CAPITOLO 2

Misure invarianti e loro regolarità

In questo capitolo ci occupiamo di introdurre il concetto di misura invariante per il semigruppo di Markov $(T(t))$ costruito nel precedente capitolo e di fornire condizioni necessarie o sufficienti per l'esistenza, l'unicità e la regolarità locale e globale di tale misura.

2.1. Misure invarianti

Iniziamo col dare la definizione di misura invariante.

Definizione 2.1. *Diremo che una misura di probabilità μ definita sui boreliani di $\mathbb{R}^N$ è* **invariante** *per $(T(t))$, se*

$$\int_{\mathbb{R}^N} T(t) f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu, \tag{2.1}$$

per ogni $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$.

Vale la pena osservare che l'identità (2.1) si può estendere, grazie alla contrattività di $(T(t))$, a ogni funzione $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ facendo uso del teorema di convergenza dominata. Difatti, se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora esistono $f_h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ con $\|f_h\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ e $f_h \to f$ q.o.; allora $T(t)f_h \to T(t)f$ q.o. e $\|T(t)f_h\|_\infty \leq \|T(t)f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, da cui, dato che μ è una misura finita,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_h d\mu = \lim_{h\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} T(t) f_h d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} T(t) f. \tag{2.2}$$

Una misura invariante, quando esiste, è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e, inoltre, il semigruppo $(T(t))$ è conservativo. Ciò rappresenta il contenuto della prossima proposizione.

Proposizione 2.2. *Supponiamo che esista μ misura invariante per $(T(t))$. Allora*

(a) *μ e la misura di Lebesgue m sono equivalenti (diciamo per questo che μ è regolare). In più esiste $0 < \rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\mu(dx) = \rho(x)dx$,*

(b) *$T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ per ogni $t \geq 0$, cioè $(T(t))$ è conservativo.*

Dim.
(a) Mostriamo prima che μ e m sono equivalenti.
Sia $B \subset \mathbb{R}^N$ un insieme di Borel con $m(B) = 0$. Allora risulta che

$$T(t)\chi_B(x) = \int_B p(t,x,y)\,dy = 0$$

per ogni $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. Da (2.2) segue che

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_B\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} T(t)\chi_B\,d\mu.$$

Ciò implica che $\mu(B) = 0$. D'altra parte, siccome $p(t,x,y) > 0$ per ogni $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ e per q.o. $y \in \mathbb{R}^N$ (Proposizione 1.6), otteniamo che se $m(B) > 0$, allora $T(t)\chi_B(x) > 0$ per ogni $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ e quindi $\mu(B) > 0$. Dal teorema di Radon-Nikodym segue che esiste una funzione $0 \leq \rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\mu(dx) = \rho(x)\,dx$. Rimane da far vedere che $\rho > 0$. Siano $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $t_0 > 0$ fissati. Sappiamo che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\rho(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (T(t_0)f)(x)\rho(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} p(t_0,x,y)\rho(x)\,dx\right) f(y)\,dy.\end{aligned}$$

Quindi,

$$\rho(y) = \int_{\mathbb{R}^N} p(t_0,x,y)\rho(x)\,dx$$

per q.o. $y \in \mathbb{R}^N$. Fissiamo ora $R > 0$. Dalla continuità di $p_R(t_0,\cdot,\cdot)$ su $B_R \times B_R$ (Teorema 1.4) segue che la funzione

$$g(y) := \int_{B_R} p(t_0,x,y)\rho(x)\,dx \geq \int_{B_R} p_R(t_0,x,y)\rho(x)\,dx$$

è continua su B_R e $\rho(y) \geq g(y)$ per q.o. $y \in B_R$. Siccome $0 < g$ su B_R risulta che

$$\rho(y) \geq \inf_{B_R} g > 0$$

per q.o. $y \in B_R$.
(b) Siccome μ è una misura invariante per $(T(t))$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (T(t)\mathbb{1} - \mathbb{1})(x)\rho(x)\,dx = 0.$$

D'altro canto, essendo $(T(t))$ contrattivo, si ha $T(t)\mathbb{1} \leq \mathbb{1}$. Tenendo conto di (a) e $T(t)\mathbb{1} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, risulta che

$$T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

per ogni $t \geq 0$. □

OSSERVAZIONE 2.3. Se esiste una misura invariante per $(T(t))$ allora $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$ per ogni $t \geq 0$, e quindi dalle Proposizioni 1.18 e 1.16 discende che $(A, D_{\max}(A))$ è il generatore debole di $(T(t))$.

È utile enunciare il seguente corollario.

COROLLARIO 2.4. *Lo spazio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mu)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.*

Non è detto che se una misura invariante esiste questa sia unica. Tuttavia, un risultato generale (vedi [**11**, Teorema 4.2.1]) dimostra che se il semigruppo è irriducibile e strong Feller, allora esso ammette al piú una misura invariante. Questo risultato si applica evidentemente al semigruppo $(T(t))$.

Per quanto premesso, resta da affrontare solo il problema dell'esistenza di una misura invariante.

LEMMA 2.5. *Supponiamo che $\lambda - A$ sia iniettivo in $D_{\max}(A)$, per qualche $\lambda > 0$. Allora sono equivalenti*

(i) *μ è una misura invariante per $(T(t))$;*
(ii) *$\int_{\mathbb{R}^N} Af d\mu = 0$, per ogni $f \in D_{\max}(A)$.*

DIM. In conseguenza della Proposizione 1.16, risulta che $(A, D_{\max}(A))$ è il generatore debole di $(T(t))$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sia $f \in D_{\max}(A)$. Dal Lemma 1.12 segue che

$$\int_{\mathbb{R}^N} AT(t)f d\mu = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} T(t)f d\mu = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0,$$

per ogni $t \geq 0$, grazie a (i). Scegliendo $t = 0$ vale (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sia dapprima $f \in D_{\max}(A)$. Allora, sempre dal Lemma 1.12, $T(t)f \in D_{\max}(A)$, per ogni $t \geq 0$ e le stesse argomentazioni di prima provano che f soddisfa (2.1). In generale, se $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, esiste una successione di funzioni $(f_n)_n \subseteq D_{\max}(A)$ tale che $f_n(x)$ converge a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $\|f_n\|_\infty \leq C$, per qualche costante $C > 0$ indipendente da n (si veda la Proposizione 1.13(i)). Siccome ogni f_n verifica (2.1), mandando $n \to +\infty$ e tenendo conto della continuità di $T(t)$ e del teorema di convergenza dominata si ha che anche f soddisfa (2.1). Quindi vale (i). $\square$

OSSERVAZIONE 2.6. Supponiamo che μ sia una misura invariante per $(T(t))$. Siccome ogni funzione $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$, costante fuori da una palla, appartiene a $D_{\max}(A)$, si ha che $\int_{\mathbb{R}^N} A\varphi d\mu = 0$.

Per provare un criterio di esistenza di una misura invariante ci occorre un risultato di compattezza di misure.

