

$$\Delta\Phi = \Phi_{uu} + \Phi_{vv} + 3\frac{\Phi_u}{u} + 3\frac{\Phi_v}{v}.$$

Il gradiente può essere scritto nella forma

$$D\Phi = \left(\Phi_u \frac{x_j}{|x|}, \Phi_v \frac{y_j}{|y|}\right)$$

mentre la matrice Hessiana di Φ diventa

$$H\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{uu}\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \Phi_u\left(\frac{\varepsilon_{i,j}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}\right) & \Phi_{uv}\frac{x_i y_j}{|x||y|} \\ \Phi_{uv}\frac{y_i x_j}{|x||y|} & \Phi_{vv}\frac{y_i y_j}{|y|^2} + \Phi_v\left(\frac{\varepsilon_{i,j}}{|y|} - \frac{y_i y_j}{|y|^3}\right) \end{pmatrix}.$$

Si ottiene in questo modo che

$$\begin{aligned} M\Phi &= (1 + \Phi_u^2 + \Phi_v^2)\left(\Phi_{uu} + \Phi_{vv} + 3\left(\frac{\Phi_u}{u} + \frac{\Phi_v}{v}\right)\right) \\ &\quad -(\Phi_u^2\Phi_{uu} + 2\Phi_u\Phi_v\Phi_{uv} + \Phi_v^2\Phi_{vv}) \\ &= \underbrace{\Phi_v^2\Phi_{uu} + \Phi_u^2\Phi_{vv} - 2\Phi_u\Phi_v\Phi_{uv} + 3(\Phi_u^2 + \Phi_v^2)\left(\frac{\Phi_u}{u} + \frac{\Phi_v}{v}\right)}_{=M_0\Phi} \\ &\quad \underbrace{+\Phi_{uu} + \Phi_{vv} + 3\left(\frac{\Phi_u}{u} + \frac{\Phi_v}{v}\right)}_{=D_0\Phi} \end{aligned}$$

Cercheremo le nostre funzioni nella forma

$$\Phi(u,v) = \Gamma\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) = \Gamma(r,z).$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}
\Phi_u = (\Gamma_r + \Gamma_z)u, \quad \Phi_v = (\Gamma_r - \Gamma_z)v,\\
\Phi_{uu} = \Gamma_r + \Gamma_z + (\Gamma_{rr} + \Gamma_{zz} + 2\Gamma_{rz})u^2,\\
\Phi_{vv} = \Gamma_r - \Gamma_z + (\Gamma_{rr} + \Gamma_{zz} - 2\Gamma_{rz})v^2,\\
\Phi_{uv} = (\Gamma_{rr} - \Gamma_{zz})uv.
\end{aligned}$$

Da queste formule, se definiamo

$$s = \sqrt{r}, \quad t = \frac{z}{r},$$

tenendo presente che in E si ha $t > 0$, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\Phi_u = s\sqrt{1+t}(g+f), \quad \Phi_v = s\sqrt{1-t}(g-f),\\
\Phi_{uu} = g + f + (1+t)(G + F + 2H),\\
\Phi_{vv} = g - f + (1-t)(G + F - 2H),\\
\Phi_{uv} = \sqrt{1-t^2}(G - F),
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned}
f = \Gamma_z, \quad g = \Gamma_r,\\
F = r\Gamma_{zz}, \quad G = r\Gamma_{rr}, \quad H = r\Gamma_{rz}.
\end{aligned}$$

In conclusione, si ottengono le seguenti formule

$$D_0\Phi = 2(F + G + 4tH + 4g) \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
M_0\Phi = 2r\Big((g^2 - f^2)(g + tf) + g(f^2 + g^2 + 2tfg) \\
+2(1-t^2)(f^2G + g^2F - 2fgH)\Big).
\end{aligned} \tag{49}$$

