# Capitolo 10

# Varietà riemanniane omogenee e varietà conformemente piatte

Scopo di questo capitolo è dare una breve presentazione di alcuni aspetti di due importanti classi di varietà riemanniane, molto studiate in differenti contesti geometrici: la classe delle varietà riemanniane omogenee (che contiene in particolare quella delle varietà riemanniane simmetriche) e la classe delle varietà conformemente piatte. L'ultima sezione contiene una breve presentazione del Teorema di Gauss-Bonnet-Chern nelle dimensioni $2, 4, 6$.

## 10.1 Varietà riemanniane omogenee

Per maggiori dettagli e approfondimenti sulle varietà riemanniane omogenee e sugli spazi simmetrici si rinvia ai testi di Tricerri-Vanhecke [111] e Kobayashi-Nomizu [56] vol. II, oltre che agli articoli citati nel corso della presentazione.

Ricordiamo la seguente definizione già introdotta nel Capitolo 5. Sia $(M, g)$ una varietà riemanniana $n$-dimensionale. Diciamo che $M$ è *omogenea* se il gruppo delle isometrie di $M$, $\mathrm{Iso}(M, g)$, è *transitivo* su $M$, cioè se per ogni coppia di punti $p$ e $q$ di $M$ esiste una isometria $f$ tale che $f(p) = q$. Poiché $\mathrm{Iso}(M, g)$ è un *gruppo di Lie* che opera differenziabilmente su $M$, la precedente definizione è equivalente a quella che segue.

**Definizione 10.1.** Una varietà riemanniana $(M, g)$ è detta *varietà riemanniana omogenea* se esiste un gruppo di Lie $G$ e un'applicazione differenziabile
$$G \times M \to M, \ (a, p) \mapsto ap = L_a(p),$$
che gode delle seguenti proprietà:

i) $L_{ab}(p) = L_a(L_b\, p) \qquad \forall a, b \in G\,, \quad \forall p \in M;$

ii) $L_e = I_M$ (dove $e$ è l'elemento neutro di $G$ e $I_M$ è l'identità su M);

iii) $L_a \in \mathrm{Iso}(M, g)$;

iv) per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste un elemento $a$ del gruppo $G$ per il quale si ha $L_a\, p = q$.

Osserviamo che le condizioni i) e ii) della Definizione 10.1 esprimono il fatto che $G$ è un gruppo di trasformazioni di Lie, o che $G$ *opera differenziabilmente su* $M$ *(a sinistra)*. La condizione iv) equivale a dire che $G$ opera in modo transitivo su $M$ e la iii) è esattamente la condizione di compatibilità tra l'azione del gruppo $G$ e la metrica $g$ definita su $M$. In generale, si è soliti aggiungere alle condizioni precedenti la condizione che $G$ sia *effettivo*, cioè:

$$L_a = I_M \iff a = e\,.$$

Questa condizione, che non è restrittiva, nel senso che si può passare dal gruppo $G$ a un gruppo quoziente mediante un suo sottogruppo normale, permette di identificare $G$ con un sottogruppo di $\mathrm{Iso}(M, g)$ (naturalmente $\mathrm{Iso}(M, g)$ è esso stesso effettivo).

Ora, supposto che la varietà riemanniana $(M, g)$ sia omogenea, consideriamo $p \in M$ e il sottogruppo $K$ di $G$ così definito:

$$K := \{a \in G :\ L_a p = p\}\,.$$

$K$, detto *sottogruppo di isotropia* (di $p$), è un chiuso di $G$ e, in quanto tale, è un *sottogruppo di Lie* di $G$. Lo spazio quoziente $G/K$ delle classi laterali sinistre $aK$ è dotato di una struttura naturale di varietà differenziabile tale che la proiezione canonica

$$\pi : G \to G/K, \quad a \mapsto \pi(a) = aK,$$

sia differenziabile. Inoltre, $G/K$ con questa struttura è diffeomorfo a $M$ mediante l'applicazione $aK \mapsto L_a(p) = ap$. Dunque, ogni varietà riemanniana $(M, g)$ omogenea si può pensare come uno spazio omogeneo $G/K$ dotato di una metrica riemanniana che è $G$-invariante, cioè tale che le traslazioni sinistre $L_a : bK \mapsto abK$ siano delle isometrie per ogni $a \in G$. Con questa identificazione, lo studio delle varietà riemanniane omogenee si può ricondurre nell'ambito della teoria dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie.

## Esempi di varietà riemanniane omogenee

I gruppi di Lie riemanniani $(G, g)$ sono chiaramente varietà riemanniane omogenee: per ogni $a, b \in G$, posto $x = ba^{-1}$, la traslazione sinistra $L_x$, la quale è una isometria, soddisfa $L_x a = b$.

Dopo i gruppi di Lie riemanniani, gli esempi più semplici di spazi omogenei sono: lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, la sfera canonica $\mathbb{S}^n$ e lo spazio iperbolico $H^n$ (l'omogeneità di tali spazi è stata dimostrata nelle Sezioni 5.4, 5.5). Per la sfera unitaria $\mathbb{S}^n$, pensando i suoi punti come vettori colonna di $\mathbb{R}^{n+1}$, il gruppo delle rotazioni $SO(n+1)$ agisce su $\mathbb{S}^n$ :

$$SO(n+1) \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n,\ (A, p) \longmapsto Ap,$$

e tale azione è transitiva: per ogni $p, q \in \mathbb{S}^n$ esiste $A \in SO(n+1)$ tale che $q = Ap$. Posto $p_0 = (0, ..., 0, 1)^t$:
$Ap_0 = p_0 \iff a_{n+1\ n+1} = 1$ e $a_{i\ n+1} = 0$ per ogni $i = 1, ..., n$, e tenendo conto che le colonne di $A$ sono vettori ortonormali, si ha $a_{n+1\ i} = 0$ per ogni $i = 1, ..., n$. Pertanto, il sottogruppo di isotropia del punto $p_0$ è dato da

