CAPITOLO 7

Esistenza di un cono minimo singolare

Per il cono di $\mathbb{R}^8$ definito da

$$\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}^4, |x|^2 - |y|^2 > 0\}$$

valgono le ipotesi del teorema di Simons, ma esso è singolare nel vertice. Lo stesso Simons aveva espresso la convinzione che tale cono fosse di perimetro localmente minimo. La dimostrazione di questo fatto è contenuta nell'articolo di Bombieri, De Giorgi e Giusti del 1969 [**4**]. Successivamente Massari e me stesso nel 1983 [**24**] demmo una dimostrazione elementare di tale risultato, che qui presentiamo, ponendo per semplicità $x^2 = |x|^2$ per $x \in \mathbb{R}^k$.

1. Uno speciale polinomio con gli zeri sul cono di Simons

PROPOSIZIONE 7.1. *Per il polinomio omogeneo di quarto grado*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2}\frac{x^2 + y^2}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^k$$

vale, per $k \geq 4$, la seguente diseguaglianza

$$(x^2 - y^2) Mf(x,y) \geq 0,$$

dove si è posto

$$Mf = \operatorname{div}\left(\frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}}\right).$$

DIM. Le derivate parziali della funzione f sono

$$D_{x_i} f = x_i x^2, \quad D_{y_i} f = -y_i y^2,$$

$$D^2_{x_i x_j} f = \varepsilon_{i,j} x^2 + 2x_i x_j, \quad D^2_{y_i y_j} f = -\varepsilon_{i,j} y^2 - 2y_i y_j, \quad D^2_{x_i y_j} f = 0.$$

In modo più compatto potremmo scrivere che

$$Df = (xx^2, -yy^2), \quad |Df|^2 = x^6 + y^6,$$

$$HfDf = 3(xx^4, yy^4), \langle HfDf, Df \rangle = 3x^8 - 3y^8,$$

$$\Delta f = (k+2)(x^2 - y^2).$$

In definitiva, l'operatore delle superficie minime applicato ad f dà come risultato

$$\begin{aligned} Mf &= (1+x^6+y^6)(k+2)(x^2-y^2)-3(x^8-y^8) \\ &= (x^2-y^2)\left((1+x^6+y^6)(k+2)-3(x^2+y^2)(x^4+y^4)\right) \\ &= (x^2-y^2)\left((k+2)+(x^6+y^6)(k-1)-3(x^2y^4+x^4y^2)\right) \\ &= (x^2-y^2)\left((k-4)(x^6+y^6)+(k+2)+3(x^2-y^2)^2(x^2+y^2)\right), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato l'identità

$$x^6+y^6 = x^4y^2+x^2y^4+(x^2-y^2)^2(x^2+y^2).$$

Abbiamo quindi dimostrato che, se $k \geq 4$, si ha

$$Mf > 0$$

se e solo se $x^2 > y^2$, mentre

$$Mf < 0$$

se e solo se $x^2 < y^2$. □

Indicheremo con

$$E_a = \{(x,y,z) : x,y \in \mathbb{R}^k, z < af(x,y)\},$$

cioè il subgrafico della funzione $af(x,y)$; vedremo che

$$E_\infty = \lim_{a\to+\infty} E_a = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}^4, x^2-y^2>0\} \times \mathbb{R},$$

dove il limite va inteso nel senso di L^1_{loc} per le funzioni caratteristiche. Dimostreremo che E_∞ è un cilindro la cui frontiera è minima e singolare in $\{(0,0)\} \times \mathbb{R}$. Tale proprietà vale anche per il cono di Simons, come ora dimostreremo.

2. Minimalità del cilindro

Tramite la Proposizione 7.1 dimostriamo ora la minimalità del cono di Simons; per fare questo, procediamo con un ragionamento di omogeneità. Partiamo con il seguente risultato di convergenza; denoteremo con

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R} : x^2-y^2>0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2k} : x^2-y^2>0\} \times \mathbb{R} \\ &= E \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\tilde{E}_j = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R} : z < j^3 f(x,y)\}. \tag{45}$$

Proposizione 7.2. *Gli insiemi $\tilde{E}_j$ convergono ad $\tilde{E}$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$.*

DIM. Dire che $\tilde{E}_j$ converge ad $\tilde{E}$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ significa dire che le funzioni caratteristiche $\mathbf{1}_{\tilde{E}_j}$ convergono a $\mathbf{1}_{\tilde{E}}$ in $L^1(A)$ per ogni $A \subset\subset \mathbb{R}^{n+1}$. Per comodità, possiamo considerare gli insiemi

$$A = B_R(0) \times (-R, R), \quad B_R(0) \subset \mathbb{R}^n.$$

Quello che dobbiamo verificare è quindi che

$$\lim_{j \to +\infty} |(\tilde{E}_j \Delta \tilde{E}) \cap A| = 0. \tag{46}$$

Ma si nota facilmente che

$$|(\tilde{E}_j \Delta \tilde{E}) \cap A| \leq R \left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2k} : |f(x, y)| \leq \frac{R}{j^3} \right\} \right|.$$

