Capitolo 11

Problemi variazionali in geometria

Un tema fondamentale in geometria differenziale è l'uso di principi variazionali per distinguere e studiare oggetti geometrici particolarmente interessanti. Ad esempio, metriche di Einstein e curve geodetiche sono caratterizzati come punti critici di opportuni funzionali.

Iniziamo questo capitolo con un semplice problema variazionale che si incontra nello studio degli autovalori di una matrice reale simmetrica. Sia quindi A una matrice reale simmetrica di ordine n ($n > 1$ per evitare il caso banale). Sulla sfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ dello spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, g_0)$, consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}, \ v \longmapsto f(v) = g_0(Av, v). \tag{11.1}$$

Un punto v di $\mathbb{S}^{n-1}$ si dice punto critico per f se il differenziale $(\mathrm{d}f)_v = 0$, cioè se per ogni $\gamma(t) : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^{n-1}$ curva differenziabile di $\mathbb{S}^{n-1}$, con $\gamma(0) = v$, posto $f(t) = f(\gamma(t))$, si ha

$$\big(\mathrm{d}f\big)_v(\dot\gamma(0)) = f'(t)_{|t=0} = 0.$$

Proposizione 11.1. *Un punto $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ è punto critico di f se, e solo se, v è un autovettore di A.*

Dimostrazione. Sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile di $\mathbb{S}^{n-1}$ con $\gamma(0) = v$. Allora

$$\begin{aligned} f'(t)_{|t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_0(A\gamma(t), \gamma(t))_{|t=0} = g_0(A\dot\gamma(0), \gamma(0)) + g_0(A\gamma(0), \dot\gamma(0)) \\ &= 2g_0(Av, \dot\gamma(0)). \end{aligned}$$

Se v è autovettore di A, $Av = \lambda v$, siccome $\|\gamma(t)\| = \text{cost.} = 1$, si ha

$$f'(0) = 2\lambda g_0(v, \dot\gamma(0)) = 2\lambda g_0(\gamma(0), \dot\gamma(0)) = 0.$$

Viceversa, supponiamo v punto critico di f. Sia $w \in T_v\mathbb{S}^{n-1} = v^\perp$ un vettore unitario. Allora $\gamma(t) = (\cos t)v + (\sin t)w$ è una curva differenziabile di $\mathbb{S}^{n-1}$ con $\gamma(0) = v$ e $\dot\gamma(0) = w$. Inoltre, $0 = f'(t)_{|t=0} = 2g_0(Av, \dot\gamma(0)) = 2g_0(Av, w)$ implica che Av è ortogonale a w per ogni $w \in T_v\mathbb{S}^{n-1}$. Pertanto, Av è parallelo a v. □

Osservazione 11.2. Poiché la funzione f definita dalla (11.1) è continua e definita su un compatto, esiste certamente un punto di minimo e quindi un punto critico di f. Di conseguenza, ogni matrice reale simmetrica ammette almeno un autovettore. Utilizzando questo fatto, si ottiene il ben noto teorema di algebra lineare: "se A è una matrice reale simmetrica di ordine n, allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ di autovettori per A".

Nel seguito di questo Capitolo, e nel Capitolo successivo, tratteremo alcuni problemi variazionali intimamente legati alla geometria di una varietà riemanniana. In questi problemi variazionali, indicato con X l'insieme su cui è definito un certo funzionale $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R}$, un punto x_0 di X viene definito come punto critico per $\mathcal{F}$ se per ogni *variazione* x_s di x_0 in X:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}(x_s)}{\mathrm{d}s}(0) = 0.$$

Questo può sembrare strano, ma in effetti è abbastanza naturale in quanto è possibile definire su X una struttura di varietà differenziabile (in generale di dimensione infinita) per cui:

- una variazione x_s di x_0 in X è semplicemente una curva differenziabile $\gamma(s) = x_s$ di X con $\gamma(0) = x_0$;
- $w = \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}s}_{|s=0} = \dot\gamma(0)$ è un vettore tangente alla curva $\gamma(s)$ per $s = 0$ e quindi un vettore di $T_{x_o}X$ (spazio tangente in x_o a X);
- $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{F}(x_s)\right)_{|s=0}$ è la derivata direzionale della funzione $\mathcal{F} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_o nella direzione di w. Infatti, tenendo conto del significato geometrico del differenziale, otteniamo

$$\big(\mathrm{d}\mathcal{F}\big)_{x_o}(w) = \big(\mathrm{d}\mathcal{F}\big)_{x_o}\big(\dot\gamma(0)\big) = \big(\mathcal{F} \dot{\circ} \gamma\big)(0) = \big(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{F}(s)\big)_{s=0},$$

dove $\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(\gamma(s))$. Quindi, dire che x_o è punto critico di $\mathcal{F}$ significa dire che il differenziale di $\mathcal{F}$ in x_o si annulla su $T_{x_o}X$.

11.1 Una caratterizzazione variazionale delle metriche di Einstein

In questa Sezione riportiamo una dimostrazione di un classico risultato di D. Hilbert sulla caratterizzazione variazionale delle metriche di Einstein (D. Hilbert [48]; cfr. anche T. Nagano [72]).

Sia M una varietà differenziabile orientabile, n-dimensionale e compatta. Indichiamo con $\mathcal{M}$ l'insieme di tutte le metriche riemanniane su M che hanno lo stesso fissato volume, in particolare unitario, ovvero

$$\mathcal{M} := \{g \,:\, g \text{ metrica riemanniana su } M,\ \mathrm{vol}(M,g) = 1\}.$$

Consideriamo il funzionale

$$I : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \quad g \mapsto I(g) := \int_M r(g)\, v_g,$$

dove $r(g)$ è la curvatura scalare della varietà riemanniana (M,g). Se $g(t)$, con $|t| < \varepsilon$, è una curva differenziabile di metriche dell'insieme $\mathcal{M}$, possiamo considerare la funzione

$$I : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ t \longmapsto I(t) := I\big(g(t)\big) = \int_M r(t)\, v_{g(t)}\,,$$

dove $r(t) = r\big(g(t)\big)$ è la curvatura scalare della varietà riemanniana $(M, g(t))$.

Definizione 11.3. Diciamo che un elemento g di $\mathcal{M}$ è *punto critico* del funzionale I se per ogni curva differenziabile $g(t)$ di $\mathcal{M}$, con $g(0) = g$, è soddisfatta la condizione

$$\frac{\mathrm{d}\, I(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{11.2}$$

Teorema 11.4. (di Hilbert) Sia M una varietà differenziabile orientabile compatta di dimensione $n > 2$. Allora, una metrica g di $\mathcal{M}$ è una metrica di Einstein se, e solo se, g è punto critico del funzionale $I : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$.

La dimostrazione di questo teorema seguirà da una serie di lemmi. Sia $g(t)$ una curva differenziabile di $\mathcal{M}$, $|t| < \varepsilon$, con $g(0) = g$. Le componenti dei tensori che verranno nel seguito considerati sono riferite a un sistema di coordinate locali.

