CAPITOLO 1

Il problema di Dirichlet

Qui si parla dell'equazione di Pierre Simon de Laplace (1749–1827), dell'equazione di Leonhard Euler (1707–1783) e della proprietà della media. Proprietà riguardanti funzioni di regolarità decrescente: $\mathcal{C}^2(\Omega)$, $\mathrm{Lip}(\Omega)$, $\mathcal{C}(\Omega)$, ma equivalenti grazie alle implicazioni

$$\mathrm{I} \to \mathrm{II} \to \mathrm{III} \to \mathrm{I}.$$

La terza implicazione, la più delicata, è dimostrata usando gli integrali di Siméon Denis Poisson (1781–1840) e il Principio del Massimo delle funzioni aventi la proprietà della media.

Vi si incontrano, oltre a Karl Friedrich Gauss (1777–1855), Laplace, Eulero, Poisson, Rudolph Otto Sigmund Lipschitz (1832–1903), Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), Cesare Arzelà (1847–1912) e David Hilbert (1862–1943).

Il metodo del *balayage* di Jules Henri Poincaré (1854–1912) è ricordato come un metodo che non ha niente a che fare con il calcolo delle variazioni, ma è efficacissimo per la risoluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace partendo dagli integrali di Poisson.

L'inserimento del *tentativo* di Arzelà è importante perchè in esso si usa per la prima volta il teorema di compattezza per una famiglia di funzioni limitate e Lipschitziane. In altre parole Arzelà per primo segue l'indicazione di , Weierstrass cioè dimostrare l'esistenza del minimo in uno spazio di funzioni utilizzando la semicontinuità inferiore del funzionale insieme con la compattezza della classe di funzioni.

Sempre in questo primo capitolo si accenna all'esempio di Jacques Salomon Hadamard (1865–1963).

Sono rinviati al Capitolo 2 lo studio del problema di Dirichlet per ogni integrale multiplo regolare su Ω uniformemente convesso e la ulteriore regolarità dei minimi Lipschitziani conseguenza del Teorema di Ennio De Giorgi (1928–1996).

1. L'equazione di Laplace e l'equazione di Eulero

Negli anni trenta del diciannovesimo secolo, Gauss osservò che nella ricerca delle soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\Delta u(x) := \sum_{i=1}^{n} D_i D_i u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto }, n \geq 2, u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \tag{1}$$

poteva essere utile vederla come equazione di Eulero

$$\int_{\Omega} \langle Du(x), D\varphi(x) \rangle dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathrm{Lip}_c(\Omega), u \in \mathrm{Lip}(\Omega). \tag{2}$$

Osservazione 1. Trascuriamo il fatto che Laplace e Gauss non intesero considerare le equazioni (1) e (2) per ogni $n \geq 2$, e che Lipschitz sottolineò l'importanza delle funzioni reali di rapporto incrementale limitato solo negli anni '70 del secolo XIX.

2. La proprietà della media e gli integrali di Poisson

Dalla (2) è facile dedurre la

$$u(x_0) = \fint_{|x-x_0|<\varrho} u(x)dx, \quad \forall \overline{B}_\varrho(x_0) \subset \Omega. \tag{3}$$

Infatti, applicando l'identità (2) alle

$$\varphi(x) = (\varrho^2 - |x - x_0|^2) \vee 0$$

con $x_0 \in \Omega$ e $0 < \varrho < d(x_0, \partial\Omega)$, si trova

$$\int_{|x-x_0|<\varrho} \langle Du(x), (x - x_0) \rangle = 0 \tag{4}$$

e dalla (4) si ricava la validità della (3). Infatti, tenendo presente che, fissato $x_0 \in \Omega$, si ha che

$$\mathrm{div}(u(x)(x - x_0)) = \langle Du(x), (x - x_0) \rangle + nu(x),$$

da (4) si ottiene che

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{|x-x_0|<\varrho} \langle Du(x), (x-x_0)\rangle \\
&= \int_{|x-x_0|<\varrho} \operatorname{div}(u(x)(x-x_0))dx - n \int_{|x-x_0|<\varrho} u(x)dx \\
&= \varrho \int_{|x-x_0|=\varrho} u(x)d\mathcal{H}^{n-1}(x) - n \int_{|x-x_0|<\varrho} u(x)dx.
\end{aligned}
$$