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in SO(n), 0 \in \mathbb{R}^n \right\} \cong SO(n),$$

e quindi

$$\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n).$$

Analogamente si vede che

$$H^n = SO_+(n,1)/SO(n).$$

Inoltre, sempre procedendo come nel caso di $SO(n+1)$, si può vedere che $SU(n+1)$ (rispettivamente $Sp(n+1)$) agisce in modo transitivo sulla sfera $\mathbb{S}^{2n+1}$ (rispettivamente $\mathbb{S}^{4n+3}$) e il gruppo di isotropia nel punto $p_0$ è isomorfo a $SU(n)$ (rispettivamente $Sp(n)$). Quindi,

$$\mathbb{S}^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n) \quad \text{e} \quad \mathbb{S}^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n).$$

Gli spazi $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$, $H^n$ sono le sole varietà riemanniane complete semplicemente connesse per le quali vale il terzo criterio di congruenza dei triangoli (cfr., ad esempio, [9]): se $(p, q, r)$ e $(p', q', r')$ sono due terne di punti della varietà $M$ che soddisfano

$$d(p,q) = d(p',q'), \quad d(q,r) = d(q',r') \quad \text{e} \quad d(r,p) = d(r',p'),$$

allora esiste una isometria $f$ della varietà tale che

$$f(p) = p', \quad f(q) = q' \quad \text{e} \quad f(r) = r'.$$

Tali spazi sono anche detti 3-punti omogenei. Una generalizzazione di questi spazi è data dagli spazi 2-punti omogenei. Uno spazio riemanniano è detto *2-punti omogeneo* se per ogni $(p, q)$ e $(p', q')$ coppie di punti di $M$ con $d(p, q) = d(p', q')$, esiste una isometria $f$ della varietà tale che

$$f(p) = p' \quad \text{e} \quad f(q) = q'.$$

Gli spazi 2-punti omgenei sono stati completamente classificati. Infatti, uno spazio 2-punti omogeneo è uno spazio euclideo oppure uno spazio simmetrico di rango 1 (cfr. [116],[106]). In [13] è data una caratterizzazione degli spazi 2-punti omogenei mediante proprietà della struttura riemanniana di contatto naturale del loro fibrato sferico unitario tangente.

## 10.2 Varietà riemanniane omogenee $3D$

Ricordiamo la seguente

**Definizione 10.2.** Una varietà riemanniana $(M, g)$ si dice localmente omogenea se per ogni $p, q \in M$ esiste un $\varepsilon = \varepsilon(p, q) > 0$ e una isometria $f : B(p, \varepsilon) \to B(q, \varepsilon)$ con $f(p) = q$.

Se una varietà riemanniana $(M, g)$ localmente omogenea è completa, allora il suo rivestimento universale con la metrica indotta è una varietà riemanniana omogenea. In particolare, una varietà riemanniana $(M, g)$ completa localmente omogenea è localmente isometrica a una varietà riemanniana omogenea semplicemente connessa. In generale, in dimensione $n \leq 4$, ogni varietà riemanniana $(M, g)$ localmente omogenea è localmente isometrica a una varietà riemanniana omogenea semplicemente connessa (cfr.[81]).

Per varietà riemanniane omogenee $3D$, abbiamo il seguente

**Teorema 10.3.** ([67], Teorema 2.4) *Sia $(M, g)$ una varietà riemannian omogenea semplicemente connessa $3D$. Allora, $(M, g)$ è un gruppo di Lie riemanniano semplicemente connesso $3D$, oppure è la varietà riemanniana prodotto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, dove $\mathbb{S}^2$ è la sfera canonica di curvatura sezionale costante $k > 0$.*

Riguardo a questo Teorema, osserviamo che in dimensione tre esistono gruppi di Lie riemanniani non isomorfi come gruppi di Lie ma con metriche invarianti a sinistra isometriche, ed esistono gruppi di Lie riemanniani isomorfi come gruppi di Lie ma con metriche invarianti a sinistra non isometriche (cfr. Teoremi 8.67 e 8.73).

**Le otto geometrie $3D$ di Thurston**

Una geometria nel senso di Thurston consiste di una varietà riemanniana completa semplicemente connessa $M_0$ (detta spazio modello) insieme a un gruppo di isometrie $G$ la cui azione è effettiva e transitiva e inoltre ammette un sottogruppo discreto $\Gamma$ per cui il quoziente $M_0/\Gamma$ è una varietà differenziabile compatta. Dal Teorema 8.48 segue che in dimensione due esistono tre geometrie modello. In dimensione tre esistono esattamente otto geometrie modello, esse sono date dalle seguenti otto varietà riemanniane complete semplicemente connesse omogenee ([108] p. 179-184):

$$\mathbb{S}^3, \quad \mathbb{R}^3, \quad H^3, \quad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \quad H^2 \times \mathbb{R}, \quad Nil^3, \quad Sol^3, \quad \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}). \tag{10.1}$$

L'importanza di questi spazi è dovuta al fatto che svolgono un ruolo fondamentale nella congettura di geometrizzazione di Thurston (risolta, come accennato nella Sezione 8.10, da Perelman). Tale congettura, la cui formulazione con dettagli richiederebbe nozioni non contenute in questo libro, in sostanza afferma che ogni varietà compatta orientabile di dimensione tre si può costruire usando le otto geometrie di Thurston (per una dettagliata presentazione delle otto geometrie di Thurston si consiglia [65] Cap.12, e [70]). Si noti che solo i primi tre spazi della (10.1) sono omogenei e isotropi, quindi a curvatura sezionale costante. Inoltre, solo il prodotto riemanniano $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ non è un gruppo di Lie.

Diciamo che una varietà riemanniana $(M, g)$ è modellata su una varietà omogenea $(M_0, g_0)$ se ogni punto di $M$ possiede un intorno isometrico a un aperto di $M_0$ (cfr. [70] p.60). Ogni varietà localmente omogenea di volume finito 3-dimensionale è modellata su una delle otto varietà modello (cfr. [108], [70]). Sia $M_0$ una delle otto varietà modello elencate nella (10.1).

- $M_0 = \mathbb{S}^3$. Ogni varietà localmente omogenea $M$ modellata su $\mathbb{S}^3$ è una varietà riemanniana completa a curvatura sezionale costante positiva, quindi è uno spazio forma di tipo sferico $\mathbb{S}^3/\Gamma$ dove $\Gamma$ è un sottogruppo ciclico finito di $SO(4)$ (cfr. anche Sezione 8.5 p.281,282). Notiamo che ogni spazio forma sferico è compatto.