Indichiamo con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ l'insieme di tutte le misure di probabilità definite sui boreliani di $\mathbb{R}^N$. Data una successione $(\mu_k) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, diremo che essa converge debolmente a $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ (per la topologia debole*) se

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu, \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N).$$

Definizione 2.7. *Un sottoinsieme $\Lambda \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ si dice* **tight** *se esiste una successione crescente di compatti di $\mathbb{R}^N$, $\{K_n\}$, tali che $\lim_{n\to+\infty} \mu(K_n) = 1$, uniformemente rispetto a $\mu \in \Lambda$ o, equivalentemente, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto K_ε tale che $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, per ogni $\mu \in \Lambda$.*

Lemma 2.8. *Sia $(\mu_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ una successione convergente debolmente a $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Allora, per ogni insieme chiuso F di $\mathbb{R}^N$ risulta*

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F).$$

Equivalentemente, per ogni aperto A di $\mathbb{R}^N$ si ha

$$\liminf_{n\to+\infty} \mu_n(A) \geq \mu(A).$$

Dim. Sia F un insieme chiuso di $\mathbb{R}^N$ e, per ogni $\delta > 0$, poniamo $F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \mathrm{dist}(x, F) < \delta\}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\mu(F_\delta) < \mu(F) + \varepsilon$. Sia ora $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $0 \leq \phi \leq 1$, tale che $\phi(t) = 0$ per $t \geq 1$, $\phi(t) = 1$ per $t \leq 0$. Poniamo quindi $f(x) = \phi(\delta^{-1}\mathrm{dist}(x, F))$. Siccome $f \geq 0$, e $f \equiv 1$ in F, abbiamo

$$\mu_n(F) = \int_F f d\mu_n \leq \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_n.$$

Inoltre, $f \equiv 0$ fuori da F_δ, e $f \leq 1$, per cui

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{F_\delta} f d\mu \leq \mu(F_\delta).$$

Quindi, dato che μ_n converge a μ, deduciamo

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(F) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \leq \mu(F_\delta) \leq \mu(F) + \varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di ε, segue la tesi. L'ultima parte invece si prova con un semplice argomento di complementazione. □

Teorema 2.9 (Prokhorov). *Una famiglia $\Lambda \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ è tight se e solo se essa è relativamente compatta rispetto alla topologia debole*.*

Dim. Assumiamo dapprima che Λ sia tight. Sia $(\mu_k) \subset \Lambda$. Fissato $n \in \mathbb{N}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ indichiamo con $\mu_k^{(n)}$ la restrizione di μ_k alla palla chiusa di centro l'origine e raggio n, $\overline{B}_n$. Allora $(\mu_k^{(n)})_k$ è una successione di misure di Borel positive in $\overline{B}_n$, per cui, dal teorema di rappresentazione di Riesz, essa può essere vista come una successione di funzionali lineari, positivi e continui su $\mathcal{C}(\overline{B}_n)$. Inoltre

$$\mu_k^{(n)}(\overline{B}_n) \leq 1, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Ricordiamo che la palla unitaria $B_{X'}$ del duale topologico X' di uno spazio di Banach X separabile è metrizzabile per la topologia debole $\sigma(X', X)$ e che, per il teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki, essa è $\sigma(X', X)$ relativamente compatta. Quindi, da (2.3) ricaviamo che esiste una sottosuccessione di $(\mu_k^{(n)})$ che converge debolmente a una misura di Borel positiva μ^n in $\overline{B}_n$. Mediante un processo di diagonalizzazione, possiamo estrarre una sottosuccessione di (μ_k), che, per semplicità di notazione continueremo a denotare con (μ_k), tale che

$$\mu_k^{(n)} \to \mu^n, \quad \text{per } k \to +\infty,$$

debolmente, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo ora $n \in \mathbb{N}$. Se $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ e $f \geq 0$, allora

$$\int_{\overline{B}_n} f d\mu^n = \lim_{k\to+\infty} \int_{\overline{B}_n} f d\mu_k^{(n)} \leq \lim_{k\to+\infty} \int_{\overline{B}_{n+1}} f d\mu_k^{(n+1)} = \int_{\overline{B}_{n+1}} f d\mu^{n+1}. \tag{2.4}$$

In particolare, vale l'uguaglianza se supp$f \subset B_n$. Se F è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^N$, presa una successione di funzioni positive (f_h) in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ tale che f_h converge puntualmente a χ_F, allora da (2.4) mediante il teorema di convergenza dominata deduciamo che

$$\begin{aligned}\mu^n(F \cap \overline{B}_n) &= \int_{\overline{B}_n} \chi_F d\mu^n = \lim_{h\to+\infty} \int_{\overline{B}_n} f_h \, d\mu^n \\ &\leq \lim_{h\to+\infty} \int_{\overline{B}_{n+1}} f_h \, d\mu^{n+1} = \mu^{n+1}(F \cap \overline{B}_{n+1}).\end{aligned}$$

In particolare vale l'uguaglianza se $F \subset B_n$. In virtú dell'ultima stima, possiamo definire

$$\mu(F) = \lim_{n\to+\infty} \mu^n(F \cap \overline{B}_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^n(F \cap \overline{B}_n). \tag{2.5}$$

Osserviamo che se K è un compatto di $\mathbb{R}^N$, allora possiamo scegliere n grande affinché $K \subset B_n$ ed avere

$$\mu(K) = \mu^n(K \cap \overline{B}_n).$$

Si può facilmente verificare che μ è una misura di Borel in $\mathbb{R}^N$ tale che $\mu(\mathbb{R}^N) \leq 1$. Rimane da dimostrare che μ è una misura di probabilità e che (μ_k) converge a μ debolmente. Sia $\varepsilon > 0$. Siccome Λ è tight, esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che $\mu_k(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_r) < \varepsilon$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se $n > r$, prendiamo $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$

tale che $0 \leq g \leq 1$, $g \equiv 1$ in $\overline{B}_n \setminus B_{r+1}$ e supp$g \subset B_{n+1} \setminus \overline{B}_r$. Allora

$$\begin{aligned}\mu(\overline{B}_n \setminus B_{r+1}) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} g\, d\mu = \int_{\overline{B}_{n+1}} g\, d\mu^{n+1} \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_{\overline{B}_{n+1}} g\, d\mu_k \leq \limsup_{k\to+\infty} \mu_k(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_r) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Mandando $n \to +\infty$ troviamo che $\mu(\mathbb{R}^N \setminus B_{r+1}) \leq \varepsilon$. Ora, se $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_k\right| &\leq \left|\int_{\overline{B}_{r+1}} f d\mu - \int_{\overline{B}_{r+1}} f d\mu_k\right| \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_{r+1}} |f| d\mu + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_{r+1}} |f| d\mu_k.\end{aligned}$$

Infine, scegliamo k grande abbastanza affinché il primo termine al secondo membro sia minore di ε. In questo modo giungiamo a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_k\right| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \varepsilon,$$

da cui l'asserto. In particolare, scegliendo $f \equiv 1$ abbiamo $\mu(\mathbb{R}^N) = 1$.

Viceversa, supponiamo per assurdo che Λ sia relativamente debolmente compatta ma non tight. Quindi, esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\nu_n \in \Lambda$ con $\nu_n(B_n) \leq \nu_n(\overline{B}_n) \leq 1 - \varepsilon$. Per compattezza debole, esiste una sottosuccessione (ν_{n_k}) ed esiste $\nu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tali che ν_{n_k} converge a ν_0 debolmente, per $k \to +\infty$. Dal Lemma 2.8 segue che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu_0(B_n) \leq \liminf_{k\to+\infty} \nu_{n_k}(B_n) \leq \liminf_{k\to+\infty} \nu_{n_k}(B_{n_k}) \leq 1 - \varepsilon,$$

che è impossibile dato che $B_n \nearrow \mathbb{R}^N$. □

Questa caratterizzazione è utilizzata nel prossimo teorema per stabilire l'esistenza di una misura invariante.

