Università degli Studi di Lecce
Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"

Mario Miranda

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Trento
Trento, 38100
Email: *miranda@sns.it*

Superficie Minime e il problema di Plateau

Quaderno 1/2006

Università di Lecce - Coordinamento SIBA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"ENNIO DE GIORGI"

Mario Miranda

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
TRENTO, 38100
Email: *miranda@sns.it*

Superficie Minime e il problema di Plateau

Quaderno 1/2006: ISBN 88-8305-0339

Università di Lecce - Coordinamento SIBA

QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

"ENNIO DE GIORGI"

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Lecce documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

(1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
(2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
(3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 1/2006: ISBN 88-8305-0339
Università di Lecce - Coordinamento SIBA

Superficie Minime e il problema di Plateau

Mario Miranda

DEPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DI TRENTO
38100, TRENTO

EMAIL: *miranda@sns.it*

Prefazione

Ho accettato con piacere l'invito del Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi" dell'Università di Lecce a dare un Corso per gli studenti di Dottorato.

Ho accettato per ragioni diverse. Prima fra tutte, avere vissuto a Pisa dal 1959 al 1968, in stretto contatto con De Giorgi, come allievo, collaboratore, ed amico. In quei nove anni Ennio ottenne risultati clamorosi, che confermarono la fama raggiunta, in maniera esplosiva, con la risoluzione del XIX Problema di Hilbert.

Ultima, non aver mai avuto l'occasione in Italia di parlare ai Dottorandi di Ricerca.

Potendolo fare nella città di De Giorgi, nel Dipartimanto matematico che porta il suo nome, esponendo le sue idee, è stato un invito irresistibile.

Il Corso è diviso in quattro parti, ciascuna della quali è divisa in due capitoli.

I.: Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni e il XIX Problema di Hilbert.
Il metodo diretto fu usato per la prima volta con successo da Hilbert, che lo annunciò nel 1899 ed espose compiutamente nel 1904. Con esso fu data una risoluzione del Problema dell'elettrostatica.
Hilbert si rese conto che il metodo poteva essere usato per la dimostrazione dell'esistenza del minimo di un'ampia classe di funzionali del tipo dell'integrale dell'energia. Aveva visto bene, indicando nelle funzioni Lipschitziane le più adatte concorrenti nella gara per il minimo. E non gli sfuggì la difficoltà del passaggio dalla Lipschitzianità delle funzioni minimizzanti alle ulteriori regolarità $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^\omega$.
Questo passaggio, divenuto famoso come XIX Problema, ebbe nel primo passo, da Lipschitz a $\mathcal{C}^1$, l'ostacolo più difficile, rimosso da De Giorgi nel 1955.

Solo nel caso del funzionale dell'energia l'ostacolo era stato di scavalcamento agevole.

II.: L'equazione delle superficie minime: il Teorema di Bernstein e le singolarità eliminabili.

Il Teorema di Bernstein fu dimostrato per la prima volta negli anni attorno al 1910 da Bernstein per le funzioni reali di due variabili reali. Nel Corso è stata presentata la derivazione di tale Teorema come corollario non banale del Teorema di Liouville per le funzioni olomorfe di una variabile complessa. Tale derivazione è frutto dei risultati di Jörgens, Heinz e Nitsche, pubblicati fra il 1954 e il 1957.

È stato ricordato che nel 1961 Moser dimostrò la tesi del Teorema di Bernstein per funzioni di un qualunque numero di variabili con l'ipotesi addizionale di limitatezza del gradiente della soluzione stessa.

Per quanto riguarda il problema della eliminazione delle singolarità è stato presentato un teorema di De Giorgi e Stampacchia del 1965. In tale teorema si afferma che se una soluzione esiste in un aperto di $\mathbb{R}^n$ privato di un compatto di misura $(n-1)$–dimensionale nulla, allora tale soluzione è estendibile ad una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ in tutto l'aperto.

III.: Il calcolo differenziale sulle varietà di codimensione uno e le sue applicazioni.

Il calcolo differenziale intrinseco sulle varietà di codimensione uno permise a Bombieri e De Giorgi e me stesso di estendere ad ogni dimensione la stima del gradiente delle soluzioni delle superficie minime dimostrata da Finn nel caso bidimensionale.

Tale stima del gradiente ha permesso di dimostrare la limitatezza del gradiente delle soluzioni intere ricavandola da una diseguaglianza verificata dalle soluzioni stesse. Si è così dimostrata la tesi del Teorema di Bernstein in ogni dimensione con un'ipotesi aggiuntiva più debole di quella di Moser.

Abbiamo quindi introdotto le definizioni di De Giorgi di perimetro di un insieme misurabile e di frontiere minime degli insiemi misurabili. Ci siamo limitati a ricordare il famoso Teorema di De Giorgi di regolarità quasi ovunque delle frontiere minime. Abbiamo quindi presentato l'analisi delle singolarità delle frontiere minime che permise a De Giorgi di ridurre il problema dell'eliminazione di tali singolarità al caso di frontiera minima conica singolare nel solo vertice.

Abbiamo ricordato che Fleming aveva dimostrato nel 1962 la non esistenza di coni minimi singolari in $\mathbb{R}^3$. Questo risultato fu esteso alla dimensione superiore da Almgren jr. nel 1966. Nel 1968 Simons dimostrò la non esistenza di coni minimi singolari fino ad $\mathbb{R}^7$; la dimostrazione di questo Teorema è esposta nel Capitolo 6.

IV.: Esistenza di un cono minimo singolare e di una soluzione intera non banale.

Simons aveva trovato che un elementare cono singolare solo nel vertice in $\mathbb{R}^8$ soddisfaceva le ipotesi del suo Teorema. Simons aveva

congetturato che tale cono fosse minimo.
La congettura di Simons fu dimostrata vera da Bombieri, De Giorgi e Giusti nel 1969. Più tardi, Massari e me stesso demmo una seconda dimostrazione di questo risultato. Questa dimostrazione è il contenuto del Capitolo 7.
Grazie ai lavori di Fleming e De Giorgi era noto che il Teorema di Simons implicava la validità del Teorema di Bernstein per funzioni di 7 variabili.
De Giorgi, che non si aspettava l'esistenza di coni minimi singolari, era però convinto di potere utilizzare un eventuale cono minimo singolare per costruire una soluzione intera non banale. De Giorgi, in collaborazione con Bombieri e Giusti, fu capace di provare la verità di questa seconda aspettativa. In altre parole, Bombieri, De Giorgi e Giusti dimostrarono che la tesi di Bernstein era falsa per funzioni intere di 8 variabili.

Ringraziamenti. Ringrazio tutti coloro che hanno contribuito alla realizzazione del Corso, da Diego Pallara che ne ha seguito ogni passo a Michele Miranda che mi ha aiutato a scrivere queste note.

Un ringraziamento speciale debbo ai sei studenti di Dottorato, Luciana Angiuli, Valeria Leggieri, Chiara Spina e Barbara De Leo, Christian Tacelli, Luca Vergori, che hanno saputo raccontare due delle favole dello zio Ennio; il diciannovesimo problema e la stima del gradiente.

La matematica italiana, come il cervo sardo, è esposta al rischio di estinzione per l'arroganza e l'irresponsabilità di pochi. Il suo futuro è nelle mani di giovani capaci ed entusiasti, aiutati da adulti seri e generosi.

Indice

Parte 1

CAPITOLO 1

Il problema di Dirichlet

Qui si parla dell'equazione di Pierre Simon de Laplace (1749–1827), dell'equazione di Leonhard Euler (1707–1783) e della proprietà della media. Proprietà riguardanti funzioni di regolarità decrescente: $\mathcal{C}^2(\Omega)$, $\mathrm{Lip}(\Omega)$, $\mathcal{C}(\Omega)$, ma equivalenti grazie alle implicazioni

$$\mathrm{I} \to \mathrm{II} \to \mathrm{III} \to \mathrm{I}.$$

La terza implicazione, la più delicata, è dimostrata usando gli integrali di Siméon Denis Poisson (1781–1840) e il Principio del Massimo delle funzioni aventi la proprietà della media.

Vi si incontrano, oltre a Karl Friedrich Gauss (1777–1855), Laplace, Eulero, Poisson, Rudolph Otto Sigmund Lipschitz (1832–1903), Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), Cesare Arzelà (1847–1912) e David Hilbert (1862–1943).

Il metodo del *balayage* di Jules Henri Poincaré (1854–1912) è ricordato come un metodo che non ha niente a che fare con il calcolo delle variazioni, ma è efficacissimo per la risoluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace partendo dagli integrali di Poisson.

L'inserimento del *tentativo* di Arzelà è importante perchè in esso si usa per la prima volta il teorema di compattezza per una famiglia di funzioni limitate e Lipschitziane. In altre parole Arzelà per primo segue l'indicazione di , Weierstrass cioè dimostrare l'esistenza del minimo in uno spazio di funzioni utilizzando la semicontinuità inferiore del funzionale insieme con la compattezza della classe di funzioni.

Sempre in questo primo capitolo si accenna all'esempio di Jacques Salomon Hadamard (1865–1963).

Sono rinviati al Capitolo 2 lo studio del problema di Dirichlet per ogni integrale multiplo regolare su Ω uniformemente convesso e la ulteriore regolarità dei minimi Lipschitziani conseguenza del Teorema di Ennio De Giorgi (1928–1996).

1. L'equazione di Laplace e l'equazione di Eulero

Negli anni trenta del diciannovesimo secolo, Gauss osservò che nella ricerca delle soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\Delta u(x) := \sum_{i=1}^{n} D_i D_i u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto }, n \geq 2, u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \quad (1)$$

poteva essere utile vederla come equazione di Eulero

$$\int_{\Omega} \langle Du(x), D\varphi(x)\rangle dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathrm{Lip}_c(\Omega), u \in \mathrm{Lip}(\Omega). \quad (2)$$

Osservazione 1. Trascuriamo il fatto che Laplace e Gauss non intesero considerare le equazioni (1) e (2) per ogni $n \geq 2$, e che Lipschitz sottolineò l'importanza delle funzioni reali di rapporto incrementale limitato solo negli anni '70 del secolo XIX.

2. La proprietà della media e gli integrali di Poisson

Dalla (2) è facile dedurre la

$$u(x_0) = \fint_{|x-x_0|<\varrho} u(x)dx, \quad \forall \overline{B}_\varrho(x_0) \subset \Omega. \quad (3)$$

Infatti, applicando l'identità (2) alle

$$\varphi(x) = (\varrho^2 - |x - x_0|^2) \vee 0$$

con $x_0 \in \Omega$ e $0 < \varrho < d(x_0, \partial\Omega)$, si trova

$$\int_{|x-x_0|<\varrho} \langle Du(x), (x - x_0)\rangle = 0 \quad (4)$$

e dalla (4) si ricava la validità della (3). Infatti, tenendo presente che, fissato $x_0 \in \Omega$, si ha che

$$\mathrm{div}(u(x)(x - x_0)) = \langle Du(x), (x - x_0)\rangle + nu(x),$$

da (4) si ottiene che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|x-x_0|<\varrho} \langle Du(x), (x-x_0)\rangle \\ &= \int_{|x-x_0|<\varrho} \mathrm{div}(u(x)(x-x_0))dx - n \int_{|x-x_0|<\varrho} u(x)dx \\ &= \varrho \int_{|x-x_0|=\varrho} u(x)d\mathcal{H}^{n-1}(x) - n \int_{|x-x_0|<\varrho} u(x)dx. \end{aligned}$$

Quest'ultima identità implica che

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^{-n} \int_{|x-x_0|<\varrho} u(x)dx\right) = 0,$$

quindi in particolare per ogni $\varrho > 0$ tale che $\{|x - x_0| < \varrho\} \subset \Omega$, dalla continuità di u, si ha che

$$\varrho^{-n} \int_{|x-x_0|<\varrho} u(x)dx = \lim_{r\to 0} r^{-n} \int_{|x-x_0|<r} u(x)dx = \omega_n u(x_0),$$

dove si indica con ω_n la misura n–dimensionale della palla unitaria.

La (3) implica la (1). Tale passaggio non è banale ma è facilmente dimostrabile ricorrendo agli integrali di Poisson, e può partirsi da $u \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Per ogni funzione $g \in \mathcal{C}(\partial B_\varrho(x_0))$ definiamo la funzione

$$P(x) := \frac{(\varrho^2 - |x-x_0|^2)}{n\omega_n \varrho} \int_{|y-x_0|=\varrho} \frac{g(y)}{|y-x|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad n \geq 2, \tag{5}$$

che è detta integrale di Poisson ed ha la notevole proprietà

$$P \in \mathcal{C}(\overline{B}_\varrho(x_0)) \cap \mathcal{C}^2(B_\varrho(x_0)), \quad P_{|\partial B_\varrho(x_0)} = g$$

e verifica la (1) in $B_\varrho(x_0)$.

Se si pone $g = u_{|\partial B_\varrho(x_0)}$ per una u verificante la (3), avremo in $\overline{B}_\varrho(x_0)$ due funzioni con la proprietà della media coincidenti su $\partial B_\varrho(x_0)$. Grazie al principio del massimo, esse devono essere uguali, pertanto la u sarà in $\mathcal{C}^2(B_\varrho(x_0))$ e verificherà l'equazione di Laplace in $B_\varrho(x_0)$.

3. Gauss

Gauss conosceva la proprietà della media delle funzioni armoniche, dette al suo tempo anche funzioni potenziale, per la loro importanza nello studio del potenziale elettrico. Ed è anche verosimile che egli conoscesse gli integrali di Poisson e il fatto che essi risolvessero l'equazione di Laplace, per i domini sferici. Ma Gauss non potè sapere quello che Poincaré avrebbe dimostrato, usando gli integrali di Poisson e il metodo di *balayage*, cioè il principio di Dirichlet per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato soddisfacente la condizione di sfera esterna

$$\forall x_0 \in \partial\Omega, \exists \varrho > 0, y_0 \notin \overline{\Omega}, \text{ con } \overline{B}_\varrho(y_0) \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}.$$

Ma l'idea di Gauss di dimostrare l'esistenza del minimo dell'integrale dell'energia

$$E(u) := \int_\Omega |Du(x)|^2 dx, \qquad u \in \text{Lip}(\Omega), u_{|\partial\Omega} = g \in \text{Lip}(\partial\Omega)$$

non avrebbe perso il suo valore dooo il lavoro di Poincaré, perché essa è utile, come sarà dimostrato, per una larga classe di integrali che oggi è nota come integrali multipli regolari:

$$\int_\Omega F(Du(x))dx, \quad F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \text{ positiva e strettamente convessa.} \tag{6}$$

4. Riemann

Riemann fu allievo di Dirichlet e utilizzò il principio di Dirichlet come si trattasse di un assioma. Tale principio affermava l'esistenza di una funzione armonica in ogni aperto limitato con assegnati valori continui su $\partial\Omega$.

5. Weierstrass e Arzelà

Fu Weierstrass per primo ad osservare che il principio di Dirichlet era da considerarsi l'enunciato di un teorema, da precisare nelle ipotesi e per il quale dare una dimostrazione.

Arzelà **[2]** per primo seguì la strada di Weierstrass scrivendo nel 1897 un articolo che fu pubblicato nonostante che in esso il tentativo di dimostrare il principio di Dirichlet non fosse coronato da successo. La ragione dell'insuccesso era dovuta al fatto che Arzelà non era stato in grado di provare una stima a priori della soluzione.

Arzelà sapeva di poter disporre di un teorema di semicontinuità inferiore per l'integrale dell'energia e lo applicò ad una classe di funzioni reali in $\mathcal{C}^2(\Omega)$ con derivate seconde Lipschitziane e aventi su $\partial\Omega$ i valori di una di esse, che denoteremo con g.

Fissata la g in questo modo e due numeri positivi H e K, denotiamo con $\mathcal{F}(g, H, K)$ la famiglia di tutte le $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $f_{|\partial\Omega} = g_{|\partial\Omega}$ e $|f| \leq H$, $|Df| \leq H$, $|D_iD_jf| \leq H$ e $D_iD_jf \in \mathrm{Lip}_K$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. In tale $\mathcal{F}$, che è non vuota per H, K sufficientemente grandi, esiste il minimo dell'integrale dell'energia, ma non si può garantire per esso il verificarsi dell'equazione di Eulero (2).

6. Hilbert e la BSC

Nel 1899 Hilbert [**19**] in una breve nota successivamente ampliata nel 1904 [**20**], non ebbe lo scrupolo di Arzelà di garantire a priori, per la funzione minimizzante, l'appartenenza alla classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$. In [**20**] Hilbert richiedeva alle funzioni in gioco la sola Lipschitzianità. Quindi il suo problema di minimo potè essere così precisato: fissato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $g \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$, detta $\mathcal{F}(g)$ la classe di tutte le funzioni Lipschitziane uguali alla g su $\partial\Omega$, dimostrare l'esistenza di $u \in \mathcal{F}(g)$ con

$$\int_\Omega |Du(x)|^2 dx \leq \int_\Omega |Df(x)|^2 dx, \quad \forall f \in \mathcal{F}(g).$$

Quello che era evidente per tale problema è l'esistenza di una successione di funzioni $u_j \in \mathcal{F}(g)$ con

$$\lim_{j \to +\infty} \int_\Omega |Du_j(x)|^2 dx = \inf \left\{ \int_\Omega |Df(x)|^2 dx : f \in \mathcal{F}(g) \right\},$$

ma non è sempre vero che la u_j sia compatta in $\mathcal{F}(g)$ rispetto alla convergenza uniforme, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.1. Prendiamo $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}$, $g(0) = 0$, $g(x) = 1$ per ogni $|x| = 1$; consideriamo la famiglia di funzioni

$$\mathcal{G} = \{u_\varepsilon(x) = |x|^\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$$

non Lipschitziane in Ω perché

$$\lim_{x \to 0} |Du_\varepsilon(x)| = +\infty, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1).$$

Ma le u_ε sono continue su $\overline{\Omega}$ con $u_{\varepsilon|\partial\Omega} = g$ e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |Du_\varepsilon(x)|^2 dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\pi\varepsilon = 0.$$

Modifichiamo le u_ε fissando per ciascuna di esse un valore $\sigma \in (0,1)$ e indicando con

$$u_{\varepsilon,\sigma}(x) = \begin{cases} |x|^\varepsilon & \text{per } \sigma \le |x| < 1 \\ \sigma^{\varepsilon-1}|x| & \text{per } 0 < |x| \le \sigma. \end{cases}$$

Si scelga poi $\sigma = e^{-1/\varepsilon^2}$. Con tale scelta di σ, le $\{u_{\varepsilon,\sigma}\}_{0<\varepsilon<1}$ sono Lipschitziane e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |Du_{\varepsilon,\sigma}|^2 dx = 0,$$

quindi in tale famiglia di funzioni non ci può essere il valore minimo Lipschitziano.

7. Hadamard

Ma ancor più interessante è il seguente esempio.

ESEMPIO 1.2. Hadamard [**17**] richiamò l'attenzione sul seguente problema di Dirichlet:

$$\Omega = \{(\varrho,\vartheta) : \varrho < 1\}, \quad g(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k!\vartheta)}{k^2},$$

la soluzione del quale è

$$u(\varrho,\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varrho^{k!}\cos(k!\vartheta)}{k^2},$$

il cui integrale dell'energia è

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 |Du|^2 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta = \pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^4} = +\infty.$$

I due esempi illustrati dimostrano come non sia possibile aspettarsi l'esistenza del minimo Lipschitziano con la semplice proprietà della limitatezza dell'aperto Ω. Hilbert fu capace di indicare l'esistenza di una ipotesi per il dato (Ω, g) sufficiente per la dimostrazione dell'esistenza del minimo Lipschitziano. L'ipotesi di Hilbert è oggi detta BSC (Bounded Slope Condition) ed è la seguente.

