# Appendice A

# Orientabilità e integrazione

## A.1 Varietà orientabili

Una varietà differenziabile $M$, che si assume sempre connessa e paracompatta, si dice *orientabile* se esiste una $n$-forma $\omega \in \Lambda^n(M)$ diversa da zero in ogni punto di $M$. Se $\omega, \omega' \in \Lambda^n(M)$ sono due $n$-forme non nulle in ogni punto di $M$, allora

$$\omega' = f\omega,$$

dove $f \in \mathcal{F}(M)$ è una funzione $> 0$ (oppure $< 0$) in ogni punto di $M$. Se definiamo

$$\omega' \approx \omega \quad (\omega, \omega' \text{ equiverse}) \iff f > 0,$$

$\approx$ è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le $n$-forme di $\Lambda^n(M)$ non nulle in ogni punto di $M$, l'insieme quoziente che si ottiene ha esattamente due classi di equivalenza. Ognuna di queste due classi definisce una *orientazione* su $M$. Una varietà differenziabile orientabile si dice *orientata* quando è fissata una delle due orientazione. Una $n$-forma $\Omega \in \Lambda^n(M)$, non nulla in ogni punto di $M$, individua una delle due orientazioni. Su un intorno coordinato $U$, con $\varphi$ applicazione coordinata, la $n$-forma $\Omega$ è data da

$$\Omega_U = f\mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n \equiv (f \circ \varphi^{-1})\mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n,$$

dove $f \in \mathcal{F}(U)$ e $\Omega_U$ è identificata con $\left(\varphi^{-1}\right)^* \Omega_U \in \Lambda^n(\varphi(U))$. $\mathbb{R}^n$ è una varietà orientabile, l'orientazione naturale di $\mathbb{R}^n$ è definita dalla $n$-forma

$$\omega_0 = \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Siano $M$ e $M'$ due varietà differenziabili orientate da $\Omega$ e $\Omega'$ rispettivamente. Un diffeomorfismo $F : M \longrightarrow M'$ si dice che *conserva l'orientazione* se

$$F^*\Omega' = f\Omega \;\text{ con } f > 0 \;\text{ su } M.$$

Considerando le espressioni locali di $\Omega$ e $\Omega'$, applicando la definizione di applicazione duale sulle $n$-forme e la (2.4), si ottiene che:

$$\text{F conserva l'orientazione} \iff \det(F_{*p}) > 0 \;\text{ per ogni } p \in M.$$

Sia $M$ una varietà orientabile e sia $\Omega$ una $n$-forma che orientata $M$. Consideriamo un atlante $\mathcal{A} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$. Su $U_\alpha$ la forma $\Omega$ è data da:

$$\Omega_\alpha = f_\alpha \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n, \;\text{ dove } f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha).$$

Sostituendo, se necessario, $x_1$ con $-x_1$, possiamo assumere $f_\alpha > 0$ per ogni $\alpha$. Se $(U_\alpha, (x_i))$ e $(U_\beta, (y_i))$ sono due carte di $\mathcal{A}$ con domini a intersezione non vuota, su $U_\alpha \cap U_\beta$ abbiamo

$$\Omega_\alpha = f_\alpha \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n \quad \text{e} \quad \Omega_\beta = f_\beta \mathrm{d}y_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}y_n,$$

dove $f_\alpha, f_\beta \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ sono funzioni positive. D'altronde,

$$\mathrm{d}y_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}y_n = \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Pertanto, necessariamente si ha

$$f_\alpha = f_\beta \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) \;\text{ su }\; U_\alpha \cap U_\beta, \tag{1.1}$$

cioè per $x = \varphi_\alpha(p) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $y = \varphi_\beta(p) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ :

$$\left(f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)(x) = \left(f_\beta \circ \varphi_\beta^{-1}\right)(y) \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right).$$

Quindi vale il seguente risultato.