Quest'ultima identità implica che

$$
\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^{-n} \int_{|x-x_0|<\varrho} u(x)dx\right) = 0,
$$

quindi in particolare per ogni $\varrho > 0$ tale che $\{|x-x_0| < \varrho\} \subset \Omega$, dalla continuità di u, si ha che

$$
\varrho^{-n} \int_{|x-x_0|<\varrho} u(x)dx = \lim_{r\to 0} r^{-n} \int_{|x-x_0|<r} u(x)dx = \omega_n u(x_0),
$$

dove si indica con ω_n la misura n–dimensionale della palla unitaria.

La (3) implica la (1). Tale passaggio non è banale ma è facilmente dimostrabile ricorrendo agli integrali di Poisson, e può partirsi da $u \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Per ogni funzione $g \in \mathcal{C}(\partial B_\varrho(x_0))$ definiamo la funzione

$$
P(x) := \frac{(\varrho^2 - |x-x_0|^2)}{n\omega_n \varrho} \int_{|y-x_0|=\varrho} \frac{g(y)}{|y-x|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad n \geq 2, \tag{5}
$$

che è detta integrale di Poisson ed ha la notevole proprietà

$$
P \in \mathcal{C}(\overline{B}_\varrho(x_0)) \cap \mathcal{C}^2(B_\varrho(x_0)), \quad P_{|\partial B_\varrho(x_0)} = g
$$

e verifica la (1) in $B_\varrho(x_0)$.

Se si pone $g = u_{|\partial B_\varrho(x_0)}$ per una u verificante la (3), avremo in $\overline{B}_\varrho(x_0)$ due funzioni con la proprietà della media coincidenti su $\partial B_\varrho(x_0)$. Grazie al principio del massimo, esse devono essere uguali, pertanto la u sarà in $\mathcal{C}^2(B_\varrho(x_0))$ e verificherà l'equazione di Laplace in $B_\varrho(x_0)$.

3. Gauss

Gauss conosceva la proprietà della media delle funzioni armoniche, dette al suo tempo anche funzioni potenziale, per la loro importanza nello studio del potenziale elettrico. Ed è anche verosimile che egli conoscesse gli integrali di Poisson e il fatto che essi risolvessero l'equazione di Laplace, per i domini sferici. Ma Gauss non potè sapere quello che Poincaré avrebbe dimostrato, usando gli integrali di Poisson e il metodo di *balayage*, cioè il principio di Dirichlet per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato soddisfacente la condizione di sfera esterna

$$\forall x_0 \in \partial\Omega, \exists \varrho > 0, y_0 \notin \overline{\Omega}, \text{ con } \overline{B}_\varrho(y_0) \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}.$$

Ma l'idea di Gauss di dimostrare l'esistenza del minimo dell'integrale dell'energia

$$E(u) := \int_\Omega |Du(x)|^2 dx, \quad u \in \mathrm{Lip}(\Omega), u_{|\partial\Omega} = g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$$

non avrebbe perso il suo valore dooo il lavoro di Poincaré, perché essa è utile, come sarà dimostrato, per una larga classe di integrali che oggi è nota come integrali multipli regolari:

$$\int_\Omega F(Du(x))dx, \quad F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \text{ positiva e strettamente convessa.} \tag{6}$$

4. Riemann

Riemann fu allievo di Dirichlet e utilizzò il principio di Dirichlet come si trattasse di un assioma. Tale principio affermava l'esistenza di una funzione armonica in ogni aperto limitato con assegnati valori continui su $\partial\Omega$.

5. Weierstrass e Arzelà

Fu Weierstrass per primo ad osservare che il principio di Dirichlet era da considerarsi l'enunciato di un teorema, da precisare nelle ipotesi e per il quale dare una dimostrazione.