DEFINIZIONE 1.3. *Diremo che il dato (Ω, g) soddisfa la Bounded Slope Condition (BSC) se $\exists K > 0$ tale che $\forall x_0 \in \partial\Omega$, esistono $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $|a| \leq K, |b| \leq K$ e*

$$\langle a, x - x_0\rangle \leq g(x) - g(x_0) \leq \langle b, x - x_0\rangle, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Escludendo i casi banali g costante o g polinomio di primo grado, casi nei quali la soluzione del problema di Dirichlet è la g stessa per qualunque Ω la BSC implica $a \neq b$ e perciò

$$\langle b - a, x - x_0\rangle \geq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Essendo Ω limitato, questa disuguaglianza implica la convessità dello stesso Ω. Inoltre,

$$-K|x - x_0| \leq g(x) - g(x_0) \leq K|x - x_0|, \quad \forall x, x_0 \in \partial\Omega,$$

quindi $g \in \mathrm{Lip}_K(\partial\Omega)$.

Le ipotesi Ω aperto limitato convesso e g Lipschitiziana non implicano la BSC.

Ha perciò interesse la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto limitato uniformemente convesso e se $g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, allora (Ω, g) soddisfa la BSC.*

DIM. Ricordiamo anzitutto che un insieme Ω si dice uniformemente convesso se esiste una costante $c > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \partial\Omega$, se indichiamo con $\nu_\Omega(x_0)$ la normale interna ad Ω, vale la

$$|x - x_0|^2 \leq c\langle x - x_0, \nu_\Omega(x_0)\rangle, \quad \forall x \in \Omega. \tag{7}$$

Indichiamo con $M = \max\{\|Dg\|_\infty, \|Hg\|_\infty\}$; otteniamo quindi che, fissato $x_0 \in \partial\Omega$ e al variare di $x \in \partial\Omega$,

$$g(x) - g(x_0) = \langle Dg(x_0), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Hg(\xi)(x - x_0), x - x_0\rangle.$$

Siccome vale che

$$-M|x - x_0|^2 \leq \langle Hg(\xi)(x - x_0), x - x_0\rangle \leq M|x - x_0|^2,$$

questo, unito con la condizione (7), implica che i coefficienti

$$a = Dg(x_0) - \frac{Mc}{2}\nu_\Omega(x_0), \quad b = Dg(x_0) + \frac{Mc}{2}\nu_\Omega(x_0)$$

soddisfano la condizione della BSC con $K = M(c + 1/2)$. □

8. I Teoremi di Hilbert

Nel Capitolo 2 dimostreremo i seguenti Teoremi, che contengono le dimostrazioni Hilbertiane del Principio di Dirichlet.

TEOREMA 1.5. *Se (Ω, g) soddisfa la BSC ed $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato, per ogni $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ strettamente convessa e positiva, il funzionale*

$$u \mapsto \int_\Omega F(Du(x))dx$$

ammette un unico minimo Lipschitziano nella classe di tutte le funzioni Lipschitziane eguali a g su $\partial\Omega$.

TEOREMA 1.6. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto limitato uniformemente convesso, se $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, per ogni $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ strettamente convessa e positiva, il funzionale*

$$u \mapsto \int_\Omega F(Du(x))dx$$

ammette un unico minimo Lipschitziano nella classe di tutte le funzioni Lipschitziane eguali a g su $\partial\Omega$.

CAPITOLO 2

Il Teorema di Hilbert per gli integrali multipli regolari

In questo capitolo indicheremo con F una funzione in $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ strettamente convessa e positiva.

1. Teorema di semicontinuità

TEOREMA 2.1 (Semicontinuità). *Sia v_j una successione di funzioni Lipschitziane convergente uniformemente su Ω aperto limitato ad una funzione Lipschitziana u. Sia $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ positiva e strettamente convessa. Vale la disuguaglianza*

$$\int_\Omega F(Du(x))dx \leq \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega F(Dv_j(x))dx. \tag{8}$$

DIM. Essendo finita la misura di Ω, si ha che $\forall\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di cubetti $\{C_h\}$ contenuti in Ω, a due a due disgiunti con

$$\int_\Omega F(Du(x))dx \leq \sum_h \int_{C_h} F(Du(x))dx + \varepsilon;$$

ma, se i cubetti sono sufficientemente piccoli rispetto ad ε, si ha che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(Du(x))dx &\leq \sum_h F\left(\fint_{C_h} Du(x)dx\right)|C_h| + \varepsilon \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_h F\left(\fint_{C_h} Dv_j(x)dx\right)|C_h| + \varepsilon
\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_h} Du(x)dx &= \int\limits_{\partial C_h} u\nu_{C_h} d\mathcal{H}^{n-1} = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\partial C_h} v_j \nu_{C_h} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \lim_{j\to\infty} \int\limits_{C_h} Dv_j(x)dx.\end{aligned}$$

Si è indicato con ν_{C_h} il versore normale uscente da C_h. A questo punto, dato che F è strettamente convessa, si ha che la matrice Hessiana di F è definita positiva, quindi, presi, $p, q \in \mathbb{R}^n$, esiste $\xi \in \mathbb{R}^n$ con

$$\begin{aligned}F(p) &= F(q) + \langle DF(q), p-q\rangle + \langle HF(\xi)(p-q), p-q\rangle \\ &\geq F(q) + \langle DF(q), p-q\rangle.\end{aligned}$$

Prendendo $p = Dv_j(y)$ e $q = -\!\!\!\!\!\!\int_{C_h} Dv_j(x)dx$, si ottiene che

$$\begin{aligned}F(Dv_j(y)) \geq\ & F\left(-\!\!\!\!\!\!\int_{C_h} Dv_j(x)dx\right) \\ &+\left\langle DF\left(-\!\!\!\!\!\!\int_{C_h} Dv_j(x)dx\right), Dv_j(y) - -\!\!\!\!\!\!\int_{C_h} Dv_j(x)dx\right\rangle;\end{aligned}$$

integrando su C_h e tenendo presente che

$$\int\limits_{C_h}\left(Dv_j(y) - -\!\!\!\!\!\!\int_{C_h} Dv_j(x)dx\right)dy = 0,$$

si ottiene in definitiva che

$$\int\limits_{C_h} F(Dv_j(x))dx \geq F\left(-\!\!\!\!\!\!\int_{C_h} Dv_j(x)dx\right)|C_h|.$$

Concludendo, otteniamo che

$$\int\limits_{\Omega} F(Du(x))dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} F(Dv_j(x))dx + \varepsilon$$

da cui la semicontinuità inferiore. □

Il Teorema di semicontinuità implica il seguente Lemma.

LEMMA 2.2. *Se g è K–Lipschitziana e Ω aperto limitato, nella famiglia*

$$\mathcal{L}_K(g) = \left\{v \in \mathrm{Lip}_K(\Omega) : v_{|\partial\Omega} = g\right\}$$

esiste il minimo dell'integrale

$$\int\limits_{\Omega} F(Dv(x))dx$$

per ogni $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ strettamente convessa e positiva.

2. Il Principio di Massimo Forte

TEOREMA 2.3 (Principio di Massimo forte). *Sia $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ strettamente convessa e positiva e siano g_1 e g_2 K–Lipschitziane. Siano u_1 e u_2 minimizzanti l'integrale, su Ω aperto limitato,*

$$\int_\Omega F(Dv(x))dx$$

in $\mathcal{L}_K(g_1)$ e $\mathcal{L}_K(g_2)$ rispettivamente. Vale allora la seguente disuguaglianza

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_1 - u_2| = \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|.$$

DIM. Basterà verificare che

$$u_1(x) - u_2(x) \leq \max_{\partial\Omega}(g_1 - g_2)$$

per ogni $x \in \Omega$. Posto

$$M := \max_{\partial\Omega}(g_1 - g_2),$$

verificheremo che è assurdo quanto segue:

$$A := \{x \in \Omega : u_1(x) > u_2(x) + M\} \neq \emptyset$$

Indichiamo con

$$u_3(x) := M + u_2(x)$$

e osserviamo che $u_3 \geq u_1$ su $\partial\Omega$ ed è minimizzante in $\mathcal{L}_K(M + g_2)$. Le proprietà di essere minimizzanti implicano

$$\int_\Omega F(Du_3(x))dx \leq \int_A F(Du_1(x))dx + \int_{\Omega \setminus A} F(Du_3(x))dx$$

e

$$\int_\Omega F(Du_1(x))dx \leq \int_A F(Du_3(x))dx + \int_{\Omega \setminus A} F(Du_1(x))dx;$$

dalle quali segue che

$$\int_A F(Du_1(x))dx = \int_A F(Du_3(x))dx.$$

Poichè $D(u_1 - u_3)$ non può essere nullo quasi ovunque su A, si avrà per la stretta convessità di F

$$\int_A F\left(D\frac{u_1(x) + u_3(x)}{2}\right) dx < \frac{1}{2} \int_A \left(F(Du_1(x)) + F(Du_3(x))\right) dx.$$

Da quest'ultima disuguaglianza discende che

$$\int_\Omega F(Du_1(x))dx > \int_A F\left(D\frac{u_1(x)+u_3(x)}{2}\right)dx + \int_{\Omega\setminus A} F(Du_1(x))dx,$$

e ciò contrasterebbe con la proprietà di minimo della u_1 essendo la funzione

$$v(x) := \begin{cases} u_1(x) & \text{in } \Omega\setminus A \\ \dfrac{u_1(x)+u_3(x)}{2} & \text{in } A \end{cases}$$

Lipschitziana con valori g_1 su $\partial\Omega$. □

3. Lemma di von Neumann

John von Neumann(1903–1957) nel 1931 fu capace di chiarire un difficile passaggio della dimostrazione di Hilbert del Principio di Dirichlet. Von Neumann dimostrò un Principio di Massimo per i rapporti incrementali dei minimi Lipschitziani come corollario del Principio del Massimo forte.

Lemma 2.4 (Von Neumann [**32**]). *Se u minimizza*

$$\int_\Omega F(Du(x))dx$$

con Ω limitato in $\mathfrak{L}_K(g)$, allora vale la seguente identità

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} = \sup_{\substack{x\in\Omega\\ y\in\partial\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}. \tag{9}$$

Dim. Consideriamo i rapporti al primo membro della (9) con $x \in \Omega$ e $y = x+\tau \in \Omega$, cioè tutti i rapporti relativi alle coppie $(x,y) \in \Omega\times\Omega$ per le quali $y = x+\tau$ con τ fissato. Osserviamo che, posto

$$N := \sup_{\substack{x\in\Omega\\ y\in\partial\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|},$$

le due funzioni $u(x)$ e $u(x+\tau)+N|\tau|$ sono definite in $\Omega\cap\Omega_{-\tau}$ e ivi sono minimizzanti e soddisfacenti la disuguaglianza

$$u(x) \leq u(x+\tau)+N$$

se x o $x+\tau$ sono in $\partial\Omega$. Abbiamo qui indicato con $\Omega_{-\tau}$ l'insieme Ω traslato del vettore $-\tau$. Dal Principio di Massimo dimostrato, tale disuguaglianza si estende al caso $x \in \Omega$ e $x+\tau \in \Omega$. □

4. Teorema di Hilbert

Teorema 2.5 (Hilbert [**20, 27, 32**]). *Se $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ è positiva e strettamente convessa, se (Ω, g) soddisfa la BSC con costante K, se Ω è limitato esiste una $u \in \mathcal{L}_K(g)$ tale che*

$$\int_\Omega F(Du(x))dx \leq \int_\Omega F(Dv(x))dx, \quad \forall v \in \mathrm{Lip}, v_{|\partial\Omega} = g.$$

Dim. La BSC con costante K e il Lemma di von Neumann 2.4 permettono di dimostrare che la minimizzante $u_L \in \mathcal{L}_L(g)$ con $L \geq K$ è in Lip_K, quindi eguale a u_K che è perciò la minimizzante fra tutte le $v \in \mathrm{Lip}$ con $v_{|\partial\Omega} = g$. □

Le funzioni minimizzanti u così ottenute soddisfano tutte l'equazione di Eulero

$$\int_\Omega \langle DF(Du(x)), D\phi(x)\rangle dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathrm{Lip}_c(\Omega). \tag{10}$$

Questo risultato verrà usato soprattutto per il caso $F(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$, da cui l'equazione delle superficie minime che diventa

$$\mathrm{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\right) = 0.$$

5. Ulteriore regolarità

Solo nel caso $F(Du) = |Du|^2$, dalla equazione di Eulero può passarsi alla equazione di Laplace, come abbiamo visto nel Capitolo 1. Nel caso generale, per poter scrivere la equazione

$$\mathrm{div}\,(DF(Du(x))) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \tag{11}$$

bisogna prare che $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

De Giorgi nel 1955 dimostrò [**10, 11, 6**] l'appartenenza di u alla classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$ e tale risultato, insieme con un precedente risultato di Charles B. Morrey jr. (1908–1984) prova che $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ [**30, 35**], e quindi vale la (11).

6. L'osservazione di Lebesgue

Henri Léon Lebesgue (1875–1941) [**22**] aveva osservato che nel caso dell'equazione di Laplace la risolubilità del problema di Dirichlet, con il dato $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e con Ω uniformemente convesso e limitato, poteva essere estesa ad ogni dato continuo attraverso un processo di approssimazione di un dato continuo con dati polinomiali. Possiamo più precisamente dire, sempre con riferimento all'equazione di Laplace, che dalla risolubilità con dato polinomiale può passarsi alla risolubilità per ogni dato continuo, nelle ipotesi che Ω sia limitato e uniformemente convesso.

Per poter estendere il metodo di Lebesgue al caso generale è sufficiente dimostrare una maggiorazione locale del gradiente della soluzione con l'oscillazione della soluzione stessa in tutto l'aperto Ω.

Questa stima del gradiente fu provata, nel 1968, da De Giorgi con Enrico Bombieri (1940–) e Mario Miranda (1937–) [**5**], nel caso di $F(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$. Possiamo quindi in questo caso affermare che il principio di Dirichlet è valido per ogni aperto limitato uniformemente convesso e per ogni dato continuo, per l'equazione delle superficie minime.

Parte 2

CAPITOLO 3

Il Teorema di Bernstein

Intorno al 1910 Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) dimostrò il seguente teorema.

Teorema 3.1 (Bernstein [**3**]). *Se $u(x, y)$ risolve l'equazione delle superficie minime in tutto $\mathbb{R}^2$, cioè se $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ e vale*

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \tag{12}$$

dove $p = D_x u$, $q = D_y u$, $r = D_{xx}u$, $s = D_{xy}u$, $t = D_{yy}u$, allora p e q sono costanti.

Non presenteremo qui la dimostrazione originale di Bernstein, ma una dimostrazione degli anni '50 ricavata da lavori di Konrad Jörgens (1926–1974), Erhard Heinz (1924–) e Johannes C.C. Nitsche (1925–).

1. Jörgens

Nel 1954, Jörgens dimostrò il seguente teorema.

Teorema 3.2 (Jörgens [**21**]). *Sia $v = v(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ per la quale*

$$\det Hv(x, y) = 1 \tag{13}$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora la matrice Hessiana $Hv(x, y)$ è costante e quindi v è un polinomio di secondo grado.

Dim. La dimostrazione che qui presentiamo fu ottenuta da Nitsche utilizzando un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ in se stesso introdotto da Hans Lewy (1904–1988) [**23**]. La dimostrazione di Nitsche [**33**] e [**23**], come vedremo, permette di ricavare la proposizione di Jörgens dal Teorema di Liouville.

In questa dimostrazione, le p, q, r, s e t sono riferite ad una funzione v per la quale vale $rt-s^2=1$, ma non la (12). Essendo $rt>0$, possiamo supporre che r e t siano entrambi maggiori di zero. Le ipotesi fatte implicano che la matrice Hessiana di v è definita positiva, cioè v è una funzione convessa. Quindi per ogni coppia di punti $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, si ha che

$$\langle Dv(x_2,y_2)-Dv(x_1,y_1),(x_2-x_1,y_2-y_1)\rangle \geq 0,$$

o equivalentemente

$$(x_2-x_1)(p(x_2,y_2)-p(x_1,y_1))+(y_2-y_1)(q(x_2,y_2)-q(x_1,y_1))\geq 0. \quad (14)$$

A questo punto si introduce il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi(x,y)=x+p(x,y), \\ \\ \eta(x,y)=y+q(x,y). \end{cases} \quad (15)$$

Si noti che per quanto riguarda il determinante della Jacobiana di tale cambiamento di variabili, usando la (13), si ottiene che

$$\det\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix}=2+r+t>2$$

avendo supposto che $r,t>0$. Quindi

$$(x,y)\mapsto(\xi,\eta)$$

definisce una mappa aperta da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Inoltre, sostituendo (15) in (14), si ottiene che, posto $\xi_i=\xi(x_i,y_i)$, $\eta_i=\eta(x_i,y_i)$:

$$\begin{aligned} |(x_2,y_2)-(x_1,y_1)|^2 &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \\ &\leq (x_2-x_1)(\xi_2-\xi_1)+(y_2-y_1)(\eta_2-\eta_1) \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz si ottiene quindi che

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\leq(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2$$

da cui il fatto che la trasformazione introdotta ha la proprietà che le distanze tra i punti vengono dilatate e quindi tale trasformazione è una mappa chiusa. Se ne deduce che il cambio di variabili $(x,y)\mapsto(\xi,\eta)$ definisce un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Introducendo la variabile complessa $z=\xi+i\eta$, definiamo la funzione

$$f(z)=(x-p)-i(y-q);$$

tale funzione risulta essere olomorfa. Difatti, derivando in (15) rispetto a ξ e η si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (1+r)\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + s\dfrac{\partial y}{\xi} = 1 \\ s\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + (1+t)\dfrac{\partial y}{\xi} = 0 \\ (1+r)\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + s\dfrac{\partial y}{\eta} = 0 \\ s\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + (1+t)\dfrac{\partial y}{\xi} = 1, \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} = \dfrac{1+t}{2+r+t} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} = -\dfrac{s}{2+r+t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta} = \dfrac{1+r}{2+r+t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} = -\dfrac{s}{2+r+t}. \end{cases}$$

Da queste relazioni, si ricava che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,\eta) &= \frac{\partial x}{\partial \xi} - r\frac{\partial x}{\partial \xi} - s\frac{\partial y}{\partial \xi} - i\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} - s\frac{\partial x}{\partial \xi} - t\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \\ &= \frac{t-r}{2+r+t} + i\frac{2s}{2+r+t}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi,\eta) &= \frac{\partial x}{\partial \eta} - r\frac{\partial x}{\partial \eta} - s\frac{\partial y}{\partial \eta} - i\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} - s\frac{\partial x}{\partial \eta} - t\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \\ &= -\frac{2s}{2+r+t} + i\frac{t-r}{2+r+t}, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,\eta) = -i\frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi,\eta),$$

cioè la olomorfia di f. Inoltre, siccome

$$f'(z) = \frac{t-r}{2+r+t} + i\frac{2s}{2+r+t} \tag{16}$$

e

$$1 - |f'(z)|^2 = \frac{4}{2+r+t} > 0,$$

si ricava che $|f'(z)| < 1$. Grazie al Teorema di Liouville, f' deve essere costante ed in particolare deve essere costante la quantità

$$\frac{4}{2+r+t},$$

da cui $r+t$ è costante. Sostituendo questa informazione in (16), si ottiene che s è costante e che $t-r$ è costante; quindi in definitiva sono costanti r, s e t, da cui la tesi del teorema. □

2. Heinz

Nel 1955, Heinz [**18**] osservò che se vale la (12), allora la matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \begin{pmatrix} 1+p^2 & pq \\ pq & 1+q^2 \end{pmatrix}$$

ha determinante ovunque uguale ad 1 (in questo caso p, q, r, s e t sono riferite alla funzione u). Valgono inoltre per essa

$$\frac{\partial}{\partial y} A_{1,1} = \frac{\partial}{\partial x} A_{1,2}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} A_{2,1} = \frac{\partial}{\partial x} A_{2,2}.$$

Verifichiamo solo la prima di queste due relazioni;

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}^3} \left(2ps(1+p^2+q^2) \ -(1+p^2)(ps+qt)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}^3} \left((qr+ps)(1+p^2+q^2) - pq(pr+qs)\right).$$

Quest'ultima relazione è equivalente a richiedere che

$$q(2pqs - r - t - p^2 t - q^2 r) = 0,$$

che è verificata da ogni soluzione dell'equazione delle superficie minime.