Siccome chiaramente

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2k} : |f(x, y)| \leq \frac{R}{j^3} \right\} \right| \to 0$$

per $j \to +\infty$, allora la (46) segue. □

Dimostriamo infine che $\tilde{E}$ ha localmente frontiera minima, da cui, grazie alla Proposizione 7.6, segue anche che E ha localmente frontiera minima.

Abbiamo quindi il seguente lemma.

LEMMA 7.3. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una sub–soluzione per l'operatore delle superficie minime; allora il sottografico di f*

$$E_f = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, t < f(x)\}$$

ha frontiera localmente minima in $\Omega \times \mathbb{R}$ per perturbazioni $F = E_f \setminus A$ con $A \subset\subset \Omega \times \mathbb{R}$, $A \subset E_f$.

DIM. Prendiamo un insieme $A \subset E_f$ con $A \subset\subset \Omega \times \mathbb{R}$ di perimetro finito e scriviamo $\mathcal{F}A = \partial_1 A \cup \partial_2 A$ con $\partial_1 A \subset \partial E_f$ e $\partial_2 A = \mathcal{F}A \setminus \partial_1 A$, dove con $\mathcal{F}A$ intendiamo la frontiera ridotta di A, cioè la parte di ∂A per la quale si ha che

$$\mathrm{P}(A, \mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{H}^n(\mathcal{F}A).$$

Denotiamo con ν_f la normale uscente da E_f, cioè il vettore dato da

$$\nu_f(x) = \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

Tale vettore può essere esteso ad un campo definito su tutto $\Omega \times \mathbb{R}$ ponendo

$$\tilde{\nu}_f(x, x_{n+1}) = \nu_f(x).$$

Il campo così definito soddisfa la condizione

$$\mathrm{div}_{n+1}\,\tilde{\nu}_f(x,x_{n+1}) = \mathrm{div}\,\nu_f(x) = \mathcal{M}u \geq 0. \tag{47}$$

Su $\partial_1 A$ il vettore della normale entrante in A ν_A è dato da $\nu_A = -\nu_f$, quindi

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_A \mathrm{div}_{n+1}\,\tilde{\nu}_f(x,x_{n+1})dxdx_{n+1} \\
&= \int_{\partial A} \langle \tilde{\nu}_f(x,x_{n+1}), \nu_A(x,x_{n+1})\rangle d\mathcal{H}^n(x,x_{n+1}) \\
&= -\int_{\partial_1 A} \langle \nu_f, \nu_f\rangle d\mathcal{H}^n + \int_{\partial_2 A} \langle \tilde{\nu}_f, \nu_A\rangle d\mathcal{H}^n \\
&= -\mathcal{H}^n(\partial_1 A) + \int_{\partial_2 A} \langle \tilde{\nu}_f, \nu_A\rangle d\mathcal{H}^n \\
&\leq -\mathcal{H}^n(\partial_1 A) + \mathcal{H}^n(\partial_2 A)
\end{aligned}$$

Questo implica in particolare che

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F, \Omega\times\mathbb{R}) &= \mathcal{H}^n(\partial E_f \setminus \partial_1 A) + \mathcal{H}^n(\partial_2 A) \\
&\geq \mathcal{H}^n(\partial E_f \setminus \partial_1 A) + \mathcal{H}^n(\partial_1 A) \\
&= \mathrm{P}(E_f, \Omega\times\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

cioè la minimalità locale della frontiera di E_f. □

Teorema 7.4. *L'insieme $\tilde{E}$ ha localmente frontiera minima in $\mathbb{R}^{2k+1}$.*

Dim. Fissiamo l'insieme limitato di $\mathbb{R}^{2k+1}$ individuato da

$$\Omega_R = B_R(0) \times (0,R);$$

con $B_R(0)$ palla di $\mathbb{R}^{2k}$ di raggio R centrata in 0, dimostriamo anzitutto che $\tilde{E}$ ha frontiera minima in Ω_R per variazioni del tipo

$$\tilde{F} = \tilde{E} \setminus A,$$

con $A \subset E \times (0,R)$. Presi gli $\tilde{E}_j$ definiti da (45), tali insiemi sono, in $E\times(0,R)$, sotto–grafici di una sub–soluzione per l'equazione delle superficie minime, per quanto visto in (7.3) segue che se poniamo $A_j = A \setminus \tilde{E}_j$

$$\mathrm{P}(\tilde{E}\setminus A_j, \Omega_R) \leq \mathrm{P}(\tilde{E}\setminus A, \Omega_R).$$