- $M_0 = \mathbb{R}^3$. Ogni varietà localmente omogenea modellata su $\mathbb{R}^3$ ha una metrica piatta. Il Toro piatto è il classico esempio di varietà compatta piatta.

- $M_0 = H^3$. Ogni varietà localmente omogenea $M$ modellata su $H^3$ è una varietà riemanniana completa iperbolica, ovvero a curvatura sezionale costante negativa. Esistono esempi compatti e non compatti.

- $M_0 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (con la metrica prodotto). La curvatura sezionale lungo piani orizzontali (ovvero piani tangenti a $\mathbb{S}^2$) è una costante positiva, e quella lungo piani verticali (ovvero lungo piani che contengono il fattore $\mathbb{R}$) è nulla. Ogni varietà localmente omogenea di volume finito modellata su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ è compatte ed è isometrica a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ oppure a una somma connessa di due spazi proiettivi $\mathbb{R}P^3$.

- $M_0 = H^2 \times \mathbb{R}$ è un gruppo di Lie non-unimodulare semplicemente connesso. $M_0$ si considera con la metrica prodotto che è una metrica invariante a sinistra rispetto alla struttura standard di gruppo di Lie non-unimodulare. In questo caso, la curvatura sezionale lungo piani orizzontali è una costante negativa, e quella lungo piani verticali è nulla. Varietà localmente omogenee di volume finito modellate su $H^2 \times \mathbb{R}$ sono del tipo $\Sigma \times \mathbb{S}^1$, dove $\Sigma$ è una superficie iperbolica, oppure hanno tali varietà come rivestimento finito.

- $M_0 = Nil^3$ è un gruppo di Lie unimodulare semplicemente connesso con una metrica invariante a sinistra. In tal caso, dalla (8.29) segue che il tensore di Ricci ha componenti $Ric_{11} = Ric_{22} < 0$, $Ric_{33} > 0$ e $Ric_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Varietà localmente omogenee modellate su $Nil^3$ sono dette *nil-varietà*. In particolare, nil-varietà di volume finito sono compatte.

- $M_0 = Sol^3 = E(1,1)$ è un gruppo di Lie unimodulare semplicemente connesso con una metrica invariante a sinistra. In tal caso, dalla (8.29) segue che la forma quadratica di Ricci ha segnatura $(-,0,0)$, $(+,-,-)$. Varietà localmente omogenee modellate su $Sol^3$ sono dette *solv-varietà*. Solv-varietà di volume finito sono compatte.

- $M_0 = \widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie unimodulare semplicemente connesso con una metrica invariante a sinistra. Questa varietà può essere considerata come il rivestimento universale del fibrato sferico tangente $T_1H^2$ con la metrica indotta (cfr. Appendice C.4). Il gruppo lineare speciale proiettivo $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ è isomorfo a $SO_+(2,1)$, gruppo di isometrie di $H^2$ che agisce transitivamente (cfr. Sezioni 5.5, 5.6 ), inoltre $PSL(2,\mathbb{R})$ si può identificare con $T_1H^2$. Varietà localmente omogenee di volume finito modellate su $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ sono $S^1$-fibrati su superfici iperboliche.

## Strutture riemanniane di contatto omogenee

Ricordiamo la seguente

**Definizione 10.4.** Una *varietà riemanniana di contatto* $(M, \eta, g, \xi, \varphi)$ si dice *omogenea* se esiste un gruppo di Lie $G$ di isometrie di $(M, g)$ che opera in modo transitivo su $M$ e la forma di contatto $\eta$ è invariante rispetto a $G$:
$$f^*\eta = \eta \quad \forall f \in G, \quad \text{ovvero} \quad \eta(f_*X) \circ f = \eta(X) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \text{ e } \forall f \in G.$$

Si noti che per una varietà riemanniana di contatto omogenea $(M, \eta, g, \xi, \varphi)$, anche il campo vettoriale di Reeb $\xi$ e il tensore $\varphi$ sono invarianti rispetto a $G$. Più precisamete, se $f$ è un diffeomorfismo di $M$, allora:

a) $f^*\eta = \eta$ implica $f_*\xi = \xi$;

b) $f^*\eta = \eta$ e $f^*g = g$ implicano $f_* \circ \varphi = \varphi \circ f_*$.

Infatti:

a) $0 = (\mathrm{d}\eta)(\xi, \cdot) = (\mathrm{d}f^*\eta)(\xi, \cdot) = (f^*\mathrm{d}\eta)(\xi, \cdot) = (\mathrm{d}\eta)(f_*\xi, f_*\cdot) \circ f$ e $\eta(f_*\xi) \circ f = (f^*\eta)(\xi) = \eta(\xi) = 1$ implicano $f_*\xi = \xi$.

b) Assumiamo $f^*\eta = \eta$, $f^*g = g$ e quindi $f_*\xi = \xi$. Per $Y \in \ker \eta$, si ha
$$\eta(f_*Y) \circ f = g(\xi, f_*Y) \circ f = g(f_*\xi, f_*Y) \circ f = g(\xi, Y) = 0,$$
e quindi
$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\eta)(f_*X, \varphi f_*Y) \circ f &= g(f_*X, \varphi^2 f_*Y) \circ f = g(f_*X, -f_*Y + \eta(f_*Y)\xi) \circ f \\ &= -g(X, Y) = (\mathrm{d}\eta)(X, \varphi Y) = (\mathrm{d}f^*\eta)(X, \varphi Y) \\ &= (f^*\mathrm{d}\eta)(X, \varphi Y) = (\mathrm{d}\eta)(f_*X, f_*\varphi Y) \circ f.\end{aligned}$$
Pertanto, siccome $\mathrm{d}\eta$ è non degenere, $\varphi f_*Y = f_*\varphi Y$. Se $Y = \xi$,
$$f_* \circ \varphi\xi = 0 = \varphi\xi = \varphi \circ f_*\xi.$$

In [88] (cfr. anche [94]) è data una completa classificazione delle varietà riemanniane di contatto omogenee semplicemente connesse di dimensione tre. Per enunciare tale classificazione ricordiamo che, in dimensione tre, la *curvatura scalare di Webster* è definita da (cfr. [26], p.284)
$$W = \frac{1}{8}\big(r - Ric(\xi, \xi) + 4\big) = \frac{1}{8}(r + 2 + tr\, h^2), \tag{10.2}$$
dove $r$ è l'usuale curvatura scalare. Ricordiamo che il tensore $h = (1/2)\mathcal{L}_\xi\varphi$ gioca un ruolo fondamentale nello studio della geometria riemanniana di contatto (cfr. Sezione 4.6). In particolare, in dimensione tre, una struttura riemanniana di contatto è sasakiana se e solo se il campo di Reeb $\xi$ è di Killing, equivalentemente il tensore $h$ è nullo. Sempre in dimensione tre, nel caso non sasakiano, consideriamo l'invariante
$$p = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{tr\, h^2}} W.$$

Quindi, il Teorema di classificazione di [88] può essere riformulato nella seguente forma.

