CAPITOLO 6

Alcuni richiami della teoria dei perimetri e il Teorema di Simons

1. Perimetri degli insiemi misurabili

La definizione di perimetro di un insieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue fu data da De Giorgi nel 1954 [**8**] e [**9**] e da lui utilizzata per lo studio di alcuni problemi variazionali classici, come la proprietà isoperimetrica della sfera e il Problema di Antoine Ferdinand Plateau (1801–1883) .

Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue e se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto, indicheremo con $\mathrm{P}(E, \Omega)$ la seguente espressione

$$\mathrm{P}(E, \Omega) := \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \phi(x) dx : \phi \in [\mathcal{C}_0^1(\Omega)]^n, |\phi(x)| \leq 1 \right\}.$$

Nel caso di $\Omega = \mathbb{R}^n$ si scrive $\mathrm{P}(E)$ per $\mathrm{P}(E, \mathbb{R}^n)$ e si parla di perimetro di E.

Fu lo stesso De Giorgi a dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica

$$\min\{|E|, |\mathbb{R}^n \setminus E|\} \leq \sigma(n) \mathrm{P}(E)^{\frac{n}{n-1}}, \quad \forall n > 1, \forall E \subset \mathbb{R}^n \tag{40}$$

dove $\sigma(n) = \omega_n (n\omega_n)^{\frac{n}{n-1}}$, con ω_n eguale alla misura della palla unitaria.

La (40) diventa una eguaglianza solo nel caso di E o $\mathbb{R}^n \setminus E$ eguale ad una palla. Quindi De Giorgi dimostrò la proprietà isoperimetrica delle sfere in ogni dimensione $n \geq 2$.

2. Frontiere minime

Diremo che E ha frontiera minima in Ω se il $\mathrm{P}(E, \Omega)$ è minimo, cioè se valgono le diseguaglianze

$$\mathrm{P}(E, \Omega) < +\infty,$$

e

$$\mathrm{P}(E,\Omega) \leq \mathrm{P}(F,\Omega) \quad \forall F\Delta E \subset\subset \Omega.$$

Ricordiamo che $F\Delta E$ sta per $(F \setminus E) \cup (E \setminus F)$. Diremo infine che E ha localmente frontiera minima se E ha frontiera minima in ogni aperto $A \subset\subset \Omega$.

Per le frontiere minime De Giorgi dimostrò il seguente Teorema di regolarità.

Teorema 6.1 (De Giorgi[**7, 25**]). *Se E ha perimetro localmente minimo in Ω, allora esiste un aperto $A \subset \Omega$ con le seguenti proprietà:*

(1) *la misura $(n-1)$–dimensionale di $\Omega \setminus A$ è nulla;*
(2) *ogni punto $x \in \partial E \cap A$ è un punto regolare, cioè esiste un intorno di esso nel quale la frontiera di E è il grafico di una funzione reale analitica di $n-1$ variabili.*

3. Singolarità delle frontiere minime

De Giorgi lavorò per anni alla dimostrazione della non esistenza di singolarità sulle frontiere minime, cioè alla dimostrazione della identità

$$A = \Omega, \tag{41}$$

dove A ed Ω hanno il significato dato loro nel Teorema 6.1.

De Giorgi [**36, 38, 37**] riuscì a ridurre il problema (41) al caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^n$ ed E cono di vertice 0, cioè funzione caratteristica di E omogenea di grado zero, e

$$A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Se alle ipotesi ora scritte si aggiunge $n = 2$, si ottiene facilmente la regolarità in 0, cioè $A = \mathbb{R}^2$, da cui risulta

$$E = \text{semipiano}.$$

Il caso $n = 3$ fu risolto nel modo previsto da De Giorgi, per mano di Wendell Helmes Fleming (1928–) nel 1962 [**16**].

Un ulteriore piccolo passo fu dato da Frederick Justin Almgren jr. (1928–1997) nel 1966 [**1**], provando la non esistenza di coni minimi singolari in $\mathbb{R}^4$.

Poco più tardi, nel 1968, James Simons (1928–) [**34**] arrivò fino ai coni in $\mathbb{R}^7$, con un brillante calcolo di geometria differenziale classica che utilizzava, per il cono 7–dimensionale con frontiera analitica 6–dimensionale nei punti diversi dal vertice, semplicemente la nullità della variazione prima della misura della frontiera, e la positività della variazione seconda negli stessi punti.