Lemma 11.5.

$$\frac{dI}{dt}(t) = \int_M A(t) + \int_M B(t),$$

dove

$$A(t) := \sum_{i,j=1}^{n} Ric_{i\,j}(t)\, \frac{d}{dt}\left(g^{ij}(t)\, v_{g(t)}\right) \ \ e \ \ B(t) := \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\, Ric_{i\,j}(t)\right) g^{ij}(t)\, v_{g(t)}.$$

Dimostrazione. Partendo dalla definizione del funzionale I, abbiamo:

$$\frac{\mathrm{d}\, I}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_M r(t)\, v_{g(t)} = \int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(r(t)\, v_{g(t)}\big)\,.$$

Sapendo che $r = \sum_{i,j=1}^{n} Ric_{ij}\, g^{ij}$, risulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(r(t)\, v_{g(t)}\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ric_{i\,j}(t)\Big)\, g^{ij}(t)\, v_{g(t)} + \sum_{i,k,j=1}^{n} Ric_{i\,j}(t)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(g^{ij}(t)\, v_{g(t)}\big).$$

□

Il tensore h(t)=g′(t)

Indichiamo con $h(t)$ il tensore simmetrico di tipo $(0,2)$ definito da

$$h_{ij}(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{ij}(t) \qquad (\text{quindi, } g(t) = g + th(0) + o(t^2)).$$

La simmetria di h segue dalla simmetria di g. Inoltre h^{ij}, generico elemento della matrice inversa di (h_{ij}), è dato da

$$h^{ij}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^{ij}(t)\,.$$

Infatti:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t)\, g^{jk}(t) = \delta_{ik} \implies \sum_{j=1}^{n} \Big(\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{ij}(t)\big)\, g^{jk}(t) + g_{ij}(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^{jk}(t) \Big) = 0$$

e quindi,

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(h_{ij}(t)\, g^{j\,k}(t) + g_{ij}(t)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^{jk}(t) \Big) = 0\,.$$

Moltiplicando per $g^{i\,r}(t)$ e sommando anche rispetto all'indice i, si ha

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Big(g^{i\,r}\, h_{ij}\, g^{j\,k} + g^{i\,r}\, g_{ij}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^{jk} \Big)(t) = 0,$$

$$\Big(h^{rk} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{j\,r}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^{jk} \Big)(t) = 0 \quad \text{e quindi,} \quad h^{rk}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^{rk}(t)\,.$$

Lemma 11.6.

$$\frac{d}{dt}\, v_{g(t)} = \frac{1}{2} < h(t), g(t) > \, v_{g(t)}\,.$$

Dimostrazione. Localmente risulta:

$$v_{g(t)} = \sqrt{\det\big(g_{ij}(t)\big)}\ \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n\,,$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, v_{g(t)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\det\big(g_{ij}(t)\big)}\ \mathrm{d}x_1\cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det\big(g_{ij}(t)\big)}}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \det\big(g_{ij}(t)\big)\ \mathrm{d}x_1\cdots \mathrm{d}x_n\,.\end{aligned}$$

Ricordiamo che (cfr. Lemma 3.18):

$$\big(\det G\big)'(t) = (\det G)\mathrm{tr}\big(G^{-1}\,(t)G'(t)\big).$$

Applicando tale formula, si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, v_{g(t)} &= \frac{1}{2\sqrt{\det\big(g_{ij}(t)\big)}}\ \big(\det\, g_{ij}(t)\big)\sum_{i,j=1}^{n}\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{ij}\big)\ g^{ij}(t)\ \mathrm{d}x_1\cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\det\big(g_{ij}(t)\big)}\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(t)g^{ij}(t)\ \mathrm{d}x_1\cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \frac{1}{2}\ < h(t), g(t) >\ v_{g(t)}\,.\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 11.7.

$$\frac{d}{dt}\big(g^{ij}(t)\, v_{g(t)}\big) = -\, h^{ij}(t)\, v_{g(t)} + \frac{1}{2}\, g^{ij}(t)\ < h, g > (t)\, v_{g(t)}\,.$$

Dimostrazione. Questo Lemma segue dal Lemma 11.6 tenendo presente che $h^{ij} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, g^{ij}$. $\square$

Lemma 11.8. *Vale la seguente formula:*

$$A(t) = -\ < Ric, h > (t)\, v_{g(t)} + \tfrac{1}{2}\, r(t) < h, g > (t)\, v_{g(t)}\,.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 11.5, segue che

$$A(t) = \sum_{i,j=1}^{n} Ric_{i\,j}(t)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \big(g^{ij}(t)\, v_{g(t)}\big).$$

Applicando il Lemma 11.7, si ottiene:

$$\begin{aligned}A(t) &= \sum_{i,j=1}^{n} Ric_{i\,j}(t)\Big(-\, h^{ij}(t)v_{g(t)} + \frac{1}{2}\, g^{ij}(t)\ < h, g > (t)\, v_{g(t)}\Big) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} Ric_{ij}(t)h^{ij}(t)v_{g(t)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} Ric_{i\,j}(t)\, g^{ij}(t)\ < h, g > (t)\, v_{g(t)} \\ &= -\ < Ric, h > (t)\, v_{g(t)} + \frac{1}{2}\, r(t) < h, g > (t)\, v_{g(t)}\,.\end{aligned}$$

□

Lemma 11.9. $\int_M B(t) = 0$.

Dimostrazione. Esprimendo $Ric_{ij}(t) = \sum_k R_{ikj}{}^k(t)$ in funzione dei coefficienti $g_{ij}(t)$ e $g^{ij}(t)$, dopo alcuni calcoli, si ottiene la seguente formula (cfr. M. Berger [8] p. 288, formula (2.11)):

$$B(t) = \big(\Delta \operatorname{tr} h(t) + \delta\, \delta\, h(t)\big)\, v_{g(t)},$$

dove Δ è l'operatore di Laplace-Beltrami e δ è l'operatore divergenza. Pertanto, applicando il Teorema B.5 (di Green), si ha il risultato enunciato. □

Lemma 11.10.

$$\int_M < h(t), g(t) > \, v_{g(t)} = 0, \quad \textit{cioè} \quad \int_M tr\, h(t)\, v_{g(t)} = 0 \quad \forall t.$$

Dimostrazione. Siccome le metriche di $\mathcal{M}$ hanno volume costante unitario, tenendo presente il Lemma 11.6, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{vol}(M, g(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M v_{g(t)} = \int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, v_{g(t)} \\ &= \frac{1}{2}\int_M < h, g > (t)\, v_{g(t)}. \end{aligned}$$

□

Lemma 11.11. *Per ogni metrica riemanniana g e per ogni tensore h covariante simmetrico del secondo ordine che soddisfano $< h, g >= 0$, esiste una curva $g(t)$ di metriche di volume costante tale che*

$$g(0) = g \quad e \quad g'(0) = h.$$

Dimostrazione. Siano (M, g) una varietà riemanniana, $h = (h_{ij})$ un tensore covariante simmetrico del secondo ordine su M, che soddisfa $< h, g >= 0$, e $\bar{h}$ il corrispondente tensore di tipo $(1,1)$, cioè tale che $g(\bar{h}X, Y) = h(X, Y)$, uguaglianza che può esprimersi brevemente nella forma $g\bar{h} = h$. Consideriamo inoltre il tensore $e^{t\bar{h}}$ che, come per l'esponenziale di una matrice (cfr. Sezione 3.5), si può esprimere con

$$e^{t\bar{h}} = I + t\bar{h} + \frac{t^2}{2}\,\bar{h}^2 + \frac{t^3}{3!}\,\bar{h}^3 + \ldots\frac{t^r}{r!}\,\bar{h}^r + \ldots, \qquad \text{e quindi}$$

$$e^{t\bar{h}}X = X + t\bar{h}X + \frac{t^2}{2}\,\bar{h}^2X + \frac{t^3}{3!}\,\bar{h}^3X + \ldots. + \frac{t^r}{r!}\,\bar{h}^rX + \ldots.$$