Pertanto la A è una matrice Hessiana ed è costante grazie al Teorema 3.2. Da ciò segue che le p e q sono costanti.

3. Teorema di Bernstein e Moser

Jürgen Moser (1928–1999) [**31**] nel 1961 dimostrò, come Corollario della sua Disuguaglianza di Harnack per le soluzioni deboli delle equazioni ellittiche n–dimensionali, il seguente

Teorema 3.3 (Bernstein-Moser). *Se* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ *con* $n > 2$ *è soluzione intera della equazione delle superficie minime e se*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |Du(x)| < +\infty,$$

allora

$$Du(x) = \text{costante}.$$

CAPITOLO 4

Singolarità rimovibili

Si può dimostrare il seguente teorema (vedi [**28**])

TEOREMA 4.1. *Per ogni Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, per ogni C chiuso in Ω con*

$$\mathcal{H}^{n-1}(C) = 0$$

e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus C)$ soluzione dell'equazione delle superficie minime, esiste $U \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ con $U_{|\Omega\setminus C} = u$.

In questo capitolo noi dimostreremo una versione più debole di tale teorema, dovuta a De Giorgi e Guido Stampacchia (1922–1978) e pubblicata nel 1965 [**13**], che ipotizzarono $C = K \subset\subset \Omega$. Senza ledere in generalità, nel seguito supporremo la connessione di Ω.

1. Lemma topologico

La dimostrazione di De Giorgi e Stampacchia richiede il seguente lemma topologico.

LEMMA 4.2. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$; se $K \subset\subset \Omega$ con*

$$\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0,$$

allora $\Omega \setminus K$ è connesso.

DIM. Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti disgiunti tali che $\Omega \setminus K = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Vogliamo dimostrare che

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), i = 1, 2. \tag{17}$$

Osserviamo che $\partial\Omega_i \cap \Omega \subset K$, $i = 1, 2$.

La condizione $\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$ implica l'esistenza, per ogni $\varepsilon > 0$, di un numero finito di palle $\{B_{\varrho_i}(x_i)\}_{i=1,\dots,N}$ tali che

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varrho_i}(x_i) := I_\varepsilon(K), \quad \sum_{i=1}^{N} \varrho_i^{n-1} < \varepsilon. \tag{18}$$

La condizione precedente implica in particolare che $\varrho_i < \varepsilon^{1/(n-1)}$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Notiamo che

$$|I_\varepsilon(K)| \le \sum_{i=1}^{N} |B_{\varrho_i}(x_i)| \le \omega_n \varepsilon^{1/(n-1)} \sum_{i=1}^{N} \varrho_i^{n-1} < \omega_n \varepsilon^{n/(n-1)};$$

inoltre,

$$\partial I_\varepsilon(K) = \bigcup_{i=1}^{N} (\partial B_{\varrho_i}(x_i) \setminus I_\varepsilon(K)),$$

e quindi

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial I_\varepsilon(K)) \le \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{\varrho_i}(x_i)) = n\omega_n \sum_{i=1}^{N} \varrho_i^{n-1} < n\omega_n \varepsilon$$

Possiamo scrivere che

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \phi dx = \int_{\Omega_i \setminus I_\varepsilon(K)} \operatorname{div} \phi dx + \int_{\Omega_i \cap I_\varepsilon(K)} \operatorname{div} \phi dx,$$

Ma

$$\left| \int_{\Omega_i \cap I_\varepsilon(K)} \operatorname{div} \phi dx \right| \le \| \operatorname{div} \phi\|_\infty |I_\varepsilon(K)| \le \omega_n \| \operatorname{div} \phi\|_\infty \varepsilon^{n/(n-1)},$$

mentre

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_i \setminus I_\varepsilon(K)} \operatorname{div} \phi dx \right| &= \left| \int_{\Omega_i \cap \partial I_\varepsilon(K)} \phi \nu_{I_\varepsilon(K)} d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\ &\le \|\phi\|_\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial I_\varepsilon(K)) < n\omega_n \|\phi\|_\infty \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi $D\mathbf{1}_{\Omega_i} \equiv 0$ in Ω nel senso delle distribuzioni; ne segue che le funzioni caratteristiche sono costanti. Quindi la coppia (Ω_1, Ω_2) è costituita da $\emptyset$ e da Ω. $\square$

2. Il Teorema di De Giorgi e Stampacchia

TEOREMA 4.3 (De Giorgi-Stampacchia [**13**]). *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ connesso, sia $K \subset\subset \Omega$ con*

$$\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$$

e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus K)$ soluzione dell'equazione delle superficie minime. Allora esiste $U \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ con $U_{|\Omega\setminus K} = u$.

DIM. Sia A un aperto limitato con

$$K \subset\subset A \subset\subset \Omega.$$

Per la dimostrazione di questo teorema abbiamo bisogno di due lemmi.

LEMMA 4.4 (Principio del Massimo). *Nelle stesse ipotesi del Teorema 4.3, vale che*

$$M := \max_{\partial A} u = \sup_{A\setminus K} u.$$

DIM. Dimostreremo che

$$\{x \in A \setminus K : u(x) > M\} = \emptyset.$$

Consideriamo a tal fine la funzione

$$B(t) = \begin{cases} 0 & t \leq M \\ \\ \arctan(t) - \arctan(M) & t \geq M. \end{cases}$$

La funzione B è Lipschitziana, limitata da $0 \leq B(t) \leq \pi$ e la sua derivata è positiva.

Definiamo quindi per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$\varphi_\varepsilon(x) = \max\left\{1 - \frac{d(x, I_\varepsilon(K))}{\varepsilon}, 0\right\},$$

dove $I_\varepsilon(K)$ è l'insieme costruito nella dimostrazione del Lemma 4.2. La funzione φ_ε è chiaramente Lipschitziana con $|D\varphi_\varepsilon| \leq 1/\varepsilon$, si ha che $\varphi_\varepsilon \equiv 1$ su $I_\varepsilon(K)$ e, se $2\varepsilon < d(K, \partial\Omega)$, $\varphi_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_c(\Omega)$. Infine si ha che, se indichiamo con

$$A_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varrho_i+\varepsilon}(x_i),$$

con $B_{\rho_i}(x_i)$ gli insiemi costruiti nel Lemma 4.2, vale la seguente proprietà

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |D\varphi_\varepsilon|dx &= \int_{A_\varepsilon} |D\varphi_\varepsilon|dx \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{B_{\varrho_i+\varepsilon}(x_i)} |D\varphi_\varepsilon|dx \\
&\leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon}|B_{\varrho_i+\varepsilon}(x_i) \setminus B_{\varrho_i}(x_i)| \\
&= \sum_{i=1}^N \omega_n(n\varrho_i^{n-1} + o(1)) < n\omega_n\varepsilon + N\omega_n o(1),
\end{aligned}$$

dove l'ultima condizione discende da (18).

Se poniamo $\phi = B(u)(1-\varphi_\varepsilon)$, chiaramente $\phi \in \mathrm{Lip}_0(A \setminus K)$, e quindi utilizzando questa funzione ϕ in (10), si ottiene

$$\begin{aligned}
0 &= \int_A \frac{\langle Du, D(B(u)(1-\varphi_\varepsilon))\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx \\
&= \int_A (1-\varphi_\varepsilon)\frac{\langle Du, DB(u)\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx - \int_A B(u)\frac{\langle Du, D\varphi_\varepsilon\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx.
\end{aligned}$$

Siccome

$$\left|\int_A B(u)\frac{\langle Du, D\varphi_\varepsilon\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx\right| \leq \pi \int_A |D\varphi_\varepsilon|dx \to 0, \quad \text{per } \varepsilon \to 0,$$

ricaviamo, grazie al Lemma di Fatou, che

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_A B'(u)\frac{|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx = \int_A \frac{\langle Du, DB(u)\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx \\
&= \int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varphi_\varepsilon)\frac{\langle Du, DB(u)\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx \\
&\leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_A (1-\varphi_\varepsilon)\frac{\langle Du, DB(u)\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx = 0.
\end{aligned}$$

Questo implica che la funzione $B(u)$ deve essere costante su A, e quindi, siccome si deve avere che

$$\lim_{x\to\partial A} B(u(x)) = 0,$$

deve essere $B(u) \equiv 0$ su A, da cui $u \leq M$ su tutto A. $\square$

Lemma 4.5 (Principio del Massimo Forte in $A \setminus K$). *Sia v un'altra soluzione avente le stesse proprietà della u. Supponiamo che valga la diseguaglianza*

$$v(x) \geq u(x), \quad \forall x \in \partial A.$$

Allora la diseguaglianza vale in tutti i punti di $A \setminus K$.

Dim. Entrambe le soluzioni u e v sono limitate in $A \setminus K$. Vogliamo dimostrare che

$$\{x \in A \setminus K : v(x) < u(x)\} = \emptyset.$$

Questa proprietà è conseguenza della stretta convessità del funzionale delle superficie minime. Indichiamo con ϕ la funzione

$$\phi(x) = \mathbf{1}_A(x) \max\{u(x) - v(x), 0\}.$$

Difatti, con una tale scelta di ϕ, dal fatto che sia u che v sono soluzioni, si ottiene

$$0 = \int_A \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) D\phi dx = \int_A \left(\frac{Dv}{\sqrt{1 + |Dv|^2}} \right) D\phi dx,$$

quindi

$$0 = \int_A \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} - \frac{Dv}{\sqrt{1 + |Dv|^2}} \right) D\phi dx,$$

cioè

$$\int_{\{u>v\}} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} - \frac{Dv}{\sqrt{1 + |Dv|^2}} \right) (Du - Dv) dx = 0.$$

Poichè l'integrando è strettamente positivo se $Du(x) \neq Dv(x)$, segue che $Du(x) - Dv(x) = 0$ in ogni punto $x \in A$ con $u(x) > v(x)$, e ciò implica che $u(x) \leq v(x)$ in tutti i punti di A. $\square$

Corollario del Principio di Massimo Forte 4.4 è il principio di massimo dei rapporti incrementali 2.4. Possiamo allora dire che la funzione u è Lipschitziana in $A \setminus K$, quindi è estendibile ad una funzione Lipschitziana U definita su tutto A. Tale U verifica l'equazione di Eulero,

$$\int_A \frac{DU}{\sqrt{1 + |DU|^2}} D\phi dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathrm{Lip}_c(A).$$

Grazie al Teorema di regolarità di De Giorgi, possiamo concludere che $U \in \mathcal{C}^2(A)$. $\square$

Osservazione 2. Robert Finn (1922–) [**14**] aveva dimostrato nel 1953 il risultato di De Giorgi e Stampacchia nel caso bidimensionale, e per $K =$

$\{x_0\}$, $x_0 \in \Omega$. La dimostrazione di Finn passa attraverso i Principi di Massimo e di Massimo Forte, ma non ha bisogno del ricorso al Teorema di regolarità di De Giorgi [**11**].

Parte 3

CAPITOLO 5

Stima del gradiente

1. Per l'equazione di Laplace

Nel caso delle funzioni armoniche, dall'integrale di Poisson (5)

$$u(x) = \frac{\varrho^2 - |x - x_0|^2}{n\omega_n \varrho} \int\limits_{|y-x_0|=\varrho} \frac{u(y)}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

si ricava

$$\begin{aligned} Du(x) &= -2\frac{x - x_0}{n\omega_n \varrho} \int\limits_{|y-x_0|=\varrho} \frac{u(y)}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &\quad -n\frac{\varrho^2 - |x - x_0|^2}{n\omega_n \varrho} \int\limits_{|y-x_0|=\varrho} \frac{u(y)(x-y)}{|x-y|^{n+2}} d\mathcal{H}^{n-1}(y), \end{aligned}$$

da cui

$$|Du(x_0)| = \frac{\varrho}{\omega_n} \left| \int\limits_{|y-x_0|=\varrho} \frac{u(y)(y-x_0)}{|y-x_0|^{n+2}} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right| .$$

Quindi

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{\varrho} \Lambda_n(x_0, \varrho)$$

dove

$$\Lambda_n(x_0, \varrho) = \frac{1}{2} \left(\sup_{|y-x_0|=\varrho} u(y) - \inf_{|y-x_0|=\varrho} u(y) \right) .$$

2. Per l'equazione delle superficie minime

Nel caso delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime, una diseguaglianza del tipo di quella provata per le funzioni armoniche è molto più riposta.

Finn nel caso $n = 2$ dimostrò il seguente Teorema.

Teorema 5.1 (Finn [**15**]). *Se $z(x,y)$ risolve l'equazione delle superficie minime in $\{(x,y) : x^2+y^2 < R^2\}$ ed è positiva, allora*

$$\sqrt{1+|D_x z(0,0)|^2+|D_y z(0,0)|^2} \leq C \exp\left(\frac{\pi z(0,0)}{2R}\right),$$

dove $C = 1.03894$ e il fattore $\pi/2$ non è migliorabile.

3. Il Teorema di Bombieri, De Giorgi e Miranda

Teorema 5.2 (Bombieri, De Giorgi, Miranda [**5**]). *Se u risolve l'equazione delle superficie minime in $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ ed è positiva, allora*

$$\sqrt{1+|Du(0)|^2} \leq C_1(n) \exp\left(\frac{C_2(n)u(0)}{R}\right).$$

La dimostrazione di questo Teorema che presentiamo qui è presa dall'articolo di Neil Trudinger (1942–) [**39**]; prima di procedere abbiamo bisogno di alcune definizioni e risultati preliminari.

4. Calcolo differenziale sulle superficie

Supponiamo di avere un aperto $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e una funzione $h \in \mathcal{C}^2(A)$ con $Dh \neq 0$ in ogni punto; se $\mathcal{S}$ è la superficie

$$\mathcal{S} = \{h = 0\},$$

indichiamo con ν la normale alla superficie $\mathcal{S}$ definita da

$$\nu = \frac{Dh}{|Dh|}.$$

Definiamo quindi il gradiente tangenziale a $\mathcal{S}$ come

$$\delta\phi = (I - \nu \otimes \nu) D\phi = D\phi - \langle D\phi, \nu\rangle \nu \tag{19}$$

per ogni $\phi \in \mathcal{C}^1(A)$ e la divergenza tangenziale come

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \Phi = \operatorname{div} \Phi - \langle J\Phi\nu, \nu\rangle, \quad \forall \Phi \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^{n+1}).$$

L'operatore di Laplace–Beltrami è quindi definito come

$$\mathcal{D}\phi = \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \delta\phi.$$

La condizione che $\mathcal{S}$ sia una superficie minima è che la curvatura media di $\mathcal{S}$ sia nulla, ciò che in termini del vettore ν diventa

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \nu = 0. \tag{20}$$

Dalla (19) si ha

$$\delta_i = D_i - \nu_i \langle \nu, D \rangle,$$

da cui la seguente regola di commutazione

$$[\delta_i, \delta_k] := \delta_i \delta_k - \delta_k \delta_i = \sum_{h=1}^{n+1} (\nu_i \delta_k \nu_h - \nu_k \delta_i \nu_h) \delta_h$$

La condizione di minimalità (20) ha come conseguenza che ogni componente ν_k di ν soddisfa l'equazione

$$\mathcal{D} \nu_k + c^2 \nu_k = 0,$$

dove abbiamo posto

$$c^2 = \sum_{i,h=1}^{n+1} (\delta_h \nu_i)^2.$$

Quindi se $\nu_k > 0$, la funzione

$$w = -\ln \nu_k$$

è una sub–soluzione positiva dell'operatore di Laplace–Beltrami; infatti vale

$$\begin{aligned} \mathcal{D} w &= \frac{|\delta \nu_k|^2}{\nu_k^2} - \frac{\mathcal{D} \nu_k}{\nu_k} \\ &= |\delta w|^2 + c^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si noti che si è dimostrato qualcosa di più forte, e cioè che

$$\mathcal{D} w \geq |\delta w|^2. \tag{21}$$

Notando inoltre che

$$|\delta f|^2 = |Df|^2 - |\langle Df, \nu \rangle|^2,$$

si nota che se $D_i f = 0$ allora

$$|\nu_i||Df| \leq |\delta f|. \tag{22}$$

Infatti, dalla precedente uguaglianza e dalla disuguaglianze di Cauchy–Schwarz, si ricava che

$$\begin{aligned} |\delta f|^2 &= |Df|^2 - \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j^2 (D_j f)^2 = |Df|^2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \nu_j^2 (D_j f)^2 \\ &\geq |Df|^2 \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \nu_j^2 \right) \\ &= |Df|^2 \nu_i^2. \end{aligned}$$

Vediamo alcune proprietà importanti che ci serviranno in seguito; anzitutto,

$$\langle \nu, \delta \rangle = 0 \tag{23}$$

come segue subito da (19); inoltre, la divergenza della funzione identità $\Phi(x) = x$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ è data da

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}} x = \operatorname{div} x - \langle Jx\nu, \nu\rangle = n + 1 - |\nu|^2 = n.$$

Abbiamo inoltre

$$\delta|x|^p = p|x|^{p-2}(x - \langle x, \nu\rangle\nu). \tag{24}$$

Infatti

$$\delta|x|^p = D|x|^p - \langle D|x|^p, \nu\rangle\nu;$$

siccome

$$D|x|^p = p|x|^{p-1}D\langle x, x\rangle^{1/2} = p|x|^{p-2}x,$$

si ottiene che

$$\delta|x|^p = p|x|^{p-2}x - \big\langle p|x|^{p-2}x, \nu\big\rangle\nu = p|x|^{p-2}(x - \langle x, \nu\rangle\nu)$$

Tenendo inoltre presente che

$$D\ln|x| = \frac{x}{|x|^2},$$

si ha che

$$\delta\ln|x| = \frac{1}{|x|^2}(x - \langle x, \nu\rangle\nu). \tag{25}$$

Notiamo anche che

$$\operatorname{div}(x|x|^p) = |x|^p \operatorname{div} x + \langle x, D|x|^p\rangle = (n + 1 + p)|x|^p,$$

mentre

$$J(x|x|^p) = |x|^p I + x \otimes D|x|^p = |x|^p I + p|x|^{p-2}x \otimes x,$$

da cui si ricava che

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}}(x|x|^p) = |x|^p\left(n + p - \frac{p}{|x|^2}\langle x, \nu\rangle^2\right). \tag{26}$$

Dalle (23) e (20) si ricava che

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}}(|x|^p\langle x, \nu\rangle\nu) = \langle\delta(|x|^p\langle x, \nu\rangle), \nu\rangle + |x|^p\langle x, \nu\rangle \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \nu = 0$$

da cui, tenendo presente (26)

$$\mathcal{D}|x|^{p+2} = (p + 2)|x|^p\left(n + p - \frac{p}{|x|^2}\langle x, \nu\rangle^2\right) \tag{27}$$

Da (25), si ottiene inoltre che

$$\mathcal{D}\ln|x| = \frac{1}{|x|^2}\left(n - 2 + \frac{2}{|x|^2}\langle x, \nu\rangle^2\right). \tag{28}$$

Sulla superficie $\mathcal{S}$ vale inoltre il teorema della divergenza, che nel caso in cui $\mathcal{S}$ sia una superficie minima si enuncia come segue; se $E \subset \mathcal{S}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{S}$ con bordo ∂E su $\mathcal{S}$ regolare e se $\mathcal{H}^n$ è la misura di Hausdorff, allora

$$\int\limits_E \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \Phi d\mathcal{H}^n = \int\limits_{\partial E} \langle\Phi, \nu_E\rangle d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{29}$$

per ogni $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

Nel seguito, la superficie $\mathcal{S}$ sarà individuata dal grafico di una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ e $A = \Omega \times \mathbb{R}$; cioè, abbiamo

$$h(x, x_{n+1}) = x_{n+1} - u(x).$$

In questo caso, la condizione di minimalità di $\mathcal{S}$ (20) altro non è che richiedere che u sia soluzione dell'equazione delle superficie minime, cioè

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0.$$

La misura di Hausdorff n–dimensionale su $\mathcal{S}$ si può in questo caso esprimere come

$$d\mathcal{H}^n = \sqrt{1+|Du|^2}dx = vdx,$$

dove abbiamo posto

$$v = \sqrt{1+|Du|^2}.$$

e si ha che

$$\nu_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} > 0,$$

e quindi la funzione

$$w = -\ln \nu_{n+1} = \ln v \tag{30}$$

è una sub–soluzione positiva dell'operatore di Laplace–Beltrami.