Arzelà [**2**] per primo seguì la strada di Weierstrass scrivendo nel 1897 un articolo che fu pubblicato nonostante che in esso il tentativo di dimostrare il principio di Dirichlet non fosse coronato da successo. La ragione dell'insuccesso era dovuta al fatto che Arzelà non era stato in grado di provare una stima a priori della soluzione.

Arzelà sapeva di poter disporre di un teorema di semicontinuità inferiore per l'integrale dell'energia e lo applicò ad una classe di funzioni reali in $\mathcal{C}^2(\Omega)$ con derivate seconde Lipschitziane e aventi su $\partial\Omega$ i valori di una di esse, che denoteremo con g.

Fissata la g in questo modo e due numeri positivi H e K, denotiamo con $\mathcal{F}(g, H, K)$ la famiglia di tutte le $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $f_{|\partial\Omega} = g_{|\partial\Omega}$ e $|f| \le H$, $|Df| \le H$, $|D_i D_j f| \le H$ e $D_i D_j f \in \mathrm{Lip}_K$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$. In tale $\mathcal{F}$, che è non vuota per H, K sufficientemente grandi, esiste il minimo dell'integrale dell'energia, ma non si può garantire per esso il verificarsi dell'equazione di Eulero (2).

6. Hilbert e la BSC

Nel 1899 Hilbert [**19**] in una breve nota successivamente ampliata nel 1904 [**20**], non ebbe lo scrupolo di Arzelà di garantire a priori, per la funzione minimizzante, l'appartenenza alla classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$. In [**20**] Hilbert richiedeva alle funzioni in gioco la sola Lipschitzianità. Quindi il suo problema di minimo potè essere così precisato: fissato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$, detta $\mathcal{F}(g)$ la classe di tutte le funzioni Lipschitziane uguali alla g su $\partial\Omega$, dimostrare l'esistenza di $u \in \mathcal{F}(g)$ con

$$\int_\Omega |Du(x)|^2 dx \le \int_\Omega |Df(x)|^2 dx, \quad \forall f \in \mathcal{F}(g).$$

Quello che era evidente per tale problema è l'esistenza di una successione di funzioni $u_j \in \mathcal{F}(g)$ con

$$\lim_{j \to +\infty} \int_\Omega |Du_j(x)|^2 dx = \inf \left\{ \int_\Omega |Df(x)|^2 dx : f \in \mathcal{F}(g) \right\},$$

ma non è sempre vero che la u_j sia compatta in $\mathcal{F}(g)$ rispetto alla convergenza uniforme, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.1. Prendiamo $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}$, $g(0) = 0$, $g(x) = 1$ per ogni $|x| = 1$; consideriamo la famiglia di funzioni

$$\mathcal{G} = \{u_\varepsilon(x) = |x|^\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$$

non Lipschitziane in Ω perché

$$\lim_{x \to 0} |Du_\varepsilon(x)| = +\infty, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1).$$

Ma le u_ε sono continue su $\overline{\Omega}$ con $u_{\varepsilon|\partial\Omega} = g$ e

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |Du_\varepsilon(x)|^2 dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \pi\varepsilon = 0.$$

Modifichiamo le u_ε fissando per ciascuna di esse un valore $\sigma \in (0,1)$ e indicando con

$$u_{\varepsilon,\sigma}(x) = \begin{cases} |x|^\varepsilon & \text{per } \sigma \le |x| < 1 \\ \sigma^{\varepsilon-1}|x| & \text{per } 0 < |x| \le \sigma. \end{cases}$$

Si scelga poi $\sigma = e^{-1/\varepsilon^2}$. Con tale scelta di σ, le $\{u_{\varepsilon,\sigma}\}_{0<\varepsilon<1}$ sono Lipschitziane e

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |Du_{\varepsilon,\sigma}|^2 dx = 0,$$

quindi in tale famiglia di funzioni non ci può essere il valore minimo Lipschitziano.

7. Hadamard

Ma ancor più interessante è il seguente esempio.