**Teorema 10.5.** *Sia $(M, \eta, g, \xi, \varphi)$ una varietà riemanniana di contatto omogenea semplicemente connessa di dimensione tre. Allora, $M$ è un gruppo di Lie e $(\eta, g, \xi, \varphi)$ è una struttura riemanniana di contatto invariante sinistra. Più precisamente, abbiamo la seguente classificazione:*

- *Caso sasakiano (ovvero, il tensore $h = 0$).*

*(1) Se $G$ è unimodulare, allora*

*(i) $G$ è il gruppo $SU(2) \equiv \mathbb{S}^3$ se la curvatura di Webster $W > 0$;*

*(ii) $G$ è il gruppo di Heisenberg $Nil^3$ se la curvatura di Webster $W = 0$;*

*(iii) $G$ è il gruppo $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ se la curvatura di Webster $W < 0$;*

*(2) Se $G$ è non-unimodulare, allora la sua algebra di Lie è definita da*

$$[e_3, e_1] = \alpha e_1 + 2e_2, \quad [e_3, e_2] = [e_1, e_2] = 0, \quad e_2 = \xi,$$

*dove $\alpha \neq 0$. In questo caso, la curvatura scalare di Webster $W = -\alpha^2/4 < 0$, e il gruppo di Lie $G$ è isomorfo a $H^2(-\alpha^2) \times \mathbb{R}$.*

- *Caso non Sasakian (ovvero, il tensore $h \neq 0$).*

*(1) Se $G$ è unimodulare, allora*

*(i) $G$ è il gruppo di $SU(2)$ se l'invariante $p > 1$;*

*(ii) $G$ è il gruppo $\widetilde{E}(2)$ se l'invariante $p = 1$;*

*(iii) $G$ è il gruppo $\widetilde{SL}(2, R)$ se l'invariante $-1 \neq p < 1$;*

*(iv) $G$ è il gruppo $Sol^3 = E(1, 1)$ se l'invariante $p = -1$.*

*(2) Se $G$ è non-unimodulare, allora la sua algebra di Lie è definita da*

$$[e_3, e_1] = \alpha e_1 + 2e_2, \quad [e_3, e_2] = \gamma e_1, \quad [e_1, e_2] = 0, \quad e_2 = \xi,$$

*dove $\alpha, \gamma \neq 0$. In questo caso, l'invariante $p = -(\alpha^2 + \gamma)/|\gamma| < 1$.*

**Osservazione 10.6.** Dal Teorema 10.5 segue che le varietà modello $\mathbb{S}^3$, $Nil^3$, $Sol^3$, $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ delle otto geometrie di Thurston, ammettono una struttura riemanniana di contatto compatibile con la loro struttura di gruppo di Lie. Di queste quattro varietà, soltanto per $Sol^3 = E(1, 1)$ tale struttura non può essere sasakiana, ed è caratterizzata dall'invariante $p = -1$ nell'ambito dei gruppi di Lie unimodulari. Inoltre, osserviamo che $H^2 \times \mathbb{R}$ ammette una struttura sasakiana omogenea $(\eta, g)$, ma $g$ non è la metrica prodotto.

Le varietà modello date dai gruppi di Lie $H^3$ e $H^2 \times \mathbb{R}$, ammettono una speciale struttura metrica di quasi contatto invariante a sinistra (cfr. Esempi 4.52, 4.53 e [92]). Di seguito vediamo che anche la varietà modello $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, che non è un gruppo di Lie, ammette una speciale struttura omogenea di quasi contatto.

**Esempio 10.7. La struttura cokähleriana standard su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.**
Consideriamo $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea $g_0$, $\xi_0$ un campo di vettori su $\mathbb{R}$ tale che $g_0(\xi_0, \xi_0) = 1$ e $\eta_0$ la 1-forma definita da $\eta_0 = g_0(\xi_0, \cdot)$. Sia $\mathbb{S}^2$ la sfera con la metrica riemanniana canonica e con la struttura complessa canonica $J$. Sia $g$ la metrica riemanniana prodotto su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Se $(X_1, X_2)$ è un campo vettoriale tangente a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, dove $X_1$ è tangente a $\mathbb{S}^2$ e $X_2$ è tangente a $\mathbb{R}$, possiamo definire i tensori $\xi, \varphi, \eta$ su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ponendo

$$\xi = (0, \xi_0), \quad \varphi(X_1, X_2) = (JX_1, 0), \quad \eta(X_1, X_2) = \eta_0(X_2).$$

Allora, $(\eta, \xi, \varphi)$ è una struttura di quasi contatto e $g$ è una metrica compatibile.

Ricordiamo che se $(M, g)$ è una varietà riemanniana orientata (da $\Omega$), $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\vartheta = i_X\Omega$, allora dalla Proposizione B.2 segue

$$n\mathrm{d}\vartheta = (\mathrm{div}X)\Omega, \tag{10.3}$$

dove $n = \dim M$. Nel caso di una varietà riemanniana di quasi contatto $3D$, con tensori di struttura $(\eta, \xi, \varphi, g)$, posto $\Omega = \eta \wedge \Phi$, si ha

$$i_\xi\Omega = \Phi.$$

Pertanto dalla formula (10.3), si ottiene

$$3\mathrm{d}\Phi = (\mathrm{div}\,\xi)\Omega = (\mathrm{div}\,\xi)\,\eta \wedge \Phi. \tag{10.4}$$

Ora, tornando al caso della struttura riemanniana di quasi contatto definita su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Siccome $\nabla\xi = 0$, dove $\nabla$ è la connessione di Levi-Civita di $g$ che è una metrica prodotto, si ha

$$(\mathrm{d}\eta)(X, Y) = ... = g(\nabla_X\xi, Y) - g(\nabla_Y\xi, X) = 0.$$

Inoltre $\mathrm{div}\,\xi = \mathrm{tr}\nabla\xi = 0$, e quindi, dalla (10.4) si ottiene $\mathrm{d}\Phi = 0$. Pertanto, $(\eta, \xi, \varphi, g)$ è una struttura cokähleriana su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (cfr. Definizione 4.43). Infine, osserviamo che il gruppo di isometrie $\mathrm{Iso}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) = \mathrm{Iso}(\mathbb{S}^2) \times \mathrm{Iso}(\mathbb{R})$, di conseguenza $(\eta, \xi, \varphi, g)$ è una struttura riemanniana di quasi contatto omogenea.