Teorema 2.10 (Krylov-Bogoliubov). *Assumiamo che per qualche $t_0 > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ la famiglia $\{\mu_t\}_{t>t_0}$, dove*

$$\mu_t = \frac{1}{t}\int_0^t p(s, x_0, \cdot) ds,$$

sia tight. Allora esiste una misura invariante μ per $(T(t))$.

Dim. Dal Teorema 2.9 segue che esistono una successione (t_n) divergente a $+\infty$ ed una misura di probabilità μ con la proprietà che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mu_{t_n} = \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mu,$$

per ogni $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Tenendo conto di (1.5), la precedente condizione si riscrive nel modo seguente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} (T(t)f)(x_0)dt = \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mu. \tag{2.6}$$

Posto $f = T(s)g$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} (T(t+s)g)(x_0)dt = \int_{\mathbb{R}^N} T(s)g\, d\mu,$$

per ogni $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Ora, proviamo che il limite al primo membro è uguale a $\int_{\mathbb{R}^N} g\, d\mu$. Infatti

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}(T(t+s)g)(x_0)dt &= \frac{1}{t_n}\int_s^{t_n+s}(T(t)g)(x_0)dt \\ &= \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}(T(t)g)(x_0)dt + \frac{1}{t_n}\int_{t_n}^{t_n+s}(T(t)g)(x_0)dt \\ &\quad -\frac{1}{t_n}\int_0^{s}(T(t)g)(x_0)dt.\end{aligned}$$

Ricordando che il semigruppo $(T(t))$ è contrattivo, si vede immediatamente che gli ultimi due termini sono infinitesimi. D'altra parte, per (2.6), abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}(T(t)g)(x_0)dt = \int_{\mathbb{R}^N} g\, d\mu$. Abbiamo dunque provato (2.1), cioè che μ è una misura invariante per $(T(t))$. □

Il criterio che segue è il piú utile in pratica per stabilire l'esistenza di una misura invariante, perché fornisce una condizione sufficiente che può essere verificata direttamente sull'operatore differenziale. La funzione V, che compare nell'enunciato, è detta *funzione di Lyapunov* per A e la sua esistenza si traduce in sostanza in condizioni di crescita per i coefficienti di A.

Teorema 2.11 (Has'minskii). *Supponiamo che esista $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ tale che $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$ e $\lim_{|x|\to+\infty} AV(x) = -\infty$. Allora $\lambda - A$ è iniettivo in $D_{\max}(A)$ e $(T(t))$ ammette una misura invariante.*

Dim. Proviamo anzitutto che $\lambda - A$ è iniettivo in $D_{\max}(A)$. In virtú della Proposizione 1.18, è sufficiente provare che $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$, per ogni $t \geq 0$. A meno di sostituire V con $V + C$, per un'opportuna scelta della costante C, possiamo supporre che $V > 0$ e $AV \leq \lambda V$. Poniamo $u_\varepsilon = e^{-\lambda t}(T(t)\mathbb{1} - \mathbb{1}) + \varepsilon V$. Siccome $T(t)\mathbb{1} - \mathbb{1}$ è limitata in $[0, t_0] \times \mathbb{R}^N$ e V tende a $+\infty$ per $|x| \to +\infty$, risulta che esiste $(t_1, x_1) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^N$ tale che

$$u_\varepsilon(t_1, x_1) = \min_{[0,t_0]\times\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(t, x).$$

Assumiamo che $u_\varepsilon(t_1, x_1) < 0$. Allora necessariamente $t_1 > 0$ e, di conseguenza, $\partial_t u_\varepsilon(t_1, x_1) \leq 0$. Inoltre $Au_\varepsilon(t_1, x_1) \geq 0$ (si veda [**28**, Lemma 3.2]),

per cui
$$\big((A-\lambda)u_\varepsilon\big)(t_1,x_1)>0.$$
D'altra parte, come è facile verificare, risulta
$$\partial_t u_\varepsilon=(A-\lambda)u_\varepsilon-\varepsilon(A-\lambda)V\geq (A-\lambda)u_\varepsilon.$$
Valutando la precedente disequazione nel punto (t_1,x_1), si perviene alla stima $\partial_t u_\varepsilon(t_1,x_1)>0$, che è impossibile. Ne segue che $u_\varepsilon(t_1,x_1)\geq 0$. Ciò implica che
$$e^{-\lambda t}(T(t)\mathbb{1}-\mathbb{1})+\varepsilon V\geq 0,\quad \text{in } [0,t_0]\times\mathbb{R}^N$$
per ogni $\varepsilon>0$. Se $\varepsilon\to 0^+$, abbiamo $T(t)\mathbb{1}-\mathbb{1}\geq 0$ e quindi $T(t)\mathbb{1}-\mathbb{1}=0$, se $t\in[0,t_0]$, giacché l'altra disuguaglianza è sempre vera. Dall'arbitrarietà di t_0 segue la prima parte dell'asserto.

Siccome $\lim_{|x|\to+\infty}AV=-\infty$, esiste K costante tale che $AV\leq K$ in $\mathbb{R}^N$. Siano $\psi_n\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tali che
$$\begin{aligned} &\psi_n(t)=t,\quad t\leq n\\ &\psi_n \ \text{ è costante in } [n+1,+\infty)\\ &0\leq\psi_n'\leq 1,\quad \psi_n''\leq 0.\end{aligned}\tag{2.7}$$
Osserviamo che $\psi_n\circ V\in D_{\max}(A)$ e poniamo
$$u_n(t,x)=T(t)(\psi_n\circ V)(x),\quad t>0,x\in\mathbb{R}^N.$$
Tenendo conto di (2.7) e della Proposizione 1.16, risulta che
$$\begin{aligned}\partial_t u_n(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^N}p(t,x,y)A(\psi_n\circ V)(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}p(t,x,y)\Big(\psi_n'(V(y))AV(y)\\ &\qquad +\psi_n''(V(y))\langle a(y)\nabla V(y),\nabla V(y)\rangle\Big)dy\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}p(t,x,y)\psi_n'(V(y))AV(y)dy.\end{aligned}$$
Integrando tra 0 e t abbiamo
$$u_n(t,x)-\psi_n(V(x))\leq\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}p(s,x,y)\psi_n'(V(y))AV(y)dy\,ds=I_n+J_n,$$
dove
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^t\int_{\{AV\geq 0\}}p(s,x,y)\psi_n'(V(y))AV(y)dy\,ds\\ J_n &= \int_0^t\int_{\{AV<0\}}p(s,x,y)\psi_n'(V(y))AV(y)dy\,ds.\end{aligned}$$

Siccome ψ_n' converge alla funzione $\mathbb{1}$ puntualmente per $n \to +\infty$, e $AV \leq K$, risulta che

$$I_n \longrightarrow \int_0^t \int_{\{AV \geq 0\}} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds$$

per convergenza dominata. Per il limite di J_n, osserviamo che la successione ψ_n' è una successione crescente e positiva. Poiché $AV < 0$, abbiamo che $\psi_n'(V(\cdot))AV(\cdot)$ è una successione decrescente e negativa e quindi

$$J_n \longrightarrow \int_0^t \int_{\{AV<0\}} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds$$

per convergenza monotona. Infine

$$u_n(t,x) \longrightarrow T(t)V(x)$$

per cui otteniamo

$$T(t)V(x) - V(x) \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds \leq K\,t.$$