Costruzione di Φ_1. Per quanto riguarda la prima funzione, il problema è molto facile; basta infatti considerare la funzione

$$\Gamma_1(r, z) = z\sqrt{r} = zs = \Gamma_1(s, z)$$

dove si è considerato $s = \sqrt{r}$. Per questa funzione si trova subito che

$$f = s, \quad g = \frac{st}{2}, \quad F = 0, \quad G = -\frac{st}{4}, \quad H = \frac{s}{2}.$$

Quindi le (48) diventano

$$\begin{aligned}
D_0\Phi_1 &= \frac{11}{2}st\\
M_0\Phi_1 &= \frac{45}{4}rs^3t^3,
\end{aligned}$$

cioè

$$M\Phi_1 = (x^2 - y^2)\underbrace{\left(\frac{11}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{45}{8\sqrt{2}}\frac{(x^2-y^2)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right)}_{\geq 0}. \tag{50}$$

Quindi la funzione

$$\Phi_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \tag{51}$$

è di classe $\mathcal{C}^2$ eccetto che nell'origine, positiva su $x^2 > y^2$ e negativa per $x^2 < y^2$ e infine essa è una super-soluzione per $x^2 > y^2$ mentre è una sub-soluzione per $x^2 < y^2$.

Costruzione di Φ_2. La costruzione della seconda funzione è alquanto più laboriosa; partiamo con il definire

$$\Gamma_0(r,z) = z\left(1 + \sqrt{r}\left(1 + A\left(\frac{z}{r}\right)^a\right)\right) = z(1 + s(1 + At^a)),$$

con $A \in (1, +\infty)$ ed $a \in (0, 1/2)$ costanti da scegliere in modo opportuno e con $t > 0$. Per questa funzione si ha che

$$f = 1 + \sqrt{r}\left(1 + (1+a)A\left(\frac{z}{r}\right)^a\right) = 1 + s(1 + (1+a)At^a);$$

$$g = \frac{z}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r}A\left(\frac{z}{r}\right)^{a+1}\left(\frac{1}{2} - a\right) = \frac{st}{2} + sAt^{a+1}\left(\frac{1}{2} - a\right);$$

$$F = a(a+1)A\sqrt{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{-1+a} = a(a+1)Ast^{-1+a};$$

$$G = -\frac{z}{4\sqrt{r}} - A\left(\frac{1}{4} - a^2\right)\sqrt{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{a+1} = -\frac{st}{4} - A\left(\frac{1}{4} - a^2\right)st^{a+1};$$

$$H = \sqrt{r} + A\left(\frac{1}{2} - a\right)(1+a)\sqrt{r}\left(\frac{z}{r}\right)^a = s + A\left(\frac{1}{2} - a\right)(1+a)st^a.$$

Quindi si ottiene che

$$D_0\Phi_0 = \frac{11}{2}st + 2a(a+1)Ast^{-1+a} + A\left(\frac{11}{2} - 10a - 2a^2\right)st^{a+1};$$

Non è possibile dimostrare che questo termine ha segno costante, ma vale la seguente stima

$$D_0\Phi_0 \le 12Ast^{-1+a}.$$

Infatti, se consideriamo la funzione

$$h(t) = \frac{11}{2A}t^{2-a} + 2a(a+1) + \left(\frac{11}{2} - 10a - 2a^2\right)t^2,$$

definita in $[0,1]$, si nota che

$$h(0) = 2a(a+1) \in (0, 5/4), \quad \forall a \in (0, 1/2),$$

$$h(1) = \frac{11}{2}\left(\frac{A+1}{A}\right) - 8a \in (3/2, 11), \forall a \in (0, 1/2), \forall A \in (1, +\infty).$$

Inoltre, la funzione h ha derivata in t sempre positiva, e questo dimostra la nostra disuguaglianza.