Siccome risulta chiaro che $\tilde{E}\setminus A_j$ convergono in $L^1(\Omega_R)$ a $\tilde{E}$, per la semicontinuità inferiore del perimetro, si ottiene che

$$\mathrm{P}(\tilde{E}, \Omega_R) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathrm{P}(\tilde{E}\setminus A_j, \Omega_R) \leq \mathrm{P}(\tilde{E}\setminus A, \Omega_R) = \mathrm{P}(\tilde{F}, \Omega_R)$$

Analogamente, se fissiamo l'insieme limitato

$$\Omega_{-R} = B_R(0) \times (-R, 0)$$

e variazioni del tipo $\tilde{F} = \tilde{E} \cup A$ con $A \subset E^c \times (-R, 0)$, grazie al fatto che in $E^c \times (-R, 0)$ gli $\tilde{E}_j$ sono sotto–grafici di super–soluzioni per l'equazione delle superficie minime, analogamente al passo precedente si ottiene che

$$\mathrm{P}(\tilde{E}, \Omega_{-R}) \leq \mathrm{P}(\tilde{F}, \Omega_{-R}).$$

Per prendere variazioni $\tilde{F}$ di $\tilde{E}$ arbitrarie, supponiamo di avere

$$\tilde{F} \Delta \tilde{E} \subset\subset B_R(0) \times (-R/2, R/2);$$

introducendo le traslazioni

$$\tau_s(x, y, z) = (x, y, z + s), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2k}, z, s \in \mathbb{R},$$

si ottiene che, scrivendo $\tilde{F} = (\tilde{E} \setminus A_1) \cup A_2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\tilde{F}, B_R(0) \times (-R/2, R/2)) &= \mathrm{P}(\tau_R(\tilde{F}), \Omega_R) \\
&\geq \mathrm{P}(\tau_R(\tilde{E} \cup A_2), \Omega_R) \\
&= \mathrm{P}(\tau_{-R}(\tilde{E} \cup A_2), \Omega_{-R}) \\
&\geq \mathrm{P}(\tau_{-R}(\tilde{E}), \Omega_{-R}) \\
&= \mathrm{P}(\tilde{E}, B_R(0) \times (-R/2, R/2)).
\end{aligned}$$

□

3. Minimalità del cono di Simons

Per derivare la minimalità del cono da quella del cilindro, abbiamo bisogno di qualche risultato preliminare. Prima di tutto la seguente proprietà.

LEMMA 7.5. *Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $a < b \in \mathbb{R}$, si ha che*

$$\mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \Omega \times (a, b)) = (b - a)\mathrm{P}(E, \Omega)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$.

DIM. Ricordiamo che la definizione di perimetro di un insieme E in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ viene data tramite

$$\mathrm{P}(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \phi dx : \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\}.$$

Dimostriamo innanzitutto che

$$\mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \Omega \times (a,b)) \leq (b-a)\mathrm{P}(E, \Omega).$$

Data $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega \times (a,b), \mathbb{R}^{n+1})$, scritto $y = (x, x_{n+1})$ con $x \in \mathbb{R}^n$, otteniamo che

$$\begin{aligned}\int\limits_{E\times\mathbb{R}} \operatorname{div}\phi(y)dy &= \int\limits_{E\times\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n D_i\phi_i(x, x_{n+1})dxdx_{n+1} \\ &\quad + \int\limits_{E\times\mathbb{R}} D_{n+1}\phi_{n+1}dxdx_{n+1}.\end{aligned}$$

Dato che per ogni $x \in \Omega$ si ha che $\phi(x,\cdot) \in \mathcal{C}_c^\infty(a,b)$, si ottiene che

$$\int\limits_a^b D_{n+1}\phi_{n+1}dx_{n+1} = 0,$$

da cui

$$\int\limits_{E\times\mathbb{R}} D_{n+1}\phi_{n+1}dxdx_{n+1} = 0.$$

Inoltre, siccome per ogni $x_{n+1} \in (a,b)$ la funzione φ definita da

$$\varphi(x) = (\phi_1(x, x_{n+1}), \ldots, \phi_n(x, x_{n+1}))$$

risulta in $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, se ne deduce che

$$\int\limits_E \sum_{i=1}^n D_i\phi_i(x, x_{n+1})dx = \int\limits_E \operatorname{div}\varphi dx \leq \mathrm{P}(E, \Omega).$$