5. Dimostrazione della stima del gradiente

Fissato $\varepsilon > 0$, nel caso $n > 2$ definiamo

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} n\varepsilon^{2-n} + (2-n)\varepsilon^{-n}|x-x_0|^2 & \text{per } |x-x_0| \le \varepsilon \\ \\ 2|x-x_0|^{2-n} & \text{per } |x-x_0| \ge \varepsilon. \end{cases}$$

La funzione ϕ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^{n+1}$, ed è di classe $\mathcal{C}^2$ in $B_\varepsilon(x_0)$ e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus B_\varepsilon(x_0)$; inoltre $\mathcal{D}\phi$ è limitato vicino a $|x-x_0| = \varepsilon$. Difatti, grazie alle (24) e (27), si ha che

$$\delta\phi(x) = n(2-n)\begin{cases} \varepsilon^{-n}(x - x_0 - \langle x-x_0, \nu\rangle\nu) & \text{per } |x-x_0| \le \varepsilon \\ \\ |x-x_0|^{-n}(x - x_0 - \langle x-x_0, \nu\rangle\nu) & \text{per } |x-x_0| \ge \varepsilon \end{cases}$$

e

$$\mathcal{D}\phi(x) = n(2-n)\begin{cases} \varepsilon^{-n} & \text{per } |x-x_0| \le \varepsilon \\ \\ |x-x_0|^{-(n+2)}\langle x-x_0, \nu\rangle^2 & \text{per } |x-x_0| \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Presa una funzione g di classe $\mathcal{C}^2$ e a supporto compatto, si ha che

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{S}} \phi \mathcal{D} g d\mathcal{H}^n &= -\int\limits_{\mathcal{S}} \langle \delta\phi, \delta g\rangle d\mathcal{H}^n \\
&= -\int\limits_{\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0)} \langle \delta\phi, \delta g\rangle d\mathcal{H}^n + \\
&\quad -\int\limits_{\mathcal{S}\setminus B_\varepsilon(x_0)} \langle \delta\phi, \delta g\rangle d\mathcal{H}^n \\
&= -\int\limits_{\partial(\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0))} g\langle \delta\phi, \nu_B\rangle d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\quad +\int\limits_{\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0))} g\mathcal{D}\phi d\mathcal{H}^n + \\
&\quad +\int\limits_{\partial(\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0))} g\langle \delta\phi, \nu_B\rangle d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\quad +\int\limits_{\mathcal{S}\setminus B_\varepsilon(x_0)} g\mathcal{D}\phi d\mathcal{H}^n \\
&= \int\limits_{\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0)} g\mathcal{D}\phi d\mathcal{H}^n + \int\limits_{\mathcal{S}\setminus B_\varepsilon(x_0)} g\mathcal{D}\phi d\mathcal{H}^n
\end{aligned}$$

e cioè il fatto che

$$\int\limits_{\mathcal{S}} \phi \mathcal{D} g d\mathcal{H}^n = \int\limits_{\mathcal{S}} g\mathcal{D}\phi d\mathcal{H}^n.$$

Da questo, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{S}} \phi \mathcal{D} g d\mathcal{H}^n &= \frac{n(2-n)}{\varepsilon^n} \int\limits_{\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0)} g(x) d\mathcal{H}^n(x) \\
&\quad + n(2-n) \int\limits_{\mathcal{S}\setminus B_\varepsilon(x_0)} \frac{g(x)\langle x-x_0, \nu\rangle^2}{|x-x_0|^{n+2}} d\mathcal{H}^n(x).
\end{aligned}$$

Presa, in quest'ultima formula, $g \geq 0$ e facendo tendere $\varepsilon \to 0$, tenendo presente che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathcal{H}^n(\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0))}{\varepsilon^n} = \omega_n,$$

grazie al teorema della convergenza dominata, si ricava che

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \frac{\mathcal{D}g}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathcal{S}} \phi \mathcal{D}g d\mathcal{H}^n \\ &\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{n(2-n)}{\varepsilon^n} \int_{\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0)} g(x) d\mathcal{H}^n(x) \\ &= n(2-n)\omega_n g(x_0),\end{aligned}$$

cioè

$$g(x_0) \leq -\frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathcal{S}} \frac{\mathcal{D}g}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n. \tag{31}$$

Se si prende g non necessariamente a supporto compatto, la disequazione precedente (31) vale con al posto di g la funzione ξg, con $\xi \geq 0$ funzione cut-off che vale 1 in un intorno di x_0 ed è a supporto compatto in $\mathcal{S}$. In questo caso la (31) diventa

$$g(x_0) \leq -\frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathcal{S}} \frac{\xi\mathcal{D}g + g\mathcal{D}\xi + 2\langle\delta\xi, \delta g\rangle}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n.$$

Teniamo presente che

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \frac{\langle\delta\xi(x), \delta g(x)\rangle}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n &= -\int_{\mathcal{S}} g \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \left(\frac{\delta\xi(x)}{|x-x_0|^{n-2}}\right) d\mathcal{H}^n \\ &= -\int_{\mathcal{S}} g \frac{\mathcal{D}\xi(x)}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n \\ &\quad +(n-2) \int_{\mathcal{S}} g \frac{\langle\delta\xi(x), x-x_0\rangle}{|x-x_0|^n} d\mathcal{H}^n\end{aligned}$$

e scegliamo quindi ξ funzione che vale 1 in $B_{R/2}(x_0)$,

$$|\delta\xi| \leq C/R, \quad |\mathcal{D}\xi| \leq C^2/R^2$$

e ξ nulla esternamente a $B_R(x_0)$; con questa scelta di ξ si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \frac{g\mathcal{D}\xi}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n &= \int_{\mathcal{S}\cap(B_R(x_0)\setminus B_{R/2}(x_0))} \frac{g\mathcal{D}\xi}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n \\ &\leq \frac{1}{(R/2)^{n-2}} \int_{\mathcal{S}\cap(B_R(x_0)\setminus B_{R/2}(x_0))} g\mathcal{D}\xi d\mathcal{H}^n \\ &\leq \frac{C^2 2^{n-2}}{R^n} \int_{\mathcal{S}\cap B_R(x_0)} g d\mathcal{H}^n\end{aligned}$$

mentre

$$\int_{\mathcal{S}} g\frac{\langle\delta\xi, x-x_0\rangle}{|x-x_0|^n}d\mathcal{H}^n = \int_{\mathcal{S}\cap(B_R(x_0)\setminus B_{R/2}(x_0))} g\frac{\langle\delta\xi, x-x_0\rangle}{|x-x_0|^n}d\mathcal{H}^n$$
$$\geq -\frac{C2^n}{R^n}\int_{\mathcal{S}\cap B_R(x_0)} gd\mathcal{H}^n.$$

In definitiva, troviamo che

$$g(x_0) \leq -\frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int_{\mathcal{S}} \frac{\xi\mathcal{D}g}{|x-x_0|^{n-2}}d\mathcal{H}^n + \frac{C}{R^n}\int_{\mathcal{S}\cap B_R(x_0)} gd\mathcal{H}^n.$$

Quindi, se per g prendiamo una sub–soluzione dell'operatore di Laplace–Beltrami $\mathcal{D}$, cioè $\mathcal{D}g \geq 0$, otteniamo che

$$g(x_0) \leq \frac{C}{R^n}\int_{\mathcal{S}\cap B_R(x_0)} gd\mathcal{H}^n.$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente lemma, con l'osservazione che nel caso $n = 2$ la dimostrazione va un po' cambiata, in quanto in questo al posto della funzione $|x-x_0|^{2-n}$ va considerata la funzione $\ln|x-x_0|$; rimandiamo all'articolo di Neil Trudinger [**39**] per maggiori dettagli.

Lemma 5.3. *Se g è una sub–soluzione positiva per l'operatore di Laplace–Beltrami, si ha*

$$g(x_0) \leq \frac{C}{R^n}\int_{\mathcal{S}\cap B_R(x_0)} gd\mathcal{H}^n \tag{32}$$

per una qualche costante C dipendente solo da n.

Come sub–soluzione positiva prendiamo la funzione definita in (30)

$$w = -\ln\nu_{n+1} = \ln\sqrt{1+|Du|^2} = \ln v.$$

Per motivi di comodità, possiamo supporre che $x_0 = 0$ e che $u(x_0) = 0$; la (32) per la funzione w diventa quindi

$$w(0) \leq \frac{C}{R^n}\int_{|x|^2+u^2\leq R^2} wvdx \leq \frac{C}{R^n}\int_{|x|,|u|\leq R} wvdx. \tag{33}$$

Denotiamo con S_R la palla di $\mathbb{R}^n$ centrata in 0 e di raggio R, con R scelto in modo che $S_{3R} \subset \Omega$; definiamo

$$u_R(x) = \begin{cases} 2R & u \geq R \\ \\ u(x) + R & |u(x)| \leq R \\ \\ 0 & u(x) \leq -R. \end{cases}$$

Inserendo in (10), nel caso dell'equazione delle superficie minime, la funzione test $wu_R\eta$ con $\eta = 1$ su S_R, $\eta \geq 0$ funzione opportuna da scegliere in seguito, si ottiene che

$$0 = \int \frac{\eta u_R}{v} \langle Du, Dw \rangle dx + \int\limits_{|u| \leq R} \frac{\eta w |Du|^2}{v} dx + \int \frac{w u_R}{v} \langle Du, D\eta \rangle dx.$$

Tenendo presente che $|Du|/v \leq 1$, si ha che

$$\begin{aligned} \int\limits_{|x|,|u| \leq R} \frac{w|Du|^2}{v} dx &\leq \int\limits_{|u| \leq R} \frac{\eta w |Du|^2}{v} dx \\ &= -\int \frac{\eta u_R}{v} \langle Du, Dw \rangle dx - \int \frac{w u_R}{v} \langle Du, D\eta \rangle dx \\ &\leq 2R \int\limits_{\substack{|x| \leq 2R \\ u \geq -R}} (\eta |Dw| + w |D\eta|) dx. \end{aligned} \tag{34}$$

Studiamo separatamente i due termini di destra; denotiamo con $C_{2R} = S_{2R} \times \mathbb{R}$, e da (21) si ottiene che per ogni $\phi \in \mathcal{C}_0^1(C_{2R})$ con $\phi \geq 0$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi^2 |\delta w|^2 d\mathcal{H}^n &\leq \int\limits_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi^2 \mathcal{D} w d\mathcal{H}^n \\ &= -2 \int\limits_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi \langle \delta\phi, \delta w \rangle d\mathcal{H}^n. \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Hölder, si ricava quindi che

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi |\delta w| d\mathcal{H}^n &\leq \left(\int\limits_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi^2 |\delta w|^2 d\mathcal{H}^n \right)^{1/2} \mathcal{H}^n(\mathcal{S} \cap \mathrm{spt}\phi)^{1/2} \\ &\leq \left(2 \|\delta\phi\|_\infty \int\limits_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi |\delta w| d\mathcal{H}^n \right)^{1/2} (\mathcal{H}^n(\mathcal{S} \cap \mathrm{spt}\phi))^{1/2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\int\limits_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi |\delta w| d\mathcal{H}^n \leq 2 \|\delta\phi\|_\infty \mathcal{H}^n(\mathcal{S} \cap \mathrm{spt}\phi). \tag{35}$$

Prendiamo ϕ della forma

$$\phi(x, x_{n+1}) = \eta(x)\tau(x_{n+1})$$

con $\tau \in \mathcal{C}_0^1(-2R, R + \sup_{S_{2R}} u)$, $\tau = 1$ in $(-R, \sup_{S_{2R}} u)$, $|\tau'| \leq 2/R$, $0 \leq \tau \leq 1$ ed $0 \leq \eta \leq 1$, $|D\eta| \leq 2/R$ con $\eta = 0$ se $|x| > 2R$. Dalla (35), utilizzando (22) con ν_{n+1} dato che w non dipende da x_{n+1}, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -R}} \eta|Dw|dx &\leq \int\limits_{\mathcal{S}\cap C_{2R}} \phi|Dw|dx \\
&\leq \int\limits_{\mathcal{S}\cap C_{2R}} \phi|\delta w|d\mathcal{H}^n \\
&\leq \frac{C}{R}\mathcal{H}^n(\mathcal{S}\cap \mathrm{spt}\phi) = \frac{C}{R}\int\limits_{\mathcal{S}\cap C_{2R}} vdx \\
&\leq \frac{C}{R}\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -2R}} vdx. \qquad (36)
\end{aligned}$$

Dato che $w \leq v$, si ricava che

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -R}} w|D\eta|dx &\leq \frac{C}{R}\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -R}} vdx \\
&\leq \frac{C}{R}\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -2R}} vdx. \qquad (37)
\end{aligned}$$

Studiamo quindi l'integrale

$$\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -2R}} vdx;$$

a tale fine, prendiamo come funzione test in (10) la funzione

$$\varphi(x) = \varsigma(x)\max\{u(x) + 2R, 0\}$$

con $\varsigma = 1$ su S_{2R}, ς nulla all'esterno di S_{3R} e $|D\varsigma| \leq 2/R$. Si ottiene che

$$\begin{aligned}
0 &= \int \frac{\langle D\varphi, Du\rangle}{v}dx \\
&= \int\limits_{\substack{2R\leq|x|\leq 3R\\ u\geq -2R}} \frac{u+2R}{v}\langle D\varsigma, Du\rangle dx + \int\limits_{u\geq -2R} \frac{\varsigma|Du|^2}{v}dx,
\end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\substack{|x|\le 2R\\ u\ge -2R}} v dx &\le \int\limits_{u\ge -2R} \varsigma v dx = \int\limits_{u\ge -2R} \frac{\varsigma}{v} v^2 dx \\
&= \int\limits_{u\ge -2R} \frac{\varsigma}{v} dx + \int\limits_{u\ge -2R} \frac{\varsigma |Du|^2}{v} dx \\
&\le cR^n + \int\limits_{u\ge -2R} \frac{\varsigma |Du|^2}{v} dx \\
&= cR^n - \int\limits_{\substack{2R\le |x|\le 3R\\ u\ge -2R}} \frac{u+2R}{v} \langle D\varsigma, Du\rangle dx \\
&\le R^n \left(c + \frac{c}{R} \sup_{S_{3R}} u \right) \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Mettendo insieme le (33), (36), (37) e (38), ricaviamo

$$
\begin{aligned}
w(0) &\le \frac{c}{R^n} \int\limits_{|x|,|u|\le R} wv dx \\
&= \frac{c}{R^n} \int\limits_{|x|,|u|\le R} \frac{w}{v} dx + \frac{c}{R^n} \int\limits_{|x|,|u|\le R} \frac{w|Du|^2}{v} dx \\
&\le c\omega_n + \frac{c}{R^{n-1}} \int\limits_{\substack{|x|\le 2R\\ u\ge -R}} (w|D\eta| + \eta |Dw|) dx \\
&\le c\omega_n + \frac{c}{R^n} \int\limits_{\substack{|x|\le 2R\\ u\ge -2R}} v dx \\
&\le c_1 + \frac{c_2}{R} \sup_{S_{3R}} u,
\end{aligned}
$$

e quindi prendendo l'esponenziale,

$$
v(0) \le c_1 \exp\left(\frac{c_2}{R} \sup_{S_{3R}} u \right),
$$

da cui la stima desiderata

$$
|Du(0)| \le \sqrt{1 + |Du(0)^2|} \le v(0) \le c_1 \exp\left(\frac{c_2}{R} \sup_{S_{3R}} u \right).
$$

6. La stima del gradiente per le soluzioni intere

Sia $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ soluzione intera dell'equazione delle superficie minime e sia

$$u(x) \geq -K|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, K > 0. \tag{39}$$

Avremo allora per x fissato e $\varrho > |x|$

$$u(x) + K\varrho \geq 0.$$

Dal Teorema di Bombieri, De Giorgi e Miranda 5.2 ricaviamo

$$\sqrt{1 + |Du(x)|^2} \leq C_1 \exp\left(C_2 \frac{u(x) + K\varrho}{\varrho - |x|}\right).$$

Facendo tendere ϱ a $+\infty$ otteniamo

$$\sqrt{1 + |Du(x)|^2} \leq C_1 \exp(C_2 K), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, grazie al Teorema di Bernstein e Moser 3.3, otteniamo

$$Du \equiv \text{costante}.$$

Vale quindi, per ogni valore di n, la tesi del Teorema di Bernstein, a condizione che sia valida la (39).

CAPITOLO 6

Alcuni richiami della teoria dei perimetri e il Teorema di Simons

1. Perimetri degli insiemi misurabili

La definizione di perimetro di un insieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue fu data da De Giorgi nel 1954 [**8**] e [**9**] e da lui utilizzata per lo studio di alcuni problemi variazionali classici, come la proprietà isoperimetrica della sfera e il Problema di Antoine Ferdinand Plateau (1801–1883) .

Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue e se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto, indicheremo con $\mathrm{P}(E, \Omega)$ la seguente espressione

$$\mathrm{P}(E, \Omega) := \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \phi(x) dx : \phi \in [\mathcal{C}_0^1(\Omega)]^n, |\phi(x)| \leq 1 \right\}.$$

Nel caso di $\Omega = \mathbb{R}^n$ si scrive $\mathrm{P}(E)$ per $\mathrm{P}(E, \mathbb{R}^n)$ e si parla di perimetro di E.