*Su una varietà orientata esiste un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ con la proprietà che per ogni $\alpha, \beta$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ è un diffeomorfismo che conserva la fissata orientazione, equivalentemente*

$$det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) > 0 \quad su \quad U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \tag{1.2}$$

*dove $(x_1, ..., x_n)$ è il sistema di coordinate locali definito dalla carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e $(y_1, ..., y_n)$ è il sistema di coordinate locali definito dalla carta $(U_\beta, \varphi_\beta)$.* Un atlante con questa proprietà si dice *compatibile* con la fissata orientazione. Viceversa, se esiste un atlante di carte locali con la proprietà di prima, allora $M$ è orientabile (in questo caso si sfrutta la paracompattezza di $M$ e quindi l'esistenza di una partizione dell'unità). L'orientabilità, anche se è stata definita usando la struttura differenziabile della varietà, in effetti è un *invariante topologico*: se $M$ e $M'$ sono due varietà differenziabili omeomorfe, allora $M$ è orientabile se e solo se $M'$ è orientabile. Se $M$ è orientabile, dalla definizione segue subito che ogni sottovarietà aperta di $M$ è orientabile. Quindi, per verificare che una varietà non è orientabile, basta provare che ammette una sottovarietà aperta non orientabile.

**Osservazione A.1.** Si noti che ogni varietà differenziabile $M$ orientabile e di dimensione tre è parallelizzabile (cfr. [54], Teorema 1, p.46), quindi ammette una base di campi vettoriali differenziabili globalmente definita su $M$.

**Esempi di varietà orientabili**

**1**) Ogni varietà che ammette un atlante costituito da una sola carta è ovviamente orientabile. Quindi: $\mathbb{R}^n$, gli aperti di $\mathbb{R}^n$ e le sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ che sono immagini di una parametrizzazione globale, sono orientabili.

**2**) Un'ipersuperficie $M$ di $\mathbb{R}^{n+1}$ è orientabile se e solo se esiste un campo (continuo) unitario $\xi$ di vettori ortogonali ad $M$; in tal caso l'orientazione di $M$ è definita dalla $n$-forma

$$\omega(X_1, ..., X_n) = (i_\xi \omega_0)(X_1, ..., X_n) = \omega_0(\xi, X_1, ..., X_n).$$

Se $M$ è la sfera $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$, $\xi(p) = \vec{p}$ è un campo unitario di vettori ortogonali alla sfera. Quindi, $\mathbb{S}^n$ è un esempio di ipersuperficie orientabile. Più in generale, ogni ipersuperficie compatta di $\mathbb{R}^{n+1}$ è orientabile (cfr. Samelson [101]). In particolare, la superficie torica $\mathbb{T}^2$ e le superfici connesse compatte $M_p = \mathbb{S}^2 \sharp p \mathbb{T}^2$, $p \geq 0$, sono orientabili.

**3**) Ogni varietà differenziabile che ammette un atlante costituito da due carte $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$, con $U_1 \cap U_2$ connesso, è orientabile. Infatti se $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ è un atlante che non soddisfa la (1.2), allora l'atlante $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \psi_2)\}$ soddisfa la (1.2), dove $\psi_2$ è ottenuta da $\varphi_2$ cambiando di segno a una coordinata. Ritroviamo che la sfera $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, è orientabile in quanto si può considerare l'atlante definito dalle due proiezioni stereografiche.

