Appendice B

Divergenza e laplaciano

B.1 L'operatore di Laplace–Beltrami

Sia (M, g) una varietà riemanniana.
Divergenza di un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è la funzione

$$\mathrm{div}X := \mathrm{tr}\nabla X = \textstyle\sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}X, E_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (\mathcal{L}_X g)(E_i, E_i),$$

dove $\{E_i\}$ è una base ortonormale locale di campi vettoriali e ∇ è la connessione di Levi-Civita. In particolare, un campo vettoriale di Killing ha divergenza nulla. Si noti che la definizione data non dipende dalla base ortonormale locale scelta.

Proposizione B.1. *Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. In coordinate locali, posto $\partial_i = \partial/\partial x_i$ e $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$, risulta*

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^n \big(\partial_i X^i + \sum_{j=1}^n X^j \Gamma^i_{ij}\big) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \partial_i \big(X^i \sqrt{|g|}\big),$$

dove $|g| = \det G$, $G = (g_{ij})$.

Dimostrazione. Sia $\{E_i\}$ una base ortonormale locale di campi vettoriali, $E_i = \sum_{k=1}^n b_{ki}\, \partial_k$. Se poniamo $\nabla_{\partial_i} X = \sum_{k=1}^n a_{ki}\, \partial_k$, allora $\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Infatti, tenendo presente il Lemma 12.5, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{div}X &= \sum_i g(\nabla_{E_i}X, E_i) = \sum_{k,h,i} b_{ki}\, b_{hi}\, g(\nabla_{\partial_k}X, \partial_h) \\ &= \sum_{k,h} g^{kh}\, g\big(\sum_r a_{rk}\, \partial_r, \partial_h\big) = \sum_{k,h,r} a_{rk}\, g^{kh}\, g_{hr} = \sum_r a_{rr}.\end{aligned}$$

D'altronde,

$$\nabla_{\partial_i} X = \nabla_{\partial_i} \sum_{j=1}^n X^j \partial_j = \sum_{k=1}^n \big(\partial_i X^k + \sum_j X^j \Gamma^k_{ij}\big)\partial_k$$

e quindi

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n} \big(\partial_i X^i + \sum_j X^j \Gamma^i_{ij}\big). \tag{2.1}$$

Da (cfr. Esercizio 6.55) $\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k \Big\{\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}\Big\} g^{ik}$, segue

$$\sum_i \Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \Big\{\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}\Big\} g^{ik} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} g^{ik}\,\partial_j g_{ik}$$

e quindi

$$\sum_i \Gamma^i_{ij}\, X^j = \frac{1}{2}\sum_{i,k} g^{ik}\, X^j\, \partial_j g_{ik}. \tag{2.2}$$

Inoltre, vale la formula

$$\partial_j\ |g| = \partial_j \det G = (\det G)\mathrm{tr}\,(G^{-1}\partial_j G) = |g|\ \sum_{i,k} g^{ik}\,\partial_j g_{ik}. \tag{2.3}$$

Usando (2.1), (2.2) e (2.3), si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}X &= \sum_j \partial_j X^j + \sum_j \big(\sum_i X^j \Gamma^i_{ij}\big) = \sum_j \partial_j X^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} g^{ik}\, X^j\, \partial_j g_{ik} \\
&= \sum_j \partial_j X^j + \frac{1}{2}\sum_j\ X^j \sum_{i,k}\ g^{ik}\,\partial_j g_{ik} \\
&= \sum_j \partial_j X^j + \frac{1}{2}\sum_j\ X^j \frac{1}{|g|}\,\partial_j |g| \\
&= \sum_j \Big(\partial_j X^j + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, X^j\, \partial_j\, \sqrt{|g|}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(X^i \sqrt{|g|}\right).
\end{aligned}$$

□

Sia X un arbitrario campo vettoriale e supponiamo $X_p \neq 0$ e quindi X diverso da zero in un intorno coordinato U di p. Consideriamo su U un sistema di coordinate locali per cui $X = \partial/\partial x_1$. In tal caso si ha

$$\mathrm{div}X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} X(\sqrt{|g|}).$$

Supponiamo M orientata da Ω_g n-forma di volume determinata dalla metrica g, localmente

$$\Omega_g = \sqrt{|g|}\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Siccome $\mathrm{div}X = 0 \Leftrightarrow X(\sqrt{|g|}) = 0$, allora $\mathrm{div}X = 0$ se e solo se *la forma di volume Ω_g è invariante lungo le curve integrali del campo X* (cfr. anche Proposizione B.2).

