CAPITOLO 3

Il Teorema di Bernstein

Intorno al 1910 Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) dimostrò il seguente teorema.

Teorema 3.1 (Bernstein [**3**]). *Se $u(x, y)$ risolve l'equazione delle superficie minime in tutto $\mathbb{R}^2$, cioè se $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ e vale*

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \tag{12}$$

dove $p = D_x u$, $q = D_y u$, $r = D_{xx} u$, $s = D_{xy} u$, $t = D_{yy} u$, allora p e q sono costanti.

Non presenteremo qui la dimostrazione originale di Bernstein, ma una dimostrazione degli anni '50 ricavata da lavori di Konrad Jörgens (1926–1974), Erhard Heinz (1924–) e Johannes C.C. Nitsche (1925–).

1. Jörgens

Nel 1954, Jörgens dimostrò il seguente teorema.

Teorema 3.2 (Jörgens [**21**]). *Sia $v = v(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ per la quale*

$$\det Hv(x, y) = 1 \tag{13}$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora la matrice Hessiana $Hv(x, y)$ è costante e quindi v è un polinomio di secondo grado.

Dim. La dimostrazione che qui presentiamo fu ottenuta da Nitsche utilizzando un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ in se stesso introdotto da Hans Lewy (1904–1988) [**23**]. La dimostrazione di Nitsche [**33**] e [**23**], come vedremo, permette di ricavare la proposizione di Jörgens dal Teorema di Liouville.

In questa dimostrazione, le p, q, r, s e t sono riferite ad una funzione v per la quale vale $rt-s^2=1$, ma non la (12). Essendo $rt>0$, possiamo supporre che r e t siano entrambi maggiori di zero. Le ipotesi fatte implicano che la matrice Hessiana di v è definita positiva, cioè v è una funzione convessa. Quindi per ogni coppia di punti $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\langle Dv(x_2,y_2)-Dv(x_1,y_1),(x_2-x_1,y_2-y_1)\rangle\geq 0,$$

o equivalentemente

$$(x_2-x_1)(p(x_2,y_2)-p(x_1,y_1))+(y_2-y_1)(q(x_2,y_2)-q(x_1,y_1))\geq 0. \quad (14)$$

A questo punto si introduce il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi(x,y)=x+p(x,y), \\ \\ \eta(x,y)=y+q(x,y). \end{cases} \quad (15)$$

Si noti che per quanto riguarda il determinante della Jacobiana di tale cambiamento di variabili, usando la (13), si ottiene che

$$\det\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix}=2+r+t>2$$

avendo supposto che $r,t>0$. Quindi

$$(x,y)\mapsto(\xi,\eta)$$

definisce una mappa aperta da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Inoltre, sostituendo (15) in (14), si ottiene che, posto $\xi_i=\xi(x_i,y_i)$, $\eta_i=\eta(x_i,y_i)$:

$$\begin{aligned} |(x_2,y_2)-(x_1,y_1)|^2 &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \\ &\leq (x_2-x_1)(\xi_2-\xi_1)+(y_2-y_1)(\eta_2-\eta_1) \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz si ottiene quindi che

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\leq(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2$$

da cui il fatto che la trasformazione introdotta ha la proprietà che le distanze tra i punti vengono dilatate e quindi tale trasformazione è una mappa chiusa. Se ne deduce che il cambio di variabili $(x,y)\mapsto(\xi,\eta)$ definisce un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Introducendo la variabile complessa $z=\xi+i\eta$, definiamo la funzione

$$f(z)=(x-p)-i(y-q);$$

tale funzione risulta essere olomorfa. Difatti, derivando in (15) rispetto a ξ e η si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (1+r)\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + s\dfrac{\partial y}{\xi} = 1 \\ \\ s\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + (1+t)\dfrac{\partial y}{\xi} = 0 \\ \\ (1+r)\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + s\dfrac{\partial y}{\eta} = 0 \\ \\ s\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + (1+t)\dfrac{\partial y}{\xi} = 1, \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} = \dfrac{1+t}{2+r+t} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} = -\dfrac{s}{2+r+t} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta} = \dfrac{1+r}{2+r+t} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} = -\dfrac{s}{2+r+t}. \end{cases}$$

Da queste relazioni, si ricava che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,\eta) &= \frac{\partial x}{\partial \xi} - r\frac{\partial x}{\partial \xi} - s\frac{\partial y}{\partial \xi} - i\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} - s\frac{\partial x}{\partial \xi} - t\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \\ &= \frac{t-r}{2+r+t} + i\frac{2s}{2+r+t}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi,\eta) &= \frac{\partial x}{\partial \eta} - r\frac{\partial x}{\partial \eta} - s\frac{\partial y}{\partial \eta} - i\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} - s\frac{\partial x}{\partial \eta} - t\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \\ &= -\frac{2s}{2+r+t} + i\frac{t-r}{2+r+t}, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,\eta) = -i\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi,\eta),$$

cioè la olomorfia di f. Inoltre, siccome

$$f'(z) = \frac{t-r}{2+r+t} + i\frac{2s}{2+r+t} \tag{16}$$

e

$$1 - |f'(z)|^2 = \frac{4}{2+r+t} > 0,$$

si ricava che $|f'(z)| < 1$. Grazie al Teorema di Liouville, f' deve essere costante ed in particolare deve essere costante la quantità

$$\frac{4}{2+r+t},$$

da cui $r+t$ è costante. Sostituendo questa informazione in (16), si ottiene che s è costante e che $t-r$ è costante; quindi in definitiva sono costanti r, s e t, da cui la tesi del teorema. $\square$

2. Heinz

Nel 1955, Heinz [**18**] osservò che se vale la (12), allora la matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \begin{pmatrix} 1+p^2 & pq \\ pq & 1+q^2 \end{pmatrix}$$

ha determinante ovunque uguale ad 1 (in questo caso p, q, r, s e t sono riferite alla funzione u). Valgono inoltre per essa

$$\frac{\partial}{\partial y} A_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x} A_{1,2}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} A_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x} A_{2,2}.$$

Verifichiamo solo la prima di queste due relazioni;

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}^3}\left(2ps(1+p^2+q^2) \ -(1+p^2)(ps+qt)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}^3}\left((qr+ps)(1+p^2+q^2) - pq(pr+qs)\right).$$

Quest'ultima relazione è equivalente a richiedere che

$$q(2pqs - r - t - p^2t - q^2r) = 0,$$

che è verificata da ogni soluzione dell'equazione delle superficie minime.

Pertanto la A è una matrice Hessiana ed è costante grazie al Teorema 3.2. Da ciò segue che le p e q sono costanti.

3. Teorema di Bernstein e Moser

Jürgen Moser (1928–1999) [**31**] nel 1961 dimostrò, come Corollario della sua Disuguaglianza di Harnack per le soluzioni deboli delle equazioni ellittiche n–dimensionali, il seguente

Teorema 3.3 (Bernstein-Moser). *Se* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ *con* $n > 2$ *è soluzione intera della equazione delle superficie minime e se*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |Du(x)| < +\infty,$$

allora

$$Du(x) = \text{costante}.$$