Una completa classificazione, in dimensione tre, di una speciale classe di varietà di quasi-contatto omogenee, che include gli Esempi 4.52, 4.53, 10.7, è data in [92].

## 10.3 Varietà riemanniane simmetriche

La classe degli *spazi simmetrici* che introduciamo in questa sezione è una particolare sottoclasse di spazi riemanniani omogenei.

**Definizione 10.8.** Una varietà riemanniana $(M, g)$ si dice *simmetrica* (o *spazio riemanniano simmetrico*) se per ogni punto $p \in M$, esiste un'isometria $\sigma_p : M \to M$ tale che:
i) $\sigma_p^2 = I_M$ (cioè, $\sigma_p$ è involutiva); ii) $p$ è punto fisso isolato di $\sigma_p$.

**Proposizione 10.9.** *L'isometria $\sigma_p$ di una varietà riemanniana simmetrica $(M, g)$ soddisfa:*

$$(\sigma_p)_{*p} = -I \quad e \quad \sigma_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t),$$

*dove $\gamma(t)$ è una geodetica con $\gamma(0) = p$.*

*Dimostrazione.* La condizione i) $\sigma_p^2 = I_M$ implica: $(\sigma_p)_{*p}^2 = I_{T_pM}$, quindi gli autovalori $\lambda$ del differenziale $(\sigma_p)_{*p}$ possono essere $+1, -1$. Se $\lambda = +1$, allora dovrebbe esistere $v \in T_pM$, $v \neq 0$, tale che:

$$(\sigma_p)_{*p} v = v \quad \text{con} \quad \sigma_p(p) = p\,.$$

Di conseguenza, indicata con $\gamma$ la geodetica uscente dal punto $p$ con velocità iniziale $v$, la geodetica $\tilde{\gamma} := \sigma_p \circ \gamma$ verificherebbe:

$$\tilde{\gamma}(0) = \sigma_p(\gamma(0)) = \sigma_p(p) = p = \gamma(0),$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0) = (\sigma_p)_{*p}\big(\dot{\gamma}(0)\big) = (\sigma_p)_{*p}(v) = v = \dot{\gamma}(0),$$

e quindi, per l'unicità della geodetica $\gamma$ con le fissate condizioni iniziali, si avrebbe:

$$\sigma_p \circ \gamma(t) = \gamma(t),$$

contro l'ipotesi secondo cui $p$ è punto fisso isolato. Dunque $\lambda = -1$ è l'unico autovalore di $(\sigma_p)_{*p}$, per cui $(\sigma_p)_{*p} = -I$. Di conseguenza, se $\gamma(t)$ è una geodetica con $\gamma(0) = p$, allora le geodetiche $\tilde{\gamma}(t) := \sigma_p \circ \gamma(t)$ e $\gamma(-t)$ coincidono. Infatti:

$$\tilde{\gamma}(0) = \sigma_p\big(\gamma(0)\big) = p = \gamma(-0),$$

e

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0) = (\sigma_p)_{*p}\big(\dot{\gamma}(0)\big) = -\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(-t)(0).$$

□

La $b$) della Proposizione 10.9 ci dice che *"l'isometria $\sigma_p$ inverte le geodetiche passanti per $p$"*. Ciò si esprime dicendo che l'isometria $\sigma_p$ è una *simmetria geodetica* rispetto al punto $p$. L'esistenza delle simmetrie $\sigma_p$ comporta che le geodetiche $\gamma(t)$, $t \in (-\epsilon, +\epsilon)$, si possono prolungare per ogni $t \in \mathbb{R}$. Infatti: poiché $\sigma_p\big(\gamma(t)\big) = \gamma(-t)$, allora si possono considerare le simmetrie geodetiche rispetto ai punti $q_1 = \gamma(t_0)$, $q_2 = \gamma(-t_0)$ per ogni $t_0 \in (-\epsilon, +\epsilon)$. Procedendo in questo modo, si ottiene la seguente proposizione.

**Proposizione 10.10.** *Una varietà riemanniana simmetrica è completa.*

In aggiunta a questa proprietà, abbiamo un'altra proprietà che permette di includere gli spazi simmetrici nella famiglia più ampia degli spazi omogenei.

**Proposizione 10.11.** *Una varietà riemanniana simmetrica* $(M, g)$ *è omogenea.*

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 10.10, $(M, g)$ è uno spazio simmetrico completo. Pertanto, applicando il Teorema 7.50, se $p_1$ e $p_2$ sono due punti distinti di $M$, esiste sempre un arco di geodetica (minimale) che li congiunge. Se indichiamo con $p$ il punto medio di questo arco geodetico, per la Proposizione 10.9 si ha: $\sigma_p(p_1) = p_2$. Poiché $\sigma_p$ è un'isometria, $(M, g)$ è omogenea. □

Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è uno spazio simmetrico, la simmetria geodetica $\sigma_p$ è la riflessione rispetto al punto $p$. Anche la sfera canonica $\mathbb{S}^n$ è uno spazio simmetrico, in tal caso la simmetria geodetica $\sigma_p$ è l'applicazione che a un punto $q \in \mathbb{S}^n$ associa il punto $q' = \sigma_p(q)$ della circonferenza $\gamma$ di raggio massimo, individuata da $p$ e $q$, tale che $L(\gamma(p, q)) = L(\gamma(p, q'))$.

**Esercizio 10.12.** Si verifichi che la $\sigma_p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ precedentemente definita è un'isometria di $\mathbb{S}^n$.