**4**) Il nastro di Möbius è il classico esempio di superficie di $\mathbb{R}^3$ non orientabile. Consideriamo il segmento aperto $\sigma = AB : x_1 = 1, -2 < x_3 < 2, x_2 = 0$, questo è un segmento del piano $x_2 = 0$, parallelo all'asse $x_3$ e avente $C = (1, 0, 0)$ come punto medio. Sottoponiamo $\sigma$ a un movimento composto da una rotazione di $C$ intorno all'asse $x_3$ e simultaneamente da una rotazione di $\sigma$ intorno al punto $C$ nel piano $\alpha(C,\text{asse}x_3)$ in modo tale che quando $C$ ruota di un angolo $\vartheta$, $\sigma$ ruota intorno a $C$ di un angolo $\frac{\vartheta}{2}$. Dopo una rotazione completa di $C$, il segmento $\sigma = AB$ è mandato nel segmento $BA$. La superficie $\Sigma$ che in questo modo viene descritta dal segmento $\sigma$ è il nastro di Möbius. Se $\Sigma$ fosse orientabile, dovrebbe esistere un campo continuo $\xi$ di vettori, $\xi_p \neq 0$, $\xi_p \perp T_p\Sigma$, per ogni $p \in \Sigma$. Ora se consideriamo la curva $\gamma(t)$ descritta dal punto $C$ durante il movimento di $\sigma$, quindi $\gamma(0) = C = \gamma(1)$, muovendo $\xi$ lungo $\gamma$ si avrebbe $\xi_C = \xi_{\gamma(0)} = -\xi_{\gamma(1)} = -\xi_C$ e quindi $\xi_C = 0$. Dunque il nastro di Möbius è una varietà non orientabile.

**5**) Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2$ è una varietà non orientabile in quanto possiede un aperto omeomorfo a un nastro di Möbius. In particolare le superfici connesse compatte $M_q = \mathbb{S}^2 \sharp q \mathbb{P}^2$, $q \geq 1$, sono 2-varietà non orientabili. Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n$ è orientabile se e solo se $n$ è dispari.

**6**) Sia $M$ una varietà quasi complessa con struttura quasi complessa $J$ e metrica hermitiana $g$, $\dim_{\mathbb{R}} = 2n$. La 2-forma fondamentale $\Phi(X, Y) = g(X, JY)$ soddisfa $\Phi(JX, JY) = \Phi(X, Y)$. Siccome $g$ è definita positiva e $J$

è non singolare in ogni punto, si ottiene che la $2n$-forma $\Omega = \Phi^n = \Phi \wedge ... \wedge \Phi$ ($n$-volte) è non nulla in ogni punto. D'altronde, una varietà (paracompatta) quasi complessa ammette una metrica hermitiana. Pertanto: *ogni varietà (paracompatta) quasi complessa è orientabile.*

**7**) Il prodotto $M \times N$ e la somma connessa $M \sharp N$ di varietà orientabili definisce ancora una varietà orientabile. Il fibrato tangente $TM$ è una varietà orientabile. Ogni gruppo di Lie è orientabile. Se $M$ è una varietà differenziabile non orientabile, allora esiste una varietà differenziabile $\tilde{M}$ orientabile che è un rivestimento a due fogli di $M$. In particolare, ogni varietà differenziabile semplicemente connessa è orientabile (basta ricordare che ogni rivestimento di uno spazio semplicemente connesso è banale).

## A.2 Integrale di una $n$-forma

Su una varietà differenziabile orientata è possibile definire l'integrale di una $n$-forma $\omega \in \Lambda^n(M)$ con supporto contenuto in un compatto $K$. Intanto ricordiamo la formula del cambiamento di variabili nell'integrazione su domini di $\mathbb{R}^n$. Siano $A, B$ due aperti di $\mathbb{R}^n$, $G : A \to B, x \mapsto y = G(x)$, un diffeomorfismo e $\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)$ il determinate del suo jacobiano. Se $D \subset A$ e $D' = G(D) \subset B$ sono domini limitati di integrazione con $f : B \to \mathbb{R}$ integrabile, allora $f \circ G : A \to \mathbb{R}, x \mapsto f(y(x))$, è integrabile e

$$\int_{D'} f(y)\, \mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}y_n = \int_D f(G(x))\, |\det\Big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big)|\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n, \tag{1.3}$$

dove l'ntegrale che si considera è l'usuale integrale di Riemann. Sia ora $M$ una varietà differenziabile orientata e sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ un atlante di $M$ compatibile con l'orientazione fissata. Se $\omega \in \Lambda^n(M)$ e $A$ è un dominio di $M$ contenuto in qualche $U_\alpha$, con $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ dominio (limitato) di integrazione di $\mathbb{R}^n$, $\omega_\alpha = f_\alpha\, \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n$, poniamo

$$\int_A \omega_\alpha := \int_{\varphi_\alpha(A)} (f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n. \tag{1.4}$$

