Prefazione

Il presente quaderno è basato sulle lezioni tenute da A. Rhandi al Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi" dell'Università del Salento nell'ambito del Dottorato di Ricerca in Matematica durante l'anno accademico 2004-2005. L'obiettivo principale del corso è stato lo studio di semigruppi di Markov associati ad operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti localmente hölderiani e illimitati. I contenuti dei vari capitoli rispecchiano fedelmente l'effettivo svolgimento delle lezioni.

Nel Capitolo 1, sfruttando la classica teoria C^α, si studia l'esistenza di una soluzione classica, limitata $u(x,t)$ del problema parabolico associato ad un operatore ellittico del secondo ordine della forma

$$A\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij}\varphi(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_i\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

$$\begin{cases} \partial_t u - Au = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^N \\ u(0) = f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N) & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{0.1}$$

con $\varphi \in D_{\max}(A) := \{u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N), \forall\, 1 < p < \infty, Au \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)\}$. I coefficienti di A sono funzioni regolari, ma illimitate in $\mathbb{R}^N$. Piú precisamente, usando un argomento di localizzazione, le stime interne di Schauder e la disuguaglianza di Harnack parabolica, si costruisce un semigruppo di contrazioni positive $(T(t))$ in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$, il cosiddetto *semigruppo minimale associato ad* A, che fornisce la soluzione u di (0.1) tramite la formula $u(t,x) = T(t)f(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. Inoltre, il semigruppo $(T(t))$, che non è fortemente continuo in generale, è un semigruppo di Markov, irriducibile e con la proprietà strong Feller. La restante parte del capitolo è dedicata alla caratterizzazione del generatore debole $\widetilde{A}$ di $(T(t))$. In particolare, si prova che $\widetilde{A} = A$ se e solo se $(T(t))$ è conservativo, ossia $T(t)\mathbb{1} = \mathbb{1}$, per ogni $t > 0$. In questo caso, $(T(t))$ fornisce l' unica soluzione classica limitata di (0.1). Il riferimento bibliografico per questo capitolo è [**28**].

Nel Capitolo 2 si introduce il concetto di misura invariante per il semigruppo di Markov $(T(t))$ costruito nel precedente capitolo e si dimostra che se una misura invariante esiste, allora $(T(t))$ deve essere conservativo. In seguito,

si richiama il teorema di Krylov-Bogoliubov, che fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza di una misura invariante.
Un criterio molto utile per l'esistenza e l'unicità di misure invarianti è quello di Hasminskii, di cui è data la dimostrazione. Inoltre, si mostra come opportune condizioni di crescita sul termine di drift $b = (b_1, \cdots, b_N)$ permettano di ottenere una misura invariante $\mu = \rho dx$ per il semigruppo di Markov $(T(t))$, con $\rho \in L^p(\mu)$, per ogni $p \in [1, \infty)$. In questo ambito, la nozione di funzione di Lyapunov gioca un ruolo importante. Per questi argomenti si rimanda a [**29**]. Inoltre, è facile provare che μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, cioè esiste $\rho \in L^1(\mu)$ tale che $d\mu = \rho\, dx$.
Nell'ultima parte del capitolo, si indagano proprietà di regolarità locale e globale di ρ. Dapprima, si dimostra che $0 < \rho \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in (1, \infty)$ (cf. [**8**]), usando argomenti di regolarità ellittica. Il capitolo si chiude provando che $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, se $b \in L^k(\mu)$, per qualche $k > N$. La dimostrazione si basa sulla tecnica iterativa di Moser, il cui punto di partenza è il Teorema 2.15, che stabilisce che $\sqrt{\rho} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, assumendo che $b \in L^2(\mu)$. Ne segue, con il teorema di immersione di Sobolev, che $\rho \in L^{\frac{N}{N-2}}(\mathbb{R}^N)$, se $N > 2$ e $\rho \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p < +\infty$, se $N = 2$. Il Teorema 2.15 si trova in [**7**], ma qui se ne presenta una dimostrazione differente. Ci riferiamo a [**26**] per questa parte.

Se μ è una misura invariante per $(T(t))$, allora $(T(t))$ può essere esteso ad un semigruppo C_0 in $L^p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pertanto, nel Capitolo 3 si studiano stime globali, proprietà spettrali e il comportamento asintotico di $(T(t))$ in $L^p(\mu)$. Dopo aver dato la nozione di *spectral gap*, si discute il suo legame con lo spettro del generatore di $(T(t))$ in $L^2(\mu)$ nel caso simmetrico. Inoltre, si mette in relazione la condizione di spectral gap con il comportamento asintotico di $(T(t))$ e si dimostra l'integrabilità di funzioni di tipo esponenziale rispetto alla misura invariante μ.
Quindi si formulano le cosiddette disuguaglianze di Sobolev logaritmiche, introdotte da L. Gross [**19**] per provare l'ipercontrattività del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck (si veda anche [**30**]).
Sulla base di un risultato dovuto a Rothaus, si dimostra la relazione tra disuguaglianze di Sobolev logaritmiche e spectral gap. Successivamente, si fa vedere che l'ipercontrattività di $(T(t))$ è equivalente alle disuguaglianze di Sobolev logaritmiche (si veda [**19**]). Nell'ultima parte del capitolo, ci si avvale di questo risultato per mostrare che il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck in $\mathbb{R}^N$ è ipercontrattivo. L'approccio è puramente analitico e nuovo in letteratura. Per gran parte dei risultati di questo capitolo, i riferimenti indicati sono [**5**], [**4**] e [**9**].

Nel Capitolo 4, seguendo l'approccio di E.B. Davies e B. Simon [**13**], si

introduce una famiglia di disuguaglianze di Sobolev logaritmiche. Procedendo come nella dimostrazione del teorema di Gross, si caratterizza l'ultracontrattività di $(T(t))$ mediante disuguaglianze di Sobolev logaritmiche. Infine, si presenta un risultato di Varopoulos [**34**] che dimostra il viceversa del precedente risultato nel caso simmetrico.
Nelle appendici sono stati raccolti dei risultati classici: le stime di Schauder paraboliche locali, la disuguaglianza di Harnack parabolica, alcuni richiami di teoria dei semigruppi e dei risultati di teoria dell'interpolazione.

Ringraziamenti. Il terzo autore esprime la sua gratitudine a G. Metafune, D. Pallara e al Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi" dell'Università del Salento, per l'interesse e il supporto amichevole manifestati. Egli desidera inoltre ringraziare l'Indam e l'Università del Salento per il finanziamento ricevuto durante il periodo di durata del corso. Inoltre, si ringraziano L. Angiuli e C. Spina per aver curato la stesura delle Sezioni 3.4 e 4.2, rispettivamente.

Simona Fornaro
Michele Miranda
Abdelaziz Rhandi

Lecce e Salerno, febbraio 2008