Nel caso della sfera, abbiamo $\sigma_p(p) = p$ e $\sigma_p(-p) = -p$. Quindi, in generale, $\sigma_p$ può avere altri punti fissi oltre al punto $p$. Anche lo spazio iperbolico $H^n$ è un esempio di spazio simmetrico. Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^n$ con la metrica di Fubini è un esempio di spazio simmetrico a curvatura sezionale non costante. Se un gruppo di Lie $G$ ammette una metrica bi-invariante $g$, allora $(G, g)$ è uno spazio simmetrico ([28], p.345). Di conseguenza, i gruppi di Lie compatti sono esempi di spazi simmetrici.

**Definizione 10.13.** Una varietà riemanniana $(M, g)$ si dice *localmente simmetrica* se per ogni punto $p$ di $M$ esiste una isometria $\sigma_p$ (simmetria geodetica) definita su un intorno $U$ di $p$, che soddisfa le condizioni:

$$\text{i) } \sigma_p^2 = I_U \ ; \quad \text{ii) } p \text{ è punto fisso isolato di } \sigma_p.$$

Un aspetto interessante delle varietà riemanniane (localmente) simmetriche è che possono essere caratterizzate mediante il tensore di curvatura di Riemann $R$. Vale infatti la seguente caratterizzazione degli spazi localmente simmetrici (Teorema di E. Cartan).

**Teorema 10.14.** *Una varietà riemanniana* $(M, g)$ *è localmente simmetrica se e solo se il tensore di curvatura* $R$ *è parallelo* $(\nabla R = 0)$.

*Dimostrazione.* Assumiamo $(M, g)$ localmente simmetrica. Ricordiamo che $\nabla R$, come tensore del tipo $(0, 5)$, è definito da:

$$(\nabla R)(X, Y, Z, V, W) = g\big((\nabla R)(X, Y, Z, V), W\big) = g\big((\nabla_V R)(X, Y)Z, W\big).$$

Poiché la connessione di Levi-Civita $\nabla$ e il tensore di curvatura sono invarianti per isometrie (cfr. Teorema 8.14), si ha

$$(\nabla R)(f_*X, f_*Y, f_*Z, f_*V, f_*W) \circ f = (\nabla R)(X, Y, Z, V, W)$$

per ogni isometria (locale) $f$ di $M$. In particolare, scegliendo come isometria $f$ la simmetria geodetica $\sigma_p$, si ha: $f_{*p}X_p = -X_p$ e $f(p) = p$. Di conseguenza,

$$\begin{aligned}(\nabla R)_{f(p)}(f_{*p}X_p,&f_{*p}Y_p, f_{*p}Z_p, f_{*p}V_p, f_{*p}W_p)\\ &=(-1)^5(\nabla R)_p(X_p, Y_p, Z_p, V_p, W_p),\end{aligned}$$

e quindi

$$(\nabla R)_p = -(\nabla R)_p, \quad \text{cioè} \quad (\nabla R)_p = 0\,.$$

Per l'arbitrarietà del punto $p \in M$, si ha $\nabla R = 0$.
Viceversa, assumiamo $\nabla R = 0$. Fissato $p \in M$, consideriamo $U$ intorno normale sferico centrato in $p$, quindi $\exp_p : B(0,\delta) \to U = B(p,\delta)$ è un diffeomorfismo. Intanto, proviamo che le componenti di $R$ sono costanti lungo le curve geodetiche $\gamma(t)$ di $U$ uscenti da $p$, cioè: per ogni fissata base $\{e_i\}$ di $T_pM$, $p = \gamma(0)$, posto $e_i(t) = \tau_t(e_i)$, risulta

$$\begin{aligned}R_{ijkh}(t) &= g_{\gamma(t)}\big(R_{\gamma(t)}(e_i(t), e_j(t))e_k(t), e_h(t)\big) = \text{cost.}\\ &= g_p\big(R_p(e_i, e_j)e_k, e_h\big).\end{aligned}$$

Infatti, siccome $\nabla_X R = 0$, abbiamo $\nabla_{\dot\gamma(t)}R = 0$ e quindi

$$\begin{aligned}0 = \big(\nabla_{\dot\gamma(t)}R\big)\big(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_h(t)\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_{\gamma(t)}\big(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_h(t)\big)\\ - R_{\gamma(t)}\big(\frac{De_i(t)}{\mathrm{d}t}, e_j(t), e_k(t), e_h(t)\big) &- R_{\gamma(t)}\big(e_i(t), \frac{De_j(t)}{\mathrm{d}t}, e_k(t), e_h(t)\big)\\ - R_{\gamma(t)}\big(e_i(t), e_j(t), \frac{De_k(t)}{\mathrm{d}t}, e_h(t)\big) &- R_{\gamma(t)}\big(e_i(t), e_j(t), e_k(t)\frac{De_h(t)}{\mathrm{d}t}\big)\\ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_{ijkh}(t).\end{aligned}$$

Per ogni fissato $q \in U$, indichiamo con $\gamma(t)$ la geodetica (radiale) di $U$, quindi con $\gamma(0) = p$, passante per $q$; poniamo $\gamma(t) = q$ per un fissato $t$. Per provare che $(M, g)$ è localmente simmetrica, basta provare che l'applicazione

$$f : U \longrightarrow U,\ q = \gamma(t) \longmapsto f(q) = \gamma(-t),$$

è un'isometria. Indichiamo con $\tau_t$ lo spostamento parallelo lungo $\gamma$ da $p$ a $q$, con $\tilde\tau_t$ lo spostamento parallelo lungo $\gamma$ da $p$ a $\gamma(-t)$, e consideriamo l'isometria lineare

$$\Phi_t = \tilde\tau_t \circ F \circ \tau_t^{-1} : T_qM \longrightarrow T_{f(q)}M,$$

dove $F$ è l'isometria lineare di $T_pM$ definita da $F : V \mapsto F(V) = -V$. Proviamo che $\Phi_t$ conserva la curvatura. Sia $\{v_i\}$ una base di $T_qM$, che possiamo sempre scrivere nella forma $v_i = e_i(t) = \tau_t(e_i)$, dove $\{e_i\}$ è una base di $T_pM$. Allora:

$$\Phi_t(v_i) = \big(\tilde{\tau}_t \circ F \circ \tau_t^{-1}\big)(v_i) = \tilde{\tau}_t(-e_i) = -\tilde{\tau}_t e_i,$$