Fu lo stesso De Giorgi a dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica

$$\min\{|E|, |\mathbb{R}^n \setminus E|\} \leq \sigma(n) \mathrm{P}(E)^{\frac{n}{n-1}}, \quad \forall n > 1, \forall E \subset \mathbb{R}^n \tag{40}$$

dove $\sigma(n) = \omega_n (n\omega_n)^{\frac{n}{n-1}}$, con ω_n eguale alla misura della palla unitaria.

La (40) diventa una eguaglianza solo nel caso di E o $\mathbb{R}^n \setminus E$ eguale ad una palla. Quindi De Giorgi dimostrò la proprietà isoperimetrica delle sfere in ogni dimensione $n \geq 2$.

2. Frontiere minime

Diremo che E ha frontiera minima in Ω se il $\mathrm{P}(E, \Omega)$ è minimo, cioè se valgono le diseguaglianze

$$\mathrm{P}(E, \Omega) < +\infty,$$

e

$$\mathrm{P}(E,\Omega) \le \mathrm{P}(F,\Omega) \quad \forall F\Delta E \subset\subset \Omega.$$

Ricordiamo che $F\Delta E$ sta per $(F \setminus E) \cup (E \setminus F)$. Diremo infine che E ha localmente frontiera minima se E ha frontiera minima in ogni aperto $A \subset\subset \Omega$.

Per le frontiere minime De Giorgi dimostrò il seguente Teorema di regolarità.

TEOREMA 6.1 (De Giorgi[**7, 25**]). *Se E ha perimetro localmente minimo in Ω, allora esiste un aperto $A \subset \Omega$ con le seguenti proprietà:*

(1) *la misura $(n-1)$–dimensionale di $\Omega \setminus A$ è nulla;*
(2) *ogni punto $x \in \partial E \cap A$ è un punto regolare, cioè esiste un intorno di esso nel quale la frontiera di E è il grafico di una funzione reale analitica di $n-1$ variabili.*

3. Singolarità delle frontiere minime

De Giorgi lavorò per anni alla dimostrazione della non esistenza di singolarità sulle frontiere minime, cioè alla dimostrazione della identità

$$A = \Omega, \tag{41}$$

dove A ed Ω hanno il significato dato loro nel Teorema 6.1.

De Giorgi [**36, 38, 37**] riuscì a ridurre il problema (41) al caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^n$ ed E cono di vertice 0, cioè funzione caratteristica di E omogenea di grado zero, e

$$A = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Se alle ipotesi ora scritte si aggiunge $n = 2$, si ottiene facilmente la regolarità in 0, cioè $A = \mathbb{R}^2$, da cui risulta

$$E = \text{semipiano}.$$

Il caso $n = 3$ fu risolto nel modo previsto da De Giorgi, per mano di Wendell Helmes Fleming (1928–) nel 1962 [**16**].

Un ulteriore piccolo passo fu dato da Frederick Justin Almgren jr. (1928–1997) nel 1966 [**1**], provando la non esistenza di coni minimi singolari in $\mathbb{R}^4$.

Poco più tardi, nel 1968, James Simons (1928–) [**34**] arrivò fino ai coni in $\mathbb{R}^7$, con un brillante calcolo di geometria differenziale classica che utilizzava, per il cono 7–dimensionale con frontiera analitica 6–dimensionale nei punti diversi dal vertice, semplicemente la nullità della variazione prima della misura della frontiera, e la positività della variazione seconda negli stessi punti.

Tutte queste condizioni erano soddisfatte dal cono, visto da Simons come limite per la validità del suo teorema,

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^4, |x|^2 - |y|^2 > 0\}$$

la cui frontiera

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^4, |x|^2 = |y|^2\} \tag{42}$$

è singolare nel vertice $(0, 0)$.

Simons considerò il suo risultato come il massimo nella strada della regolarità dei coni minimi, affermando di essere convinto della minimalità della frontiera conica (42).

Il calcolo di Simons è stato presentato nel Corso e in questo Capitolo sarà riportato con tutti i dettagli.

La congettura di Simons riguardante il cono (42) è stata dimostrata vera dallo stesso De Giorgi, con la collaborazione di Bombieri e Enrico Giusti (1940–), nel 1969 [**4**]. Una sua dimostrazione trovata da Massari (1947–) e me stesso è stata presentata nel Corso e verrà riportata nel Capitolo 7.

Ma l'avventura del cono di Simons non finisce qui. Ancora De Giorgi, ancora con la collaborazione di Bombieri e Giusti, fu capace di provare l'esistenza di una soluzione intera dell'equazione delle superficie minime, in 8 variabili, avente come zeri i punti della frontiera del cono di Simons. Quindi una soluzione intera non banale!

Quest'ultimo risultato, frutto anche di un fantastico calcolo, è stato presentato nel Corso in maniera resa meno faticosa dall'uso di MATHEMATICA™.

Quindi il Teorema di Bernstein non può essere esteso a funzioni di 8 o più variabili.

E ciò diventa ancora più importante, se si considera l'osservazione fatta da Fleming [**16**] e ritoccata da De Giorgi [**12**], per la quale la non esistenza di coni minimi singolari in $\mathbb{R}^7$ implica la validità del Teorema di Bernstein per funzioni di 7 variabili.

4. Il calcolo di Simons

Questo paragrafo è preso dalla monografia di Massari e me stesso [**26**].

Il calcolo di Simons inizia con l'esprimere la variazione prima e seconda della misura di una frontiera regolare in uno spazio euclideo di $(n+1)$ dimensioni. Le due espressioni sono date in forma integrale e in esse la variabile è una funzione a supporto compatto, che può essere tanto piccolo quanto occorre.

Possiamo quindi muoverci su un pezzo di superficie grafico di una funzione reale $u \in \mathcal{C}^2(A)$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$. La superficie $\mathcal{S}$ sulla quale faremo i nostri calcoli è il grafico della u e il versore normale sulla superficie $\mathcal{S}$ è dato da

$$\nu(y) = \left(-\frac{Du(y)}{\sqrt{1+|Du(y)^2|}}, \frac{1}{\sqrt{1+|Du(y)^2|}} \right), \quad y \in A.$$

Per i nostri calcoli avremo bisogno di muoverci nel cilindro $A \times \mathbb{R}$ e indicheremo con x i punti di esso; avremo anche bisogno di estendere la definizione di ν a tutto il cilindro, ciò che faremo ponendo

$$\nu(x) = \nu(y)$$

se $x = (y, x_{n+1})$. Per le notazioni che useremo in questo paragrafo ci riferiremo a quanto introdotto nel capitolo 5, sezione 4.

5. Variazione prima di $\mathcal{H}^n(\mathcal{S})$

Per ogni funzione $g \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$, e per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, dove ε è scelto in modo che per ogni $x \in \mathcal{S}$ sia

$$G_t(x) := x + tg(x)\nu(x) \in \Omega.$$

La $G_t\mathcal{S}$ risulterà essere una deformazione della $\mathcal{S}$ e ha misura finita se ha misura finita la $\mathcal{S}$. Potremo allora calcolare la derivata

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S})\Big|_{t=0}.$$

Il risultato di tale calcolo è la variazione prima che ci interessa e per essa dimostreremo l'eguaglianza

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S})\Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{S}} \sum_h (\delta_h \nu_h) d\mathcal{H}^n. \tag{43}$$

Nel seguito scriveremo

$$\sum_h \quad \text{per} \quad \sum_{h=1}^{n+1}$$

e manterremo inalterata la sommatoria

$$\sum_{h=1}^{n}.$$

Per la dimostrazione di (43) si introduce la rappresentazione parametrica per la superficie $G_t\mathcal{S}$ data da $\phi(A)$ dove ϕ è definita da

$$\phi(y) = \sum_{h=1}^{n} e_h y_h + u(y)e_{n+1} + tg(y, u(y))\nu(y) = (y, u(y)) + tg(y, u(y))\nu(y),$$

dove con $e_1, \ldots, e_{n+1}$ si è indicata la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$. Valgono allora le

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} = \varepsilon_{ij} + t\left(D_i g + D_{n+1} g \frac{\partial u}{\partial y_i}\right)\nu_j + tg\frac{\partial \nu_j}{\partial y_i}$$

dove ε_{ij} è il simbolo di Kronecker, e

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial y_i} = \frac{\partial u}{\partial y_i} + t\left(D_i g + D_{n+1} g \frac{\partial u}{\partial y_i}\right)\nu_{n+1} + tg\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_i}$$

e, per quanto riguarda il tensore metrico

$$(\lambda_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n} = \sum_h \left(\frac{\partial \phi_h}{\partial y_i}\frac{\partial \phi_h}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\lambda_{ij} &= \sum_{h=1}^{n}\Big(\Big(\varepsilon_{ih}+t\Big(D_i g + D_{n+1}g\frac{\partial u}{\partial y_i}\Big)\nu_h + tg\frac{\partial \nu_h}{\partial y_i}\Big)\cdot\\
&\quad \cdot\Big(\varepsilon_{jh}+t\Big(D_j g + D_{n+1}g\frac{\partial u}{\partial y_j}\Big)\nu_h + tg\frac{\partial \nu_h}{\partial y_j}\Big)\Big)\\
&\quad +\Big(\frac{\partial u}{\partial y_i}+t\Big(D_i g + D_{n+1}g\frac{\partial u}{\partial y_i}\Big)\nu_{n+1} + tg\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_i}\Big)\cdot\\
&\quad \cdot\Big(\frac{\partial u}{\partial y_j}+t\Big(D_j g + D_{n+1}g\frac{\partial u}{\partial y_j}\Big)\nu_{n+1} + tg\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_j}\Big)\\
&= \varepsilon_{ij}+\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial y_j}\\
&\quad +tg\Big(\frac{\partial \nu_i}{\partial y_j}+\frac{\partial \nu_j}{\partial y_i}+\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_j}+\frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_i}\Big)\\
&\quad +t^2\Big((D_i g + D_{n+1}g\frac{\partial u}{\partial y_i})(D_j g + D_{n+1}g\frac{\partial u}{\partial y_j}) + g^2\sum_h \frac{\partial \nu_h}{\partial y_i}\frac{\partial \nu_h}{\partial y_j}\Big)\\
&= \frac{1}{\nu_{n+1}^2}\Big(\nu_{n+1}^2\varepsilon_{ij}\nu_i\nu_j\\
&\quad +tg\Big(\nu_{n+1}^2\Big(\frac{\partial \nu_j}{\partial y_i}+\frac{\partial \nu_i}{\partial y_j}\Big)-\nu_{n+1}\Big(\nu_i\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_j}+\nu_j\frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial y_i}\Big)\Big)\\
&\quad +t^2\Big((\nu_{n+1}D_i g-\nu_i D_{n+1}g)(\nu_{n+1}D_j g-\nu_j D_{n+1}g)\\
&\quad +g^2\nu_{n+1}^2\sum_h \frac{\partial \nu_h}{\partial y_i}\frac{\partial \nu_h}{\partial y_j}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Possiamo allora scrivere per la misura di $G_t\mathcal{S}$

$$\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S}) = \int_A \sqrt{\det(\lambda_{ij})}\,dy,$$

la cui derivata è data da

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\int_A \frac{1}{\sqrt{\det(\lambda_{ij})}}\frac{d}{dt}\det(\lambda_{ij})dy.$$

Ricordando la formula per la derivata di un determinante

$$\frac{d}{dt}\det(\lambda_{ij}) = \det(\lambda_{ij})\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}^*\frac{d}{dt}\lambda_{ij},$$

dove (λ_{ij}^*) è la matrice inversa della matrice simmetrica (λ_{ij}), otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S})\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_A \sqrt{\det(\lambda_{ij})}\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}^*\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\int_A \frac{1}{\nu_{n+1}}\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}^*\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\Big|_{t=0} dy,\end{aligned}$$

avendo usato l'identità

$$\begin{aligned}\det\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) &= \det(\varepsilon_{ij}+\nu_i\nu_j\nu_{n+1}^{-2}) \\ &= \nu_{n+1}^{-2}.\end{aligned}$$

Per concludere osserviamo che

$$\lambda_{ij}^*\Big|_{t=0} = \varepsilon_{ij}-\nu_i\nu_j$$

e

$$\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\Big|_{t=0} = g\left(\frac{\partial\nu_j}{\partial y_i}+\frac{\partial\nu_i}{\partial y_j}\right) - g\nu_{n+1}^{-1}\left(\nu_i\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_j}+\nu_j\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_i}\right),$$

che porta a

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}^*\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\Big|_{t=0} &= 2g\sum_{i=1}\left(\frac{\partial\nu_i}{\partial y_i}-\nu_{n+1}^{-1}\nu_i\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_i}\right) \\ &\quad +g\nu_{n+1}\sum_{i,j=1}^n\left(\nu_i\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_i}+\nu_j\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_j}\right) \\ &\quad +g\nu_{n+1}^{-1}\Big((1-\nu_{n+1}^2)\sum_{j=1}^n\nu_j\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_j} \\ &\quad +(1-\nu_{n+1}^2)\sum_{i=1}^n\nu_i\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_i}\Big) \\ &= 2g\sum_{i=1}^n\frac{\partial\nu_i}{\partial y_i} = 2g\sum_i\delta_i\nu_i.\end{aligned}$$

Otteniamo in definitiva

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S})\Big|_{t=0} = \int_A\sum_h g(\delta_h\nu_h)\nu_{n+1}^{-1}dy = \int_{\mathcal{S}}\sum_h g(\delta_h\nu_h)d\mathcal{H}^n.$$

6. Variazione seconda di $\mathcal{H}^n(\mathcal{S})$

Derivando rispetto a t l'identità

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\int_A \sqrt{\det(\lambda_{ij})}\sum_{i,1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\lambda_{ij}dy$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S}) \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_A \sqrt{\det(\lambda_{ij})}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\right)^2\right. \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d^2}{dt^2}\lambda_{ij} \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt}\lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\right) dy.\end{aligned}$$

Per i tre addendi nell'integrale abbiamo

$$\left(\sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d}{dt}\lambda_{ij}\right)^2 \Big|_{t=0} = 4g^2\left(\sum_h \delta_h\nu_h,\right)^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \lambda^*_{ij}\frac{d^2}{dt^2}\lambda_{ij}\Big|_{t=0} \quad &= \quad \sum_{i,j=1}^n 2(\varepsilon_{ij}-\nu_i\nu_j)\nu_{n+1}^{-2}\Big((\nu_{n+1}\delta_i g - \nu_i\delta_{n+1}g)\cdot \\ &\quad \cdot(\nu_{n+1}\delta_j g - \nu_j\delta_{n+1}g) + g^2\nu_{n+1}^2\sum_h \frac{\partial\nu_h}{\partial y_i}\frac{\partial\nu_h}{\partial y_j}\Big) \\ &= \quad 2\nu_{n+1}^{-2}\Big(\nu_{n+1}^2\sum_{i=1}^n(\delta_i g)^2 + 2\nu_{n+1}^2(\delta_{n+1}g)^2 \\ &\quad +(1-\nu_{n+1}^2)(\delta_{n+1}g)^2 - (\delta_{n+1}g)^2 \\ &\quad +g^2\Big(\sum_{i=1}^n\sum_h\left(\frac{\partial\nu_h}{\partial y_i}\right)^2 - \nu_{n+1}^{-2}\sum_h(\delta_{n+1}\nu_h)^2\Big)\Big) \\ &= \quad 2|\delta g|^2 + 2g^2\Big(\sum_{i=1}^n\sum_h\Big(\delta_i\nu_h - \nu_i\nu_{n+1}^{-1}\delta_{n+1}\nu_h\Big)^2 \\ &\quad -\nu_{n+1}^{-2}\sum_h(\delta_{n+1}\nu_h)^2\Big) \\ &= \quad 2|\delta g|^2 + 2g^2\sum_{ih}(\delta_i\nu_h)^2.\end{aligned}$$

Abbiamo usato qui le identità $D_{n+1}\nu_h = 0$ e le conseguenti

$$\delta_{n+1}\nu_h = -\nu_{n+1}\sum_s \nu_s D_s \nu_h,$$

$$\begin{aligned}
\sum_h \sum_{i,j=1}^n \nu_i\nu_j \frac{\partial \nu_h}{\partial y_i}\frac{\partial \nu_h}{\partial y_j} &= \sum_h \left(\sum_{i=1}^n \nu_i \delta_i \nu_h + \nu_i^2 \sum_s \nu_s D_s \nu_h\right)^2 \\
&= \sum_h (-\nu_{n+1}\delta_{n+1}\nu_h - (1-\nu_{n+1}^2)\nu_{n+1}^{-1}\delta_{n+1}\nu_h)^2 \\
&= \nu_{n+1}^{-2}\sum_h (\delta_{n+1}\nu_h)^2.
\end{aligned}$$

Infine per calcolare $\sum_{i,j=1}^n \frac{d\lambda_{ij}^*}{dt}\frac{d\lambda_{ij}}{dt}\Big|_{t=0}$ ricordiamo che

$$\sum_{h=1}^n \lambda_{ih}^*\lambda_{hj} = \varepsilon_{ij},$$

che implica

$$\sum_{h=1}^n \left(\frac{d}{dt}\lambda_{ih}^*\right)\lambda_{hj} = -\sum_{h=1}^n \lambda_{ih}^*\frac{d}{dt}\lambda_{hj} = -b_{ij}$$

da cui, moltiplicando per λ_{jk}^* e sommando su j,

$$\frac{d}{dt}\lambda_{ik}^* = -\sum_{j=1}^n b_{ij}\lambda_{jk}^*.$$

Otteniamo quindi

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{d}{dt}\lambda_{ik}^*\frac{d}{dt}\lambda_{ki} = -\sum_{i,j,k=1}^n b_{ij}\lambda_{jk}^*\frac{d}{dt}\lambda_{ki} = -\sum_{i,j=1}^n b_{ij}b_{ji}.$$