Poniamo $g(t) := g\, e^{t\bar{h}}$, $|t| < \varepsilon$. Si noti che $g(t)$ è il tensore di tipo $(0,2)$ che corrisponde, mediante la g, al tensore simmetrico $e^{t\bar{h}}$, quindi:

$$g(t)(X,Y) = g(e^{t\bar{h}}\, X, Y)$$
$$= g(X,Y) + tg(\bar{h}, Y) + \frac{t^2}{2} g(\bar{h}^2 X, Y) + \frac{t^3}{3} g(\bar{h}^3 X, Y) + ...$$

Se $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono gli autovalori del tensore simmetrico $\bar{h}$, $t\lambda_1, ..., t\lambda_n$ sono gli autovalori di $t\bar{h}$ e quindi $e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n}$ sono gli autovalori del tensore simmetrico $e^{t\bar{h}}$. Pertanto, il tensore $g(t)$ è definito positivo per ogni t e quindi definisce una curva di metriche riemanniane su M. La curva $g(t)$ soddisfa:

$$g(0) = g \quad \text{e} \quad g'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, g(t) = g\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, e^{t\bar{h}} = g\, \bar{h} e^{t\bar{h}}\,,$$

vale a dire

$$g'(t)(X,Y) = g\big((\bar{h} e^{t\bar{h}})(X), Y\big)\,.$$

In particolare:

$$g'(0)(X,Y) = g(\bar{h}X, Y) = h(X,Y), \text{ ossia } g'(0) = h\,.$$

Resta da verificare che $\mathrm{vol}(g(t))$ =cost= $\mathrm{vol}(g)$, e quindi basta provare che

$$\det\big(g_{ij}(t)\big) = \det\big(g_{ij}(0)\big) = \det(g_{ij})\,.$$

Da

$$g(t) = g\, e^{t\bar{h}} = g + th + \frac{t^2}{2}\, g\bar{h}^2 + \frac{t^3}{3!}\, g\bar{h}^3 + ...,$$

segue che:

$$g(0) = g,\ \ g'(0) = h,\ \ g''(0) = g\, \bar{h}^2,\ \ g'''(0) = g\, \bar{h}^3,\ ...\ , g^{(r)}(0) = g\, \bar{h}^r, ...$$

Pertanto:

$$g_{ij}(t) = g_{ij}(0) + g'_{ij}(0)t + g''_{ij}(0)\frac{t^2}{2} + g'''_{ij}(0)\frac{t^3}{3!} + \cdots\,, \quad \text{dove}$$

$$g'_{ij}(0) = h_{ij}, \quad g''_{ij}(0) = g(\partial_i\,, \bar{h}^2 \partial_j) = g(\bar{h}\partial_i\,, \bar{h}\partial_j) = \sum_{r,s=1}^{n} h_i^r\, h_j^s\, g_{rs},$$
$$g'''_{ij}(0) = g(\partial_i\,, \bar{h}^3 \partial_j), ...$$

Applicando la formula di Taylor alla funzione $\det\big(g_{ij}(t)\big)$, otteniamo:

$$\det\big(g_{ij}(t)\big) = \big(\det g_{ij}(0)\big) + \big(\det g_{ij}\big)'(0)t + \big(\det g_{ij}(t)\big)''(0)\frac{t^2}{2}$$
$$+ \big(\det g_{ij}(t)\big)'''(0)\frac{t^3}{3!} + \cdots$$

Utilizzando la formula di derivazione per un determinante, si ha:

$$\begin{aligned}\big(\det g_{ij}(t)\big)' &= \big(\det g_{ij}(t)\big) \sum_{i,j=1}^{n} g'_{ij}(t)\, g^{ij}(t) = \big(\det g_{ij}(t)\big) \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(t)\, g^{ij}(t) \\ &= \big(\det g_{ij}(t)\big) \, < h(t), g(t) >,\end{aligned}$$

e quindi

$$\big(\det g_{ij}(t)\big)'(0) = \big(\det g_{ij}\big) \, < h, g >= 0\,.$$

Inoltre,

$$\big(\det g_{ij}(t)\big)'' = \big(\det g_{ij}(t)\big)' \, < h(t), g(t) > + \big(\det g_{ij}(t)\big) \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(t)\, g^{ij}(t),$$

per cui

$$\begin{aligned}\big(\det g_{ij}(t)\big)''(0) &= \big(\det g_{ij}\big) \bigg(\sum_{i,j=1}^{n} \Big(h'_{ij}(t)\, g^{ij}(t) + h_{ij}(t)\, (g^{ij})'(t) \Big) \bigg)(0) \\ &= \big(\det g_{ij}\big) \bigg(\sum_{i,j=1}^{n} \Big(g''_{ij}(t)\, g^{ij}(t) + h_{ij}(t)\, (g^{ij})'(t) \Big) \bigg)(0) \\ &= \big(\det g_{ij}\big) \sum_{i,j=1}^{n} \big\{ g''_{ij}(0) g^{ij}(0) + h_{ij}(-h^{ij}) \big\} \\ &= \big(\det g_{ij}\big) \bigg(\sum_{r,s=1}^{n} h_i^r\, h_j^s\, g_{rs}\, g^{ij} - \sum_{i,j=1}^{n} h^{ij} h_{ij} \bigg)\end{aligned}$$

$$= \big(\det g_{ij}\big) \bigg(\sum_{i,s=1}^{n} h^{is} h_{is} - \sum_{i,j=1}^{n} h^{ij} h_{ij} \bigg) = 0\,.$$

Allo stesso modo, si vede che:

$$\big(\det\ g_{ij}(t)\big)'''(0) = 0\,, ..., \big(\det\ g_{ij}(t)\big)^{(r)}(0) = 0\,.$$

Dalla formula di Taylor, segue che:

$$\big(\det g_{ij}\big)(t) = \big(\det g_{ij}\big)(0) = \det(g_{ij}) = \mathrm{cost}\,.$$

$\square$

Dimostrazione. (del Teorema 11.4)
Sia $g(t)$ una curva differenziabile di $\mathcal{M}$ tale che $g(0) = g$. Poniamo

$$I(t) := I\big(g(t)\big) = \int_M r(t)\, v_{g(t)}\,.$$

Usando le notazioni precedentemente introdotte, si ha

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) = \int_M A(t) + \int_M B(t)$$

e, applicando i Lemmi 11.8 e 11.9, abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t) = -\int_M < Ric(t) - \frac{1}{2}\, r(t)\, g(t), h(t) > \ v_{g(t)}\,.$$

Pertanto,

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t)\Big|_{t=0} = -\int_M < Ric - \frac{r}{2}\, g, h > \ v_g\,, \tag{11.3}$$

dove $h := h(0)$, $r = r(0)$ e $Ric = \rho(0)$.
Se g è una metrica di Einstein, quindi $Ric = (r/n)g$ con $r =$ cost., applicando il Lemma 11.10, la (11.3) diventa

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(t)\Big|_{t=0} = \frac{n-2}{2}\, r \int_M < g, h > \ v_g = 0\,.$$

Viceversa, supponiamo che g sia una metrica critica per il funzionale $I(g)$. Allora

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \quad \forall\, g(t) \text{ curva differenziabile di} \mathcal{M} \text{ con } g(0) = g\,.$$