Proposizione B.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana orientata (da Ω_g). Allora:*
a) la forma di volume Ω_g è parallela (cioè $\nabla_X\Omega_g = 0$);
b) per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$, si ha

$$\mathcal{L}_X\Omega_g = (\mathrm{div}X)\Omega_g = \mathrm{d}\,\omega,$$

dove $\omega = i_X\Omega_g \in \Lambda^{n-1}(M)$, $\omega(X_1, \ldots, X_{n-1}) := \Omega_g(X, X_1, \ldots, X_{n-1})$.

Dimostrazione. Sia $\{E_i\}$ una base ortonormale (locale) positiva di campi vettoriali, quindi $\Omega_g(E_1, \ldots, E_n) = 1$. Poiché $\nabla_X\Omega_g$ è un tensore, per provare la a) basta provare che $(\nabla_X\Omega_g)(E_1, \ldots, E_n) = 0$. Siccome $\nabla_X E_i$ è combinazione lineare di E_j $(j \neq i)$ e $\nabla_X\Omega_g(E_1, \ldots, E_n) = 0$, si ha

$$\big(\nabla_X\Omega_g\big)(E_1, .., E_n) = \nabla_X\Omega_g(E_1, .., E_n) - \sum_{i=1}^{n}\Omega_g\big(E_1, \ldots, \nabla_X E_i, \ldots, E_n\big) = 0.$$

Anche per la b) basta verificare le uguaglianze sulla n-pla $(E_1, \ldots, E_n)$.

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{L}_X\Omega_g\big)(E_1, \ldots, E_n) &= X\Omega_g(E_1, \ldots, E_n) - \sum_{i=1}^{n}\Omega_g\big(E_1, \ldots, [X, E_i], \ldots, E_n\big) \\
&= X\Omega_g(E_1, \ldots, E_n) - \sum_{i=1}^{n}\Omega_g\big(E_1, \ldots, \nabla_X E_i, \ldots, E_n\big) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\Omega_g\big(E_1, \ldots, \nabla_{E_i}X, \ldots, E_n\big) \\
&= \big(\nabla_X\Omega_g\big)(E_1, \ldots, E_n) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\Omega_g\big(E_1, \ldots, \sum_k g(\nabla_{E_i}X, E_k)E_k, \ldots, E_n\big) \\
&= 0 + \sum_i g(\nabla_{E_i}X, E_i)\,\Omega_g(E_1, \ldots, E_n) \\
&= (\mathrm{div}X)\Omega_g(E_1, \ldots, E_n).
\end{aligned}$$

Inoltre, tenendo conto che $\nabla_{E_i}\Omega_g = 0$, si ha

$$(\mathrm{d}\,\omega)(E_1, \ldots, E_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\big(\nabla_{E_i}\omega\big)(E_1, \ldots, \hat{E}_i, \ldots E_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \Big(\nabla_{E_i} \Omega_g (X, E_1, ..., \hat{E}_i, ...E_n) \\
&\quad - \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \Omega_g (X, E_1, ..., \nabla_{E_i} E_j, ..., \hat{E}_i, ...E_n) \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \Big(\big(\nabla_{E_i} \Omega_g \big) (X, E_1, ..., \hat{E}_i, ...E_n) \\
&\quad + \ \Omega_g (\nabla_{E_i} X, E_1, ..., \hat{E}_i, ...E_n) \\
&\quad + \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \Omega_g (X, E_1, ..., \nabla_{E_i} E_j, ..., \hat{E}_i, ...E_n) \\
&\quad - \sum_{j \neq i, j=1}^{n} \Omega_g (X, E_1, ..., \nabla_{E_i} E_j, ..., \hat{E}_i, ...E_n) \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \Omega_g (\nabla_{E_i} X, E_1, ..., \hat{E}_i, ...E_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Omega_g (E_1, ..., \nabla_{E_i} X, ..., E_n) = (\mathrm{div} X) \Omega_g (E_1, ..., E_n).
\end{aligned}
$$