In definitiva abbiamo ottenuto che

$$\begin{aligned}\int\limits_{E\times\mathbb{R}} \operatorname{div}\phi(y) &= \int\limits_a^b \int\limits_E \sum_{i=1}^n D_i\phi^i(x, x_{n+1})dxdx_{n+1} \\ &\leq \int\limits_a^b \mathrm{P}(E,\Omega) = (b-a)\mathrm{P}(E,\Omega).\end{aligned}$$

Per dimostrare la disuguaglianza inversa, presa $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, definiamo la funzione

$$\phi(x, x_{n+1}) = (\tau(x_{n+1}\varphi(x), \tau(x_{n+1}\xi(x)),$$

dove $\tau \in \mathcal{C}_c^\infty(a,b)$ è una funzione tale che

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \tau(s)ds = b - a$$

e $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Siccome

$$\operatorname{div}\phi(x, x_{n+1}) = \tau(x_{n+1})\operatorname{div}\varphi(x) + \xi(x)\tau'(x_{n+1}), \quad \forall x \in \Omega,$$

se ne deduce che

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{div} \phi(x, x_{n+1}) dx_{n+1} = (b-a) \operatorname{div} \varphi(x).$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx &= \frac{1}{b-a} \int_{E\times\mathbb{R}} \operatorname{div} \phi(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1} \\ &\leq \frac{1}{b-a} \mathrm{P}(E\times\mathbb{R}, \Omega\times(a,b)),\end{aligned}$$

da cui chiaramente la stima

$$\mathrm{P}(E,\Omega) \leq \frac{1}{b-a} \mathrm{P}(E\times\mathbb{R}, \Omega\times(a,b)).$$

□

PROPOSIZIONE 7.6. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile; allora E ha localmente frontiera minima in $\mathbb{R}^n$ se e solo se $E\times\mathbb{R}$ ha localmente frontiera minima in $\mathbb{R}^{n+1}$.*

DIM. La parte più facile di questa dimostrazione è l'implicazione che se E è minimo locale, allora anche $E\times\mathbb{R}$ è minimo locale. Difatti, preso $A \subset\subset \mathbb{R}^{n+1}$, dobbiamo dimostrare che

$$\mathrm{P}(E\times\mathbb{R}, A) \leq \mathrm{P}(F, A), \quad \forall F\Delta E\times\mathbb{R} \subset\subset A.$$

Per comodità, possiamo supporre che $A = \Omega\times(a,b)$, con $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$; inoltre, per $t \in (a,b)$, indichiamo con

$$F_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,t) \in F\}.$$

È chiaro che $F_t\Delta E \subset\subset \Omega$, e quindi dalla minimalità locale di E

$$\mathrm{P}(E,\Omega) \leq \mathrm{P}(F_t,\Omega);$$

inoltre vale che

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(F,\Omega\times(a,b)) &= \int_a^b \mathrm{P}(F_t,\Omega) dt \\ &\geq \int_a^b \mathrm{P}(E,\Omega) dt = (b-a)\mathrm{P}(E,\Omega) \\ &= \mathrm{P}(E\times\mathbb{R}, \Omega\times(a,b)).\end{aligned}$$

Viceversa, presi arbitrariamente $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $F\Delta E \subset\subset \Omega$, dimostriamo che

$$\mathrm{P}(E,\Omega) \leq \mathrm{P}(F,\Omega).$$

A questo proposito, fissiamo $j \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, definiamo i seguenti insiemi

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times (-\varepsilon, j + \varepsilon),$$

e

$$\tilde{F} = (F \times (0, j)) \cup (E \times (j, j + \varepsilon)) \cup (E \times (-\varepsilon, 0));$$

la minimalità locale di $E \times \mathbb{R}$ implica che, siccome $\tilde{F}\Delta(E \times \mathbb{R}) \subset\subset \tilde{\Omega}$,

$$\mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \tilde{\Omega}) \leq \mathrm{P}(\tilde{F}, \tilde{\Omega}).$$

Tenendo quindi presente che

$$\mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \tilde{\Omega}) = (j + 2\varepsilon)\mathrm{P}(E, \Omega),$$

e

$$\mathrm{P}(\tilde{F}, \tilde{\Omega}) = j\mathrm{P}(F, \Omega) + 2|E\Delta F| + 2\varepsilon\mathrm{P}(E, \Omega) \leq j\mathrm{P}(F, \Omega) + 2|\Omega| + 2\varepsilon\mathrm{P}(E, \Omega),$$

si ottiene che

$$\mathrm{P}(E, \Omega) \leq \frac{j}{j + 2\varepsilon}\mathrm{P}(F, \Omega) + \frac{2}{j + 2\varepsilon}|\Omega| + \frac{2\varepsilon}{j + 2\varepsilon}\mathrm{P}(E, \Omega).$$

Facendo quindi i limiti $\varepsilon \to 0$ e $j \to +\infty$, si ottiene la minimalità locale di E. $\square$