Se $A$ è anche contenuto in $U_\beta$, posto $G = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(A) \to \varphi_\beta(A)$, applicando (1.3) e (1.1) si ha

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_\beta(A)} (f_\beta \circ \varphi_\beta^{-1})(y)\, \mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}y_n &= \int_{G(\varphi_\alpha(A))} (f_\beta \circ \varphi_\beta^{-1})(y)\, \mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}y_n \\ &= \int_{\varphi_\alpha(A)} (f_\beta \circ \varphi_\beta^{-1})(G(x))\, |\det\Big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big)|\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

$$= \int_{\varphi_\alpha(A)} (f_\beta \circ \varphi_\beta^{-1})(G(x)) \det\Big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n$$
$$= \int_{\varphi_\alpha(A)} (f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n.$$

Quindi la definizione (1.4) è ben posta. Se $\omega \in \Lambda^n(M)$ ha supporto contenuto in un compatto $K$, esiste un numero finito di carte locali $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,...,r}$ di $\mathcal{A}$ i cui domini ricoprono $K$ con $\varphi_i(U_i)$ domini (limitati) di integrazione. Su $U_i$, $\omega$ è data da $\omega_i = (f_i \circ \varphi_i^{-1}) \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n$, dove $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Sia $\{\rho_1, ..., \rho_{r+1}\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_1, ..., U_r, U_{r+1} = M \setminus K\}$ di $M$. Allora,

$\rho_i \geq 0$, supp.$\rho_i \subset U_i, i = 1, ..., r+1$, $\rho_{r+1} = 0$ su $K$, e $\sum_{i=1}^{r+1} \rho_i = 1$.

Di conseguenza, siccome supp.$\omega \subset K$, $\omega = \sum_{i=1}^{r} \rho_i \omega$. Inoltre, siccome ogni $\omega_i = \rho_i \omega$ ha supporto contenuto in $U_i$, si ha $\int_M \omega_i = \int_{U_i} \omega_i$ e quindi si pone

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{r+1} \int_M \omega_i = \sum_{i=1}^{r} \int_M \rho_i \, \omega.$$

La definizione data non dipende dalla particolare partizione considerata. Se $\big(V_j, \xi_j\big)_j$ è un'altra partizione dell'unità, dove $V_j$ sono domini di un altro atlante orientato positivamente, le funzioni $\{\rho_i \xi_j\}$ soddisfano $(\rho_i \xi_j)(p) = 0$ eccetto per un numero finito di indici $(i, j)$, inoltre $\sum_{i,j} \rho_i \xi_j = 1$ e $\sum_j \xi_j = 1$. Allora, si ha

$$\sum_i \int_M \rho_i \omega = \sum_i \int_M (\sum_j \xi_j) \rho_i \, \omega = \sum_{i,j} \int_M \rho_i \xi_j \, \omega$$
$$= \sum_j \int_M (\sum_i \rho_i) \xi_j \, \omega = \sum_j \int_M \xi_j \, \omega.$$

In particolare, se $M$ è compatta, $\int_M \omega$ è definita per ogni $\omega \in \Lambda^n(M)$. Se $\Omega$ è una $n$-forma che orienta $M$ e $(U, (x_i))$ una carta locale di un atlante compatibile con l'orientazione definita da $\Omega$, allora

$$\Omega = f \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n \quad \text{su } \; U \quad \text{con } f > 0.$$

Di conseguenza, nel caso di $M$ compatta, si ha $\int_M \Omega > 0$. La $n$-forma $\Omega$ che orienta $M$ è anche detta *elemento di volume*. Se $M$ e $M'$ sono due varietà orientate da $\Omega$ e $\Omega'$ rispettivamente, ed $F : M \longrightarrow M'$ è un diffeomorfismo che conserva l'orientazione, allora

$$\int_{M'} \omega' = \int_M F^* \omega', \quad \text{dove } \omega' \in \Lambda^n(M') \; \text{ ha supporto compatto.}$$

Un teorema fondamentale nella teoria dell'integrazione è il seguente.