Applicando la (11.3), abbiamo

$$\int_M < Ric - (r/2)g, h > \ v_g = 0, \tag{11.4}$$

dove $h = h(0) = g'(0)$. Consideriamo il tensore simmetrico del secondo ordine $h := Ric - (r/n)g$. Tale tensore soddisfa $< h, g >= 0$, infatti:

$$< h, g >=< Ric - \ (r/n)g, g >=< Ric, g > \ - (r/n) < g, g >= r - r = 0.$$

Applicando il Lemma 11.11, possiamo considerare una curva differenziabile $g(t)$ di metriche di $\mathcal{M}$ con $g(0) = g$ e $g'(0) = h$. Allora la (11.4), siccome $h = Ric - (r/n)g$, diventa:

$$\int_M < Ric - \ (r/2)\, g, Ric - \ (r/n)\, g > \ v_g = 0\,. \tag{11.5}$$

Poiché

$$\begin{aligned}
< Ric - \frac{r}{2}\,g, Ric - \frac{r}{n}\,g > &=< Ric, Ric > -(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})r < Ric, g > +\frac{r^2}{2n} < g, g > \\
&=< Ric, Ric > \ -(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})r\, tr\, Ric + \ \frac{r^2}{2n}\, tr\, g \\
&=< Ric, Ric > \ -(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})r^2 + \ \frac{r^2}{2n}\, n \\
&=< Ric, Ric > \ -\frac{r^2}{n} =< Ric - \ \frac{r}{n}\, g, Ric - \ \frac{r}{n}\, g > \\
&= \|Ric - (r/n)g\|^2 \geq 0\,,
\end{aligned}$$

la (11.5) implica che $Ric = (r/n)g$, ossia g è una metrica di Einstein. □

Osservazione 11.12. Se dim$M$=2, $Ric = (r/2)g$ e quindi, dalla formula (11.4), segue che

$$\frac{\mathrm{d}I(g(t))}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \forall g(t) \text{ di } \mathcal{M} \text{ con } g(0) = g.$$

Ciò non è sorprendente in quanto, applicando il Teorema di Gauss-Bonnet per varietà riemanniane compatte 2-dimensionali (cfr. Sezione 10.5), si ha:

$$I(g(t)) = 2\pi\chi(M) = \text{costante}.$$

Osservazione 11.13. Osserviamo che se $\bar{g} = cg$, con c =cost>0, allora $\bar{Ric} = Ric$ (cfr. Esercizio 8.52) e $\bar{r} = r/c$. In particolare, se g è una metrica di Einstein anche la metrica $\bar{g}$ è di Einstein. Infatti:

$$\bar{Ric} = Ric = (r/n)g = (\bar{r}/n)c\, g = (\bar{r}/n)\bar{g}.$$

D'altronde, vol$(M, \bar{g})$ = vol(M, cg) = $c^{n/2}$vol(M, g). Pertanto, nel Teorema di Hilbert, l'ipotesi di considerare metriche di Einstein di volume unitario non è restrittiva.

Osservazione 11.14. Sia (M, η) una varietà di contatto compatta. Ricordiamo che ogni metrica associata alla forma di contatto η determina un tensore φ di tipo $(1, 1)$ (cfr. Sezione 4.6). Inoltre, tutte le metriche associate a η determinano la stessa forma di volume (cfr. [11], p.49), quindi l'insieme $\mathcal{A}(\eta)$ di tutte le metriche associate a η è contenuto nell'insieme $\mathcal{M}$ di tutte le metriche con fissato volume. Se consideriamo il funzionale $I(g)$ ristretto all'insieme $\mathcal{A}(\eta)$, allora ci aspettiamo una condizione più debole per i punti critici. Infatti, una metrica $g \in \mathcal{A}(\eta)$ è un punto critico per il funzionale $I(g)$ se, e solo se, la metrica g soddisfa la condizione $Q \circ \varphi_{|\ker\eta} = \varphi \circ Q_{|\ker\eta}$, dove Q è l'operatore di Ricci associato a g (cfr. [11], Theorema 10.7).

In dimensione tre, se consideriamo la curvatura scalare di Webster W definita (10.2) e il funzionale $\tilde{I}(g)$ dato dall'integrale di W e definito su $\mathcal{A}(\eta)$, allora una metrica $g \in \mathcal{A}(\eta)$ è un punto critico del funzionale $\tilde{I}$ se, e solo se, il campo vettoriale di Reeb della forma di contatto η è di Killing rispetto a g, ovvero la varietà è di K-contatto (cfr. Chern-Hamilton [26], e [87] per una differente dimostrazione). Una caratterizzazione variazionale delle varietà di K-contatto in dimensione $(2n+1)$ è data in [12].

11.2 Geodetiche come punti critici dell'energia

Sia $\sigma : [0,1] \to M,\ t \mapsto \sigma(t)$, una curva differenziabile di una varietà riemanniana (M,g). L'*energia* di σ è definita da

$$E(\sigma) := \frac{1}{2}\int_0^1 \|\dot{\sigma}(t)\|^2\, dt.$$

Scopo principale di questa sezione è determinare le curve geodetiche come punti critici del funzionale energia. Iniziamo esaminando prima una situazione particolare relativa alle curve periodiche.

Sia γ una curva differenziabile chiusa periodica dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, il cui periodo è 2π. Tale curva si può esprimere nella forma

$$\gamma(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big),\ t \in [0,2\pi], \quad \text{con } \gamma(0) = \gamma(2\pi).$$

Sia X l'insieme di tutte le curve γ di questo tipo. Consideriamo il seguente

Problema: Determinare i punti critici del funzionale energia

$$E : X \longrightarrow \mathbb{R}, \gamma \longmapsto E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|^2\, \mathrm{d}t.$$

In questo caso i punti di X sono curve, per risolvere il problema consideriamo una curva di curve, ossia una variazione γ_s di γ in X:

$$\gamma_s(t) = \big(x_1(t,s), x_2(t,s), x_3(t,s)\big),\ t \in [0,2\pi],\ \ |s| < \epsilon,$$

con $\gamma_0(t) = \gamma(t)$, $\gamma_s(2\pi) = \gamma_s(0)$. Posto $E(s) = E(\gamma(s))$ e $x_i(t,0) = x_i(t)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
E'(0) = E'(s)_{|s=0} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E\big(\gamma_s(t)\big)\right)_{s=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i(t,s)\right)^2\right)_{s=0}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i(t,s)\right)_{s=0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i(t,s)\right)_{s=0}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{3} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} x_i(t,s) \right)_{s=0} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} x_i(t,s) \right)_{s=0} \right]_0^{2\pi} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{3} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2}(t) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} x_i(t,s) \right)_{s=0} \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Siccome $x_i(t)$ e $x_i(t,s)$ sono funzioni periodiche di periodo 2π, il primo termine della formula precedente si annulla. Dunque, otteniamo

$$
E'(0) = -\int_0^{2\pi} g_0 \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(t,s) \right)_{s=0}, \ddot{\gamma}(t) \right) \mathrm{d}t, \tag{11.6}
$$

dove $\ddot{\gamma}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\gamma(t)$ e g_0 denota la metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$. Ora, sia $\gamma(t)$ un punto critico per E, allora l'espressione di $E'(0)$ data dalla (11.6) si annulla per ogni variazione $\gamma(t,s)$ di $\gamma(t)$. Consideriamo la variazione definita da

$$
\gamma(t,s) = \gamma(t) + s\ddot{\gamma}(t).
$$

Tale variazione è periodica e soddisfa $\gamma(t,0) = \gamma(t)$ con $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(t,s) = \ddot{\gamma}(t)$, per cui dalla (11.6) segue che

$$
\int_0^{2\pi} \|\ddot{\gamma}(t)\|^2 \, \mathrm{d}t = 0,
$$

e quindi

$$
\gamma(t) = at + b, \ \text{con} \ \ a, b \in \mathbb{R}^3.
$$

Dalla periodicità segue che $a = 0$. Pertanto, in questo problema variazionale i punti critici sono curve costanti $\gamma(t) = b =$cost.