Tutte queste condizioni erano soddisfatte dal cono, visto da Simons come limite per la validità del suo teorema,

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^4, |x|^2 - |y|^2 > 0\}$$

la cui frontiera

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^4, |x|^2 = |y|^2\} \tag{42}$$

è singolare nel vertice $(0, 0)$.

Simons considerò il suo risultato come il massimo nella strada della regolarità dei coni minimi, affermando di essere convinto della minimalità della frontiera conica (42).

Il calcolo di Simons è stato presentato nel Corso e in questo Capitolo sarà riportato con tutti i dettagli.

La congettura di Simons riguardante il cono (42) è stata dimostrata vera dallo stesso De Giorgi, con la collaborazione di Bombieri e Enrico Giusti (1940–), nel 1969 [**4**]. Una sua dimostrazione trovata da Massari (1947–) e me stesso è stata presentata nel Corso e verrà riportata nel Capitolo 7.

Ma l'avventura del cono di Simons non finisce qui. Ancora De Giorgi, ancora con la collaborazione di Bombieri e Giusti, fu capace di provare l'esistenza di una soluzione intera dell'equazione delle superficie minime, in 8 variabili, avente come zeri i punti della frontiera del cono di Simons. Quindi una soluzione intera non banale!

Quest'ultimo risultato, frutto anche di un fantastico calcolo, è stato presentato nel Corso in maniera resa meno faticosa dall'uso di MATHEMATICA™.

Quindi il Teorema di Bernstein non può essere esteso a funzioni di 8 o più variabili.

E ciò diventa ancora più importante, se si considera l'osservazione fatta da Fleming [**16**] e ritoccata da De Giorgi [**12**], per la quale la non esistenza di coni minimi singolari in $\mathbb{R}^7$ implica la validità del Teorema di Bernstein per funzioni di 7 variabili.

4. Il calcolo di Simons

Questo paragrafo è preso dalla monografia di Massari e me stesso [**26**].

Il calcolo di Simons inizia con l'esprimere la variazione prima e seconda della misura di una frontiera regolare in uno spazio euclideo di $(n+1)$ dimensioni. Le due espressioni sono date in forma integrale e in esse la variabile è una funzione a supporto compatto, che può essere tanto piccolo quanto occorre.

Possiamo quindi muoverci su un pezzo di superficie grafico di una funzione reale $u \in \mathcal{C}^2(A)$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$. La superficie $\mathcal{S}$ sulla quale faremo i nostri calcoli è il grafico della u e il versore normale sulla superficie $\mathcal{S}$ è dato da

$$\nu(y) = \left(-\frac{Du(y)}{\sqrt{1+|Du(y)^2|}}, \frac{1}{\sqrt{1+|Du(y)^2|}} \right), \quad y \in A.$$

Per i nostri calcoli avremo bisogno di muoverci nel cilindro $A \times \mathbb{R}$ e indicheremo con x i punti di esso; avremo anche bisogno di estendere la definizione di ν a tutto il cilindro, ciò che faremo ponendo

$$\nu(x) = \nu(y)$$

se $x = (y, x_{n+1})$. Per le notazioni che useremo in questo paragrafo ci riferiremo a quanto introdotto nel capitolo 5, sezione 4.

5. Variazione prima di $\mathcal{H}^n(\mathcal{S})$

Per ogni funzione $g \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$, e per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, dove ε è scelto in modo che per ogni $x \in \mathcal{S}$ sia

$$G_t(x) := x + tg(x)\nu(x) \in \Omega.$$

La $G_t\mathcal{S}$ risulterà essere una deformazione della $\mathcal{S}$ e ha misura finita se ha misura finita la $\mathcal{S}$. Potremo allora calcolare la derivata

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S})\Big|_{t=0}.$$

Il risultato di tale calcolo è la variazione prima che ci interessa e per essa dimostreremo l'eguaglianza

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S})\Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{S}} \sum_h (\delta_h \nu_h) d\mathcal{H}^n. \tag{43}$$

Nel seguito scriveremo

$$\sum_h \quad \text{per} \quad \sum_{h=1}^{n+1}$$

e manterremo inalterata la sommatoria

$$\sum_{h=1}^{n}.$$

Per la dimostrazione di (43) si introduce la rappresentazione parametrica per la superficie $G_t\mathcal{S}$ data da $\phi(A)$ dove ϕ è definita da

$$\phi(y) = \sum_{h=1}^{n} e_h y_h + u(y)e_{n+1} + tg(y, u(y))\nu(y) = (y, u(y)) + tg(y, u(y))\nu(y),$$

dove con $e_1, \dots, e_{n+1}$ si è indicata la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$. Valgono allora le