e tenendo conto che $R$ ha componenti costanti lungo $\gamma$, si ha:

$$\begin{aligned}
g_{f(q)}&\big(R_{f(q)}(\Phi_t(v_i), \Phi_t(v_j))\Phi_t(v_k), \Phi_t(v_h)\big)\\
&= g_{\gamma(-t)}\big(R_{\gamma(-t)}(\tilde{\tau}_t(e_i), \tilde{\tau}_t(e_j))\tilde{\tau}_t(e_k), \tilde{\tau}_t(e_h)\big)\\
&= \text{cost.} = g_{\gamma(-0)}\big(R_{\gamma(-0)}(e_i, e_j)e_k, e_h\big)\\
&= g_{\gamma(0)}\big(R_{\gamma(0)}(e_i, e_j)e_k, e_h\big)\\
&= g_{\gamma(t)}\big(R_{\gamma(t)}(\tau_t(e_i), \tau_t(e_j))\tau_t(e_k), \tau_t(e_h)\big)\\
&= g_q\big(R_q(v_i, v_j)v_k, v_h\big).
\end{aligned}$$

D'altronde, siccome $q = \gamma(t) = \exp_p tV = \gamma_V(t)$ con $V \in B(0, \delta)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\big(\exp_p \circ F \circ \exp_p^{-1}\big)(q) &= \big(\exp_p \circ F\big)(tV) = \exp_p(-tV)\\
&= \gamma_V(-t) = \gamma(-t) = f(q).
\end{aligned}$$

Applicando il Teorema 8.29 (di Cartan), si ha che $f$ è una isometria con $f_{*p} = F$. □

Da un Teorema di W. Ambrose (cfr. Sasaki [100], p. 112,176), si ottiene il seguente

**Teorema 10.15.** *Una varietà riemanniana completa e semplicemente connessa, è localmente simmetrica se e solo se è simmetrica.*

Dal teorema precedente segue in particolare che il rivestimento riemanniano di uno spazio localmente simmetrico completo è uno spazio simmetrico. In generale, uno spazio localmente simmetrico non è uno spazio simmetrico. Ad esempio, una superficie riemanniana (connessa) compatta orientabile a curvatura sezionale costante negativa è uno spazio localmente simmetrico ma non è uno spazio simmetrico. Infatti, tali 2-varietà hanno necessariamente genere $p > 1$ (ad esempio come conseguenza del Teorema di Gauss-Bonnet) e quindi gruppo fondamentale non abeliano (cfr., ad esempio, [57]), mentre è noto che uno spazio simmetrico ha gruppo fondamentale abeliano ([100], p. 183). Più in generale, ogni varietà riemanniana compatta a curvatura sezionale costante negativa è localmente simmetrica ma non è uno spazio simmetrico, infatti per il Teorema (di Preissman) (cfr. Osservazione 8.3) una tale varietà ha gruppo fondamentale non abeliano. Anche gli spazi lenticolari muniti di una metrica a curvatura sezionale positiva sono esempi di spazi localmente simmetrici che non sono simmetrici ([100], p. 177). Inoltre, per uno spazio simmetrico si verifica una sola delle seguenti proprietà (cfr. [100], pp. 177,183,184):

i) la curvatura sezionale è $\geq 0$ e la curvatura di Ricci $Ric(u,u) > 0$;

j) la curvatura sezionale è $\leq 0$ e la curvatura di Ricci $Ric(u,u) < 0$.

Nella sezione precedente abbiamo osservato che uno spazio 2-punti omegeneo è uno spazio euclideo oppure uno *spazio simmetrico di rango* 1. Ricordiamo che il rango di uno spazio simmetrico $M$ è la dimensione massima delle sottovarietà totalmente geodetiche piatte di $M$ (cfr. [100], p. 188). Gli spazi simmetrici di rango 1 sono:

a) gli spazi a curvatura sezionale costante $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{P}^n$ e $H^n$;

b) lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, lo spazio proiettivo quaternionico $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$, il piano proiettivo di Cayley $\mathbb{C}_{ay}P^2$;

c) lo spazio iperbolico complesso $\mathbb{C}H^n$, lo spazio iperbolico quaternionico $\mathbb{Q}H^n$, il piano iperbolico di Cayley $\mathbb{C}_{ay}H^2$.

Gli spazi classificati in b) sono di tipo compatto e con curvatura sezionale (non costante) positiva, mentre quelli classificati in c) sono di tipo non-compatto e con curvatura sezionale (non costante) negativa. Si noti che $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Q}){=}4(n-1)$ per $n \geq 2$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{S}^4$ e $\dim_{\mathbb{R}} C_{ay}P^2{=}16$.
Gli spazi simmetrici compatti di rango 1 si possono esprimere come spazi quozienti:

- $\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n)$;
- $\mathbb{P}^{2n-1} = \mathbb{S}^{2n-1}/\{\pm I\} = SO(2n)/O(2n-1)$;
- $\mathbb{P}^{2n} = \mathbb{S}^{2n}/\{\pm I\} = SO(2n+1)/SO(2n) \times O(1)$;
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = U(n+1)/U(n) \times U(1)$;
- $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Q}) = Sp(n)/Sp(n-1) \times Sp(1)$, $n \geq 2$;
- $\mathbb{C}_{ay}P^2 = F_4/Spin(9)$.

**Esercizio 10.16.** Si verifichi che per una varietà riemanniana a curvatura sezionale costante si ha: $\nabla R = 0$.

**Esercizio 10.17.** Si verifichi che per una varietà riemanniana localmente simmetrica si ha:

$$R(X,Y)R = 0,$$

dove $R(X,Y)$ è pensato come un operatore sui tensori (cfr. Osservazione 8.8). Una varietà riemanniana che soddisfa $R(X,Y)R = 0$ si dice *semisimmetrica*.

## 10.4 Varietà conformemente piatte

Per maggiori dettagli e approfondimenti su questa sezione si rinvia ai testi e agli articoli citati nel corso della presentazione.

**Definizione 10.18.** Una varietà riemanniana (localmente) conformemente piatta è una varietà riemanniana $(M, g)$ che verifica la seguente proprietà: per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno $U$ di $p$ e una funzione differenziabile $\sigma : U \to \mathbb{R}$ per cui $(U, \tilde{g} = e^{2\sigma} g)$ è piatta.