□

Il **gradiente** di una funzione differenziabile f è il campo vettoriale $\mathrm{grad} f$, che si indica anche anche con ∇f, duale del differenziale:

$$g\left(\nabla f, X\right) = \mathrm{d}f(X) = X(f).$$

Se $\{E_i\}$ è una base ortonormale (locale) di campi vettoriali, si ha

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

In coordinate locali, si ottiene

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

L'operatore

$$\nabla \nabla f : X \mapsto (\nabla \nabla f)(X) = \nabla_X \nabla f$$

definisce un tensore di tipo $(1,1)$ simmetrico. Infatti,

$$X(Y(f)) = X(\mathrm{d}f)(Y) = Xg(\nabla f, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y) + g(\nabla f, \nabla_X Y) \quad (2.4)$$

e l'analoga per $Y(X(f))$ implicano

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = g(\nabla_X \nabla f, Y) - g(\nabla_Y \nabla f, X) + g(\nabla f, [X,Y]),$$

e quindi

$$g(\nabla_X \nabla f, Y) = g(\nabla_Y \nabla f, X). \tag{2.5}$$

L'**hessiano** di f, così come introdotto nella Sezione 6.2 per una arbitraria connessione lineare, è l'operatore

$$H_f = \nabla^2 f = \nabla(\mathrm{d}f) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M), (X,Y) \longmapsto \nabla^2_{X,Y} f.$$

Nel nostro caso ∇ è la connessione di Levi-Civita, tenendo anche conto della (2.4) e che $g(\nabla f, \nabla_X Y) = (\nabla_X Y)(f)$, si ha

$$\begin{aligned} H_f(X,Y) &:= (\nabla_X \mathrm{d}f)\, Y = XY(f) - (\nabla_X Y)\,(f) \\ &= g(\nabla_X \nabla f, Y) = g\left((\nabla \nabla f) X, Y\right). \end{aligned}$$

$H_f = \nabla^2 f$ è $\mathcal{F}(M)$-bilineare e simmetrica, quindi è un tensore covariante simmetrico del secondo ordine.

L'operatore di Laplace-Beltrami

L'operatore differenziale

$$\begin{aligned} \Delta :& \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M), \\ f \mapsto \Delta f &:= -\mathrm{div} \nabla f = -\mathrm{tr}_g \nabla(\nabla f) = -\mathrm{tr}_g \nabla^2 f = -\mathrm{tr}_g H_f, \end{aligned}$$

è detto *operatore di Laplace-Beltrami* (oppure *laplaciano*) della varietà riemanniana (M,g). In coordinate locali, siccome $X = \nabla f$ ha componenti $X^j = \sum_{i=1}^n g^{ij}(\partial f / \partial x_i)$, dalla Proposizione B.1 si ottiene

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{x_j} \left(\sum_{i=1}^n g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right). \tag{2.6}$$

Se $\{E_i\}$ è una base ortonormale (locale) di campi vettoriali, si ha

$$\Delta f = -\mathrm{tr}_g \nabla^2 f = -\sum_{i=1}^n \big(\nabla_{E_i}(\mathrm{d}f)\big) E_i = -\sum_{i=1}^n \Big(E_i(E_i(f)) - \big(\nabla_{E_i} E_i\big)(f) \Big).$$

Inoltre, posto $E_i = \sum_k^n b_{ki}\, \partial_k$, si ha

$$\begin{aligned} \Delta f = -\mathrm{tr}_g \nabla^2 f &= -\sum_{i=1}^n \big(\nabla^2 f\big)(E_i, E_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n \big(\nabla^2 f\big)\big(\sum_k^n b_{ki}\, \partial_k, \sum_h^n b_{hi}\, \partial_h \big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{k,h=1}^{n}\big(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, b_{hi}\big)\big(\nabla^2 f\big)(\partial_k,\partial_h)\\
&= -\sum_{k,h=1}^{n} g^{kh}\big(\nabla^2 f\big)(\partial_k,\partial_h)\\
&= -\sum_{k,h=1}^{n} g^{kh}\Big(\partial_k\partial_h\, f - \big(\nabla_{\partial_k}\partial_h\big)f\Big)\\
&= -\sum_{k,h=1}^{n} g^{kh}\big(\partial^2_{kh} f - \sum_{r=1}^{n}\Gamma^r_{kh}\partial_r f\big),
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\Delta f = -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n}\Gamma^k_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x_k}\right). \tag{2.7}
$$

Osservazione B.3. (Laplaciano in coordinate armoniche)