La situazione è differente se consideriamo il problema di determinare i punti critici di $E : X_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, dove X_1 è il sottoinsieme di X costituito da tutte le curve chiuse periodiche, di periodo 2π, che sono curve della sfera unitaria $\mathbb{S}^2$. In questo caso ci aspettiamo di trovare per i punti critici una condizione meno rigida in quanto le variazioni da considerare sono meno generali. Procedendo come prima, troviamo la formula variazionale (11.6). In questo caso la variazione periodica soddisfa: $\gamma(t,s) \in \mathbb{S}^2$ per ogni t e per ogni s. Differenziando, rispetto ad s, la relazione $g_0\big(\gamma(t,s), \gamma(t,s)\big) = 1$, abbiamo

$$
g_0\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(t,s), \gamma(t,s)\big)_{s=0} = 0, \ \text{cioè} \ g_0 \left(\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(t,s)\big)_{s=0}, \gamma(t) \big) \right) = 0,
$$

e quindi

$$
\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(t,s)\big)_{s=0} \in T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^2 = \gamma(t)^\perp
$$

per ogni variazione periodica $\gamma(t,s)$ di $\gamma(t)$ sulla sfera $\mathbb{S}^2$. Pertanto, se $\gamma(t)$ è un punto critico, la componente tangente di $\ddot\gamma(t)$ lungo $T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^2$ è nulla (basta definire la variazione $\gamma(t,s)$ di $\gamma(t)$ definita, per ogni fissato t, dall'arco di circonferenza di raggio massimo $\gamma_t(s)$ a sua volta definito per $|s|<\delta$ dalle condizioni $\gamma_t(0)=\gamma(t)$ e $\dot\gamma_t(0)=\ddot\gamma^{\top}(t)$). Di conseguenza,

$$\ddot\gamma(t) = g_0\big(\ddot\gamma(t),\gamma(t)\big)\gamma(t). \tag{11.7}$$

Da $g_0\big(\gamma(t),\gamma(t)\big)=1$, segue che $g_0\big(\dot\gamma(t),\gamma(t)\big)=0$ e quindi

$$g_0\big(\ddot\gamma(t),\gamma(t)\big)+g_0\big(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)=0.$$

Pertanto, la (11.7) diventa

$$\ddot\gamma(t)+g_0\big(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\gamma(t)=0. \tag{11.8}$$

Inoltre, usando la (11.8), abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_0\big(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)=2g_0\big(\ddot\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)=-2g_0\big(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)g_0\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)=0,$$

e quindi

$$g_0\big(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)=\mathrm{cost}=c^2.$$

Supponiamo $\gamma(t)$ non banale, e quindi $c>0$. Allora, le soluzioni dell'equazione differenziale (11.8), che si può riscrivere nella forma

$$\frac{\mathrm{d}^2x_i(t)}{\mathrm{d}t^2}+c^2x_i(t)=0,\ i=1,2,3,$$

sono del tipo $x_i(t)=a_i\cos c\,t\ +\ b_i\sin c\,t$, $i=1,2,3$, e quindi

$$\gamma(t)=(\cos c\,t)a+(\sin c\,t)b,$$

dove $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$, pensati come vettori, sono linearmente indipendenti (altrimenti $\gamma(t)$ sarebbe un segmento di retta). Inoltre:

$$\begin{aligned}a=\gamma(0)=\gamma(2\pi)=(\cos 2\pi c)a+&(\sin 2\pi c)b\\ &\iff (1-\cos 2\pi c)a-(\sin 2\pi c)b=0;\end{aligned}$$

ciò implica che $\cos 2\pi c=1$ e $\sin 2\pi c=0$, e quindi deve essere $c=k\in\mathbb{Z}$. Poi,

$$\gamma(t)\in\mathbb{S}^2\ \Leftrightarrow\ \|a\|^2\cos^2 kt+\|b\|^2\sin^2 kt+2g_0(a,b)(\cos kt)(\sin kt)=1\ \forall t.$$

Pertanto, prendendo $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{\pi}{4}$, si ha

$$\|a\|^2 = 1, \ \|b\|^2 = 1 \ \text{e} \ a \perp b.$$

In definitiva,

$$\gamma(t) = (\cos kt)a + (\sin kt)b, \ k \in \mathbb{Z}, \ t \in [0, 2\pi],$$

è una circonferenza di raggio massimo di $\mathbb{S}^2$ percorsa k volte. Viceversa, se $\gamma(t)$ è una circonferenza di raggio massimo di $\mathbb{S}^2$ percorsa k volte, allora chiaramente la (11.6) è soddisfatta per ogni variazione $\gamma(t,s)$ di $\gamma(t)$ in X_1. Basta osservare che in tal caso $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(t,s)\right)_{s=0} \in \gamma(t)^{\perp}$, mentre $\ddot{\gamma}(t)$ è parallelo a $\gamma(t)$. Abbiamo quindi provato il seguente teorema.

Teorema 11.15. *Nell'insieme di tutte le curve differenziabili chiuse $\gamma(t)$, di periodo 2π, della sfera $\mathbb{S}^2$, i punti critici del funzionale energia*

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \, dt$$

sono tutte e sole le circonferenze di raggio massimo $\gamma(t)$, di $\mathbb{S}^2$, $t \in [0, 2\pi]$, percorse k volte, $k \in \mathbb{Z}$.

Il Teorema 11.15 ci dice che le circonferenze di raggio massimo della sfera euclidea $\mathbb{S}^2$ sono i punti critici del funzionale energia definito in un opportuno insieme, d'altronde tali circonferenze sono esattamente le curve geodetiche della stessa sfera. In effetti, come vedremo, le curve geodetiche di un'arbitraria varietà riemanniana si possono ottenere come punti critici del funzionale energia. Sia $\sigma : [0,1] \to M, \ t \mapsto \sigma(t)$, una curva differenziabile di una fissata varietà riemanniana (M, g). Si noti che l'energia di una curva, a differenza della sua lunghezza, dipende dalla parametrizzazione. Se $\theta : [0,1] \to [\alpha, \beta]$ è un diffeomorfismo, le curve $\tilde{\sigma} : [\alpha, \beta] \to M, \theta \mapsto \tilde{\sigma}(\theta)$, e $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \theta : [0,1] \to M, t \mapsto \sigma(t)$, in generale, non hanno la stessa energia. Infatti:

$$\begin{aligned} 2E(\sigma) &= \int_0^1 \|\dot{\sigma}(t)\|^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 \|\dot{\tilde{\sigma}}(\theta(t))\|^2 \left|\theta'(t)\right|^2 \mathrm{d}t \\ &\neq \int_\alpha^\beta \|\dot{\tilde{\sigma}}(\theta)\|^2 \mathrm{d}\theta = 2E(\tilde{\sigma}). \end{aligned}$$

Lemma 11.16. *Si ha*

$$L^2(\sigma) \leq 2E(\sigma),$$

dove l'uguaglianza si ha se, e solo se, $\sigma(t)$ è parametrizzata a velocità costante (ossia t è proporzionale all'ascissa curvilinea). In particolare, se $\gamma(t)$ è una curva geodetica, $L^2(\gamma) = 2E(\gamma)$.