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} = \varepsilon_{ij} + t\left(D_i g + D_{n+1} g \frac{\partial u}{\partial y_i}\right)\nu_j + tg\frac{\partial \nu_j}{\partial y_i}$$

dove ε_{ij} è il simbolo di Kronecker, e

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial y_i} = \frac{\partial u}{\partial y_i} + t\left(D_i g + D_{n+1} g \frac{\partial u}{\partial y_i}\right)\nu_{n+1} + tg\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_i}$$

e, per quanto riguarda il tensore metrico

$$(\lambda_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n} = \sum_h \left(\frac{\partial \phi_h}{\partial y_i}\frac{\partial \phi_h}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\lambda_{ij} &= \sum_{h=1}^{n}\Big(\Big(\varepsilon_{ih}+t\Big(D_i g + D_{n+1} g\frac{\partial u}{\partial y_i}\Big)\nu_h + tg\frac{\partial \nu_h}{\partial y_i}\Big)\cdot\\
&\quad \cdot\Big(\varepsilon_{jh}+t\Big(D_j g + D_{n+1} g\frac{\partial u}{\partial y_j}\Big)\nu_h + tg\frac{\partial \nu_h}{\partial y_j}\Big)\Big)\\
&\quad +\Big(\frac{\partial u}{\partial y_i}+t\Big(D_i g + D_{n+1} g\frac{\partial u}{\partial y_i}\Big)\nu_{n+1} + tg\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_i}\Big)\cdot\\
&\quad \cdot\Big(\frac{\partial u}{\partial y_j}+t\Big(D_j g + D_{n+1} g\frac{\partial u}{\partial y_j}\Big)\nu_{n+1} + tg\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_j}\Big)\\
&= \varepsilon_{ij}+\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial y_j}\\
&\quad +tg\Big(\frac{\partial \nu_i}{\partial y_j}+\frac{\partial \nu_j}{\partial y_i}+\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_j}+\frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_i}\Big)\\
&\quad +t^2\Big((D_i g + D_{n+1} g\frac{\partial u}{\partial y_i})(D_j g + D_{n+1} g\frac{\partial u}{\partial y_j}) + g^2\sum_h \frac{\partial \nu_h}{\partial y_i}\frac{\partial \nu_h}{\partial y_j}\Big)\\
&= \frac{1}{\nu_{n+1}^2}\Big(\nu_{n+1}^2\varepsilon_{ij}\nu_i\nu_j\\
&\quad +tg\Big(\nu_{n+1}^2\Big(\frac{\partial \nu_j}{\partial y_i}+\frac{\partial \nu_i}{\partial y_j}\Big)-\nu_{n+1}\Big(\nu_i\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_j}+\nu_j\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_i}\Big)\Big)\\
&\quad +t^2\Big((\nu_{n+1}D_i g-\nu_i D_{n+1} g)(\nu_{n+1}D_j g-\nu_j D_{n+1} g)\\
&\quad +g^2\nu_{n+1}^2\sum_h \frac{\partial \nu_h}{\partial y_i}\frac{\partial \nu_h}{\partial y_j}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Possiamo allora scrivere per la misura di $G_t\mathcal{S}$

$$\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S}) = \int_A \sqrt{\det(\lambda_{ij})}\,dy,$$

la cui derivata è data da

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\int_A \frac{1}{\sqrt{\det(\lambda_{ij})}}\frac{d}{dt}\det(\lambda_{ij})\,dy.$$

Ricordando la formula per la derivata di un determinante

$$\frac{d}{dt}\det(\lambda_{ij}) = \det(\lambda_{ij})\sum_{i,j=1}^{n}\lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\lambda_{ij},$$

dove (λ^*_{ij}) è la matrice inversa della matrice simmetrica (λ_{ij}), otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S})\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_A \sqrt{\det(\lambda_{ij})}\sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\int_A \frac{1}{\nu_{n+1}}\sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\Big|_{t=0} dy,\end{aligned}$$

avendo usato l'identità

$$\begin{aligned}\det\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) &= \det(\varepsilon_{ij} + \nu_i\nu_j\nu_{n+1}^{-2}) \\ &= \nu_{n+1}^{-2}.\end{aligned}$$