Sia (x_h) un sistema di coordinate locali sulla varietà riemanniana (M,g). Applicando la (2.7) alle funzioni coordinate, si ha

$$
\Delta x_h = -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{\partial^2 x_h}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n}\Gamma^k_{ij}\,\frac{\partial x_h}{\partial x_k}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\Gamma^h_{ij}\,.
$$

Ricordiamo che un *sistema di coordinate locali* (x_h) di (M,g) è detto *armonico* se le funzioni coordinate $x_h (h=1,...,n)$ sono funzioni armoniche, ovvero

$$
\Delta x_h = 0 \quad \text{per ogni } h=1,...,n.
$$

Dalla teoria delle PDE ellittiche segue che, per ogni fissato punto p_0 di M, esiste un intorno sufficientemente piccolo di p_0 in cui è definito un sistema di coordinate armoniche (cfr. [10] p.143).

Ora, sia (x_h) un sistema di coordinate locali armoniche, quindi per ogni $h=1,...,n$ vale

$$
\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\Gamma^h_{ij} = 0.
$$

Di conseguenza, rispetto a queste coordinate, la (2.7) diventa:

$$
\Delta f = -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial f}{\partial x_k}\,,
$$

e quindi

$$
\Delta f = -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,. \tag{2.8}
$$

Esempio B.4. Se sulla sfera unitaria $(\mathbb{S}^2, g)$ consideriamo coordinate geografiche (θ, φ), allora $g_{\theta\theta} = 1$, $g_{\theta\varphi} = 0$ e $g_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta$ (cfr. Esercizio 4.16) e la forma del laplaciano diventa

$$\begin{aligned}\Delta f &= -\frac{1}{\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\big(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}\big)\Big)\\ &= -\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\Big).\end{aligned}$$

Un operatore lineare $L : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ è detto *operatore differenziale ellittico del secondo ordine* su M se, per ogni fissato sistema di coordinate locali e per ogni $f \in \mathcal{F}(M)$, si può scrivere

$$L(f) = \sum_{i,j} a^{ij}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i\,\frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove (a^{ij}) sono le componenti di un tensore covariante simmetrico del secondo ordine il quale è definito positivo in ogni punto di M. Questa definizione non dipende dal particolare sistema di coordinate locali considerato. Dalla (2.7) segue che l'operatore di Laplace-Beltrami è un operatore differenziale ellittico del secondo ordine.

Teorema B.5. (di Green) *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta. Per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ si ha:*

$$\int_M (\mathrm{div} X)\, v_g = 0.$$

In particolare, per ogni $f \in \mathcal{F}(M)$:

$$\int_M (\Delta f) v_g = 0.$$

Dimostrazione. Se M è orientabile, possiamo orientare M con la n-forma volume $\Omega_g = v_g$. Sia $\{\phi_t\}$ il gruppo (globale) a un parametro di diffeomorfismi di M generato da X. Posto $g_t = \phi_t^* g$, ϕ_t è un'isometria tra (M, g_t) e (M, g) per cui vol(M, g) =vol(M, g_t), cioè

$$\textstyle\int_M v_{g_t} = \int_M v_g \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

D'altronde la derivata di Lie $\mathcal{L}_X \Omega_g := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\Omega_g\right)_{t=0}$, per cui, tenendo anche conto della Proposizione B.2, abbiamo

$$\begin{aligned}0 &= \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M v_{g_t}\Big)_{t=0} = \Big(\int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_{g_t}\Big)_{t=0} = \Big(\int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega_{g_t}\Big)_{t=0}\\ &= \int_M \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\Omega_g\Big)_{t=0} = \int_M \mathcal{L}_X \Omega_g = \int_M (\mathrm{div} X)\, v_g.\end{aligned}$$

Se M non è orientabile, consideriamo il rivestimento doppio orientato $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$. Dato $X \in \mathfrak{X}(M)$, consideriamo il campo di vettori $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ tale che $\pi_* \tilde{X} = X$ (cfr. Esercizio 2.31). Siccome π è un'isometria locale, $(\mathrm{div}\tilde{X})(\tilde{p}) = (\mathrm{div}X)(\pi(\tilde{p}))$ e

$$\int_M (\mathrm{div}X)\, v_g = \frac{1}{2}\int_{\tilde{M}} (\mathrm{div}\tilde{X})\, v_{\tilde{g}} = 0.$$