Dimostrazione. Ricordiamo che $L(\sigma) = \int_0^1 \|\dot{\sigma}(t)\| \, dt$. La disuguaglianza di Schwarz ci dice che

$$\left(\int_0^1 f_1 f_2 dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 {f_1}^2 dt \right) \left(\int_0^1 {f_2}^2 dt \right),$$

dove l'uguaglianza si ha se, e solo se, f_2 è proporzionale a f_1. Applicando la suddetta disuguaglianza alle funzioni f_1 =cost.= 1 e $f_2 = \|\dot{\sigma}(t)\|$, si ha l'enunciato del lemma. □

Per ogni $p, q \in M$, poniamo

$$\Omega(p, q) = \{\sigma : [0, 1] \to M \text{ differenziabile con } \sigma(0) = p \text{ e } \sigma(1) = q\}.$$

Proposizione 11.17. *Per il funzionale energia $E : \Omega(p, q) \to \mathbb{R}$ i punti di minimo sono esattamente le geodetiche minimali. In altre parole, se $\gamma : [0, 1] \to M$ è una geodetica minimale con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$, allora*

$$E(\gamma) \leq E(\sigma) \quad \forall \sigma \in \Omega(p, q),$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se, σ è una curva geodetica minimale.

Dimostrazione. Sia $\gamma(t)$ una geodetica minimale. Siccome γ è una curva minimale con $\|\dot{\gamma}(t)\|$ costante, applicando il Lemma 11.16, si ha:

$$2E(\gamma) = L^2(\gamma) \leq L^2(\sigma) \leq 2E(\sigma).$$

Inoltre, $E(\gamma) = E(\sigma) \Rightarrow 2E(\sigma) = L^2(\sigma) \Rightarrow \sigma(t)$ è parametrizzata con parametro t proporzionale all'ascissa curvilinea s ($t = cs$). Inoltre $E(\gamma) = E(\sigma) \Rightarrow L(\sigma) = L(\gamma) \Rightarrow \sigma(t)$ è minimale con $t = cs$. Pertanto, per il Corollario 7.46, $\sigma(t)$ è una geodetica minimale. Viceversa, sia $\sigma(t)$ una geodetica minimale. Allora $\|\dot{\sigma}(t)\|$=cost. implica $2E(\sigma) = L^2(\sigma)$. Inoltre, essendo $\sigma(t)$ minimale, si ha $L^2(\sigma) = L^2(\gamma) = 2E(\gamma)$, e quindi $E(\gamma) = E(\sigma)$. □

Sia A un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, un'applicazione differenziabile $H : A \to M, (t, s) \mapsto u(t, s)$, si può pensare come una superficie parametrizzata di M. Nella Sezione 7.2 abbiamo osservato che

$$\frac{\partial H}{\partial t} : (t, s) \mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{(t,s)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial s} : (t, s) \mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial s} \right)_{(t,s)}$$

sono *campi differenziabili di vettori lungo H*. Inoltre, si è visto che vale la seguente equazione (cfr. Lemma 7.39):

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{D}{ds} \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{11.9}$$

Sia

$$H : [0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M, \ (t, s) \mapsto H(t, s) = \sigma_s(t),$$

una *variazione* della curva $\sigma : [0,1] \to M$, cioè un'applicazione differenziabile con

$$H(t,0) = \sigma_0(t) = \sigma(t).$$

Se inoltre, per ogni $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, si ha

$$H(0,s) = \sigma_s(0) = \sigma(0) \;\text{ e }\; H(1,s) = \sigma_s(1) = \sigma(1),$$

allora la *variazione* è detta *propria* (cfr. Figura 11.1).

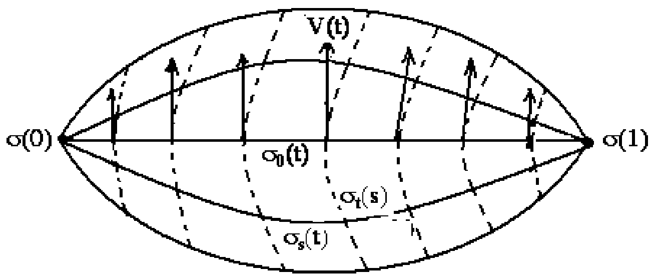

Figura 11.1: Una variazione propria della curva σ.

Per ogni fissato $s \in (-\epsilon, \epsilon)$,

$$\sigma_s : [0,1] \to M, \; t \mapsto \sigma_s(t) = H(t,s),$$

è una *curva della variazione* H. Se la variazione è propria, tutte le curve $\sigma_s(t)$ hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Per ogni fissato $t \in [0,1]$, la curva

$$\sigma_t : (-\epsilon, \epsilon) \to M, \; s \mapsto \sigma_t(s) = H(t,s),$$

è detta *curva trasversa* della variazione. Il vettore velocità $V(t)$ della curva trasversa $\sigma_t(s)$, per $s = 0$, è dato da

$$V(t) = \left(\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\right)(t,0) = \left(\frac{d}{ds}\sigma_t(s)\right)_{|s=0} = \dot\sigma_t(0) \in T_{H(t,0)}M = T_{\sigma(t)}M.$$

Quindi, $V(t) \in \mathfrak{X}(\sigma)$ è un campo differenziabile lungo $\sigma_0(t)$ che viene detto *campo variazionale* di H. Se la variazione è propria, si ha

$$\sigma_0(s) = H(0,s) = \sigma(0) = p = cost.,$$
$$\sigma_1(s) = H(1,s) = \sigma(1) = q = cost.,$$

e quindi

$$\dot\sigma_1(0) = \dot\sigma_0(0) = 0, \;\text{ cioè }\; V(1) = V(0) = 0.$$

La funzione

$$E : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}, \ s \mapsto E(s) = E(\sigma_s(t)) = \frac{1}{2}\int_0^1 \|\dot{\sigma}_s(t)\|^2 dt$$

è detta *energia* di H.

Teorema 11.18. (**formula della variazione prima**)
Sia $H(t,s)$ una variazione di σ. Allora

$$E'(0) = \left(\frac{dE}{ds}\right)_{s=0} = \left\{\left[g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right)\right]_{t=0}^{t=1}\right\}_{s=0} - \int_0^1 g\left(V(t), \frac{D}{dt}\dot{\sigma}(t)\right) dt.$$

In particolare, se la variazione H di σ è propria, si ha

$$E'(0) = -\int_0^1 g\left(V(t), \frac{D}{dt}\dot{\sigma}(t)\right) dt.$$

Dimostrazione. Consideriamo la derivata della funzione energia:

$$E'(s) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g\left(\dot{\sigma}_s(t), \dot{\sigma}_s(t)\right)\right\} dt.$$

$X(s) := \dot{\sigma}_s(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_s(t) = \frac{\partial}{\partial t}H(t,s)$ è un campo vettoriale lungo la curva trasversa $\sigma_t(s)$. Applicando il Teorema 6.34 e la (11.9), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g\left(\dot{\sigma}_s(t), \dot{\sigma}_s(t)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g\left(\frac{\partial}{\partial t}H(t,s), \frac{\partial}{\partial t}H(t,s)\right) \\ &= 2g\left(\frac{D}{ds}\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) \\ &= 2g\left(\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right). \end{aligned} \tag{11.10}$$