**Teorema A.2.** (di Stokes) *Sia $M$ una varietà differenziabile orientata e con bordo $\partial M$. Se $\alpha \in \Lambda^{n-1}(M)$ è una $(n-1)$-forma a supporto compatto, allora*

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} i^*\alpha \quad (\, = 0 \quad \textit{se} \quad M \textit{ è priva di bordo}) \,,$$

*dove $i : \partial M \hookrightarrow M$ è l'inclusione.*

**Caso riemanniano**

Esaminando la definizione di integrale di (Riemann) di una funzione definita su un dominio di $\mathbb{R}^n$, notiamo che si sfrutta la conoscenza del volume di certi domini come $n$-cubi e $n$-parallelepipedi. Se una varietà differenziabile ha un ben determinato elemento di volume, allora è possibile definire l'integrale di una funzione. Se $M$ è orientabile, esiste un elemento di volume, tuttavia esso non è univocamente determinato. Nel caso riemanniano vediamo che esiste un ben determinato elemento di volume. Sia $(M, g)$ una varietà riemanniana orientata e sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ un atlante compatibile con la fissata orientazione. Se $(x_1, ..., x_n)$ sono le coordinate definite in un fissato dominio $U_\alpha$ dell'atlante $\mathcal{A}$ e $g_{ij} = g\big(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\big)$, poniamo

$$(\Omega_g)_\alpha := \sqrt{\det(g_{ij})}\, \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Questa formula definisce una $n$-forma globale $\Omega_g$ su $M$. Infatti, se $(y_1, ..., y_n)$ sono le coordinate definite in un altro dominio $U_\beta$ dell'atlante $\mathcal{A}$, $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$, posto $g'_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j})$ e $\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_k a_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}$ si ha

$$A^T G A = G',$$

dove $G = (g_{ij})$, $A = (a_{ij}) = (\frac{\partial x_i}{\partial y_j})$, $\det A > 0$ e $G' = (g'_{ij})$. Siccome $\sqrt{\det G'} = \det A \sqrt{\det G}$, tenendo anche conto che

$$\mathrm{d}y_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}y_n = \det\Big(\tfrac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big) \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n,$$

si ha

$$\begin{aligned}
(\Omega_g)_\beta &= \sqrt{\det(g'_{ij})}\, \mathrm{d}y_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}y_n \\
&= \det\Big(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big) \sqrt{\det(g_{ij})} \det\Big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big)\, \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n \\
&= \sqrt{\det(g_{ij})}\, \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n \\
&= (\Omega_g)_\alpha.
\end{aligned}$$

Chiaramente $\Omega_g$ è sempre diversa da zero. Inoltre, se $\mathcal{B} = \{e_i\}$ è una base ortonormale locale positiva di campi vettoriali, si ha

$$(\Omega_g)_\alpha(e_1, ..., e_n) = 1.$$

Infatti, se $e_i = \sum a_{ki}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, si ha $A^T G A = I$ e quindi $\sqrt{\det G}\,\det A = 1$. Di conseguenza,

$$(\Omega_g)_\alpha(e_1, ..., e_n) = \sqrt{\det(g_{ij})}\,\det\big((\mathrm{d}x_h)(e_k)\big) = \sqrt{\det(g_{ij})}\,\det(a_{hk}) = 1.$$

Sia $\omega$ un'altra $n$-forma mai nulla tale che $\omega(e_1, ..., e_n) = +1$ per ogni base ortonormale (locale) positiva $\{e_i\}$ di campi vettoriali. Supponiamo

$$\omega_\alpha = f_\alpha \mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_n, \text{ dove } f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha).$$