□

Osservazione B.6. Se (M, g) è una varietà riemanniana compatta orientabile, posto $\omega = i_X \Omega_g \in \Lambda^{n-1}(M)$, dalla Proposizione B.2 e dal Teorema di Green, si ha

$$\int_M \mathrm{d}\,\omega = 0.$$

Teorema B.7. (di Hopf–Bochner) *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana* (*connessa*) *compatta. Se* $f \in \mathcal{F}(M)$ *soddisfa* $\Delta f \geq 0$ (*oppure* $\Delta f \leq 0$)*, allora* $f = cost$*. In particolare, per ogni* $f \in \mathcal{F}(M)$*:*

$$f \ \text{è armonica (cioè}, \Delta f = 0) \Leftrightarrow f = cost.$$

Dimostrazione. Supponiamo M orientata, altrimenti si passa al rivestimento doppio orientato. Siccome $(\Delta f) \geq 0$, applicando il Teorema di Green: $\int_M \Delta f\, v_g = 0$, si ottiene che $\Delta f = 0$. Di conseguenza (cfr. Esercizio B.11),

$$\Delta f^2 = 2f \cdot \Delta f - 2g(\nabla f, \nabla f) = -2g(\nabla f, \nabla f) \quad \text{e} \quad \int_M \Delta f^2\, v_g = 0$$

implicano $\int_M \|\nabla f\|^2\, v_g = 0$, e quindi (essendo M connessa) f è costante su M. □

B.2 Codifferenziale e operatore di Hodge-de Rham

La derivata covariante definita dalla connessione di Levi-Civita ∇ di una varietà riemanniana (M, g) ammette un *aggiunto formale* ∇^*. Se T è un tensore del tipo $(1, r+1)$, $\nabla^* T$ è il tensore di tipo $(1, r)$ definito da

$$\nabla^* T = -\mathrm{tr}\nabla T.$$

In altre parole, se $Y_1, ..., Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, $(\nabla^* T)(Y_1, ..., Y_r)$ è l'opposto della traccia del seguente tensore covariante di ordine 2:

$$(X, Y) \longmapsto (\nabla_X T)(Y, Y_1, ..., Y_r).$$

Fissata una base ortonormale (locale) $\{E_i\}$ di campi vettoriali:

$$(\nabla^* T)(Y_1, ..., Y_r) = -\textstyle\sum_i (\nabla_{E_i} T)(E_i, Y_1, ..., Y_r).$$

In modo analogo, se $T \in \mathfrak{X}^{0,r+1}(M)$, si definisce $\nabla^* T \in \mathfrak{X}^{0,r}(M)$.

Se $T \in \mathfrak{X}^{1,r}(M)$, *divergenza* di T è il tensore $\mathrm{div}T$ di tipo $(0,r)$ definito da

$$(\mathrm{div}T)(Y_1,...,Y_r) := \mathrm{tr}\,(X \longmapsto (\nabla_X T)(Y_1,...,Y_r))\,.$$

Quindi,

$$(\mathrm{div}T)(Y_1,...,Y_r) = \textstyle\sum_i g\,((\nabla_{E_i}T)(Y_1,...,Y_r), E_i)\,.$$

Si noti che per $T \in \mathfrak{X}^{1,r}(M)$ ed $f \in \mathcal{F}(M)$, si ha

$$\big(\mathrm{div}(fT)\big)(Y_1,...,Y_r) = f(\mathrm{div}T)(Y_1,...,Y_r) + g\,(\mathrm{grad}f, T(Y_1,...,Y_r))\,.$$

Se $T \in \mathfrak{X}^{0,r+1}(M)$, indicato con T^* il tensore di tipo $(1,r)$ definito da

$$T(Y_1,...,Y_{r+1}) = g\,(T^*(Y_1,...,Y_r), Y_{r+1})\,,$$

risulta

$$\mathrm{div}T^* = -\nabla^* T,$$

e si pone

$$\mathrm{div}T := -\nabla^* T.$$

In particolare se α è la 1-forma duale di $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$\mathrm{div}X = -\nabla^* \alpha.$$