Per concludere osserviamo che

$$\lambda^*_{ij}\Big|_{t=0} = \varepsilon_{ij} - \nu_i\nu_j$$

e

$$\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\Big|_{t=0} = g\left(\frac{\partial\nu_j}{\partial y_i} + \frac{\partial\nu_i}{\partial y_j}\right) - g\nu_{n+1}^{-1}\left(\nu_i\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_j} + \nu_j\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_i}\right),$$

che porta a

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\Big|_{t=0} &= 2g\sum_{i=1}\left(\frac{\partial\nu_i}{\partial y_i} - \nu_{n+1}^{-1}\nu_i\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_i}\right) \\ &\quad +g\nu_{n+1}\sum_{i,j=1}^n\left(\nu_i\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_i} + \nu_j\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_j}\right) \\ &\quad +g\nu_{n+1}^{-1}\Big((1-\nu_{n+1}^2)\sum_{j=1}^n\nu_j\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_j} \\ &\quad +(1-\nu_{n+1}^2)\sum_{i=1}^n\nu_i\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_i}\Big) \\ &= 2g\sum_{i=1}^n\frac{\partial\nu_i}{\partial y_i} = 2g\sum_i\delta_i\nu_i.\end{aligned}$$

Otteniamo in definitiva

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S})\Big|_{t=0} = \int_A\sum_h g(\delta_h\nu_h)\nu_{n+1}^{-1}dy = \int_{\mathcal{S}}\sum_h g(\delta_h\nu_h)d\mathcal{H}^n.$$

6. Variazione seconda di $\mathcal{H}^n(\mathcal{S})$

Derivando rispetto a t l'identità

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\int_A \sqrt{\det(\lambda_{ij})}\sum_{i,1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\lambda_{ij}dy$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S}) &= \frac{1}{2}\int_A \sqrt{\det(\lambda_{ij})}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\right)^2\right.\\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d^2}{dt^2}\lambda_{ij}\\ &\quad \left. + \frac{d}{dt}\lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\right) dy.\end{aligned}$$

Per i tre addendi nell'integrale abbiamo

$$\left(\sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\right)^2\Big|_{t=0} = 4g^2\left(\sum_h \delta_h\nu_h,\right)^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d^2}{dt^2}\lambda_{ij}\Big|_{t=0} &= \sum_{i,j=1}^n 2(\varepsilon_{ij}-\nu_i\nu_j)\nu_{n+1}^{-2}\Big((\nu_{n+1}\delta_i g - \nu_i\delta_{n+1}g)\cdot\\ &\quad \cdot(\nu_{n+1}\delta_j g - \nu_j\delta_{n+1}g) + g^2\nu_{n+1}^2\sum_h \frac{\partial\nu_h}{\partial y_i}\frac{\partial\nu_h}{\partial y_j}\Big)\\ &= 2\nu_{n+1}^{-2}\Big(\nu_{n+1}^2\sum_{i=1}^n(\delta_i g)^2 + 2\nu_{n+1}^2(\delta_{n+1}g)^2\\ &\quad +(1-\nu_{n+1}^2)(\delta_{n+1}g)^2 - (\delta_{n+1}g)^2\\ &\quad +g^2\Big(\sum_{i=1}^n\sum_h\left(\frac{\partial\nu_h}{\partial y_i}\right)^2 - \nu_{n+1}^{-2}\sum_h(\delta_{n+1}\nu_h)^2\Big)\Big)\\ &= 2|\delta g|^2 + 2g^2\Big(\sum_{i=1}^n\sum_h\Big(\delta_i\nu_h - \nu_i\nu_{n+1}^{-1}\delta_{n+1}\nu_h\Big)^2\\ &\quad -\nu_{n+1}^{-2}\sum_h(\delta_{n+1}\nu_h)^2\Big)\\ &= 2|\delta g|^2 + 2g^2\sum_{ih}(\delta_i\nu_h)^2.\end{aligned}$$

Abbiamo usato qui le identità $D_{n+1}\nu_h = 0$ e le conseguenti

$$\delta_{n+1}\nu_h = -\nu_{n+1}\sum_s \nu_s D_s \nu_h,$$

$$\begin{aligned}\sum_h \sum_{i,j=1}^n \nu_i\nu_j \frac{\partial \nu_h}{\partial y_i}\frac{\partial \nu_h}{\partial y_j} &= \sum_h \left(\sum_{i=1}^n \nu_i \delta_i \nu_h + \nu_i^2 \sum_s \nu_s D_s \nu_h\right)^2 \\ &= \sum_h (-\nu_{n+1}\delta_{n+1}\nu_h - (1-\nu_{n+1}^2)\nu_{n+1}^{-1}\delta_{n+1}\nu_h)^2 \\ &= \nu_{n+1}^{-2}\sum_h (\delta_{n+1}\nu_h)^2.\end{aligned}$$