Esempio 1.2. Hadamard [**17**] richiamò l'attenzione sul seguente problema di Dirichlet:

$$\Omega = \{(\varrho,\vartheta) : \varrho < 1\}, \quad g(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k!\vartheta)}{k^2},$$

la soluzione del quale è

$$u(\varrho,\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho^{k!}\cos(k!\vartheta)}{k^2},$$

il cui integrale dell'energia è

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 |Du|^2 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^4} = +\infty.$$

I due esempi illustrati dimostrano come non sia possibile aspettarsi l'esistenza del minimo Lipschitziano con la semplice proprietà della limitatezza dell'aperto Ω. Hilbert fu capace di indicare l'esistenza di una ipotesi per il dato (Ω, g) sufficiente per la dimostrazione dell'esistenza del minimo Lipschitziano. L'ipotesi di Hilbert è oggi detta BSC (Bounded Slope Condition) ed è la seguente.

Definizione 1.3. *Diremo che il dato (Ω, g) soddisfa la Bounded Slope Condition (BSC) se $\exists K > 0$ tale che $\forall x_0 \in \partial\Omega$, esistono $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $|a| \leq K, |b| \leq K$ e*

$$\langle a, x - x_0 \rangle \leq g(x) - g(x_0) \leq \langle b, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Escludendo i casi banali g costante o g polinomio di primo grado, casi nei quali la soluzione del problema di Dirichlet è la g stessa per qualunque Ω la BSC implica $a \neq b$ e perciò

$$\langle b - a, x - x_0 \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Essendo Ω limitato, questa disuguaglianza implica la convessità dello stesso Ω. Inoltre,

$$-K|x - x_0| \leq g(x) - g(x_0) \leq K|x - x_0|, \quad \forall x, x_0 \in \partial\Omega,$$

quindi $g \in \mathrm{Lip}_K(\partial\Omega)$.

Le ipotesi Ω aperto limitato convesso e g Lipschitiziana non implicano la BSC.

Ha perciò interesse la seguente proposizione.

Proposizione 1.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto limitato uniformemente convesso e se $g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, allora (Ω, g) soddisfa la BSC.*

Dim. Ricordiamo anzitutto che un insieme Ω si dice uniformemente convesso se esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \partial\Omega$, se indichiamo con $\nu_\Omega(x_0)$ la normale interna ad Ω, vale la

$$|x - x_0|^2 \leq c\langle x - x_0, \nu_\Omega(x_0) \rangle, \quad \forall x \in \Omega. \tag{7}$$

Indichiamo con $M = \max\{\|Dg\|_\infty, \|Hg\|_\infty\}$; otteniamo quindi che, fissato $x_0 \in \partial\Omega$ e al variare di $x \in \partial\Omega$,

$$g(x) - g(x_0) = \langle Dg(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle Hg(\xi)(x - x_0), x - x_0 \rangle.$$

Siccome vale che

$$-M|x - x_0|^2 \leq \langle Hg(\xi)(x - x_0), x - x_0 \rangle \leq M|x - x_0|^2,$$

questo, unito con la condizione (7), implica che i coefficienti

$$a = Dg(x_0) - \frac{Mc}{2}\nu_\Omega(x_0), \quad b = Dg(x_0) + \frac{Mc}{2}\nu_\Omega(x_0)$$

soddisfano la condizione della BSC con $K = M(c + 1/2)$. $\square$

8. I Teoremi di Hilbert

Nel Capitolo 2 dimostreremo i seguenti Teoremi, che contengono le dimostrazioni Hilbertiane del Principio di Dirichlet.

Teorema 1.5. *Se (Ω, g) soddisfa la BSC ed $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato, per ogni $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ strettamente convessa e positiva, il funzionale*

$$u \mapsto \int_\Omega F(Du(x))dx$$

ammette un unico minimo Lipschitziano nella classe di tutte le funzioni Lipschitziane eguali a g su $\partial\Omega$.

Teorema 1.6. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto limitato uniformemente convesso, se $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, per ogni $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ strettamente convessa e positiva, il funzionale*

$$u \mapsto \int_\Omega F(Du(x))dx$$

ammette un unico minimo Lipschitziano nella classe di tutte le funzioni Lipschitziane eguali a g su $\partial\Omega$.