Allora

$$1 = \omega_\alpha(e_1, ..., e_n) = f_\alpha \det(a_{hk}) = \frac{f_\alpha}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\,,$$

per cui necessariamente $f_\alpha = \sqrt{\det(g_{ij})}$. Pertanto vale il seguente

**Teorema A.3.** *Se $(M, g)$ è una varietà riemanniana orientata, esiste un'unica $n$-forma $\Omega_g \in \Lambda^n(M)$ tale che $\Omega_g(e_1, ..., e_n) = +1$ per ogni base ortonormale (locale) positiva $\{e_i\}$ di campi vettoriali. Inoltre, localmente:*

$$\Omega_g = \sqrt{det(g_{ij})}\; dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

La $n$-forma $\Omega$ è detta *elemento di volume riemanniano* della varietà riemanniana orientata $(M, g)$. In tal caso, per ogni $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ continua a supporto compatto, si pone

$$\int_M f dv := \int_M f\Omega_g \quad \text{e} \quad \mathrm{vol}(M, g) = \int_M \Omega_g \text{ (quando M è compatta).}$$

Naturalmente se $A$ è un dominio di $M$ contenuto in un intorno coordinato $(U, \varphi)$, con $\varphi(A)$ dominio limitato di integrazione, considerando le $g_{ij} \in \mathcal{F}(\varphi(U))$, si ha

$$\mathrm{vol}(A, g) = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij})}\; \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n.$$

Per una varietà riemanniana $(M, g)$, non necessariamente orientabile, è possibile definire la nozione di integrale mediante la *misura canonica $dv_g$* associata alla metrica $g$. Se $\big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}_\alpha$ è un atlante di $M$ ed $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione continua con supporto compatto contenuto in qualche $U_\alpha$, si pone

$$\int_{U_\alpha} f dv_g := \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (f \circ \varphi_\alpha^{-1})\sqrt{det(g_{ij})}\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n\,,$$

dove $(x_1, \ldots, x_n)$ sono le coordinate locali definite in $U_\alpha$ e le $g_{ij} \in \mathcal{F}(\varphi(U))$. Tale definizione non dipende dalla scelta della carta locale. Se $f$ ha supporto contenuto in $U_\alpha \cap U_\beta$, applicando la (1.3) e tenendo conto che $\sqrt{\det G} = |\det A^{-1}|\sqrt{\det G'}$, si ottiene

$$\int_{U_\alpha} f dv_g = \int_{U_\beta} f dv_g \,.$$

Se $f$ ha supporto contenuto in un compatto $K$ di $M$, è possibile ricoprire $K$ con un numero finito di carte locali $\{(U_i,\, \varphi_i)\}_{i=1,\dots,r}$. In tal caso, poniamo

$$\int_M f dv_g := \sum_{i=1}^{r} \int_{U_i} (f\,\rho_i) dv_g,$$

dove $\{\rho_i\}_{i=1,\dots,r+1}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_i, U_{r+1} := M \setminus K\}_{i=1,\dots,r}$ (si noti che $f\rho_{r+1} = 0$). Anche in questo caso, come nel caso orientabile, la definizione data non dipende dalla particolare partizione dell'unità considerata. Se $M$ è compatta, si pone:

$$\mathrm{vol}(M, g) := \int_M 1\, dv_g \,,$$

e l'integrale $\int_M f\, \mathrm{d}v_g$ è definito per ogni $f : M \to \mathbb{R}$ continua. Se $M$ è anche orientata, questa definizione coincide con quella data in precedenza. Infine, si noti che *il volume di una varietà riemanniana è invariante per isometrie.*

**Esempio A.4.** Sia $M$ una *superficie regolare* di $\mathbb{R}^3$ e $\varphi : U \longrightarrow M$, $(u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una parametrizzazione locale di $M$. In questo caso, l'*elemento di area* è dato da:

$$\mathrm{d}\sigma = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v,$$

dove $\varphi_u \wedge \varphi_v$ denota il prodotto vettoriale di $\varphi_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $\varphi_v = (x_v, y_v, z_v)$ in $\mathbb{R}^3$. Infatti, indicata con $g_0$ la metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$ e con $g$ la metrica riemanniana indotta da $g_0$ su $M$, si ha:

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = \det(g_{ij}) = EG - F^2,$$

dove $E = g_{uu} = g_0(\partial_u, \partial_u)$, $F = g_{uv} = g_0(\partial_u, \partial_v)$, $G = g_{vv} = g_0(\partial_v, \partial_v)$.