Quindi

$$E'(s) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}s} = \int_0^1 g\left(\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) dt. \tag{11.11}$$

Poiché

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) = g\left(\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}\right),$$

la (11.10) diventa

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g\left(\dot{\sigma}_s(t), \dot{\sigma}_s(t)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) - g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}\right).$$

Quindi,

$$E'(s) = \int_0^1 \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) \right\} dt - \int_0^1 g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}\right) dt$$

e

$$E'(0) = \left\{ \left[g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) \right]_{t=0}^{t=1} \right\}_{|s=0} - \left\{ \int_0^1 g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}\right) dt \right\}_{|s=0}.$$

Ricordiamo che

$$\frac{\partial H}{\partial s}(t,0) = V(t) \quad \text{e} \quad \frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}(t,0) = \frac{D}{t}\dot{\sigma}(t).$$

Pertanto,

$$E'(0) = \left\{ \left[g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) \right]_{t=0}^{t=1} \right\}_{s=0} - \int_0^1 g\left(V(t), \frac{D}{dt}\dot{\sigma}(t)\right) dt.$$

Inoltre, se la variazione è propria, abbiamo

$$\frac{\partial H}{\partial s}(0,0) = V(0) = 0 \;\text{ e }\; \frac{\partial H}{\partial s}(1,0) = V(1) = 0$$

e il termine

$$\begin{aligned} A \;&:=\; \left\{ \left[g\left(\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) \right]_{t=0}^{t=1} \right\}_{|s=0} \\ &=\; \left[g\left(\frac{\partial H}{\partial s}(1,s), \frac{\partial H}{\partial t}(1,s)\right) - g\left(\frac{\partial H}{\partial s}(0,s), \frac{\partial H}{\partial t}(0,s)\right) \right]_{|s=0} \\ &=\; g\left(\frac{\partial H}{\partial s}(1,0), \frac{\partial H}{\partial t}(1,0)\right) - g\left(\frac{\partial H}{\partial s}(0,0), \frac{\partial H}{\partial t}(0,0)\right) = 0. \end{aligned}$$

Dunque,

$$E'(0) = -\int_0^1 g\left(V(t), \frac{D}{dt}\dot{\sigma}(t)\right) dt.$$

□

Definizione 11.19. Una curva differenziabile $\sigma : [0,1] \to M,\; t \mapsto \sigma(t)$, si dice *punto critico* per il funzionale energia E se per ogni variazione propria $H(t,s) = \sigma_s(t)$ di σ si ha

$$\left(\frac{\mathrm{d}E(s)}{\mathrm{d}s}\right)_{|s=0} = 0.$$

Come conseguenza del Teorema 11.18, si ottiene la seguente caratterizzazione variazionale delle geodetiche.

Teorema 11.20. *Sia* $\sigma : [0,1] \to M,\ t \mapsto \sigma(t),$ *una curva differenziabile. Allora:* $\sigma(t)$ *è una curva geodetica se, e solo se,* $\sigma(t)$ *è punto critico del funzionale energia* E.

Dimostrazione. Se $\sigma(t)$ è una curva geodetica, allora $\frac{D}{dt}\dot\sigma(t) = 0$ e quindi, applicando il Teorema 11.18, σ è punto critico di E. Viceversa, sia σ punto critico di E, ossia $E'(0) = 0$ per ogni variazione propria di σ. Consideriamo il campo di vettori

$$W(t) = f(t)\frac{D}{dt}\dot\sigma(t) \in \mathfrak{X}(\sigma),$$

dove $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è un'applicazione differenziabile con $f(t) > 0$ per ogni $t \in]0,1[$ e $f(0) = f(1) = 0$. Applicando il Teorema 7.36, per ogni $t \in [0,1]$ esiste U_t intorno normale di $\sigma(t)$, ed esiste un $\delta_t > 0$ tale che $\exp_{\sigma(t)} V$ sia definita per $\|V\| < \delta_t$. $\{U_t\}$ è un ricoprimento aperto del compatto $\sigma([0,1])$, quindi esiste un sottoricoprimento finito $U_1, ..., U_k$ di $\sigma([0,1])$. Prendendo $\delta :=\min\ \{\delta_1, ..., \delta_k\}$, si ha che $\exp_{\sigma(t)} V$ è definita per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni $V \in T_{\sigma(t)}M,\ \ \|V\| < \delta$. Posto $\bar\delta = \max\{\|W(t)\|, t \in [0,1]\}$ e $\epsilon = \delta/\bar\delta$, si ha

$$\|sW(t)\| = \mid s \mid \|W(t)\| < \epsilon\|W(t)\| < \epsilon\bar\delta = \delta \ \ \forall t \in [0,1] \ \text{ e } \ \forall s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Quindi, l'applicazione

$$H(t,s) := \exp_{\sigma(t)} sW(t)$$

è definita per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Inoltre, $H(t,s)$ soddisfa:

$$\begin{aligned}
H(t,0) &= \exp_{\sigma(t)} 0 = \sigma(t),\\
H(0,s) &= \exp_{\sigma(0)} sW(0) = \exp_{\sigma(0)} 0 = \sigma(0),\\
H(1,s) &= \exp_{\sigma(1)} sW(1) = \exp_{\sigma(1)} 0 = \sigma(1).
\end{aligned}$$

Pertanto $H(t,s)$ definisce una variazione propria di σ. Inoltre, il campo variazionale di questa variazione è dato da:

$$\begin{aligned}
V(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial s} H(t,s)\right)_{|s=0} = \left(\frac{\partial}{\partial s} \exp_{\sigma(t)} sW(t)\right)_{|s=0}\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial s}\gamma_{W(t)}(s)\right)_{|s=0} = \dot\gamma_{W(t)}(0) = W(t).
\end{aligned}$$

Applicando la formula della variazione prima alla variazione definita da $H(t,s) := exp_{\sigma(t)} sW(t)$, si ha:

$$0 = E'(0) = -\int_0^1 g\left(f(t)\frac{D\dot\sigma}{dt}, \frac{D\dot\sigma}{dt}\right) \mathrm{d}t = -\int_0^1 f(t)\left\|\frac{D\dot\sigma}{dt}\right\|^2 dt.$$

Pertanto, $\frac{D\dot\sigma}{dt} = 0$ e quindi $\sigma(t)$ è una curva geodetica. □

Osservazione 11.21. Si osservi che, con qualche aggiustamento nelle dimostrazioni precedenti, si possono determinare le formule del Teorema 11.18 per curve differenziabili a tratti. Inoltre, il Teorema 11.20 si può esprimere nella forma seguente: se $\sigma : [0,1] \to M,\ t \mapsto \sigma(t),$ è una curva differenziabile a tratti, allora $\sigma(t)$ è una curva (differenziabile) geodetica se, e solo se, $\sigma(t)$ è punto critico del funzionale energia E definito nell'insieme di tutte le curve differenziabili a tratti che congiungono $p = \sigma(0)$ con $q = \sigma(1)$ (cfr. [32]).

Osservazione 11.22. Si noti che mentre la nozione di curva geodetica ha carattere locale, la caratterizzazione di curva geodetica come punto critico del funzionale energia ha carattere globale.

Concludiamo questa sezione dimostrando la formula della variazione seconda. Tale formula è uno strumento usato per studiare il comportamento dell'energia in prossimità di un punto critico, ossia la stabilità di un punto critico.

