

Il Teorema di Hilbert per gli integrali multipli regolari

In questo capitolo indicheremo con F una funzione in $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ strettamente convessa e positiva.

1. Teorema di semicontinuità

TEOREMA 2.1 (Semicontinuità). *Sia v_j una successione di funzioni Lipschitziane convergente uniformemente su Ω aperto limitato ad una funzione Lipschitziana u . Sia $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ positiva e strettamente convessa. Vale la disuguaglianza*

$$\int_{\Omega} F(Du(x))dx \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(Dv_j(x))dx. \quad (8)$$

DIM. Essendo finita la misura di Ω , si ha che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un numero finito di cubetti $\{C_h\}$ contenuti in Ω , a due a due disgiunti con

$$\int_{\Omega} F(Du(x))dx \leq \sum_h \int_{C_h} F(Du(x))dx + \varepsilon;$$

ma, se i cubetti sono sufficientemente piccoli rispetto ad ε , si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(Du(x))dx &\leq \sum_h F\left(\int_{C_h} Du(x)dx\right) |C_h| + \varepsilon \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_h F\left(\int_{C_h} Dv_j(x)dx\right) |C_h| + \varepsilon \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che

$$\begin{aligned} \int_{C_h} Du(x) dx &= \int_{\partial C_h} u \nu_{C_h} d\mathcal{H}^{n-1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\partial C_h} v_j \nu_{C_h} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{C_h} Dv_j(x) dx. \end{aligned}$$

Si è indicato con ν_{C_h} il versore normale uscente da C_h . A questo punto, dato che F è strettamente convessa, si ha che la matrice Hessiana di F è definita positiva, quindi, presi, $p, q \in \mathbb{R}^n$, esiste $\xi \in \mathbb{R}^n$ con

$$\begin{aligned} F(p) &= F(q) + \langle DF(q), p - q \rangle + \langle HF(\xi)(p - q), p - q \rangle \\ &\geq F(q) + \langle DF(q), p - q \rangle. \end{aligned}$$

Prendendo $p = Dv_j(y)$ e $q = \int_{C_h} Dv_j(x) dx$, si ottiene che

$$\begin{aligned} F(Dv_j(y)) &\geq F\left(\int_{C_h} Dv_j(x) dx\right) \\ &\quad + \left\langle DF\left(\int_{C_h} Dv_j(x) dx\right), Dv_j(y) - \int_{C_h} Dv_j(x) dx \right\rangle; \end{aligned}$$

integrando su C_h e tenendo presente che

$$\int_{C_h} \left(Dv_j(y) - \int_{C_h} Dv_j(x) dx \right) dy = 0,$$

si ottiene in definitiva che

$$\int_{C_h} F(Dv_j(x)) dx \geq F\left(\int_{C_h} Dv_j(x) dx\right) |C_h|.$$

Concludendo, otteniamo che

$$\int_{\Omega} F(Du(x)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(Dv_j(x)) dx + \varepsilon$$

da cui la semicontinuità inferiore. \square

Il Teorema di semicontinuità implica il seguente Lemma.

LEMMA 2.2. *Se g è K -Lipschitziana e Ω aperto limitato, nella famiglia*

$$\mathcal{L}_K(g) = \{v \in \text{Lip}_K(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = g\}$$

esiste il minimo dell'integrale

$$\int_{\Omega} F(Dv(x)) dx$$

per ogni $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ strettamente convessa e positiva.

2. Il Principio di Massimo Forte

TEOREMA 2.3 (Principio di Massimo forte). *Sia $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ strettamente convessa e positiva e siano g_1 e g_2 K -Lipschitziane. Siano u_1 e u_2 minimizzanti l'integrale, su Ω aperto limitato,*

$$\int_{\Omega} F(Dv(x))dx$$

in $\mathcal{L}_K(g_1)$ e $\mathcal{L}_K(g_2)$ rispettivamente. Vale allora la seguente disuguaglianza

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_1 - u_2| = \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|.$$

DIM. Basterà verificare che

$$u_1(x) - u_2(x) \leq \max_{\partial\Omega} (g_1 - g_2)$$

per ogni $x \in \Omega$. Posto

$$M := \max_{\partial\Omega} (g_1 - g_2),$$

verificheremo che è assurdo quanto segue:

$$A := \{x \in \Omega : u_1(x) > u_2(x) + M\} \neq \emptyset$$

Indichiamo con

$$u_3(x) := M + u_2(x)$$

e osserviamo che $u_3 \geq u_1$ su $\partial\Omega$ ed è minimizzante in $\mathcal{L}_K(M + g_2)$. Le proprietà di essere minimizzanti implicano

$$\int_{\Omega} F(Du_3(x))dx \leq \int_A F(Du_1(x))dx + \int_{\Omega \setminus A} F(Du_3(x))dx$$

e

$$\int_{\Omega} F(Du_1(x))dx \leq \int_A F(Du_3(x))dx + \int_{\Omega \setminus A} F(Du_1(x))dx;$$

dalle quali segue che

$$\int_A F(Du_1(x))dx = \int_A F(Du_3(x))dx.$$

Poichè $D(u_1 - u_3)$ non può essere nullo quasi ovunque su A , si avrà per la stretta convessità di F

$$\int_A F\left(D\frac{u_1(x) + u_3(x)}{2}\right)dx < \frac{1}{2} \int_A (F(Du_1(x)) + F(Du_3(x)))dx.$$