Per $t=0$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
b_{ij}\Big|_{t=0} &= \sum_{h=1}^{n}\lambda^*_{ih}\frac{d}{dt}\lambda_{hj}\Big|_{t=0}\\
&= \sum_{h=1}^{n}(\varepsilon_{ih}-\nu_i\nu_h)\nu_{n+1}^{-2}\Big(\nu_{n+1}^2 g\Big(\frac{\partial\nu_j}{\partial y_h}+\frac{\partial\nu_h}{\partial y_j}\Big)\\
&\quad -g\nu_{n+1}\Big(\nu_j\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_h}+\nu_h\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_j}\Big)\Big)\\
&= g\Big(\frac{\partial\nu_j}{\partial y_i}+\frac{\partial\nu_i}{\partial y_j}\Big)-g\nu_{n+1}^{-1}\Big(\nu_j\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_i}+\nu_i\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_j}\Big)\\
&\quad -g\nu_i\sum_{h=1}^{n}\Big(\nu_h\frac{\partial\nu_j}{\partial y_h}+\nu_h\frac{\partial\nu_h}{\partial y_j}\Big)\\
&\quad +g\nu_{n+1}^{-1}\sum_{h=1}^{n}\nu_h\Big(\nu_i\nu_j\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_h}+\nu_i\nu_h\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_j}\Big)\\
&= g\Big(\frac{\partial\nu_j}{\partial y_i}+\frac{\partial\nu_i}{\partial y_j}\Big)-g\nu_{n+1}^{-1}\nu_j\frac{\partial\nu_{n+1}}{\partial y_i}+\nu_i g\nu_{n+1}^{-1}\delta_{n+1}\nu_j\\
&\quad -g\nu_i\nu_j\nu_{n+1}^{-2}\delta_{n+1}\nu_{n+1}\\
&= g\Big(\frac{\partial\nu_j}{\partial y_i}+\frac{\partial\nu_i}{\partial y_j}\Big)-g\nu_{n+1}^{-1}\nu_j\delta_i\nu_{n+1}+\nu_i g\nu_{n+1}^{-1}\delta_{n+1}\nu_j\\
&= 2g\Big(\delta_i\nu_j+\nu_j\sum_{h=1}^{n}\nu_h\frac{\partial\nu_i}{\partial y_h}\Big).
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}b_{ji}\Big|_{t=0} &= 4g^2\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\delta_i\nu_j+\nu_i\sum_{h=1}^{n}\nu_h\frac{\partial\nu_j}{\partial y_h}\Big)\Big(\delta_i\nu_j+\nu_j\sum_{k=1}^{n}\nu_k\frac{\partial\nu_i}{\partial y_k}\Big)\\
&= 4g^2\Big(\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_i\nu_j)^2-\sum_{i,j=1}^{n}\nu_{n+1}\delta_{n+1}\nu_i\sum_{h=1}^{n}\nu_h\frac{\partial\nu_i}{\partial y_h}\\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\nu_{n+1}\delta_{n+1}\nu_j\sum_{k=1}^{n}\nu_k\frac{\partial\nu_j}{\partial y_k}\\
&\quad +\sum_{i,j,h,k=1}^{n}\nu_i\nu_j\nu_h\nu_k\frac{\partial\nu_i}{\partial y_h}\frac{\partial\nu_j}{\partial y_k}\Big)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= 4g^2\Big(\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_i\nu_j)^2+\sum_{i=1}^{n}(\delta_{n+1}\nu_j)^2+\sum_{j=1}^{n}(\delta_{n+1}\nu_j)^2 \\
&\quad +(\delta_{n+1}\nu_{n+1})^2\Big) \\
&= 4g^2\sum_{i,j}(\delta_i\nu_j)^2.
\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che per la variazione seconda vale la formula

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}^n(G_t\mathcal{S})\Big|_{t=0}=\int_{\mathcal{S}}\Big(g^2\Big(c^2-\sum_{h,k}(\delta_h\nu_k)^2\Big)+\sum_i(\delta_i g)^2\Big)d\mathcal{H}^n. \tag{44}$$

7. Il Teorema di Simons

Considereremo ora il caso speciale di campi di vettori ν unitari omogenei in $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, cioè $\nu:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{S}^n$, con

$$\nu(x)=\nu\left(\frac{x}{|x|}\right),\quad \forall x,$$

perpendicolare alle semirette dall'origine, i.e.

$$\langle x,\nu(x)\rangle=0,\quad \forall x.$$

Se tali campi sono integrabili, le loro superficie normali sono superficie coniche con 0 per vertice.

Lemma 6.2 (Simons [**34**]). *Se $\nu:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{S}^n$ è omogeneo e integrabile, se $\langle x,\nu(x)\rangle=0$ e $\sum_i\delta_i\nu_i(x)=0$ $\forall x$, allora*

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2+c^4-|\delta c|^2\geq\frac{2c^2}{|x|^2},\quad \forall x\ t.c.\ c^2(x)>0.$$

Al solito $c^2=\sum_{i,j}(\delta_i\nu_j)^2$, $c=\sqrt{c^2}$ e $\mathcal{D}=\sum_h\delta_h\delta_h$.

Dim. Dalla definizione di c^2 e $\mathcal{D}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2 &= \frac{1}{2}\sum_{h,i,j}\delta_h\delta_h(\delta_i\nu_j)^2 \\
&= \sum_{h,i,j}\delta_h(\delta_i\nu_j\delta_h\delta_i\nu_j) \\
&= \sum_{h,i,j}(\delta_h\delta_i\nu_j)^2+\sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_h\delta_i\nu_j.
\end{aligned}$$

Sostituendo $\delta_h\delta_i$ con $\delta_i\delta_h + \sum_k(\nu_h\delta_i\nu_k - \nu_i\delta_h\nu_k)\delta_k$, otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_h\delta_i\nu_j &= \sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\left(\delta_i\delta_h\nu_j + \sum_k(\nu_h\delta_i\nu_k - \nu_i\delta_h\nu_k)\delta_k\nu_j\right)\\ &= \sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_i\delta_h\nu_j + \sum_{h,k,i,j}\delta_h\nu_i\delta_h\nu_k\delta_i\nu_j\delta_k\nu_j,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le identità $\sum_h \delta_h\nu_h = 0$ e $\sum_h \nu_h\delta_h = 0$. Scrivendo ancora $\delta_i\delta_h + \sum_k(\nu_h\delta_i\nu_k - \nu_i\delta_h\nu_k)\delta_k$ al posto di $\delta_h\delta_i$, otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_i\delta_h\nu_j &= \sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_i\delta_h\delta_h\nu_j\\ &\quad + \sum_{h,k,i,j}\delta_i\nu_j(\nu_h\delta_i\nu_k - \nu_i\delta_h\nu_k)\delta_k\delta_h\nu_j\\ &= -\sum_{i,j}\delta_i\nu_j\delta_i(c^2\nu_j)\\ &\quad + \sum_{h,k,i,j}\nu_h\delta_i\nu_j\delta_i\nu_k\delta_h\delta_k\nu_j\\ &\quad + \sum_{h,k,i,j} nu_h\delta_i\nu_j(\nu_k\delta_h\nu_s - \nu_h\delta_k\nu_s)\delta_s\nu_j\\ &= -c^4 - \sum_{k,i,j,s}\delta_i\nu_j\delta_i\nu_k\delta_k\nu_s\delta_s\nu_j,\end{aligned}$$

per la quale abbiamo usato l'identità $\mathcal{D}\nu_j = -c^2\nu_j$, data della Sezione 4. Abbiamo quindi

$$\sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_h\delta_i\nu_j = -c^4 - 2\sum_{k,i,j,s}\delta_i\nu_j\delta_i\nu_k\delta_k\nu_s\delta_s\nu_j,$$

che può anche essere scritta, usando le identità

$$\sum_k \delta_i\nu_k\delta_k\nu_s = -\sum_k \nu_k\delta_i\delta_k\nu_s, \quad \text{e} \quad \sum_j \delta_i\nu_j\delta_j\nu_s = -\sum_j \nu_j\delta_i\delta_j\nu_s,$$

come

$$\sum_{h,i,j}\delta_i\nu_j\delta_h\delta_h\delta_i\nu_j = -c^4 - 2\sum_{k,i,j,s}\nu_j\nu_k\delta_i\delta_k\nu_s\delta_i\delta_j\nu_s.$$

Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2 + c^4 = \sum_{h,i,j}(\delta_i\delta_h\nu_j)^2 - 2\sum_{k,i,j,s}\nu_j\nu_k\delta_i\delta_k\nu_s\delta_i\delta_j\nu_s.$$

Osserviamo ora che

$$c^2|\delta c|^2 = \frac{1}{4}\sum_i\left(\sum_{h,j}\delta_i(\delta_h\nu_j)^2\right)^2 = \sum_i\left(\sum_{h,j}\delta_h\nu_j\delta_i\delta_h\nu_j\right)^2$$

da cui, per $c^2 > 0$,

$$|\delta c|^2 = \frac{1}{c^2} \sum_i \left(\sum_{h,j} \delta_h \nu_j \delta_i \delta_h \nu_j \right)^2$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2 + c^4 - |\delta c|^2 &= \sum_{h,i,j} (\delta_h \delta_i \nu_j)^2 - 2 \sum_{k,i,j,s} \nu_j \nu_k \delta_i \delta_k \nu_s \delta_i \delta_j \nu_s \\
&\quad - c^{-2} \sum_i \left(\sum_{h,j} \delta_h \nu_j \delta_i \delta_h \nu_j \right)^2 .
\end{aligned}$$

Per poter dare una stima dal basso per il termine di destra in un dato punto $x \neq 0$, scegliamo $e_{n+1} = \nu(x)$.

Con questa ipotesi, per tutte le funzioni α abbiamo $\delta_{n+1}\alpha(x) = 0$ e $\delta_i \alpha(x) = D_i \alpha(x)$ per $i \leq n$.

In più, per ogni i;

$$\begin{aligned}
(\delta_i \delta_{n+1} \nu_{n+1})(x) &= (\delta_{n+1} \delta_i \nu_{n+1})(x) \\
&\quad + \sum_h (\nu_i \delta_{n+1} \nu_h - \nu_{n+1} \delta_i \nu_h) \delta_h \nu_{n+1}(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Per queste ragioni, nel punto x abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{h,i,j} (\delta_h \delta_i \nu_j)^2 - 2 \sum_{k,i,j,s} \nu_j \nu_k \delta_i \delta_k \nu_s \delta_i \delta_j \nu_s &= \sum_{h=1}^{n} \sum_{i,j} (\delta_h \delta_i \nu_j)^2 \\
&\quad - 2 \sum_{i,s=1}^{n} (\delta_i \delta_{n+1} \nu_s)^2 \\
&= \sum_{i,j,h=1}^{n} (\delta_h \delta_i \nu_j)^2 .
\end{aligned}$$

Se scegliamo $e_n = x|x|^{-1}$ e ricordiamo l'identità $\langle x, \nu(x) \rangle = 0$, che vale per tutte le x, abbiamo, nel punto x,

$$0 = \delta_i \langle x, \nu(x) \rangle = \sum_h ((\delta_i x_h) \nu_h + x_h \delta_i \nu_h) = \delta_i x_{n+1} + |x| \delta_i \nu_n ,$$

così per $i \leq n$,

$$0 = |x| \delta_i \nu_n(x), \quad \text{che implica } \delta_i \nu_n(x) = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} c^2|\delta c|^2 &= \sum_i \left(\sum_{h,j} \delta_h \nu_j \delta_i \delta_h \nu_j \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{h,j=1}^n \delta_h \nu_j \delta_i \delta_h \nu_j \right)^2 \\ &\leq c^2 \sum_{i=1}^n \sum_{h,j=1}^{n-1} (\delta_i \delta_h \nu_j)^2. \end{aligned}$$

Che implica, per $c^2 > 0$,

$$|\delta c|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{h,j=1}^{n-1} (\delta_i \delta_h \nu_j)^2.$$

Possiamo quindi concludere, nel dato punto x,

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2 + c^4 - |\delta c|^2 \geq 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} (\delta_i \delta_n \nu_j)^2 + 2\sum_{i=1}^n (\delta_i \delta_n \nu_n)^2.$$

Per quanto riguarda $\delta_i \delta_n \nu_j$, nel punto x abbiamo

$$\delta_i \delta_n \nu_j = \delta_n \delta_i \nu_j = D_n \delta_i \nu_j = \sum_h \frac{x_h}{|x|} D_h(\delta_i \nu_j) = -|x|^{-1} \delta_i \nu_j,$$

dove abbiamo usato i fatti: $x_n = |x|$, $x_h = 0\ \forall h \neq n$ e il fatto che $\delta_i \nu_j$ è omogeneo di grado -1.

Possiamo dire che

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} (\delta_i \delta_n \nu_j)^2 = |x|^{-2} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\delta_i \nu_j)^2 = |x|^{-2} c^2,$$

che implica: $\frac{1}{2}\mathcal{D}c^2 + c^4 - |\delta c|^2 \geq 2c^2|x|^{-2}$. □

Chiamiamo stazionaria una superficie $\mathcal{S}$ se la variazione prima della sua misura si annulla e la variazione seconda è non negativa. Per i coni stazionari abbiamo il seguente risultato, provato per primo da Simons [**34**].

TEOREMA 6.3 (Simons [**34**]). *I coni stazionari di dimensione sei sono piatti.*

Dim. Sfruttando il fatto che la variazione seconda (44) di $\mathcal{S}$ è positiva, si ottiene

$$\int_{\mathcal{S}} g^2 c^2 d\mathcal{H}^n \leq \int_{\mathcal{S}} |\delta g|^2 d\mathcal{H}^n$$

per ogni g con supporto compatto in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Quindi scrivendo la diseguaglianza per gc al posto di g, otteniamo

$$\int_{\mathcal{S}} g^2 c^4 d\mathcal{H}^n \leq \int_{\mathcal{S}} |g\delta c + c\delta g|^2 d\mathcal{H}^n.$$

Ma si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} |g\delta c + c\delta g|^2 d\mathcal{H}^n &= \int_{\mathcal{S}} \left(c^2|\delta g|^2 + g^2|\delta c|^2 + 2gc\langle \delta c, \delta g\rangle\right) d\mathcal{H}^n \\
&= \int_{\mathcal{S}} \left(c^2|\delta g|^2 + g^2|\delta c|^2 + \frac{1}{2}\left\langle \delta g^2, \delta c^2\right\rangle\right) d\mathcal{H}^n \\
&= \int_{\mathcal{S}} \left(c^2|\delta g|^2 + g^2\left(|\delta c|^2 - \frac{1}{2}\mathcal{D}c^2\right)\right) d\mathcal{H}^n.
\end{aligned}$$

Dal Lemma 6.2 ricaviamo

$$\int_{\mathcal{S}} g^2 c^4 d\mathcal{H}^n \leq \int_{\mathcal{S}} \left(c^2|\delta g|^2 + g^2\left(c^4 - 2c^2|x|^{-2}\right)\right) d\mathcal{H}^n,$$

e quindi

$$0 \leq \int_{\mathcal{S}} \left(c^2|\delta g|^2 - 2c^2|x|^{-2}g^2\right) d\mathcal{H}^n.$$

Questa disuguaglianza vale per tutte le g tali che $\int_{\mathcal{S}} g^2c^2|x|^{-2}d\mathcal{H}^n < +\infty$.

Scegliamo ora

$$g(x) = |x|^\alpha \left(\max(1, |x|)\right)^\beta,$$

i.e. $g(x) = |x|^\alpha$ per $|x| < 1$ e $g(x) = |x|^{\alpha+\beta}$ per $|x| > 1$.

Per soddisfare $\int_{\mathcal{S}} g^2c^2|x|^{-2}d\mathcal{H}^n < +\infty$, è sufficiente scegliere α e β tali che

$$\alpha > \frac{4-n}{s}, \quad \alpha + \beta < \frac{4-n}{2}.$$

Per una tale scelta di g, α, β la disuguaglianza diventa

$$(\alpha^2-2) \int_{\mathcal{S}\cap B_1(0)} |x|^{2\alpha-2}c^2 d\mathcal{H}^n + \left((\alpha+\beta)^2 - 2\right) \int_{\mathcal{S}\setminus B_1(0)} |x|^{2(\alpha+\beta)-2}c^2 d\mathcal{H}^n \geq 0.$$

Se scegliamo $\alpha^2 < 2$ e $(\alpha+\beta)^2 < 2$, la disuguaglianza scritta implica $c^2 \equiv 0$. Tutte le richieste per α e β possono essere soddisfatte se

$$\left(\frac{4-n}{2}\right)^2 < 2,$$

cioè $n = 2, 3, 4, 5, 6$. $\square$

Parte 4

CAPITOLO 7

Esistenza di un cono minimo singolare

Per il cono di $\mathbb{R}^8$ definito da

$$\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}^4, |x|^2 - |y|^2 > 0\}$$

valgono le ipotesi del teorema di Simons, ma esso è singolare nel vertice. Lo stesso Simons aveva espresso la convinzione che tale cono fosse di perimetro localmente minimo. La dimostrazione di questo fatto è contenuta nell'articolo di Bombieri, De Giorgi e Giusti del 1969 [**4**]. Successivamente Massari e me stesso nel 1983 [**24**] demmo una dimostrazione elementare di tale risultato, che qui presentiamo, ponendo per semplicità $x^2 = |x|^2$ per $x \in \mathbb{R}^k$.

1. Uno speciale polinomio con gli zeri sul cono di Simons

Proposizione 7.1. *Per il polinomio omogeneo di quarto grado*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2}\frac{x^2 + y^2}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^k$$

vale, per $k \geq 4$, la seguente diseguaglianza

$$(x^2 - y^2) Mf(x,y) \geq 0,$$

dove si è posto

$$Mf = \operatorname{div}\left(\frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}}\right).$$

Dim. Le derivate parziali della funzione f sono

$$D_{x_i} f = x_i x^2, \quad D_{y_i} f = -y_i y^2,$$

$$D^2_{x_i x_j} f = \varepsilon_{i,j} x^2 + 2x_i x_j, \quad D^2_{y_i y_j} f = -\varepsilon_{i,j} y^2 - 2y_i y_j, \quad D^2_{x_i y_j} f = 0.$$

In modo più compatto potremmo scrivere che

$$Df = (xx^2, -yy^2), \quad |Df|^2 = x^6 + y^6,$$

$$HfDf = 3(xx^4, yy^4), \langle HfDf, Df\rangle = 3x^8 - 3y^8,$$

$$\Delta f = (k+2)(x^2 - y^2).$$

In definitiva, l'operatore delle superficie minime applicato ad f dà come risultato

$$\begin{aligned} Mf &= (1+x^6+y^6)(k+2)(x^2-y^2) - 3(x^8-y^8) \\ &= (x^2-y^2)\left((1+x^6+y^6)(k+2) - 3(x^2+y^2)(x^4+y^4)\right) \\ &= (x^2-y^2)\left((k+2) + (x^6+y^6)(k-1) - 3(x^2y^4+x^4y^2)\right) \\ &= (x^2-y^2)\left((k-4)(x^6+y^6) + (k+2) + 3(x^2-y^2)^2(x^2+y^2)\right), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato l'identità

$$x^6+y^6 = x^4y^2 + x^2y^4 + (x^2-y^2)^2(x^2+y^2).$$

Abbiamo quindi dimostrato che, se $k \geq 4$, si ha

$$Mf > 0$$

se e solo se $x^2 > y^2$, mentre

$$Mf < 0$$

se e solo se $x^2 < y^2$. □

Indicheremo con

$$E_a = \{(x,y,z) : x, y \in \mathbb{R}^k, z < af(x,y)\},$$

cioè il subgrafico della funzione $af(x,y)$; vedremo che

$$E_\infty = \lim_{a\to+\infty} E_a = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}^4, x^2-y^2 > 0\} \times \mathbb{R},$$

dove il limite va inteso nel senso di L^1_{loc} per le funzioni caratteristiche. Dimostreremo che E_∞ è un cilindro la cui frontiera è minima e singolare in $\{(0,0)\} \times \mathbb{R}$. Tale proprietà vale anche per il cono di Simons, come ora dimostreremo.