Se $T \in \mathfrak{X}^{0,2}(M)$ ed $f \in \mathcal{F}(M)$, si ha

$$(\mathrm{div}T)(Y) = \textstyle\sum_i (\nabla_{E_i}T)(Y, E_i)$$

e quindi

$$\big(\mathrm{div}(f\,T)\big)(Y) = f(\mathrm{div}T)(Y) + T(\nabla f, Y).$$

In particolare, se T è il tensore metrico g, siccome $\mathrm{div}g = 0$, si ha

$$\big(\mathrm{div}(f\,g)\big)(Y) = g(\nabla f, Y),$$

e quindi

$$\mathrm{div}(f\,g) = \mathrm{d}f. \tag{2.9}$$

L'operatore $\delta := \nabla^* : \Lambda^{r+1}(M) \to \Lambda^r(M)$ è detto *codifferenziale*. Anche il differenziale esterno $d : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$, che abbiamo definito nella Sezione 2.7, può essere espresso in termini di ∇ mediante la seguente formula (già usata nella dimostrazione della Proposizione B.2)

$$(\mathrm{d}\alpha)(Y_1,...,Y_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}(\nabla_{Y_i}\alpha)(Y_1,...,\hat{Y}_i,...,Y_{r+1}).$$

L'operatore

$$\Delta_r = \delta d + d\delta : \Lambda^r(M) \to \Lambda^r(M),$$

il quale estende l'operatore di Laplace-Beltrami sulle r-forme, è anche detto *operatore di Hodge-de Rham.* In particolare, per $r = 0$, cioè per $f \in \Lambda^0(M) = \mathcal{F}(M)$:

$$\Delta_0 f = \delta \mathrm{d} f = \nabla^* \mathrm{d} f = -\mathrm{div}(\nabla f) = -\mathrm{tr}\nabla(\nabla f) = \Delta f.$$

Ricordiamo che Δ_r è un operatore naturale nel senso che, cosi come d e δ, è invariante per isometrie, cioè per ogni isometria F di (M, g) si ha

$$F^*\Delta_r = \Delta_r F^*.$$

Inoltre, valgono

$$\mathrm{d}^2 = \delta^2 = 0, \quad \Delta_r \mathrm{d} = \mathrm{d}\Delta_r \quad \text{e} \quad \Delta_r\delta = \delta\Delta_r.$$

Se α_i è la 1-forma duale di $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i = 1, 2$, $< \alpha_1, \alpha_2 >:= g(X_1, X_2)$. Se $\alpha = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_r$ e $\beta = \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_r$, con $\alpha_i, \beta_i \in \Lambda^1(M)$, poniamo

$$< \alpha, \beta >:= \det\big(< \alpha_i, \beta_j > \big)_{1 \le i,j \le r}.$$

Sia $\{\vartheta^i\}_{i=1}^n$ una base ortonormale (locale) per $\Lambda^1(M)$. Se

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n} \alpha_{i_1 ... i_r} \vartheta^{i_1} \wedge ... \wedge \vartheta^{i_r},$$
$$\beta = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n} \beta_{i_1 ... i_r} \vartheta^{i_1} \wedge ... \wedge \vartheta^{i_r},$$

risulta

$$< \alpha, \beta >= \sum \alpha_{i_1 ... i_r} \beta_{i_1 ... i_r} \in \mathcal{F}(M).$$

Supponiamo M compatta. La metrica g induce un prodotto scalare su $\Lambda^r(M)$ ponendo:

$$(\alpha, \beta) := \int_M < \alpha, \beta > \, v_g, \qquad \forall\ \alpha, \beta \in \Lambda^r(M).$$

Si può definire un prodotto scalare sull'algebra esterna $\Lambda(M) := \sum_{r=0}^n \Lambda^r(M)$ imponendo che $\Lambda^r(M)$ e $\Lambda^s(M)$ siano ortogonali per $r \neq s$.

Per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$, $\eta \in \Lambda^{r+1}(M)$, gli operatori d, δ e Δ_r, soddisfano:

$$(\mathrm{d}\alpha, \eta) = (\alpha, \delta\eta) \quad \text{e} \quad (\Delta_r\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta_r\beta).$$

In particolare:

$$(\Delta_r\alpha, \alpha) = \int_M \left(|\delta\alpha|^2 + |\mathrm{d}\alpha|^2\right) v_g = \|\delta\alpha\|^2 + \|\mathrm{d}\alpha\|^2,$$

dove $|\alpha|^2 =< \alpha, \alpha >$ e $\|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha)$. Inoltre, per $f \in \Lambda^0(M)$ e $\alpha \in \Lambda^r(M)$, risulta:

$$\Delta_r(f\alpha) = (\Delta_0 f)\alpha + f\Delta_r\alpha - 2\nabla_{\nabla f}\alpha.$$

Una r-forma $\alpha \in \Lambda^r(M)$ si dice *r-forma armonica* se $\Delta_r\alpha = 0$. Due teoremi fondamentali sulle r-forme armoniche sono i seguenti.