Siccome $T(t)V \geq 0$, dalla stima precedente discende anche che

$$-\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds \leq V(x). \tag{2.8}$$

Siano $\varepsilon, R_\varepsilon > 0$ tali che $AV(y) \leq -\varepsilon^{-1}$ per ogni $|y| \geq R_\varepsilon$. Allora, tenendo conto anche di (2.8)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t p(s,x,\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon})ds &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon}} p(s,x,y)dy\,ds \\
&\leq -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon}} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds \\
&= -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds \\
&\quad +\int_0^t \int_{B_{R_\varepsilon}} p(s,x,y)AV(y)dy\,ds \\
&\leq V(x) + K\,t.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\frac{1}{t}\int_0^t p(s,x,\mathbb{R}^N \setminus B_{R_\varepsilon})ds \leq \varepsilon\frac{V(x)}{t} + \varepsilon K, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^N, t > 0.$$

Pertanto, comunque vengano fissati $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $t_0 > 0$ la famiglia di misure di probabilità $\{\frac{1}{t}\int_0^t p(s,x_0,\cdot)ds\}_{t \geq t_0}$ è tight. La conclusione segue ora applicando il Teorema 2.10. $\square$

Proposizione 2.12. *Supponiamo che V sia una funzione di Lyapunov. Allora $AV \in L^1(\mu)$.*

Dim. Siano ψ_n le stesse funzioni utilizzate nella dimostrazione del Teorema 2.11. Dato che $\psi_n \circ V \in D_{\max}(A)$, risulta, grazie al Lemma 2.5, che $\int_{\mathbb{R}^N} A(\psi_n \circ V) d\mu = 0$, dove μ è la misura invariante la cui esistenza è garantita proprio dal Teorema 2.11. Fissiamo B_R tale che $AV \leq 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus B_R$ e sia M costante tale che $V \leq M$ in B_R. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > M$ si ha

$$-\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} A(\psi_n \circ V) d\mu = \int_{B_R} A(\psi_n \circ V) d\mu = \int_{B_R} AV\, d\mu.$$

D'altra parte, si verifica facilmente che $A(\psi_n \circ V) \leq 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus B_R$, per cui

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |A(\psi_n \circ V)| d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} A(\psi_n \circ V) d\mu = \int_{B_R} AV\, d\mu.$$

Il Lemma di Fatou assicura che $\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |AV| d\mu \leq \int_{B_R} AV\, d\mu < +\infty$ e l'asserto è provato. $\square$

Vediamo ora che per coefficienti a crescita polinomiale è sempre possibile determinare una funzione di Lyapunov.

Proposizione 2.13. *Supponiamo che $a_{ij} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Se*

$$\limsup_{|x| \to +\infty} |x|^{-\beta} \langle b(x), x \rangle = -C \in [-\infty, 0),$$

per qualche $\beta > 1$, allora $V(x) = e^{\delta |x|^\beta}$ è una funzione di Lyapunov, per ogni $\delta < C(\beta\Lambda)^{-1}$, dove $\Lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \Lambda(x)$, essendo $\Lambda(x)$ il massimo autovalore della matrice $(a_{ij}(x))$. Inoltre, $V \in L^1(\mu)$.

Dim. Facendo i conti esplicitamente si trova che

$$\begin{aligned} AV(x) \quad &= \quad \delta\beta |x|^{\beta-1} e^{\delta|x|^\beta} \Big(|x|^{-1} \mathrm{Tr}(a(x)) + (\beta - 2)|x|^{-3} \langle a(x)x, x \rangle \\ &\qquad + \delta\beta |x|^{\beta-3} \langle a(x)x, x \rangle + |x|^{-1} \langle b(x), x \rangle \Big) \end{aligned}$$

da cui, per $|x|$ sufficientemente grande

$$\begin{aligned} AV(x) \quad &\leq \quad \delta\beta |x|^{\beta-1} e^{\delta|x|^\beta} \Big(C_1 |x|^{-1} + |\beta - 2| |x|^{-1} \Lambda \Big) \\ &\qquad + (\delta\beta)^2 |x|^{2\beta-2} \Lambda e^{\delta|x|^\beta} + \delta\beta |x|^{\beta-2} e^{\delta|x|^\beta} \langle b(x), x \rangle \\ &\leq \quad \delta\beta (C_1 + |\beta - 2|\Lambda) |x|^{\beta-2} e^{\delta|x|^\beta} + \delta\beta |x|^{2\beta-2} e^{\delta|x|^\beta} (\delta\beta\Lambda - C) \\ &\leq \quad |x|^{2\beta-2} e^{\delta|x|^\beta} \left[\delta\beta(\delta\beta\Lambda - C) + \delta\beta(C_1 + |\beta - 2|\Lambda)|x|^{-\beta} \right] \end{aligned}$$

dove C_1 dipende solo dalla norma del sup dei coefficienti a_{ii}. Siccome $\delta\beta\Lambda - C < 0$, risulta che $AV \to -\infty$, per $|x| \to +\infty$, quindi V è una funzione di Lyapunov.

Per la seconda parte dell'asserto, osserviamo che dalla Proposizione 2.12 $AV \in L^1(\mu)$. Inoltre, per R abbastanza grande, $AV(x) \le 0$, se $|x| \ge R$, per cui

$$\begin{aligned} |AV(x)| &= -AV(x) \\ &\ge |x|^{2\beta-2} e^{\delta|x|^\beta} \left[\delta\beta(C - \delta\beta\Lambda) - \delta\beta(C_1 + |\beta - 2|\Lambda)|x|^{-\beta}\right] \\ &\ge e^{\delta|x|^\beta} = V(x). \end{aligned}$$

Ne segue che $V \in L^1(\mu)$. □

2.2. Regolarità della misura invariante

Supponiamo che il semigruppo $(T(t))$ abbia una misura invariante μ. Per quanto osservato nella sezione precedente, tale misura è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, per cui possiamo scrivere $\mu = \varrho dx$. In questa sezione ci proponiamo di far vedere che $\varrho \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per questo scopo, in virtú del metodo impiegato, è conveniente scrivere l'operatore A, generatore debole di $(T(t))$, in forma di divergenza

$$A = \operatorname{div}(a\nabla) + \langle b, \nabla\rangle = \sum_{i,j} D_i(a_{ij} D_j) + \sum_i b_i D_i$$

e supporre che $a = (a_{ij})$ sia simmetrica con $a_{ij} \in \mathcal{C}^{1+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^N)$, $b_i \in \mathcal{C}^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e che valga la condizione di ellitticità uniforme

$$\langle a(x)\xi, \xi\rangle \ge \lambda|\xi|^2, \quad \forall\, x, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Notiamo che in quest'ambito, le ipotesi di regolarità per i coefficienti di A sono piú forti di quelle delle sezioni precedenti. La scrittura dell'operatore A in forma di divergenza è equivalente a quella data in (1.1) nel caso in cui i coefficienti a_{ij} siano di classe $\mathcal{C}^1$.

Richiamiamo un risultato di regolarità locale per ϱ (si vedano [**8**, Teorema 2.1, Corollario 2.10]).