2. Minimalità del cilindro

Tramite la Proposizione 7.1 dimostriamo ora la minimalità del cono di Simons; per fare questo, procediamo con un ragionamento di omogeneità. Partiamo con il seguente risultato di convergenza; denoteremo con

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R} : x^2-y^2 > 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2k} : x^2-y^2 > 0\} \times \mathbb{R} \\ &= E \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\tilde{E}_j = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R} : z < j^3 f(x,y)\}. \tag{45}$$

Proposizione 7.2. *Gli insiemi $\tilde{E}_j$ convergono ad $\tilde{E}$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$.*

Dim. Dire che $\tilde{E}_j$ converge ad $\tilde{E}$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ significa dire che le funzioni caratteristiche $\mathbf{1}_{\tilde{E}_j}$ convergono a $\mathbf{1}_{\tilde{E}}$ in $L^1(A)$ per ogni $A \subset\subset \mathbb{R}^{n+1}$. Per comodità, possiamo considerare gli insiemi

$$A = B_R(0) \times (-R, R), \quad B_R(0) \subset \mathbb{R}^n.$$

Quello che dobbiamo verificare è quindi che

$$\lim_{j \to +\infty} |(\tilde{E}_j \Delta \tilde{E}) \cap A| = 0. \tag{46}$$

Ma si nota facilmente che

$$|(\tilde{E}_j \Delta \tilde{E}) \cap A| \leq R \left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2k} : |f(x, y)| \leq \frac{R}{j^3} \right\} \right|.$$

Siccome chiaramente

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2k} : |f(x, y)| \leq \frac{R}{j^3} \right\} \right| \to 0$$

per $j \to +\infty$, allora la (46) segue. □

Dimostriamo infine che $\tilde{E}$ ha localmente frontiera minima, da cui, grazie alla Proposizione 7.6, segue anche che E ha localmente frontiera minima.

Abbiamo quindi il seguente lemma.

Lemma 7.3. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una sub–soluzione per l'operatore delle superficie minime; allora il sottografico di f*

$$E_f = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, t < f(x)\}$$

ha frontiera localmente minima in $\Omega \times \mathbb{R}$ per perturbazioni $F = E_f \setminus A$ con $A \subset\subset \Omega \times \mathbb{R}$, $A \subset E_f$.

Dim. Prendiamo un insieme $A \subset E_f$ con $A \subset\subset \Omega \times \mathbb{R}$ di perimetro finito e scriviamo $\mathcal{F}A = \partial_1 A \cup \partial_2 A$ con $\partial_1 A \subset \partial E_f$ e $\partial_2 A = \mathcal{F}A \setminus \partial_1 A$, dove con $\mathcal{F}A$ intendiamo la frontiera ridotta di A, cioè la parte di ∂A per la quale si ha che

$$\mathrm{P}(A, \mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{H}^n(\mathcal{F}A).$$

Denotiamo con ν_f la normale uscente da E_f, cioè il vettore dato da

$$\nu_f(x) = \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

Tale vettore può essere esteso ad un campo definito su tutto $\Omega \times \mathbb{R}$ ponendo

$$\tilde{\nu}_f(x, x_{n+1}) = \nu_f(x).$$

Il campo così definito soddisfa la condizione

$$\mathrm{div}_{n+1}\,\tilde{\nu}_f(x,x_{n+1}) = \mathrm{div}\,\nu_f(x) = \mathcal{M}u \geq 0. \tag{47}$$

Su $\partial_1 A$ il vettore della normale entrante in A ν_A è dato da $\nu_A = -\nu_f$, quindi

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_A \mathrm{div}_{n+1}\,\tilde{\nu}_f(x,x_{n+1})dxdx_{n+1} \\
&= \int_{\partial A} \langle \tilde{\nu}_f(x,x_{n+1}), \nu_A(x,x_{n+1})\rangle d\mathcal{H}^n(x,x_{n+1}) \\
&= -\int_{\partial_1 A} \langle \nu_f, \nu_f\rangle d\mathcal{H}^n + \int_{\partial_2 A} \langle \tilde{\nu}_f, \nu_A\rangle d\mathcal{H}^n \\
&= -\mathcal{H}^n(\partial_1 A) + \int_{\partial_2 A} \langle \tilde{\nu}_f, \nu_A\rangle d\mathcal{H}^n \\
&\leq -\mathcal{H}^n(\partial_1 A) + \mathcal{H}^n(\partial_2 A)
\end{aligned}$$

Questo implica in particolare che

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F, \Omega\times\mathbb{R}) &= \mathcal{H}^n(\partial E_f \setminus \partial_1 A) + \mathcal{H}^n(\partial_2 A) \\
&\geq \mathcal{H}^n(\partial E_f \setminus \partial_1 A) + \mathcal{H}^n(\partial_1 A) \\
&= \mathrm{P}(E_f, \Omega\times\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

cioè la minimalità locale della frontiera di E_f. □

Teorema 7.4. *L'insieme $\tilde{E}$ ha localmente frontiera minima in $\mathbb{R}^{2k+1}$.*

Dim. Fissiamo l'insieme limitato di $\mathbb{R}^{2k+1}$ individuato da

$$\Omega_R = B_R(0)\times(0,R);$$

con $B_R(0)$ palla di $\mathbb{R}^{2k}$ di raggio R centrata in 0, dimostriamo anzitutto che $\tilde{E}$ ha frontiera minima in Ω_R per variazioni del tipo

$$\tilde{F} = \tilde{E}\setminus A,$$

con $A \subset E\times(0,R)$. Presi gli $\tilde{E}_j$ definiti da (45), tali insiemi sono, in $E\times(0,R)$, sotto–grafici di una sub–soluzione per l'equazione delle superficie minime, per quanto visto in (7.3) segue che se poniamo $A_j = A\setminus\tilde{E}_j$

$$\mathrm{P}(\tilde{E}\setminus A_j, \Omega_R) \leq \mathrm{P}(\tilde{E}\setminus A, \Omega_R).$$

Siccome risulta chiaro che $\tilde{E}\setminus A_j$ convergono in $L^1(\Omega_R)$ a $\tilde{E}$, per la semicontinuità inferiore del perimetro, si ottiene che

$$\mathrm{P}(\tilde{E},\Omega_R) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathrm{P}(\tilde{E}\setminus A_j,\Omega_R) \leq \mathrm{P}(\tilde{E}\setminus A,\Omega_R) = \mathrm{P}(\tilde{F},\Omega_R)$$

Analogamente, se fissiamo l'insieme limitato

$$\Omega_{-R} = B_R(0) \times (-R, 0)$$

e variazioni del tipo $\tilde{F} = \tilde{E} \cup A$ con $A \subset E^c \times (-R, 0)$, grazie al fatto che in $E^c \times (-R, 0)$ gli $\tilde{E}_j$ sono sotto–grafici di super–soluzioni per l'equazione delle superficie minime, analogamente al passo precedente si ottiene che

$$\mathrm{P}(\tilde{E}, \Omega_{-R}) \leq \mathrm{P}(\tilde{F}, \Omega_{-R}).$$

Per prendere variazioni $\tilde{F}$ di $\tilde{E}$ arbitrarie, supponiamo di avere

$$\tilde{F} \Delta \tilde{E} \subset\subset B_R(0) \times (-R/2, R/2);$$

introducendo le traslazioni

$$\tau_s(x, y, z) = (x, y, z + s), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2k}, z, s \in \mathbb{R},$$

si ottiene che, scrivendo $\tilde{F} = (\tilde{E} \setminus A_1) \cup A_2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\tilde{F}, B_R(0) \times (-R/2, R/2)) &= \mathrm{P}(\tau_R(\tilde{F}), \Omega_R) \\
&\geq \mathrm{P}(\tau_R(\tilde{E} \cup A_2), \Omega_R) \\
&= \mathrm{P}(\tau_{-R}(\tilde{E} \cup A_2), \Omega_{-R}) \\
&\geq \mathrm{P}(\tau_{-R}(\tilde{E}), \Omega_{-R}) \\
&= \mathrm{P}(\tilde{E}, B_R(0) \times (-R/2, R/2)).
\end{aligned}$$

□

3. Minimalità del cono di Simons

Per derivare la minimalità del cono da quella del cilindro, abbiamo bisogno di qualche risultato preliminare. Prima di tutto la seguente proprietà.

LEMMA 7.5. *Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $a < b \in \mathbb{R}$, si ha che*

$$\mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \Omega \times (a, b)) = (b - a)\mathrm{P}(E, \Omega)$$

per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$.

DIM. Ricordiamo che la definizione di perimetro di un insieme E in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ viene data tramite

$$\mathrm{P}(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \phi dx : \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\}.$$

Dimostriamo innanzitutto che

$$\mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \Omega \times (a, b)) \leq (b - a)\mathrm{P}(E, \Omega).$$

Data $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega \times (a, b), \mathbb{R}^{n+1})$, scritto $y = (x, x_{n+1})$ con $x \in \mathbb{R}^n$, otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{E\times\mathbb{R}} \operatorname{div}\phi(y)dy &= \int_{E\times\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} D_i\phi_i(x, x_{n+1})dxdx_{n+1} \\ &\quad + \int_{E\times\mathbb{R}} D_{n+1}\phi_{n+1}dxdx_{n+1}.\end{aligned}$$

Dato che per ogni $x \in \Omega$ si ha che $\phi(x, \cdot) \in \mathcal{C}_c^\infty(a, b)$, si ottiene che

$$\int_a^b D_{n+1}\phi_{n+1}dx_{n+1} = 0,$$

da cui

$$\int_{E\times\mathbb{R}} D_{n+1}\phi_{n+1}dxdx_{n+1} = 0.$$

Inoltre, siccome per ogni $x_{n+1} \in (a, b)$ la funzione φ definita da

$$\varphi(x) = (\phi_1(x, x_{n+1}), \ldots, \phi_n(x, x_{n+1}))$$

risulta in $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, se ne deduce che

$$\int_E \sum_{i=1}^{n} D_i\phi_i(x, x_{n+1})dx = \int_E \operatorname{div}\varphi dx \leq \mathrm{P}(E, \Omega).$$

In definitiva abbiamo ottenuto che

$$\begin{aligned}\int_{E\times\mathbb{R}} \operatorname{div}\phi(y) &= \int_a^b \int_E \sum_{i=1}^{n} D_i\phi^i(x, x_{n+1})dxdx_{n+1} \\ &\leq \int_a^b \mathrm{P}(E, \Omega) = (b - a)\mathrm{P}(E, \Omega).\end{aligned}$$

Per dimostrare la disuguaglianza inversa, presa $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, definiamo la funzione

$$\phi(x, x_{n+1}) = (\tau(x_{n+1}\varphi(x), \tau(x_{n+1}\xi(x)),$$

dove $\tau \in \mathcal{C}_c^\infty(a, b)$ è una funzione tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \tau(s)ds = b - a$$

e $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Siccome

$$\operatorname{div}\phi(x, x_{n+1}) = \tau(x_{n+1}) \operatorname{div}\varphi(x) + \xi(x)\tau'(x_{n+1}), \quad \forall x \in \Omega,$$

se ne deduce che

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{div} \phi(x, x_{n+1}) dx_{n+1} = (b-a) \operatorname{div} \varphi(x).$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx &= \frac{1}{b-a} \int_{E\times\mathbb{R}} \operatorname{div} \phi(x, x_{n+1}) dx dx_{n+1} \\
&\leq \frac{1}{b-a} \mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \Omega \times (a,b)),
\end{aligned}$$

da cui chiaramente la stima

$$\mathrm{P}(E, \Omega) \leq \frac{1}{b-a} \mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \Omega \times (a,b)).$$

□

Proposizione 7.6. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile; allora E ha localmente frontiera minima in $\mathbb{R}^n$ se e solo se $E \times \mathbb{R}$ ha localmente frontiera minima in $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Dim. La parte più facile di questa dimostrazione è l'implicazione che se E è minimo locale, allora anche $E \times \mathbb{R}$ è minimo locale. Difatti, preso $A \subset\subset \mathbb{R}^{n+1}$, dobbiamo dimostrare che

$$\mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, A) \leq \mathrm{P}(F, A), \quad \forall F \Delta E \times \mathbb{R} \subset\subset A.$$

Per comodità, possiamo supporre che $A = \Omega \times (a,b)$, con $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$; inoltre, per $t \in (a,b)$, indichiamo con

$$F_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,t) \in F\}.$$

È chiaro che $F_t \Delta E \subset\subset \Omega$, e quindi dalla minimalità locale di E

$$\mathrm{P}(E, \Omega) \leq \mathrm{P}(F_t, \Omega);$$

inoltre vale che

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F, \Omega \times (a,b)) &= \int_a^b \mathrm{P}(F_t, \Omega) dt \\
&\geq \int_a^b \mathrm{P}(E, \Omega) dt = (b-a) \mathrm{P}(E, \Omega) \\
&= \mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \Omega \times (a,b)).
\end{aligned}$$

Viceversa, presi arbitrariamente $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $F \Delta E \subset\subset \Omega$, dimostriamo che

$$\mathrm{P}(E, \Omega) \leq \mathrm{P}(F, \Omega).$$

A questo proposito, fissiamo $j \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, definiamo i seguenti insiemi

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times (-\varepsilon, j + \varepsilon),$$

e

$$\tilde{F} = (F \times (0, j)) \cup (E \times (j, j + \varepsilon)) \cup (E \times (-\varepsilon, 0));$$

la minimalità locale di $E \times \mathbb{R}$ implica che, siccome $\tilde{F}\Delta(E \times \mathbb{R}) \subset\subset \tilde{\Omega}$,

$$\mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \tilde{\Omega}) \leq \mathrm{P}(\tilde{F}, \tilde{\Omega}).$$

Tenendo quindi presente che

$$\mathrm{P}(E \times \mathbb{R}, \tilde{\Omega}) = (j + 2\varepsilon)\mathrm{P}(E, \Omega),$$

e

$$\mathrm{P}(\tilde{F}, \tilde{\Omega}) = j\mathrm{P}(F, \Omega) + 2|E\Delta F| + 2\varepsilon\mathrm{P}(E, \Omega) \leq j\mathrm{P}(F, \Omega) + 2|\Omega| + 2\varepsilon\mathrm{P}(E, \Omega),$$

si ottiene che

$$\mathrm{P}(E, \Omega) \leq \frac{j}{j + 2\varepsilon}\mathrm{P}(F, \Omega) + \frac{2}{j + 2\varepsilon}|\Omega| + \frac{2\varepsilon}{j + 2\varepsilon}\mathrm{P}(E, \Omega).$$

Facendo quindi i limiti $\varepsilon \to 0$ e $j \to +\infty$, si ottiene la minimalità locale di E. $\square$

CAPITOLO 8

Soluzioni intere non banali dell'equazione delle superficie minime

In questo capitolo costruiremo una funzione u definita su $\mathbb{R}^8$ e soluzione non banale dell'equazione delle superficie minime [**4**] e [**29**].

1. Preliminari

Iniziamo con il costruire due funzioni Φ_1 e Φ_2 tali che Φ_1 una sub-soluzione per l'operatore delle superficie minime e Φ_2 una super-soluzione con

$$0 < \Phi_1 < \Phi_2$$

nell'insieme

$$E = \{(x, y) : x, y \in R^4, x^2 - y^2 > 0\},$$

Φ_1 super-soluzione e Φ_2 sub-soluzione con $\Phi_2 < \Phi_1 < 0$ in $\mathrm{int}(E^c)$.

Più precisamente, stiamo cercando due funzioni $\Phi_i : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^8 \setminus \{(0,0)\}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^8)$ tali che:

- $\Phi_i(x, y) = -\Phi_i(y, x)$;
- in E si abbia $0 < \Phi_1 < \Phi_2$ e
$$M\Phi_1 > 0, \quad M\Phi_2 < 0;$$
- in $\mathrm{int}(E^c)$ si abbia $0 > \Phi_1 > \Phi_2$ e
$$M\Phi_1 < 0, \quad M\Phi_2 > 0.$$

Iniziamo con un po' di considerazioni preliminari. Siccome cercheremo due funzioni con la proprietà

$$\Phi_i(x, y) = -\Phi_i(y, x),$$

ci basta costruire tali funzioni in E con la condizione che $\Phi_i = 0$ su ∂E e $\Phi_i \in \mathcal{C}(\overline{E}) \cap \mathcal{C}^2(E \setminus (0, 0))$. Cercheremo le nostre funzioni come funzioni delle sole variabili

$$u = |x|, \quad v = |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^4.$$

Stiamo cercando quindi funzioni della forma

$$\Phi(x, y) = \Phi(u, v);$$

con queste ipotesi, si ottiene che

$$D_{x_i}\Phi = \Phi_u \frac{x_i}{|x|}, \quad D_{y_i}\Phi = \Phi_v \frac{y_i}{|y|},$$

mentre per le derivate seconde si ottiene

$$D_{x_i}D_{x_j}\Phi = \Phi_{uu}\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \Phi_u\left(\frac{\varepsilon_{i,j}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}\right),$$

$$D_{y_i}D_{y_j}\Phi = \Phi_{vv}\frac{y_i y_j}{|y|^2} + \Phi_v\left(\frac{\varepsilon_{i,j}}{|y|} - \frac{y_i y_j}{|y|^3}\right),$$

$$D_{x_i}D_{y_j}\Phi = \Phi_{uv}\frac{x_i y_j}{|x||y|}.$$

In questo modo il Laplaciano di Φ diventa:

$$\Delta\Phi = \Phi_{uu} + \Phi_{vv} + 3\frac{\Phi_u}{u} + 3\frac{\Phi_v}{v}.$$

Il gradiente può essere scritto nella forma

$$D\Phi = \left(\Phi_u\frac{x_j}{|x|}, \Phi_v\frac{y_j}{|y|}\right)$$

mentre la matrice Hessiana di Φ diventa

$$H\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{uu}\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \Phi_u\left(\frac{\varepsilon_{i,j}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}\right) & \Phi_{uv}\frac{x_i y_j}{|x||y|} \\ \Phi_{uv}\frac{y_i x_j}{|x||y|} & \Phi_{vv}\frac{y_i y_j}{|y|^2} + \Phi_v\left(\frac{\varepsilon_{i,j}}{|y|} - \frac{y_i y_j}{|y|^3}\right) \end{pmatrix}.$$

Si ottiene in questo modo che

$$\begin{aligned} M\Phi &= (1 + \Phi_u^2 + \Phi_v^2)\left(\Phi_{uu} + \Phi_{vv} + 3\left(\frac{\Phi_u}{u} + \frac{\Phi_v}{v}\right)\right) \\ &\quad -(\Phi_u^2\Phi_{uu} + 2\Phi_u\Phi_v\Phi_{uv} + \Phi_v^2\Phi_{vv}) \\ &= \underbrace{\Phi_v^2\Phi_{uu} + \Phi_u^2\Phi_{vv} - 2\Phi_u\Phi_v\Phi_{uv} + 3(\Phi_u^2 + \Phi_v^2)\left(\frac{\Phi_u}{u} + \frac{\Phi_v}{v}\right)}_{=M_0\Phi} \\ &\quad \underbrace{+\,\Phi_{uu} + \Phi_{vv} + 3\left(\frac{\Phi_u}{u} + \frac{\Phi_v}{v}\right)}_{=D_0\Phi} \end{aligned}$$

Cercheremo le nostre funzioni nella forma

$$\Phi(u, v) = \Gamma\left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u^2 - v^2}{2}\right) = \Gamma(r, z).$$

Abbiamo quindi che

$$\Phi_u = (\Gamma_r + \Gamma_z)u, \quad \Phi_v = (\Gamma_r - \Gamma_z)v,$$
$$\Phi_{uu} = \Gamma_r + \Gamma_z + (\Gamma_{rr} + \Gamma_{zz} + 2\Gamma_{rz})u^2,$$
$$\Phi_{vv} = \Gamma_r - \Gamma_z + (\Gamma_{rr} + \Gamma_{zz} - 2\Gamma_{rz})v^2,$$
$$\Phi_{uv} = (\Gamma_{rr} - \Gamma_{zz})uv.$$

Da queste formule, se definiamo

$$s = \sqrt{r}, \quad t = \frac{z}{r},$$

tenendo presente che in E si ha $t > 0$, si ottiene che

$$\Phi_u = s\sqrt{1+t}(g+f), \quad \Phi_v = s\sqrt{1-t}(g-f),$$
$$\Phi_{uu} = g + f + (1+t)(G + F + 2H),$$
$$\Phi_{vv} = g - f + (1-t)(G + F - 2H),$$
$$\Phi_{uv} = \sqrt{1-t^2}(G - F),$$

dove abbiamo posto

$$f = \Gamma_z, \quad g = \Gamma_r,$$
$$F = r\Gamma_{zz}, \quad G = r\Gamma_{rr}, \quad H = r\Gamma_{rz}.$$

In conclusione, si ottengono le seguenti formule

$$D_0\Phi = 2(F + G + 4tH + 4g) \tag{48}$$
$$M_0\Phi = 2r\Big((g^2 - f^2)(g + tf) + g(f^2 + g^2 + 2tfg) \tag{49}$$
$$+2(1-t^2)(f^2G + g^2F - 2fgH)\Big).$$

Costruzione di Φ_1. Per quanto riguarda la prima funzione, il problema è molto facile; basta infatti considerare la funzione

$$\Gamma_1(r, z) = z\sqrt{r} = zs = \Gamma_1(s, z)$$

dove si è considerato $s = \sqrt{r}$. Per questa funzione si trova subito che

$$f = s, \quad g = \frac{st}{2}, \quad F = 0, \quad G = -\frac{st}{4}, \quad H = \frac{s}{2}.$$

Quindi le (48) diventano

$$D_0\Phi_1 = \frac{11}{2}st$$
$$M_0\Phi_1 = \frac{45}{4}rs^3t^3,$$

cioè

$$M\Phi_1 = (x^2 - y^2)\underbrace{\left(\frac{11}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{45}{8\sqrt{2}}\frac{(x^2-y^2)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right)}_{\geq 0}. \tag{50}$$

Quindi la funzione

$$\Phi_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \tag{51}$$

è di classe $\mathcal{C}^2$ eccetto che nell'origine, positiva su $x^2 > y^2$ e negativa per $x^2 < y^2$ e infine essa è una super-soluzione per $x^2 > y^2$ mentre è una sub-soluzione per $x^2 < y^2$.