Lemma 11.23. *Se $u : A \to M, (t,s) \mapsto u(t,s)$, è un'applicazione differenziabile definita in A aperto di $\mathbb{R}^2$, e $V : A \to TM$ è un'applicazione differenziabile definita da $(t,s) \mapsto V(t,s) \in T_{u(t,s)}M$ (quindi un campo di vettori lungo u), allora*

$$\frac{D}{dt}\frac{D}{ds}V - \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}V = -R\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial s}\right)V,$$

dove R è il tensore di curvatura di (M,g).

Dimostrazione. Se (x_i) è un sistema di coordinate locali, si ha

$$V(t,s) = \sum V^i(t,s)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{u(t,s)},$$

dove $V^i(t,s)$ sono funzioni differenziabili su A. Di conseguenza,

$$\frac{DV}{ds} = \sum_i \left(\frac{\partial V^i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i} + V^i \frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

$$\frac{D}{dt}\frac{DV}{ds} = \sum_i \left(\frac{\partial^2 V^i}{\partial t \partial s}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial V^i}{\partial s}\frac{D}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial V^i}{\partial t}\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial x_i} + V^i \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

e (scambiando t con s)

$$\frac{D}{ds}\frac{DV}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial^2 V^i}{\partial s \partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial V^i}{\partial t}\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial V^i}{\partial s}\frac{D}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} + V^i \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Quindi,

$$\frac{D}{dt}\frac{DV}{\mathrm{d}s} - \frac{D}{ds}\frac{DV}{dt} = \sum_i V^i \left(\frac{D}{dt}\frac{D}{ds} - \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{11.12}$$

Siccome

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial x_j \circ u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{si ha}$$

$$\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\frac{\partial u}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_j \left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial s\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial u^j}{\partial s}\frac{D}{\mathrm{d}t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\\
&= \sum_j \left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial s\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial u^j}{\partial s}\nabla_{\frac{\partial u}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\\
&= \sum_j \left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial s\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,k}\frac{\partial u^j}{\partial s}\frac{\partial u^k}{\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}\right).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial s\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,k}\frac{\partial u^j}{\partial t}\frac{\partial u^k}{\partial s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Pertanto, tenendo conto che $[\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j] = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\left(\frac{D}{dt}\frac{D}{ds} - \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_{j,k}\frac{\partial u^j}{\partial t}\frac{\partial u^k}{\partial s}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&= -\sum_{j,k}\frac{\partial u^j}{\partial t}\frac{\partial u^k}{\partial s}R\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&= -R\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial s}\right)\frac{\partial}{\partial x_i},
\end{aligned}$$

e quindi, applicando la (11.12), otteniamo la formula enunciata nel lemma. □

Teorema 11.24. (**formula della variazione seconda**)
Sia $\gamma(t) : [0,1] \to M$ una curva geodetica. Se $H(t,s)$ è una variazione propria di γ, allora

$$\begin{aligned} E''(0) = \left(\frac{d^2 E}{ds^2}\right)_{|s=0} &= \int_0^1 \left\{ g\left(\frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}\right) - g\big(R(V,\dot\gamma)V, \dot\gamma\big) \right\} dt \\ &= -\int_0^1 g\left(V(t), \frac{D^2 V}{dt^2} - R\big(V,\dot\gamma\big)\dot\gamma \right) dt, \end{aligned}$$

dove V è il campo variazionale di H ed R è il tensore di curvatura di (M,g).

Dimostrazione. Partiamo dalla formula (11.11):

$$E'(s) = \int_0^1 g\left(\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) dt.$$

Derivando questa equazione, tenendo conto della compatibilità della connessione di Levi-Civita con la metrica g, otteniamo:

$$E''(s) = \int_0^1 g\left(\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{ds}\frac{\partial H}{\partial t}\right) dt + \int_0^1 g\left(\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) dt. \tag{11.13}$$

Applicando i Lemmi 7.39 e 11.23, l'equazione (11.13) diventa

$$\begin{aligned} E''(s) &= \int_0^1 g\left(\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}\right) \mathrm{d}t + \int_0^1 g\left(\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 g\left(\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}\right) \mathrm{d}t + \int_0^1 g\left(\frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^1 g\left(R\left(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial s}\right)\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{11.14}$$

Poiché il secondo termine della (11.14) è dato da:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g\left(\frac{D}{ds}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) = g\left(\frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) + g\left(\frac{D}{ds}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}\right),$$

la stessa equazione (11.14) diventa

$$\begin{aligned} E''(s) = \int_0^1 g\left(\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial s}\right) \mathrm{d}t + \left[g\left(\frac{D}{ds}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right)\right]_{t=0}^{t=1} \\ - \int_0^1 g\left(\frac{D}{ds}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}\right) \mathrm{d}t + \int_0^1 g\left(R\left(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial s}\right)\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Per $s = 0$, la curva $H(t,0) = \gamma(t)$ è una curva geodetica e quindi

$$\left(\frac{D}{dt}\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{s=0} = \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = 0.$$

Pertanto, per $s = 0$, il terzo termine della precedente equazione è nullo. Inoltre, per $s = 0$, risulta

$$\frac{\partial H}{\partial s}(t,0) = V(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial t}(t,0) = \dot{\gamma}(t).$$

Di conseguenza, dalla precedente equazione, otteniamo

$$\begin{aligned} E''(0) = \int_0^1 g\left(\frac{D}{dt}V(t), \frac{D}{dt}V(t)\right)\mathrm{d}t + \left[g\left(\frac{D}{ds}\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t}\right)\right]_{t=0}^{t=1} \\ + \int_0^1 g\big(R(\dot{\gamma}(t), V(t))V(t), \dot{\gamma}(t)\big)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Poiché la variazione è propria: $H(0,s)$ =cost.= $\gamma(0)$ e $H(1,s)$ =cost.= $\gamma(1)$ per ogni s. Ciò implica che il secondo termine dell'equazione (11.15) è nullo. Inoltre, sempre tenendo presente che la variazione è propria, $V(1) = V(0) = 0$ e quindi integrando la seguente equazione:

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}g\Big(V, \frac{DV}{dt}\Big) = g\Big(\frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}\Big) + g\Big(V, \frac{D^2V}{dt^2}\Big),$$

abbiamo

$$\int_0^1 g\Big(\frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}\Big)\mathrm{d}t = -\int_0^1 g\Big(V, \frac{D^2V}{dt^2}\Big)\mathrm{d}t.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Osservazione 11.25. Sia $\gamma(t)$ un arco geodetico. L'operatore

$$J_\gamma : \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\gamma), V \longmapsto J_\gamma V = -\frac{D^2V}{dt^2} + R\big(V, \dot{\gamma}\big)\dot{\gamma}$$

è detto *operatore di Jacobi* lungo la geodetica γ. L'applicazione bilineare simmetrica Hess_γ definita da

$$\mathrm{Hess}_\gamma(V,W) = \int_0^1 g\big(V, J_\gamma W\big)\mathrm{d}t \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(\gamma),$$

è l'*hessiano dell'energia* nel punto critico γ . Se M ha curvatura sezionale non positiva, nella formula della variazione seconda il termine con la curvatura è non negativo, inoltre il primo termine si annulla solo per variazioni parallele (altrimenti è positivo). Quindi, in tal caso, la derivata seconda $E''(0) \geq 0$. Pertanto: *su una varietà riemanniana con curvatura sezionale non positiva, una curva geodetica è stabile per il funzionale energia, equivalentemente, l'applicazione bilineare simmetrica $Hess_\gamma$ è semidefinita positiva.*