**Esempio A.5.** Sia $\mathbb{T}^2$ il toro di $\mathbb{R}^3$ descritto dalla rotazione della circonferenza di centro $C(0, R, 0)$ e raggio $r < R$ intorno all'asse $z$. Vogliamo determinare il volume (o area, visto che siamo in dimensione 2) della varietà riemanniana $(\mathbb{T}^2, g)$ dove $g$ è la metrica riemanniana indotta. Consideriamo la carta $(U, \varphi)$ corrispondente alla parametrizzazione

$$x(u, v) = (R + r\cos u)\cos v,\, y(u, v) = (R + r\cos u)\sin v,\, z(u, v) = r\sin u,$$

dove $u, v \in Q = ]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$. Tale parametrizzazione ricopre tutto il toro tranne un parallelo e un meridiano. Rispetto alle coordinate $(u, v)$, abbiamo $g_{uu} = r^2$, $g_{uv} = 0$, $g_{vv} = (R + r\cos u)^2$ e quindi $\sqrt{\det(g_{ij})} = r(R + r\cos u)$. Poniamo $U_\epsilon = \varphi^{-1}(Q_\epsilon)$, dove $Q_\epsilon = ]\epsilon, 2\pi - \epsilon[\times]\epsilon, 2\pi - \epsilon[$. Allora

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(U_\epsilon, g) &= \int_{Q_\epsilon} r(R + r\cos u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} (rR + r^2\cos u)\mathrm{d}u \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \mathrm{d}v \\ &= r^2(2\pi - 2\epsilon)\big(\sin(2\pi - \epsilon) - \sin\epsilon\big) + rR(2\pi - 2\epsilon)^2,\end{aligned}$$

e quindi

$$\mathrm{vol}(\mathbb{T}^2, g) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{vol}(U_\epsilon, g) = 4\pi^2 rR.$$

**Esercizio A.6.** Si verifichi che $\mathrm{vol}(\mathbb{T}^2, g) = 4\pi^2 rR$ è in accordo col Teorema di Pappo riguardante l'area delle superfici di rotazione: se $\Sigma$ è generata dalla rotazione di una curva $\gamma(s)$ di lunghezza $\ell$, denotata con $\rho(s)$ la distanza del punto $\gamma(s)$ dall'asse di rotazione (dove $s$ è l'ascissa curvilinea), si ha

$$\mathrm{area}(\Sigma) = 2\pi \int_0^\ell \rho(s)\,\mathrm{d}s.$$

**Esercizio A.7.** Date due varietà riemanniane compatte $(M_1, g_1)$, $(M_2, g_2)$, si verifichi che

$$\mathrm{vol}(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)) = \mathrm{vol}(M_1, g_1)\,\mathrm{vol}(M_2, g_2).$$

**Esercizio A.8.** Sia $(M, g)$ una $n$-varietà riemanniana compatta e sia $(\tilde{M}, \tilde{g})$ un rivestimento riemanniano a $k$ fogli di $(M, g)$. Si verifichi che

$$\mathrm{vol}(\tilde{M}, \tilde{g}) = k\,\mathrm{vol}(M, g).$$

**Esercizio A.9.** Sia $(M, g)$ una $n$-varietà riemanniana compatta e sia $\bar{g}$ una metrica riemanniana omotetica a $g$: $\bar{g} = a\,g$, dove $a$ è un numero reale positivo. Si verifichi che

$$\mathrm{vol}(M, \bar{g}) = a^{(n/2)}\,\mathrm{vol}(M, g).$$