Teorema 2.14. *Si ha che* $\varrho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *per ogni* $p \in (1, +\infty)$ *e* $\varrho > 0$*; in particolare,* ϱ *è continua.*

Dim. Procediamo per passi.
Passo 1: Proviamo che $\varrho \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, per ogni $p < N/(N-1)$. Dal Lemma 2.5(ii), abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}\phi \, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i D_i \phi \, d\mu, \qquad \phi \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^N), \tag{2.1}$$

dove $\tilde{b}_i = b_i + \sum_{j=1}^N D_i a_{ij}$, $i = 1, \dots, N$. Fissiamo $R > 0$ e sia $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\chi_{B_{R/2}} \le \theta \le \chi_{B_R}$. Riscrivendo (2.1) per $\phi = \vartheta\psi$, con $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{B}_R)$ troviamo

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}\psi\, \vartheta\, d\mu \right| &\le 2\left| \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i\psi D_j\vartheta\, d\mu \right. \\
&\quad + \int_{B_R} \psi \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}\vartheta\, d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i D_i\psi\, d\mu \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \psi \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i D_i\vartheta\, d\mu \right| \\
&\le c_1 \|\psi\|_{\mathcal{C}^1(B_R)},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

dove c_1 è una costante positiva che dipende da R ma non da ψ. Sia ora $f \in \mathcal{C}_c^\infty(B_R)$. Per [**18**, Teorema 6.14, Lemma 9.17], il problema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} u = f, & \text{in } B_R \\ u = 0, & \text{su } \partial B_R, \end{cases} \tag{2.3}$$

ammette un'unica soluzione $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B}_R)$ con

$$\|u\|_{W^{2,q}(B_R)} \le c_2 \|f\|_{L^q(B_R)},$$

per ogni $q > N$, con c_2 costante positiva dipendente da q, R ma non da f. Grazie al teorema di immersione per spazi di Sobolev [**1**, Teorema 5.4], ricaviamo che

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B}_R)} \le c_3 \|f\|_{L^q(B_R)},$$

con c_3 indipendente da f. Quindi, scegliendo $\psi = u$ in (2.2) otteniamo

$$\left| \int_{B_R} f\vartheta\varrho\, dx \right| \le c_1 c_3 \|f\|_{L^q(B_R)}.$$

Dall'arbitrarietà di $f \in \mathcal{C}_c^\infty(B_R)$ e $q > N$ deduciamo che la funzione $\varrho\vartheta$ appartiene a $L^p(B_R)$ per ogni $p \in [1, N/(N-1)[$. Siccome $\varrho\vartheta = \varrho$ in $B_{R/2}$ ed R era arbitrario, la prima parte è provata.

Passo 2: Ci proponiamo di mostrare ora che $\varrho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, per ogni $p \in (1, N/(N-1))$. Fissiamo dunque $p \in (1, N/(N-1))$ e $M \in \mathbb{N}$. Per ogni $x_0 \in \overline{B}_M$ ed $R > 0$ prendiamo due funzioni $\eta, \psi \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(x_0)})$ tali che $\chi_{B_{R/2}(x_0)} \le \eta \le \chi_{B_R(x_0)}$ e $\psi = 0$ su $\partial B_R(x_0)$. Facciamo vedere che è possibile scegliere R abbastanza piccolo (e dipendente solo da M) tale che $\varrho \in W^{1,p}(B_{R/2}(x_0))$, per ogni $x_0 \in B_M$. L'arbitrarietà di $x_0 \in B_M$ e di $M > 0$ implicherà poi che $\varrho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Non è restrittivo assumere che $R < 1$. Scrivendo (2.1) con $\phi = \psi\eta$, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{B_R(x_0)} \eta \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}\psi \, d\mu\right| \\
&\le 2\left|\int_{B_R(x_0)} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i\psi D_j\eta \, d\mu\right| + \left|\int_{B_R(x_0)} \psi \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}\eta \, d\mu\right| \\
&\quad + \left|\int_{B_R(x_0)} \eta \sum_{i=1}^N \tilde b_i D_i\psi \, d\mu\right| + \left|\int_{B_R(x_0)} \psi \sum_{i=1}^N \tilde b_i D_i\eta \, d\mu\right| \\
&\le c_4 \int_{B_R(x_0)} (|\psi| + |\nabla\psi|) \, d\mu \\
&\le c_5 \|\nabla\psi\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la disuguaglianza di Hölder, grazie al fatto che $\varrho \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, e poi la disuguaglianza di Poincaré. Qui $c_4, c_5 > 0$ sono costanti opportune dipendenti da $R, M > 0$ e dalla norma del sup dei coefficienti dell' operatore A in B_{M+1}, ma non da ψ né da x_0. Per ogni scelta delle funzioni $f_i \in \mathcal{C}^\infty_c(B_R(x_0))$, $i = 1, \ldots, N$, denotiamo con $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(x_0)})$ la soluzione del problema ellittico (2.3) con $\sum_{i=1}^N D_i f_i$ al posto di f. Prendendo $\psi = u$ in (2.4), otteniamo

$$\left|\int_{B_R(x_0)} \eta \sum_{i=1}^N D_i f_i \, d\mu\right| \le c_5 \|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}. \tag{2.5}$$

Proviamo che

$$\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))} \le c_6 \sum_{i=1}^N \|D_i f_i\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}, \tag{2.6}$$

per qualche costante positiva c_6, indipendente da R, x_0 e f, purché R sia sufficientemente piccolo. Abbiamo denotato con $W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))$ lo spazio duale di $W^{1,p}_0(B_R(x_0))$. Infatti, dalle stime (2.5), (2.6) discende immediatamente che $\eta\varrho \in W^{1,p}_0(B_R(x_0))$ e quindi, dato che $\eta = 1$ in $B_{R/2}(x_0)$, che $\varrho \in W^{1,p}_0(B_{R/2}(x_0))$.

D'ora in avanti indicheremo con c_j delle costanti positive dipendenti da M ma indipendenti da x_0, R, f. Per provare (2.6), cominciamo ad osservare intanto che, siccome

$$\sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij} D_j u) = \sum_{i=1}^N D_i f_i + \sum_{i,j=1}^N D_i a_{ij} D_j u =: g_1 + g_2,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}&\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}\\&\le c_7(\|g_1\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}+\|g_2\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}),\end{aligned}\tag{2.7}$$

(si veda ad esempio [**17**, Sezione 4.3]). Per stimare g_2, osserviamo che, siccome $p<N$, allora $L^{pN/(N(p-1)+p)}(B_R(x_0))\subset W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))$ e

$$\|k\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}\le c_8\|k\|_{L^{pN/(N(p-1)+p)}(B_R(x_0))},$$

per ogni $k\in W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))$. Quindi

$$\begin{aligned}\|g_2\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))} &\le c_9\|g_2\|_{L^{pN/(N(p-1)+p)}(B_R(x_0))}\\&\le c_{10}\|h\|_{L^N(B_R(x_0))}\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}\\&\le c_{11}R\|h\|_{L^\infty(B_{M+1})}\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))},\end{aligned}\tag{2.8}$$

dove $h^2=\sum_{i,j=1}^N|D_ia_{ij}|^2$. Da (2.7) e (2.8) ricaviamo

$$\begin{aligned}&\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}\\&\le c_{12}(R\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}+\|g_1\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Prendendo R piccolo, otteniamo (2.6).