Infine per calcolare $\sum_{i,j=1}^n \frac{d\lambda_{ij}^*}{dt}\frac{d\lambda_{ij}}{dt}\Big|_{t=0}$ ricordiamo che

$$\sum_{h=1}^n \lambda_{ih}^* \lambda_{hj} = \varepsilon_{ij},$$

che implica

$$\sum_{h=1}^n \left(\frac{d}{dt}\lambda_{ih}^*\right)\lambda_{hj} = -\sum_{h=1}^n \lambda_{ih}^* \frac{d}{dt}\lambda_{hj} = -b_{ij}$$

da cui, moltiplicando per λ_{jk}^* e sommando su j,

$$\frac{d}{dt}\lambda_{ik}^* = -\sum_{j=1}^n b_{ij}\lambda_{jk}^*.$$

Otteniamo quindi

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{d}{dt}\lambda_{ik}^* \frac{d}{dt}\lambda_{ki} = -\sum_{i,j,k=1}^n b_{ij}\lambda_{jk}^*\frac{d}{dt}\lambda_{ki} = -\sum_{i,j=1}^n b_{ij}b_{ji}.$$

Per $t = 0$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
b_{ij}\Big|_{t=0} &= \sum_{h=1}^{n} \lambda^*_{ih} \frac{d}{dt} \lambda_{hj}\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{h=1}^{n} (\varepsilon_{ih} - \nu_i \nu_h) \nu_{n+1}^{-2} \Big(\nu_{n+1}^2 g \Big(\frac{\partial \nu_j}{\partial y_h} + \frac{\partial \nu_h}{\partial y_j} \Big) \\
&\quad - g \nu_{n+1} \Big(\nu_j \frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_h} + \nu_h \frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_j} \Big) \Big) \\
&= g \Big(\frac{\partial \nu_j}{\partial y_i} + \frac{\partial \nu_i}{\partial y_j} \Big) - g \nu_{n+1}^{-1} \Big(\nu_j \frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_i} + \nu_i \frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_j} \Big) \\
&\quad - g \nu_i \sum_{h=1}^{n} \Big(\nu_h \frac{\partial \nu_j}{\partial y_h} + \nu_h \frac{\partial \nu_h}{\partial y_j} \Big) \\
&\quad + g \nu_{n+1}^{-1} \sum_{h=1}^{n} \nu_h \Big(\nu_i \nu_j \frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_h} + \nu_i \nu_h \frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_j} \Big) \\
&= g \Big(\frac{\partial \nu_j}{\partial y_i} + \frac{\partial \nu_i}{\partial y_j} \Big) - g \nu_{n+1}^{-1} \nu_j \frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_i} + \nu_i g \nu_{n+1}^{-1} \delta_{n+1} \nu_j \\
&\quad - g \nu_i \nu_j \nu_{n+1}^{-2} \delta_{n+1} \nu_{n+1} \\
&= g \Big(\frac{\partial \nu_j}{\partial y_i} + \frac{\partial \nu_i}{\partial y_j} \Big) - g \nu_{n+1}^{-1} \nu_j \delta_i \nu_{n+1} + \nu_i g \nu_{n+1}^{-1} \delta_{n+1} \nu_j \\
&= 2g \Big(\delta_i \nu_j + \nu_j \sum_{h=1}^{n} \nu_h \frac{\partial \nu_i}{\partial y_h} \Big).
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} b_{ji}\Big|_{t=0} &= 4g^2 \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\delta_i \nu_j + \nu_i \sum_{h=1}^{n} \nu_h \frac{\partial \nu_j}{\partial y_h} \Big) \Big(\delta_i \nu_j + \nu_j \sum_{k=1}^{n} \nu_k \frac{\partial \nu_i}{\partial y_k} \Big) \\
&= 4g^2 \Big(\sum_{i,j=1}^{n} (\delta_i \nu_j)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \nu_{n+1} \delta_{n+1} \nu_i \sum_{h=1}^{n} \nu_h \frac{\partial \nu_i}{\partial y_h} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \nu_{n+1} \delta_{n+1} \nu_j \sum_{k=1}^{n} \nu_k \frac{\partial \nu_j}{\partial y_k} \\
&\quad + \sum_{i,j,h,k=1}^{n} \nu_i \nu_j \nu_h \nu_k \frac{\partial \nu_i}{\partial y_h} \frac{\partial \nu_j}{\partial y_k} \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4g^2\Big(\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_i\nu_j)^2+\sum_{i=1}^{n}(\delta_{n+1}\nu_j)^2+\sum_{j=1}^{n}(\delta_{n+1}\nu_j)^2\\
&\quad +(\delta_{n+1}\nu_{n+1})^2\Big)\\
&= 4g^2\sum_{i,j}(\delta_i\nu_j)^2.
\end{aligned}
$$