Da quest'ultima disuguaglianza discende che

$$\int_{\Omega} F(Du_1(x))dx > \int_A F\left(D\frac{u_1(x)+u_3(x)}{2}\right)dx + \int_{\Omega \setminus A} F(Du_1(x))dx,$$

e ciò contrasterebbe con la proprietà di minimo della u_1 essendo la funzione

$$v(x) := \begin{cases} u_1(x) & \text{in } \Omega \setminus A \\ \frac{u_1(x)+u_3(x)}{2} & \text{in } A \end{cases}$$

Lipschitziana con valori g_1 su $\partial\Omega$. \square

3. Lemma di von Neumann

John von Neumann(1903–1957) nel 1931 fu capace di chiarire un difficile passaggio della dimostrazione di Hilbert del Principio di Dirichlet. Von Neumann dimostrò un Principio di Massimo per i rapporti incrementali dei minimi Lipschitziani come corollario del Principio del Massimo forte.

LEMMA 2.4 (Von Neumann [32]). *Se u minimizza*

$$\int_{\Omega} F(Du(x))dx$$

con Ω limitato in $\mathcal{L}_K(g)$, allora vale la seguente identità

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \partial\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}. \quad (9)$$

DIM. Consideriamo i rapporti al primo membro della (9) con $x \in \Omega$ e $y = x + \tau \in \Omega$, cioè tutti i rapporti relativi alle coppie $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ per le quali $y = x + \tau$ con τ fissato. Osserviamo che, posto

$$N := \sup_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \partial\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|},$$

le due funzioni $u(x)$ e $u(x + \tau) + N|\tau|$ sono definite in $\Omega \cap \Omega_{-\tau}$ e ivi sono minimizzanti e soddisfacenti la disuguaglianza

$$u(x) \leq u(x + \tau) + N$$

se x o $x + \tau$ sono in $\partial\Omega$. Abbiamo qui indicato con $\Omega_{-\tau}$ l'insieme Ω traslato del vettore $-\tau$. Dal Principio di Massimo dimostrato, tale disuguaglianza si estende al caso $x \in \Omega$ e $x + \tau \in \Omega$. \square

4. Teorema di Hilbert

TEOREMA 2.5 (Hilbert [20, 27, 32]). *Se $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ è positiva e strettamente convessa, se (Ω, g) soddisfa la BSC con costante K , se Ω è limitato esiste una $u \in \mathcal{L}_K(g)$ tale che*

$$\int_{\Omega} F(Du(x))dx \leq \int_{\Omega} F(Dv(x))dx, \quad \forall v \in \text{Lip}, v|_{\partial\Omega} = g.$$

DIM. La BSC con costante K e il Lemma di von Neumann 2.4 permettono di dimostrare che la minimizzante $u_L \in \mathcal{L}_L(g)$ con $L \geq K$ è in Lip_K , quindi eguale a u_K che è perciò la minimizzante fra tutte le $v \in \text{Lip}$ con $v|_{\partial\Omega} = g$. \square

Le funzioni minimizzanti u così ottenute soddisfano tutte l'equazione di Eulero

$$\int_{\Omega} \langle DF(Du(x)), D\phi(x) \rangle dx = 0, \quad \forall \phi \in \text{Lip}_c(\Omega). \quad (10)$$

Questo risultato verrà usato soprattutto per il caso $F(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$, da cui l'equazione delle superficie minime che diventa

$$\text{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0.$$

5. Ulteriore regolarità

Solo nel caso $F(Du) = |Du|^2$, dalla equazione di Eulero può passarsi alla equazione di Laplace, come abbiamo visto nel Capitolo 1. Nel caso generale, per poter scrivere la equazione

$$\text{div}(DF(Du(x))) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (11)$$

bisogna prare che $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

De Giorgi nel 1955 dimostrò [10, 11, 6] l'appartenenza di u alla classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$ e tale risultato, insieme con un precedente risultato di Charles B. Morrey jr. (1908–1984) prova che $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ [30, 35], e quindi vale la (11).

6. L'osservazione di Lebesgue

Henri Léon Lebesgue (1875–1941) [22] aveva osservato che nel caso dell'equazione di Laplace la risolubilità del problema di Dirichlet, con il dato $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e con Ω uniformemente convesso e limitato, poteva essere estesa ad ogni dato continuo attraverso un processo di approssimazione di un dato continuo con dati polinomiali. Possiamo più precisamente dire, sempre con riferimento all'equazione di Laplace, che dalla risolubilità con dato polinomiale può passarsi alla risolubilità per ogni dato continuo, nelle ipotesi che Ω sia limitato e uniformemente convesso.

Per poter estendere il metodo di Lebesgue al caso generale è sufficiente dimostrare una maggiorazione locale del gradiente della soluzione con l'oscillazione della soluzione stessa in tutto l'aperto Ω .

Questa stima del gradiente fu provata, nel 1968, da De Giorgi con Enrico Bombieri (1940–) e Mario Miranda (1937–) [5], nel caso di $F(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$. Possiamo quindi in questo caso affermare che il principio di Dirichlet è valido per ogni aperto limitato uniformemente convesso e per ogni dato continuo, per l'equazione delle superficie minime.