Passo 3: Concludiamo ora la dimostrazione con un argomento standard di "bootstrap". Siccome $\varrho\in W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p\in[1,N/(N-1))$, i teoremi di immersione di Sobolev implicano che $\varrho\in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p\in[1,N/(N-2))$. Ripetendo il ragionamento del Passo 2, otteniamo così che $\varrho\in W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p\in[1,N/(N-2))$. Iterando questo procedimento otteniamo che $\varrho\in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p\in[1,+\infty)$. Notiamo infine che possiamo adattare le argomentazioni del Passo 2 per provare che $\varrho\in W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$, anche per $p>N$. Occorre giusto modificare la stima (2.8). A tal proposito, osserviamo che se $p>N$, allora $L^1(B_R(x_0))$ si immerge con continuità in $W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))$ e

$$\|k\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))}\le c_{13}R^{(p-N)/p}\,\|k\|_{L^1(B_R(x_0))},$$

per ogni $k\in W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))$. Pertanto in tal caso abbiamo

$$\begin{aligned}\|g_2\|_{W^{-1,p/(p-1)}(B_R(x_0))} &\le c_{14}R^{(p-N)/p}\|g_2\|_{L^1(B_R(x_0))}\\&\le c_{15}R^{(p-N)/p}\|h\|_{L^p(B_R(x_0))}\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}\\&\le c_{15}R\|h\|_{L^\infty(B_{M+1})}\|Du\|_{L^{p/(p-1)}(B_R(x_0))}.\end{aligned}$$

Prendendo R piccolo, otteniamo (2.6) anche in questo caso e quindi $\varrho\in W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$. □

Teorema 2.15. *Se $b\in L^2(\mu)$, allora $\sqrt{\varrho}\in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}dx\le\frac{1}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho dx.\tag{2.10}$$

DIM. Dal Lemma 2.5, ricaviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} A\varphi\varrho\, dx = 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Dato che A è in forma di divergenza e ϱ è localmente regolare (per il Teorema 2.14), integrando per parti abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle a\nabla\varphi, \nabla\varrho\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^N} \langle b, \nabla\varphi\rangle\varrho dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.11}$$

Procedendo formalmente prendiamo $\varphi = \log\varrho$ e applicando la disuguaglianza di Hölder troviamo

$$\begin{aligned}
\lambda\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \langle b, \nabla\varrho\rangle dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |b||\nabla\varrho| dx = \int_{\mathbb{R}^N} |b|\varrho^{1/2}\frac{|\nabla\varrho|}{\varrho^{1/2}} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^2\varrho\, dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho} dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

da cui la stima desiderata

$$\lambda^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |b|^2\varrho\, dx.$$

Tuttavia, la funzione $\log\varrho$ non è a supporto compatto e non è sommabile su $\mathbb{R}^N$, quindi non può essere scelta come funzione test. Vediamo dunque come superare questa difficoltà. Osserviamo anzitutto che l'identità (2.11) può essere estesa ad ogni $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ con supporto compatto, per densità. Consideriamo poi una funzione cut-off $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\eta(x) \equiv 1$ per $|x| \leq 1$, $\eta(x) \equiv 0$ per $|x| \geq 2$ e $|\nabla\eta| \leq 2$; poniamo quindi

$$\eta_n(x) = \eta\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Fissati poi $0 < \varepsilon < k$ con $k \in \mathbb{N}$, definiamo la funzione di $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e a supporto compatto

$$\varphi = \eta_n^2 \log((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k).$$

Con questa scelta di φ si ha che

$$\nabla\varphi = \eta_n^2\frac{\nabla\varrho}{\varrho}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} + 2\eta_n\log((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)\nabla\eta_n.$$

Quindi l'equazione (2.11) diventa

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho} \quad = \quad & \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \langle b, \nabla\varrho\rangle}_{\mathrm{I}_n} \\
& \underbrace{+\,2\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n \log((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)\langle b, \nabla\eta_n\rangle\varrho}_{\mathrm{II}_n} \\
& \underbrace{-2\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n \log((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)\langle a\nabla\varrho, \nabla\eta_n\rangle}_{\mathrm{III}_n} \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Utilizzando la disuguaglianza di Hölder, si ricava che

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_n \quad & \leq \quad \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \quad \delta \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho} dx + \frac{1}{4\delta}\int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho dx \\
& \leq \quad \frac{\delta}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho} dx + \frac{\|b\|^2_{L^2(\mu)}}{4\delta} \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

dove nel secondo passaggio abbiamo utilizzato la disuguaglianza

$$
ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2
$$

valida per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Tenendo invece presente che $|\nabla\eta_n| \leq 2/n$, e che $|\log((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)| \leq c(\varepsilon, k)$ con $c(\varepsilon, k)$ costante dipendente solo da ε e k, si ha che

$$
\mathrm{II}_n \leq \frac{c(\varepsilon, k)}{n}\int_{\mathbb{R}^N} |b|\,\varrho\,dx \leq \frac{c(\varepsilon, k)}{n}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^2\,\varrho\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.14)
$$

dove l'ultima disuguaglianza segue da quella di Hölder e dal fatto che μ è una misura di probabilità. Inoltre, per quanto riguarda III_n, grazie alla simmetria di a e con una integrazione per parti si ottiene che

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III}_n &= 2\int_{\mathbb{R}^N} \varrho\,\mathrm{div}\,(\eta_n \log((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k) a\nabla\eta_n)\,dx \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N} \varrho \log((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)\langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle\,dx \\
&\quad +2\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\eta_n, \nabla\varrho\rangle\,dx \\
&\quad +2\int_{\mathbb{R}^N} \varrho\,\eta_n \log((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)\sum_{i,j=1}^N a_{ij}D_{ij}\eta_n\,dx \\
&\quad +2\int_{\mathbb{R}^N} \varrho\,\eta_n \log((\varrho\vee\varepsilon)\wedge k)\sum_{i,j=1}^N D_i a_{ij}D_j\eta_n\,dx.
\end{aligned}
$$

Tenendo quindi presente che $a_{ij}\in\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^N)$ e che $|D_{ij}\eta_n|\le 4/n^2$, grazie alla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz

$$
|\langle a\nabla\eta_n, \nabla\varrho\rangle| \le \langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle^{1/2}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle^{1/2}
$$

si ottiene che

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{III}_n| &\le c(\varepsilon,k)\left(\frac{\|a\|_\infty}{n^2}+\frac{\|Da\|_\infty}{n}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\varrho dx \\
&\quad +2\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle^{\frac12}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle^{\frac12}dx \\
&\le c(\varepsilon,k,n) \\
&\quad +2\left(\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle\varrho dx\right)^{\frac12} \\
&\le c(\varepsilon,k,n)+\frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^N}\langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle\varrho dx \\
&\quad +\delta\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx \\
&\le c(\varepsilon,k,n)+\frac{\|a\|_\infty}{\delta n^2}\int_{\mathbb{R}^N}\varrho\,dx+\delta\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho}\,dx
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

dove abbiamo posto

$$
c(\varepsilon,k,n)=c(\varepsilon,k)\Big(\frac{\|a\|_\infty}{n^2}+\frac{\|Da\|_\infty}{n}\Big)\to 0, \quad \text{per } n\to+\infty.
$$

Inserendo questa stima di III_n in (2.12), utilizzando le (2.13) e (2.14), si ottiene che

$$
\begin{aligned}
\Big(1-\delta-\frac{\delta}{\lambda}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx &\le c(\varepsilon,k,n)+\frac{\|b\|^2_{L^2(\mu)}}{4\delta} \\
&\quad +\frac{c(\varepsilon,k)\|b\|_{L^2(\mu)}}{n}+\frac{\|a\|_\infty}{\delta n^2}.
\end{aligned}
$$