Per quanto riguarda invece M_0, si ottiene che, se $a \in (5/16, 1/3)$ e A è sufficientemente grande,

$$M_0\Phi_0 \leq (3a-1)3aAt^{1+a}s^3t.$$

Abbiamo quindi che, siccome $a < 1/3$,

$$M_0\Phi_0 \leq 0.$$

In definitiva, per l'operatore delle superficie minime applicato a Φ_0 si ha

$$M\Phi_0 = D_0\Phi_0 + M_0\Phi_0 \leq sAt^{-1+a}\left(12 - (1-3a)3a(rt)^2\right).$$

Quindi riusciremo ad avere $M\Phi_0 \leq 0$ solo sotto la condizione

$$rt \geq \frac{2}{\sqrt{a(1-3a)}}$$

e non per tutte le scelte di $r > 0$ e $t > 0$. Per impedire di avere restrizioni su r e t cerchiamo una funzione K tale che, per $t > 0$, la funzione

$$\Phi_2 = K(\Phi_0)$$

soddisfi la condizione $M\Phi_2 \leq 0$ per ogni $r > 0$. Osserviamo subito che con questa scelta di Φ_2 valgono le relazioni

$$D_0\Phi_2 = K'(\Phi_0)D_0\Phi_0 + K''(\Phi_0)((\Phi_0)_u^2 + (\Phi_0)_v^2)$$

$$M_0\Phi_2 = (K'(\Phi_0))^3 M_0\Phi_0.$$

Detto questo, cercheremo la funzione K nella forma

$$K(\sigma) = \int_0^\sigma \exp\left(B\int_\tau^\infty \frac{w^{-1+a}}{1+w^{2a}}dw\right)d\tau, \quad B > 0.$$

Per tale funzione si ha che

$$K'(\sigma) = \exp\left(B\int_\sigma^\infty \frac{w^{-1+a}}{1+w^{2a}}dw\right) > 1$$

$$K''(\sigma) = -B\frac{\sigma^{-1+a}}{1+\sigma^{2a}}K'(\sigma).$$

Per quanto riguarda l'operatore delle superficie minime applicato a Φ_2, si ottiene quindi che

$$M\Phi_2 = K'(\Phi_0)D_0\Phi_0 - B\frac{\Phi_0^{-1+a}}{1+\Phi_0^{2a}}K'(\Phi_0)((\Phi_0)_u^2 + (\Phi_0)_v^2) + K'(\Phi_0)^3 M_0\Phi_0.$$

Dividiamo quindi la discussione del segno in due parti; per $rt \geq \frac{2}{\sqrt{a(1-3a)}}$, notiamo semplicemente che

$$M\Phi_2 \leq K'(\Phi_0)^3 M\Phi_0 \leq 0.$$

Se invece $rt \leq \frac{2}{\sqrt{a(1-3a)}}$, tenendo presente che

$$(\Phi_2)_u^2 + (\Phi_2)_v^2 \geq 2r(1 + s(1+At^a))^2,$$

riscrivendo, si nota che

$$\begin{aligned} M\Phi_2 &= \underbrace{K'(\Phi_0)D_0\Phi_0}_{\leq K'(\Phi_0)12sAt^{-1+a}} - B\frac{\Phi_0^{-1+a}}{1+\Phi_0^{2a}}K'(\Phi_0)((\Phi_0)_u^2+(\Phi_0)_v^2) \\ &\quad + \underbrace{K'(\Phi_0)^3 M_0\Phi_0}_{\leq 0} \\ &\leq K'(\Phi_0)\left(12sAt^{-1+a} - B\frac{\Phi_0^{-1+a}}{\Phi_0^{2a}}2r(1+s(1+At^a))^2\right). \end{aligned}$$

Avremo quindi in definitiva che $M\Phi_2 \leq 0$ se scegliamo $B > 0$ in modo tale che

$$B \geq \frac{6Ast^{-1+a}\Phi_2^{1-a}(1+\Phi_2^{2a})}{r(1+s(1+At^a))^2}, \quad \forall rt \leq \frac{2}{\sqrt{a(1-3a)}}.$$

Basterà quindi prendere

$$B \geq 6A\left(1+\frac{2}{\sqrt{a(1-3a)}}\right)$$

e avremo concluso quindi che

$$\Phi_2 = K(\Phi_0),$$

dove

$$\Phi_0(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\left(1+A\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|^a\right)\right) \tag{52}$$

è la funzione cercata. Il confronto con Φ_1 segue notando semplicemente che

$$1+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\left(1+A\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|^a\right) > \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^8$.