Teorema B.8. (di decomposizione di Hodge–de Rham)
Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta orientata. Denotiamo con $\Lambda^p_d(M) = \operatorname{Im} \mathrm{d}_{p-1}$ lo spazio delle p-forme esatte, con $\Lambda^p_h(M)$ lo spazio delle p-forme armoniche e con $\Lambda^p_\delta(M) = \operatorname{Im} \delta_{p+1}$ lo spazio delle p-forme coesatte. Allora, lo spazio vettoriale $\Lambda^p(M)$ si decompone come somma diretta ortogonale:

$$\Lambda^p(M) = \Lambda^p_{\mathrm{d}}(M) \oplus \Lambda^p_\delta(M) \otimes \Lambda^p_h(M).$$

Teorema B.9. (di Hodge–de Rham)
Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta orientata. Lo spazio vettoriale $H^p(M, \mathbb{R}) = \ker \mathrm{d}_p / \operatorname{Im} \mathrm{d}_{p-1}$ (p^{mo}-gruppo di coomologia di de Rham) è isomorfo allo spazio vettoriale delle p-forme armoniche $\Lambda^p_h(M)$.

Esercizio B.10. Si consideri lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, g_0)$. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile e sia $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Si determinino $\operatorname{div} X$ e ∇f. Inoltre, si verifichi che:

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Esercizio B.11. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$ e $F_1, F_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$. Si verifichino le seguenti proprietà:

1) $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}X + (\mathrm{d}f)(X) = f\operatorname{div}X + g(\nabla f, X)$,
2) $\nabla(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \nabla f_2 + f_2 \cdot \nabla f_1$,
3) $f_1 \cdot \Delta f_2 = f_1 \operatorname{div}\nabla f_2 = \operatorname{div}(f_1 \nabla f_2) - g(\nabla f_1, \nabla f_2)$,
4) $\Delta(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \Delta f_2 + f_2 \cdot \Delta f_1 - 2g\big(\nabla f_1, \nabla f_2\big)$,
5) $\Delta g_0(F_1, F_2) = g_0(F_1, \Delta F_2) + g_0(\Delta F_1, F_2) - 2g_0(\nabla F_1, \nabla F_2)$.

Esercizio B.12. Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta. Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$. Si verifichino le seguenti proprietà:

a) $\displaystyle\int_M f(\operatorname{div}X)\, v_g = -\int_M g(\nabla f, X)\, v_g$;

b) $\displaystyle\int_M (\Delta f_1) \cdot f_2\, v_g = \int_M f_1 \cdot (\Delta f_2)\, v_g = \int_M g(\nabla f_1, \nabla f_2)\, v_g$.

Siccome ogni 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ si può esprimere nella forma $\alpha = g(X, \cdot)$ con $X \in \mathfrak{X}(M)$, e $\delta\alpha = -\mathrm{div} X$, la a) dell'Esercizio B.12 si può anche scrivere nella forma equivalente

$$\int_M f(\delta\alpha)\, v_g = \int_M g(\mathrm{d}f, \alpha)\, v_g.$$

Inoltre, dal Teorema di Green segue che $\int_M (\delta\alpha)\, v_g = 0$.

Esercizio B.13. Siano $g, \tilde{g}$ due metriche riemanniane omotetiche su M:

$$\tilde{g} = a^2\, g,\ a^2 = cost. > 0.$$

Usando la formula (2.7), si verifichi che:

$$\Delta_{\tilde{g}} f = \frac{1}{a^2} \Delta_g f.$$

Più in generale, per metriche conformi: $\tilde{g} = a^2\, g$ con $a \in \mathcal{F}(M)$, $a > 0$, risulta

$$\Delta_{\tilde{g}} f = \frac{1}{a^2} \{\Delta_g f + (2 - n)(\mathrm{d}f)(\nabla_g \ln a)\}$$

dove l'indice in basso indica la metrica usata.

Per maggiori dettagli e approfondimenti sugli argomenti di questa appendice si rinvia ai testi [52], [97], [98], [100].