A questo punto bisogna scegliere opportunamente δ; se ad esempio prendiamo δ in modo che $1-\delta-\frac{\delta}{\lambda}=\frac{1}{2}$, si ricava la stima

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\eta_n^2\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx &\leq c(\varepsilon,k,n)+\frac{\lambda+1}{2\lambda}\|b\|^2_{L^2(\mu)}\\ &\quad +\frac{c(\varepsilon,k)}{n}\|b\|_{L^2(\mu)}+\frac{\|a\|_\infty}{n^2}\frac{2(\lambda+1)}{\lambda},\end{aligned}$$

da cui, al limite per $n\to+\infty$, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx\leq\frac{\lambda+1}{2\lambda}\|b\|^2_{L^2(\mu)}.$$

Ne segue, in particolare, mandando $\varepsilon\to0, k\to+\infty$, che la funzione $\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}$ è sommabile in $\mathbb{R}^N$. Tornando a (2.15) e mandando $n\to+\infty$, $\varepsilon\to0$ e $k\to+\infty$, troviamo

$$\limsup_{n\to+\infty}|\mathrm{III}_n|\leq\delta\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx,$$

e quindi, dato che δ è arbitrario,

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathrm{III}_n|=0.$$

In definitiva, tornando alla stima (2.12), si ottiene che al limite per $n\to+\infty$, $\varepsilon\to0$ e $k\to+\infty$

$$\begin{aligned}\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle}{\varrho}dx\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}dx\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho\,dx\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

da cui la (2.10) e quindi il fatto che $\sqrt{\varrho}\in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. □

Una conseguenza immediata del precedente teorema è data dal seguente corollario.

Corollario 2.16. *Se $b\in L^2(\mu)$ allora $\varrho\in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Inoltre per $N>2$ risulta $\varrho\in L^{\frac{N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ e $\varrho\in L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p\in[1,+\infty)$ se $N=2$.*

Dim. Per dimostrare che $\varrho\in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, dato che $d\mu=\varrho dx$ è una misura di probabilità, basta notare che dalla disuguaglianza di Hölder e dal Teorema 2.15 segue che

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varrho|dx = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla\varrho|}{\sqrt{\varrho}}\sqrt{\varrho}dx\leq\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla\varrho|^2}{\varrho}dx\right)^{\frac12}<+\infty.$$

La seconda parte segue invece dalle immersioni di Sobolev

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N)\subset L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N),\quad \text{se } N>2$$
$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N)\subset L^p(\mathbb{R}^N),\quad \forall p\in[1,+\infty),\ \text{se } N=2,$$

tenuto conto del fatto che $\sqrt{\varrho} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Il prossimo lemma è cruciale nel metodo iterativo di Moser che ci permetterà di provare che $\varrho \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Lemma 2.17. *Supponiamo che $b \in L^k(\mu)$ con $k > 2$ e sia $\beta > 0$ fissato; se $\varrho \in L^{\frac{\beta k}{k-2}+1}(\mathbb{R}^N)$, allora*

$$\lambda^2 \int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta-1} |\nabla \varrho|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho^{\beta+1} dx < +\infty. \tag{2.16}$$

Dim. Osserviamo innanzitutto che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho^{\beta+1} &= \int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho^{2/k} \varrho^{\beta+1-2/k} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^k \varrho \right)^{2/k} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta \frac{k}{k-2}+1} \right)^{1-2/k} < \infty. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ripetiamo la stessa strategia e usiamo le stesse notazioni della dimostrazione del Teorema 2.15 introducendo le funzioni $\phi = \eta_n^2((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta$ nell'equazione

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i \varrho D_j \phi = \int_{\mathbb{R}^N} \langle b, \nabla \phi \rangle \, \varrho.$$

Osservato che $\nabla((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta = \beta \varrho^{\beta-1} \nabla \varrho \chi_{\{\varepsilon < \varrho < k\}}$, si ha che

$$\begin{aligned} \beta \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \varrho^{\beta-1} \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \langle a \nabla \varrho, \nabla \varrho \rangle &= -2 \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n ((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta \langle a \nabla \varrho, \nabla \eta_n \rangle \\ &\quad + \beta \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \varrho^\beta \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \langle b, \nabla \varrho \rangle \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n \varrho ((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta \langle b, \nabla \eta_n \rangle \\ &=: I_n + J_n + K_n. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Per quanto riguarda J_n, abbiamo che

$$\begin{aligned} |J_n| &\leq \beta \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \varrho^{(\beta-1)/2} \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} \varrho^{(\beta+1)/2} |b| |\nabla \varrho| \\ &\leq \beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \varrho^{\beta-1} \chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}} |\nabla \varrho|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^2 \varrho^{\beta+1} \right)^{1/2}. \\ |K_n| &\leq \frac{2k^\beta}{n} \int_{\mathbb{R}^N} |b| \varrho. \end{aligned}$$

Osserviamo che $K_n \to 0$, per $n \to \infty$, grazie al fatto che $b \in L^1(\mu)$. Per quanto riguarda I_n, lo stimiamo come nel Teorema 2.15. Con una integrazione per parti si ottiene che

$$\begin{aligned} I_n &= 2\int_{\mathbb{R}^N} \varrho\Big(((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta \langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle + \eta_n((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}\eta_n \\ &\quad +((\varrho \vee \varepsilon) \wedge k)^\beta \eta_n \sum_{i,j=1}^N D_i a_{ij} D_j \eta_n + \beta\eta_n \varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho, \nabla\eta_n\rangle\Big). \end{aligned}$$

Tenendo presente che $|\nabla\eta_n| \leq 2/n$, e che $|D_{ij}\eta_n| \leq 4/n^2$, si ottiene dalle disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e Hölder

$$\begin{aligned} |I_n| &\leq \omega(\varepsilon, k, n) \\ &\quad +\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2 \varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle\right)^{1/2} \times \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta+1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\eta_n, \nabla\eta_n\rangle\right)^{1/2} \\ &\leq \omega(\varepsilon, k, n)(1+\delta^{-1}) + \delta\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle \end{aligned}$$

per ogni $\delta > 0$ e con $\omega(\varepsilon, k, n) \to 0$, per $n \to \infty$ con ε, k fissati. Quindi,

$$\begin{aligned} \beta\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle &\leq \beta\left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}|\nabla\varrho|^2\right)^{1/2} \times \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^2\varrho^{\beta+1}\right)^{1/2} + K_n \\ &\quad +\omega(\varepsilon, k, n)(1+\delta^{-1}) \\ &\quad +\delta\int_{\mathbb{R}^N} \eta_n^2\varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle, \end{aligned}$$

per ogni $\delta > 0$. Grazie all'ellitticità di a, otteniamo come nel Teorema 2.15, che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta-1}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho)\rangle < +\infty.$$

Quindi, $I_n \to 0$, per $n \to \infty$. Tornando alla stima (2.18), si ottiene che al limite per $n \to \infty$, vale la stima

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}\langle a\nabla\varrho, \nabla\varrho\rangle &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\beta-1}\chi_{\{\varepsilon<\varrho<k\}}|\nabla\varrho|^2\right)^{1/2} \times \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^2\varrho^{\beta+1}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

In definitiva, quando $\varepsilon \to 0$, $k \to \infty$, si conclude che

$$\begin{aligned}\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\varrho^{\beta-1}|\nabla\varrho|^2 &\le \int_{\mathbb{R}^N}\varrho^{\beta-1}\langle a\nabla\varrho,\nabla\varrho\rangle\\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N}\varrho^{\beta-1}|\nabla\varrho|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho^{\beta+1}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

□

Conseguenza di questo lemma è il seguente corollario.