Possiamo quindi concludere che per la variazione seconda vale la formula

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S})\Big|_{t=0}=\int_{\mathcal{S}}\Big(g^2\Big(c^2-\sum_{h,k}(\delta_h\nu_k)^2\Big)+\sum_i(\delta_i g)^2\Big)d\mathcal{H}^n. \tag{44}$$

7. Il Teorema di Simons

Considereremo ora il caso speciale di campi di vettori ν unitari omogenei in $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, cioè $\nu:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{S}^n$, con

$$\nu(x)=\nu\left(\frac{x}{|x|}\right),\quad \forall x,$$

perpendicolare alle semirette dall'origine, i.e.

$$\langle x,\nu(x)\rangle=0,\quad \forall x.$$

Se tali campi sono integrabili, le loro superficie normali sono superficie coniche con 0 per vertice.

Lemma 6.2 (Simons [**34**]). *Se $\nu:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{S}^n$ è omogeneo e integrabile, se $\langle x,\nu(x)\rangle=0$ e $\sum_i\delta_i\nu_i(x)=0\ \forall x$, allora*

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2+c^4-|\delta c|^2\geq\frac{2c^2}{|x|^2},\quad \forall x\ t.c.\ c^2(x)>0.$$

Al solito $c^2=\sum_{i,j}(\delta_i\nu_j)^2$, $c=\sqrt{c^2}$ e $\mathcal{D}=\sum_h\delta_h\delta_h$.

Dim. Dalla definizione di c^2 e $\mathcal{D}$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2 &= \frac{1}{2}\sum_{h,i,j}\delta_h\delta_h(\delta_i\nu_j)^2\\
&= \sum_{h,i,j}\delta_h(\delta_i\nu_j\delta_h\delta_i\nu_j)\\
&= \sum_{h,i,j}(\delta_h\delta_i\nu_j)^2+\sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_h\delta_i\nu_j.
\end{aligned}
$$

Sostituendo $\delta_h\delta_i$ con $\delta_i\delta_h + \sum_k(\nu_h\delta_i\nu_k - \nu_i\delta_h\nu_k)\delta_k$, otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_h\delta_i\nu_j &= \sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\left(\delta_i\delta_h\nu_j + \sum_k(\nu_h\delta_i\nu_k - \nu_i\delta_h\nu_k)\delta_k\nu_j\right)\\ &= \sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_i\delta_h\nu_j + \sum_{h,k,i,j}\delta_h\nu_i\delta_h\nu_k\delta_i\nu_j\delta_k\nu_j,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le identità $\sum_h \delta_h\nu_h = 0$ e $\sum_h \nu_h\delta_h = 0$. Scrivendo ancora $\delta_i\delta_h + \sum_k(\nu_h\delta_i\nu_k - \nu_i\delta_h\nu_k)\delta_k$ al posto di $\delta_h\delta_i$, otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_i\delta_h\nu_j &= \sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_i\delta_h\delta_h\nu_j\\ &\quad + \sum_{h,k,i,j}\delta_i\nu_j(\nu_h\delta_i\nu_k - \nu_i\delta_h\nu_k)\delta_k\delta_h\nu_j\\ &= -\sum_{i,j}\delta_i\nu_j\delta_i(c^2\nu_j)\\ &\quad + \sum_{h,k,i,j}\nu_h\delta_i\nu_j\delta_i\nu_k\delta_h\delta_k\nu_j\\ &\quad + \sum_{h,k,i,j} nu_h\delta_i\nu_j(\nu_k\delta_h\nu_s - \nu_h\delta_k\nu_s)\delta_s\nu_j\\ &= -c^4 - \sum_{k,i,j,s}\delta_i\nu_j\delta_i\nu_k\delta_k\nu_s\delta_s\nu_j,\end{aligned}$$

per la quale abbiamo usato l'identità $\mathcal{D}\nu_j = -c^2\nu_j$, data della Sezione 4. Abbiamo quindi

$$\sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_h\delta_i\nu_j = -c^4 - 2\sum_{k,i,j,s}\delta_i\nu_j\delta_i\nu_k\delta_k\nu_s\delta_s\nu_j,$$

che può anche essere scritta, usando le identità

$$\sum_k \delta_i\nu_k\delta_k\nu_s = -\sum_k \nu_k\delta_i\delta_k\nu_s, \quad \text{e} \quad \sum_j \delta_i\nu_j\delta_j\nu_s = -\sum_j \nu_j\delta_i\delta_j\nu_s,$$

come

$$\sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_h\delta_i\nu_j = -c^4 - 2\sum_{k,i,j,s}\nu_j\nu_k\delta_i\delta_k\nu_s\delta_i\delta_j\nu_s.$$

Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2 + c^4 = \sum_{h,i,j}(\delta_i\delta_h\nu_j)^2 - 2\sum_{k,i,j,s}\nu_j\nu_k\delta_i\delta_k\nu_s\delta_i\delta_j\nu_s.$$

Osserviamo ora che

$$c^2|\delta c|^2 = \frac{1}{4}\sum_i\left(\sum_{h,j}\delta_i(\delta_h\nu_j)^2\right)^2 = \sum_i\left(\sum_{h,j}\delta_h\nu_j\delta_i\delta_h\nu_j\right)^2$$

da cui, per $c^2 > 0$,

$$|\delta c|^2 = \frac{1}{c^2} \sum_i \left(\sum_{h,j} \delta_h \nu_j \delta_i \delta_h \nu_j \right)^2$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{D}c^2 + c^4 - |\delta c|^2 &= \sum_{h,i,j} (\delta_h \delta_i \nu_j)^2 - 2 \sum_{k,i,j,s} \nu_j \nu_k \delta_i \delta_k \nu_s \delta_i \delta_j \nu_s \\ &\quad - c^{-2} \sum_i \left(\sum_{h,j} \delta_h \nu_j \delta_i \delta_h \nu_j \right)^2 . \end{aligned}$$

Per poter dare una stima dal basso per il termine di destra in un dato punto $x \neq 0$, scegliamo $e_{n+1} = \nu(x)$.

Con questa ipotesi, per tutte le funzioni α abbiamo $\delta_{n+1}\alpha(x) = 0$ e $\delta_i \alpha(x) = D_i \alpha(x)$ per $i \leq n$.

In più, per ogni i;

$$\begin{aligned} (\delta_i \delta_{n+1} \nu_{n+1})(x) &= (\delta_{n+1} \delta_i \nu_{n+1})(x) \\ &\quad + \sum_h (\nu_i \delta_{n+1} \nu_h - \nu_{n+1} \delta_i \nu_h) \delta_h \nu_{n+1}(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Per queste ragioni, nel punto x abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{h,i,j} (\delta_h \delta_i \nu_j)^2 - 2 \sum_{k,i,j,s} \nu_j \nu_k \delta_i \delta_k \nu_s \delta_i \delta_j \nu_s &= \sum_{h=1}^{n} \sum_{i,j} (\delta_h \delta_i \nu_j)^2 \\ &\quad - 2 \sum_{i,s=1}^{n} (\delta_i \delta_{n+1} \nu_s)^2 \\ &= \sum_{i,j,h=1}^{n} (\delta_h \delta_i \nu_j)^2 . \end{aligned}$$

Se scegliamo $e_n = x|x|^{-1}$ e ricordiamo l'identità $\langle x, \nu(x) \rangle = 0$, che vale per tutte le x, abbiamo, nel punto x,

$$0 = \delta_i \langle x, \nu(x) \rangle = \sum_h ((\delta_i x_h) \nu_h + x_h \delta_i \nu_h) = \delta_i x_{n+1} + |x| \delta_i \nu_n ,$$

così per $i \leq n$,

$$0 = |x| \delta_i \nu_n(x), \quad \text{che implica } \delta_i \nu_n(x) = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} c^2|\delta c|^2 &= \sum_i \left(\sum_{h,j} \delta_h \nu_j \delta_i \delta_h \nu_j \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h,j=1}^{n} \delta_h \nu_j \delta_i \delta_h \nu_j \right)^2 \\ &\le c^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{h,j=1}^{n-1} (\delta_i \delta_h \nu_j)^2. \end{aligned}$$

Che implica, per $c^2 > 0$,

$$|\delta c|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{h,j=1}^{n-1} (\delta_i \delta_h \nu_j)^2.$$

Possiamo quindi concludere, nel dato punto x,

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2 + c^4 - |\delta c|^2 \ge 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}(\delta_i\delta_n\nu_j)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(\delta_i\delta_n\nu_n)^2.$$

Per quanto riguarda $\delta_i\delta_n\nu_j$, nel punto x abbiamo

$$\delta_i\delta_n\nu_j = \delta_n\delta_i\nu_j = D_n\delta_i\nu_j = \sum_h \frac{x_h}{|x|} D_h(\delta_i\nu_j) = -|x|^{-1}\delta_i\nu_j,$$

dove abbiamo usato i fatti: $x_n = |x|$, $x_h = 0\ \forall h \ne n$ e il fatto che $\delta_i\nu_j$ è omogeneo di grado -1.