Costruzione di Φ_2. La costruzione della seconda funzione è alquanto più laboriosa; partiamo con il definire

$$\Gamma_0(r,z) = z\left(1+\sqrt{r}\left(1+A\left(\frac{z}{r}\right)^a\right)\right) = z(1+s(1+At^a)),$$

con $A \in (1,+\infty)$ ed $a \in (0,1/2)$ costanti da scegliere in modo opportuno e con $t > 0$. Per questa funzione si ha che

$$f = 1+\sqrt{r}\left(1+(1+a)A\left(\frac{z}{r}\right)^a\right) = 1+s(1+(1+a)At^a);$$

$$g = \frac{z}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r}A\left(\frac{z}{r}\right)^{a+1}\left(\frac{1}{2}-a\right) = \frac{st}{2} + sAt^{a+1}\left(\frac{1}{2}-a\right);$$

$$F = a(a+1)A\sqrt{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{-1+a} = a(a+1)Ast^{-1+a};$$

$$G = -\frac{z}{4\sqrt{r}} - A\left(\frac{1}{4}-a^2\right)\sqrt{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{a+1} = -\frac{st}{4} - A\left(\frac{1}{4}-a^2\right)st^{a+1};$$

$$H = \sqrt{r} + A\left(\frac{1}{2}-a\right)(1+a)\sqrt{r}\left(\frac{z}{r}\right)^a = s + A\left(\frac{1}{2}-a\right)(1+a)st^a.$$

Quindi si ottiene che

$$D_0\Phi_0 = \frac{11}{2}st + 2a(a+1)Ast^{-1+a} + A\left(\frac{11}{2}-10a-2a^2\right)st^{a+1};$$

Non è possibile dimostrare che questo termine ha segno costante, ma vale la seguente stima

$$D_0\Phi_0 \le 12Ast^{-1+a}.$$

Infatti, se consideriamo la funzione

$$h(t) = \frac{11}{2A}t^{2-a} + 2a(a+1) + \left(\frac{11}{2}-10a-2a^2\right)t^2,$$

definita in $[0,1]$, si nota che

$$h(0) = 2a(a+1) \in (0,5/4), \quad \forall a \in (0,1/2),$$

$$h(1) = \frac{11}{2}\left(\frac{A+1}{A}\right) - 8a \in (3/2,11), \forall a \in (0,1/2), \forall A \in (1,+\infty).$$

Inoltre, la funzione h ha derivata in t sempre positiva, e questo dimostra la nostra disuguaglianza.

Per quanto riguarda invece M_0, si ottiene che, se $a \in (5/16, 1/3)$ e A è sufficientemente grande,

$$M_0\Phi_0 \leq (3a-1)3aAt^{1+a}s^3t.$$

Abbiamo quindi che, siccome $a < 1/3$,

$$M_0\Phi_0 \leq 0.$$

In definitiva, per l'operatore delle superficie minime applicato a Φ_0 si ha

$$M\Phi_0 = D_0\Phi_0 + M_0\Phi_0 \leq sAt^{-1+a}\left(12 - (1-3a)3a(rt)^2\right).$$

Quindi riusciremo ad avere $M\Phi_0 \leq 0$ solo sotto la condizione

$$rt \geq \frac{2}{\sqrt{a(1-3a)}}$$

e non per tutte le scelte di $r > 0$ e $t > 0$. Per impedire di avere restrizioni su r e t cerchiamo una funzione K tale che, per $t > 0$, la funzione

$$\Phi_2 = K(\Phi_0)$$

soddisfi la condizione $M\Phi_2 \leq 0$ per ogni $r > 0$. Osserviamo subito che con questa scelta di Φ_2 valgono le relazioni

$$D_0\Phi_2 = K'(\Phi_0)D_0\Phi_0 + K''(\Phi_0)((\Phi_0)_u^2 + (\Phi_0)_v^2)$$
$$M_0\Phi_2 = (K'(\Phi_0))^3 M_0\Phi_0.$$

Detto questo, cercheremo la funzione K nella forma

$$K(\sigma) = \int_0^\sigma \exp\left(B\int_\tau^\infty \frac{w^{-1+a}}{1+w^{2a}}dw\right)d\tau, \quad B > 0.$$

Per tale funzione si ha che

$$K'(\sigma) = \exp\left(B\int_\sigma^\infty \frac{w^{-1+a}}{1+w^{2a}}dw\right) > 1$$

$$K''(\sigma) = -B\frac{\sigma^{-1+a}}{1+\sigma^{2a}}K'(\sigma).$$

Per quanto riguarda l'operatore delle superficie minime applicato a Φ_2, si ottiene quindi che

$$M\Phi_2 = K'(\Phi_0)D_0\Phi_0 - B\frac{\Phi_0^{-1+a}}{1+\Phi_0^{2a}}K'(\Phi_0)((\Phi_0)_u^2 + (\Phi_0)_v^2) + K'(\Phi_0)^3 M_0\Phi_0.$$

Dividiamo quindi la discussione del segno in due parti; per $rt \geq \frac{2}{\sqrt{a(1-3a)}}$, notiamo semplicemente che

$$M\Phi_2 \leq K'(\Phi_0)^3 M\Phi_0 \leq 0.$$

Se invece $rt \leq \frac{2}{\sqrt{a(1-3a)}}$, tenendo presente che

$$(\Phi_2)_u^2 + (\Phi_2)_v^2 \geq 2r(1 + s(1+At^a))^2,$$

riscrivendo, si nota che

$$
\begin{aligned}
M\Phi_2 \quad = & \quad \underbrace{K'(\Phi_0)D_0\Phi_0}_{\leq K'(\Phi_0)12sAt^{-1+a}} \; -B\frac{\Phi_0^{-1+a}}{1+\Phi_0^{2a}}K'(\Phi_0)((\Phi_0)_u^2+(\Phi_0)_v^2) \\
& + \underbrace{K'(\Phi_0)^3 M_0\Phi_0}_{\leq 0} \\
\leq & \quad K'(\Phi_0)\left(12sAt^{-1+a} - B\frac{\Phi_0^{-1+a}}{\Phi_0^{2a}}2r(1+s(1+At^a))^2\right).
\end{aligned}
$$

Avremo quindi in definitiva che $M\Phi_2 \leq 0$ se scegliamo $B > 0$ in modo tale che

$$
B \geq \frac{6Ast^{-1+a}\Phi_2^{1-a}(1+\Phi_2^{2a})}{r(1+s(1+At^a))^2}, \quad \forall rt \leq \frac{2}{\sqrt{a(1-3a)}}.
$$

Basterà quindi prendere

$$
B \geq 6A\left(1+\frac{2}{\sqrt{a(1-3a)}}\right)
$$

e avremo concluso quindi che

$$
\Phi_2 = K(\Phi_0),
$$

dove

$$
\Phi_0(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\left(1+A\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|^a\right)\right) \tag{52}
$$

è la funzione cercata. Il confronto con Φ_1 segue notando semplicemente che

$$
1+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\left(1+A\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|^a\right) > \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}
$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^8$.

2. La costruzione del controesempio

Tramite le funzioni Φ_1 e Φ_2 date in (51) e (52) costruiamo una soluzione non banale dell'equazione delle superficie minime definita su tutto $\mathbb{R}^8$.

Utilizzando la funzione Φ_1, fissato $\varrho > 0$, consideriamo il problema

$$
\min\left\{\int_{B_\varrho}\sqrt{1+|Dv|^2}dx : v \in \mathrm{Lip}(B_\varrho), v = \Phi_1 \text{ su } \partial B_\varrho\right\}. \tag{53}
$$

Siamo nelle condizioni di poter applicare il Teorema di Hilbert 1.5, in quanto la palla B_ϱ è uniformemente convessa e Φ_1 ristretta a ∂B_ϱ è di classe

$\mathcal{C}^2$. Quindi esiste un'unica funzione u_ϱ minimo di (53). La proprietà che $\Phi_1(x,y) = -\Phi_1(y,x)$ si trasmette anche sulla funzione u_ϱ, e quindi

$$u_\varrho(x,y) = -u_\varrho(y,x). \tag{54}$$

Possiamo quindi analizzare le proprietà di u_ϱ solo su E, potendosi ricavare le medesime proprietà su E^c con le dovute precauzioni di segno. Conseguenza immediata di (54) è che $u_\varrho = 0$ su $\partial E \cap B_\varrho$; quindi, dato che $u_\varrho = \Phi_1 > 0$ su $\partial B_\varrho \cap E$, se ne deduce, grazie al Lemma 4.5, che $u_\varrho \geq \Phi_1$, da cui

$$u_\varrho > 0 \quad \text{su } E \cap B_\varrho.$$

Inoltre, grazie allo stesso Lemma 4.5, si ha anche che $u_\varrho \leq \Phi_2$ su $E \cap B_\varrho$. La successione $(u_\varrho)_\varrho$ così construita è monotona in ϱ; infatti, se $\varrho_1 < \varrho_2$, dato che $u_{\varrho_2} \geq \Phi_1$ su tutto $E \cap B_{\varrho_2}$, sarà vero in particolare su $\partial B_{\varrho_1} \cap E$, cioè

$$u_{\varrho_2}|_{\partial B_{\varrho_1} \cap E} \geq \Phi_1|_{\partial B_{\varrho_1} \cap E} = u_{\varrho_1}|_{\partial B_{\varrho_1} \cap E}.$$

Quindi la successione è monotona crescente in E e decrescente in E^c. La successione è localmente equi-Lipschitziana; infatti, se fissiamo $R > 0$, se $\varrho > R + 1$, dalla stima del gradiente del Teorema 5.2 si ricava che per $x_0 \in B_R$

$$\begin{aligned} |Du_\varrho(x_0)| &\leq C_1 \exp\left(C_2 \left(\sup_{B_{R+1}} u_\varrho - u_\varrho(x_0) \right) \right) \\ &\leq C_1 \exp\left(C_2 \left(\sup_{B_{R+1}} |\Phi_2| \right) \right) \end{aligned}$$

Quindi la successione u_ϱ converge uniformemente sui compatti ad una funzione u localmente Lipschitziana. Grazie alla semicontinuità inferiore del funzionale dell'area, la funzione u è un minimo locale, cioè una soluzione dell'equazione delle superficie minime. Tale funzione è non banale in quanto $u > 0$ su E e $u < 0$ su $\text{int}(E^c)$. $\square$

Indice analitico

Finito di stampare
nel mese di maggio 2006
dalle Edizioni del Grifo
via V. Monti, 18 - 73100 Lecce
E-mail: edizionidelgrifo@libero.it

QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

"ENNIO DE GIORGI"

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Lecce documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

(1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
(2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
(3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 1/2006: ISBN 88-8305-0339
Università di Lecce - Coordinamento SIBA

Superficie Minime e il problema di Plateau

Mario Miranda

DEPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DI TRENTO
38100, TRENTO

EMAIL: *miranda@sns.it*

Prefazione

Ho accettato con piacere l'invito del Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi" dell'Università di Lecce a dare un Corso per gli studenti di Dottorato.

Ho accettato per ragioni diverse. Prima fra tutte, avere vissuto a Pisa dal 1959 al 1968, in stretto contatto con De Giorgi, come allievo, collaboratore, ed amico. In quei nove anni Ennio ottenne risultati clamorosi, che confermarono la fama raggiunta, in maniera esplosiva, con la risoluzione del XIX Problema di Hilbert.

Ultima, non aver mai avuto l'occasione in Italia di parlare ai Dottorandi di Ricerca.

Potendolo fare nella città di De Giorgi, nel Dipartimanto matematico che porta il suo nome, esponendo le sue idee, è stato un invito irresistibile.

Il Corso è diviso in quattro parti, ciascuna della quali è divisa in due capitoli.

I.: Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni e il XIX Problema di Hilbert.
Il metodo diretto fu usato per la prima volta con successo da Hilbert, che lo annunciò nel 1899 ed espose compiutamente nel 1904. Con esso fu data una risoluzione del Problema dell'elettrostatica.
Hilbert si rese conto che il metodo poteva essere usato per la dimostrazione dell'esistenza del minimo di un'ampia classe di funzionali del tipo dell'integrale dell'energia. Aveva visto bene, indicando nelle funzioni Lipschitziane le più adatte concorrenti nella gara per il minimo. E non gli sfuggì la difficoltà del passaggio dalla Lipschitzianità delle funzioni minimizzanti alle ulteriori regolarità $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^\omega$.
Questo passaggio, divenuto famoso come XIX Problema, ebbe nel primo passo, da Lipschitz a $\mathcal{C}^1$, l'ostacolo più difficile, rimosso da De Giorgi nel 1955.

Solo nel caso del funzionale dell'energia l'ostacolo era stato di scavalcamento agevole.

II.: L'equazione delle superficie minime: il Teorema di Bernstein e le singolarità eliminabili.

Il Teorema di Bernstein fu dimostrato per la prima volta negli anni attorno al 1910 da Bernstein per le funzioni reali di due variabili reali. Nel Corso è stata presentata la derivazione di tale Teorema come corollario non banale del Teorema di Liouville per le funzioni olomorfe di una variabile complessa. Tale derivazione è frutto dei risultati di Jörgens, Heinz e Nitsche, pubblicati fra il 1954 e il 1957.

È stato ricordato che nel 1961 Moser dimostrò la tesi del Teorema di Bernstein per funzioni di un qualunque numero di variabili con l'ipotesi addizionale di limitatezza del gradiente della soluzione stessa.

Per quanto riguarda il problema della eliminazione delle singolarità è stato presentato un teorema di De Giorgi e Stampacchia del 1965. In tale teorema si afferma che se una soluzione esiste in un aperto di $\mathbb{R}^n$ privato di un compatto di misura $(n-1)$–dimensionale nulla, allora tale soluzione è estendibile ad una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ in tutto l'aperto.

III.: Il calcolo differenziale sulle varietà di codimensione uno e le sue applicazioni.

Il calcolo differenziale intrinseco sulle varietà di codimensione uno permise a Bombieri e De Giorgi e me stesso di estendere ad ogni dimensione la stima del gradiente delle soluzioni delle superficie minime dimostrata da Finn nel caso bidimensionale.

Tale stima del gradiente ha permesso di dimostrare la limitatezza del gradiente delle soluzioni intere ricavandola da una diseguaglianza verificata dalle soluzioni stesse. Si è così dimostrata la tesi del Teorema di Bernstein in ogni dimensione con un'ipotesi aggiuntiva più debole di quella di Moser.

Abbiamo quindi introdotto le definizioni di De Giorgi di perimetro di un insieme misurabile e di frontiere minime degli insiemi misurabili. Ci siamo limitati a ricordare il famoso Teorema di De Giorgi di regolarità quasi ovunque delle frontiere minime. Abbiamo quindi presentato l'analisi delle singolarità delle frontiere minime che permise a De Giorgi di ridurre il problema dell'eliminazione di tali singolarità al caso di frontiera minima conica singolare nel solo vertice.

Abbiamo ricordato che Fleming aveva dimostrato nel 1962 la non esistenza di coni minimi singolari in $\mathbb{R}^3$. Questo risultato fu esteso alla dimensione superiore da Almgren jr. nel 1966. Nel 1968 Simons dimostrò la non esistenza di coni minimi singolari fino ad $\mathbb{R}^7$; la dimostrazione di questo Teorema è esposta nel Capitolo 6.

IV.: Esistenza di un cono minimo singolare e di una soluzione intera non banale.

Simons aveva trovato che un elementare cono singolare solo nel vertice in $\mathbb{R}^8$ soddisfaceva le ipotesi del suo Teorema. Simons aveva

congetturato che tale cono fosse minimo.
La congettura di Simons fu dimostrata vera da Bombieri, De Giorgi e Giusti nel 1969. Più tardi, Massari e me stesso demmo una seconda dimostrazione di questo risultato. Questa dimostrazione è il contenuto del Capitolo 7.
Grazie ai lavori di Fleming e De Giorgi era noto che il Teorema di Simons implicava la validità del Teorema di Bernstein per funzioni di 7 variabili.
De Giorgi, che non si aspettava l'esistenza di coni minimi singolari, era però convinto di potere utilizzare un eventuale cono minimo singolare per costruire una soluzione intera non banale. De Giorgi, in collaborazione con Bombieri e Giusti, fu capace di provare la verità di questa seconda aspettativa. In altre parole, Bombieri, De Giorgi e Giusti dimostrarono che la tesi di Bernstein era falsa per funzioni intere di 8 variabili.

Ringraziamenti. Ringrazio tutti coloro che hanno contribuito alla realizzazione del Corso, da Diego Pallara che ne ha seguito ogni passo a Michele Miranda che mi ha aiutato a scrivere queste note.

Un ringraziamento speciale debbo ai sei studenti di Dottorato, Luciana Angiuli, Valeria Leggieri, Chiara Spina e Barbara De Leo, Christian Tacelli, Luca Vergori, che hanno saputo raccontare due delle favole dello zio Ennio; il diciannovesimo problema e la stima del gradiente.

La matematica italiana, come il cervo sardo, è esposta al rischio di estinzione per l'arroganza e l'irresponsabilità di pochi. Il suo futuro è nelle mani di giovani capaci ed entusiasti, aiutati da adulti seri e generosi.

Indice

ISBN 88-8305-0339