Corollario 2.18. *Sia $b \in L^k(\mu)$ con $k > 2$ e sia $\beta > 0$ fissato; se $\varrho \in L^{\frac{\beta k}{k-2}+1}(\mathbb{R}^N)$ allora $\varrho^{\frac{\beta+1}{2}} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e vale la stima*

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\varrho^{\frac{\beta+1}{2}})|^2 \le \left(\frac{\beta+1}{2\lambda}\right)^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}|b|^k\varrho dx\right)^{\frac{2}{k}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varrho^{\frac{\beta k}{k-2}+1}dx\right)^{1-\frac{2}{k}}.$$

Dim. La dimostrazione segue notando che

$$\nabla(\varrho^{\frac{\beta+1}{2}}) = \frac{\beta+1}{2}\varrho^{\frac{\beta-1}{2}}\nabla\varrho,$$

per cui, utilizzando la formula (2.16) e la successiva (2.17)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\varrho^{\frac{\beta+1}{2}})|^2dx &= \left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2\int_{\mathbb{R}^N}\varrho^{\beta-1}|\nabla\varrho|^2dx\\ &\le \left(\frac{\beta+1}{2\lambda}\right)^2\int_{\mathbb{R}^N}|b|^2\varrho^{\beta+1}dx\\ &\le \left(\frac{\beta+1}{2\lambda}\right)^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}|b|^k\varrho dx\right)^{\frac{2}{k}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varrho^{\frac{\beta k}{k-2}+1}dx\right)^{1-\frac{2}{k}}.\end{aligned}$$

□

A questo punto, osserviamo che dal Corollario 2.16 segue che, se $N > 2$, $\varrho \in L^{\frac{N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$ cioè, se $k > 2$, $\varrho \in L^{\frac{\beta k}{k-2}+1}$ con $\beta = \frac{2(k-2)}{k(N-2)} > 0$. Dal Corollario 2.18, se $b \in L^k(\mu)$, si ha che $\varrho^{(\beta+1)/2} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subset L^{2N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)$, cioè $\varrho \in L^{(\beta+1)N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)$ con $(\beta+1)N/(N-2) > N/(N-2)$; questo implica una maggior sommabilità di ϱ. Iterando questa procedura, è possibile arrivare a dimostrare la limitatezza di ϱ. Formalizziamo questo discorso nel seguente teorema, che rappresenta il risultato principale di questa sezione.

Teorema 2.19. *Sia $b \in L^k(\mu)$ con $k > N$; allora $\varrho \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Dim. Supponiamo $N > 2$; se $\varrho \in L^{\frac{\beta k}{k-2}+1}$ con $\beta > 0$, allora grazie al Corollario 2.18 e all'immersione di Sobolev sappiamo che $\varrho^{\frac{\beta+1}{2}} \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$

e

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\frac{N(\beta+1)}{N-2}} dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} &\leq C_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varrho^{\frac{\beta+1}{2}})|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_N \frac{\beta+1}{2\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |b|^k \varrho dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varrho^{\frac{\beta k}{k-2}+1} dx\right)^{\frac{k-2}{2k}} \qquad (2.19)\end{aligned}$$

Poniamo

$$\gamma = \frac{\beta k}{k-2} + 1, \quad \vartheta = \frac{N}{N-2}\frac{k-2}{k}$$

e osserviamo che $\vartheta > 1$, in quanto $k > N$. Inoltre

$$\frac{(\beta+1)N}{N-2} = \vartheta\left(\gamma + \frac{2}{k-2}\right) > \gamma + \frac{2\vartheta}{k-2}.$$

Se definiamo quindi per ricorrenza

$$\begin{cases} \gamma_0 = \dfrac{N}{N-2} \\ \\ \gamma_{n+1} = \vartheta\left(\gamma_n + \dfrac{2}{k-2}\right) \end{cases},$$

la successione γ_n tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$, giacché $\gamma_{n+1} \geq \vartheta^{n+1}\gamma_0$ e, se definiamo

$$\beta_n = \frac{k-2}{k}(\gamma_n - 1) > 0$$

in modo da avere $\beta_n \frac{k}{k-2} + 1 = \gamma_n$, otteniamo che

$$\beta_n + 1 = \gamma_{n+1}\frac{N-2}{N}. \qquad (2.20)$$

Quindi, usando la notazione

$$\|\cdot\|_n = \|\cdot\|_{L^{\gamma_n}(\mathbb{R}^N)}$$

e iterando la stima (2.19) troviamo

$$\|\varrho\|_{n+1}^{\gamma_{n+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)} \leq C_N\left(\frac{\beta_n+1}{2\lambda}\right)\|\varrho\|_n^{\gamma_n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)}\|b\|_{L^k(\mu)}$$

cioè, tenendo presente (2.20) e le definizioni di ϑ e γ_{n+1},

$$\|\varrho\|_{n+1} \leq C_N^{\frac{2N}{N-2}\frac{1}{\gamma_{n+1}}}\left(\frac{N-2}{2\lambda N}\gamma_{n+1}\right)^{\frac{2N}{N-2}\frac{1}{\gamma_{n+1}}}\|\varrho\|_n^{\frac{\gamma_n}{\gamma_n+\frac{2}{k-2}}}\|b\|_{L^k(\mu)}^{\frac{2N}{N-2}\frac{1}{\gamma_{n+1}}}. \qquad (2.21)$$

Definiamo la successione $\alpha_n = \log\|\varrho\|_n$. Siccome $\gamma_n \to +\infty$, per dimostrare che $\varrho \in L^\infty$, basta provare che α_n converge. La stima (2.21) ci dice che

$$\alpha_{n+1} \leq \frac{2N}{N-2}\frac{1}{\gamma_{n+1}}\log\left(\frac{C_N(N-2)}{2\lambda N}\gamma_{n+1}\|b\|_{L^k(\mu)}\right) + \frac{\gamma_n}{\gamma_n + \frac{2}{k-2}}\alpha_n;$$

se, per assurdo, si suppone che $\alpha_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, allora si avrebbe che $\alpha_n \geq 0$ definitivamente e quindi per ogni $\varepsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} - \alpha_n &\leq \frac{2N}{N-2}\frac{1}{\gamma_{n+1}}\log\left(\frac{C_N(N-2)}{2\lambda N}\gamma_{n+1}\|b\|_{L^k(\mu)}\right)\\ &\leq C\frac{1}{\left(\gamma_{n+1}\right)^{1-\varepsilon}} \leq C\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{(n+1)(1-\varepsilon)}\end{aligned}$$

dove $C > 0$ è una costante. Siccome l'ultimo membro rappresenta il termine generale di una serie geometrica con ragione minore di 1, α_n converge ad numero reale. Ciò contraddice l'ipotesi che $\alpha_n \to +\infty$. In definitiva, risulta che

$$\log\|\varrho\|_\infty = \lim_{n\to+\infty}\alpha_n < +\infty.$$

Per concludere, facciamo un'osservazione quando $N = 2$; in questo caso, dato che $\varrho \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in (1,+\infty)$, $\varrho \in L^{\frac{r}{r-2}}(\mathbb{R}^N)$ per $r \in (2,k)$. Quindi, se al posto di $N/(N-2)$ mettiamo $r/(r-2)$, la dimostrazione precedente funziona ugualmente. $\square$