Possiamo dire che

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} (\delta_i\delta_n\nu_j)^2 = |x|^{-2} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\delta_i\nu_j)^2 = |x|^{-2}c^2,$$

che implica: $\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2 + c^4 - |\delta c|^2 \ge 2c^2|x|^{-2}$. □

Chiamiamo stazionaria una superficie $\mathcal{S}$ se la variazione prima della sua misura si annulla e la variazione seconda è non negativa. Per i coni stazionari abbiamo il seguente risultato, provato per primo da Simons [**34**].

Teorema 6.3 (Simons [**34**]). *I coni stazionari di dimensione sei sono piatti.*

Dim. Sfruttando il fatto che la variazione seconda (44) di $\mathcal{S}$ è positiva, si ottiene

$$\int_{\mathcal{S}} g^2 c^2 d\mathcal{H}^n \leq \int_{\mathcal{S}} |\delta g|^2 d\mathcal{H}^n$$

per ogni g con supporto compatto in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Quindi scrivendo la diseguaglianza per gc al posto di g, otteniamo

$$\int_{\mathcal{S}} g^2 c^4 d\mathcal{H}^n \leq \int_{\mathcal{S}} |g\delta c + c\delta g|^2 d\mathcal{H}^n.$$

Ma si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} |g\delta c + c\delta g|^2 d\mathcal{H}^n &= \int_{\mathcal{S}} \left(c^2|\delta g|^2 + g^2|\delta c|^2 + 2gc\langle \delta c, \delta g\rangle\right) d\mathcal{H}^n \\
&= \int_{\mathcal{S}} \left(c^2|\delta g|^2 + g^2|\delta c|^2 + \frac{1}{2}\left\langle \delta g^2, \delta c^2\right\rangle\right) d\mathcal{H}^n \\
&= \int_{\mathcal{S}} \left(c^2|\delta g|^2 + g^2\left(|\delta c|^2 - \frac{1}{2}\mathcal{D}c^2\right)\right) d\mathcal{H}^n.
\end{aligned}$$

Dal Lemma 6.2 ricaviamo

$$\int_{\mathcal{S}} g^2 c^4 d\mathcal{H}^n \quad \leq \quad \int_{\mathcal{S}} \left(c^2|\delta g|^2 + g^2\left(c^4 - 2c^2|x|^{-2}\right)\right) d\mathcal{H}^n,$$

e quindi

$$0 \quad \leq \quad \int_{\mathcal{S}} \left(c^2|\delta g|^2 - 2c^2|x|^{-2}g^2\right) d\mathcal{H}^n.$$

Questa disuguaglianza vale per tutte le g tali che $\int_{\mathcal{S}} g^2c^2|x|^{-2}d\mathcal{H}^n < +\infty$.

Scegliamo ora

$$g(x) = |x|^\alpha \left(\max(1, |x|)\right)^\beta,$$

i.e. $g(x) = |x|^\alpha$ per $|x| < 1$ e $g(x) = |x|^{\alpha+\beta}$ per $|x| > 1$.

Per soddisfare $\int_{\mathcal{S}} g^2c^2|x|^{-2}d\mathcal{H}^n < +\infty$, è sufficiente scegliere α e β tali che

$$\alpha > \frac{4-n}{s}, \quad \alpha + \beta < \frac{4-n}{2}.$$

Per una tale scelta di g, α, β la disuguaglianza diventa

$$(\alpha^2-2) \int_{\mathcal{S}\cap B_1(0)} |x|^{2\alpha-2}c^2 d\mathcal{H}^n + \left((\alpha+\beta)^2 - 2\right) \int_{\mathcal{S}\setminus B_1(0)} |x|^{2(\alpha+\beta)-2}c^2 d\mathcal{H}^n \geq 0.$$

Se scegliamo $\alpha^2 < 2$ e $(\alpha+\beta)^2 < 2$, la disuguaglianza scritta implica $c^2 \equiv 0$. Tutte le richieste per α e β possono essere soddisfatte se

$$\left(\frac{4-n}{2}\right)^2 < 2,$$

cioè $n = 2, 3, 4, 5, 6$. $\square$