2. La costruzione del controesempio

Tramite le funzioni Φ_1 e Φ_2 date in (51) e (52) costruiamo una soluzione non banale dell'equazione delle superficie minime definita su tutto $\mathbb{R}^8$.

Utilizzando la funzione Φ_1, fissato $\varrho > 0$, consideriamo il problema

$$\min\left\{\int_{B_\varrho}\sqrt{1+|Dv|^2}dx : v \in \mathrm{Lip}(B_\varrho), v = \Phi_1 \text{ su } \partial B_\varrho\right\}. \tag{53}$$

Siamo nelle condizioni di poter applicare il Teorema di Hilbert 1.5, in quanto la palla B_ϱ è uniformemente convessa e Φ_1 ristretta a ∂B_ϱ è di classe

$\mathcal{C}^2$. Quindi esiste un'unica funzione u_ϱ minimo di (53). La proprietà che $\Phi_1(x,y) = -\Phi_1(y,x)$ si trasmette anche sulla funzione u_ϱ, e quindi

$$u_\varrho(x,y) = -u_\varrho(y,x). \tag{54}$$

Possiamo quindi analizzare le proprietà di u_ϱ solo su E, potendosi ricavare le medesime proprietà su E^c con le dovute precauzioni di segno. Conseguenza immediata di (54) è che $u_\varrho = 0$ su $\partial E \cap B_\varrho$; quindi, dato che $u_\varrho = \Phi_1 > 0$ su $\partial B_\varrho \cap E$, se ne deduce, grazie al Lemma 4.5, che $u_\varrho \geq \Phi_1$, da cui

$$u_\varrho > 0 \quad \text{su } E \cap B_\varrho.$$

Inoltre, grazie allo stesso Lemma 4.5, si ha anche che $u_\varrho \leq \Phi_2$ su $E \cap B_\varrho$. La successione $(u_\varrho)_\varrho$ così construita è monotona in ϱ; infatti, se $\varrho_1 < \varrho_2$, dato che $u_{\varrho_2} \geq \Phi_1$ su tutto $E \cap B_{\varrho_2}$, sarà vero in particolare su $\partial B_{\varrho_1} \cap E$, cioè

$$u_{\varrho_2}|_{\partial B_{\varrho_1} \cap E} \geq \Phi_1|_{\partial B_{\varrho_1} \cap E} = u_{\varrho_1}|_{\partial B_{\varrho_1} \cap E}.$$

Quindi la successione è monotona crescente in E e decrescente in E^c. La successione è localmente equi-Lipschitziana; infatti, se fissiamo $R > 0$, se $\varrho > R + 1$, dalla stima del gradiente del Teorema 5.2 si ricava che per $x_0 \in B_R$

$$\begin{aligned} |Du_\varrho(x_0)| &\leq C_1 \exp\left(C_2\left(\sup_{B_{R+1}} u_\varrho - u_\varrho(x_0)\right)\right) \\ &\leq C_1 \exp\left(C_2\left(\sup_{B_{R+1}} |\Phi_2|\right)\right) \end{aligned}$$

Quindi la successione u_ϱ converge uniformemente sui compatti ad una funzione u localmente Lipschitziana. Grazie alla semicontinuità inferiore del funzionale dell'area, la funzione u è un minimo locale, cioè una soluzione dell'equazione delle superficie minime. Tale funzione è non banale in quanto $u > 0$ su E e $u < 0$ su $\mathrm{int}(E^c)$. $\square$