Dalla definizione segue facilmente che, oltre allo spazio euclideo, anche la sfera canonica $\mathbb{S}^n$ (basta considerare le carte locali definite dalle proiezioni stereografiche) e lo spazio iperbolico $H^n$ (basta considerare i modelli di Poincaré) sono varietà conformemente piatte. La nozione di varietà conformemente piatta è puramente locale, tuttavia esiste un teorema che globalizza tale nozione per una classe di varietà. Abbiamo infatti il seguente teorema.

**Teorema 10.19.** (Kuiper [*59*]) *Sia $(M, g)$ una varietà conformemente piatta. Se $M$ è compatta e semplicemente connessa, allora esiste un diffeomorfismo tra $(M, g)$ e la sfera canonica $\mathbb{S}^n$ che è una trasformazione conforme.*

Osserviamo che ogni varietà riemanniana di dimensione 2 è conformemente piatta. Infatti, rispetto a un sistema di coordinate isoterme $(x_1, x_2)$, la metrica $g$ si esprime con $g = e^{2\sigma}(\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2)$. Sia ora $M$ di dimensione $n > 2$. Siano $g$ e $\tilde{g}$ due metriche conformi su $M$: $\tilde{g} = e^{2\sigma} g$. Dalla formula di Koszul segue che le corrispondenti connessioni di Levi-Civita sono legate da:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\sigma)Y + Y(\sigma)X - g(X, Y)\nabla\sigma,$$

dove $\nabla\sigma$ è il gradiente di $\sigma$. Si noti che se $\tilde{g} = \lambda g$, $\lambda$ funzione positiva, allora $\sigma = \frac{1}{2}\ln\lambda$ e quindi la formula precedente diventa

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2\lambda}\left\{X(\lambda)Y + Y(\lambda)X - g(X, Y)\nabla\lambda\right\}. \tag{10.5}$$

Per i tensori di curvatura di tipo $(0, 4)$, abbiamo la relazione

$$\tilde{R} = e^{2\sigma}\left[R - \left(\nabla^2\sigma - \mathrm{d}\sigma \otimes \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}g(\nabla\sigma, \nabla\sigma)g\right) \odot g\right],$$

dove $\odot$ denota il prodotto di Kulkarni-Nomizu (cfr. Osservazione 8.22) e $\nabla^2\sigma$ denota l'hessiano di $\sigma$ (cfr. Sezione 6.2) ).

Il tensore di curvatura conforme $C$ di una varietà riemanniana $(M, g)$, introdotto da H. Weyl, è definito da:

$$\begin{aligned} C(X, Y)Z = R(X, Y)Z &+ \frac{r}{(n-1)(n-2)}\left\{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\right\} \\ &- \frac{1}{n-2}\left\{g(X, Z)QY + Ric(X, Z)Y - g(Y, Z)QX - Ric(Y, Z)X\right\} \end{aligned}$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
C(X,Y,Z,W) &= g(C(X,Y)Z,W) \qquad (10.6)\\
&= R - \frac{1}{(n-2)} g \odot Ric + \frac{r}{2(n-1)(n-2)} g \odot g,
\end{aligned}
$$

dove $r$ è la curvatura scalare, $Ric$ il tensore di Ricci e $Q$ l'operatore di Ricci. Se $g$ e $\tilde{g}$ sono due metriche conformi su $M$: $\tilde{g} = e^{2\sigma} g$, allora (cfr. Eisenhart [35])

$$\tilde{C}(X,Y)Z = C(X,Y)Z \quad \text{e} \quad \tilde{C}(X,Y,Z,W) = e^{2\sigma} C(X,Y,Z,W).$$

**Proposizione 10.20.** *Se $(M,g)$ è piatta oppure di dimensione 3, allora il tensore di curvatura conforme $C = 0$.*

*Dimostrazione.* Il caso piatto è ovvio. Consideriamo il caso 3-dimensionale. Fissato $p \in M$, consideriamo una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $T_pM$, di autovettori per l'operatore di Ricci in $p$, quindi $Ric_{ij}(p) = 0$ per $i \neq j$. Siccome la dimensione di $M$ è 3, le componenti $R_{ijkh}(p)$ che possono essere non nulle sono quelle con tre oppure con due indici distinti. Nel caso di tre indici distinti:

$$R_{1232}(p) = Ric_{13}(p) = 0,\ R_{1213}(p) = Ric_{23}(p) = 0,\ R_{1323}(p) = Ric_{12}(p) = 0.$$

Posto $C_{ijkh}(p) = C(e_i, e_j, e_k, e_h)$, dalla definizione di $C$ segue che anche $C_{ijkh}(p) = 0$ se tre indici sono distinti. Se abbiamo solo due indici distinti:

$$
\begin{aligned}
C_{ijij}(p) &= R_{ijij}(p) - \big(Ric_{ii}(p) + Ric_{jj}(p)\big) + \frac{r(p)}{2}\big(g_{ii}g_{jj} - g_{ij}g_{ij}\big)(p)\\
&= \frac{1}{2}\big(2R_{ijij}(p) - 2Ric_{ii}(p) - 2Ric_{jj}(p) + r(p)\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(2R_{ijij}(p) + Ric_{kk}(p) - Ric_{ii}(p) - Ric_{jj}(p)\big) = 0.
\end{aligned}
$$

□

Sia ora $(M,g)$ di dimensione $n \geq 4$. Se $M$ è conformemente piatta, allora $g$ è localmente conforme alla metrica piatta e quindi $C_g = e^{2\sigma} C_{g_0} = 0$; viceversa se $C_g = 0$, allora $(M,g)$ è conformemente piatta (cfr. [35], p. 92). Inoltre per $(M,g)$ conformemente piatta di dimensione $n \geq 4$:

$$\left(\nabla_X Ric\right)(Y,Z) - \left(\nabla_Y Ric\right)(X,Z) = \frac{g(Y,Z)X(r) - g(X,Z)Y(r)}{2(n-1)}. \qquad (10.7)$$

In dimensione 3, la (10.7) caratterizza le varietà conformemente piatte (cfr. [35], p. 91-92). Pertanto vale il seguente

**Teorema 10.21.** (di Weyl, 1921) *Sia $(M,g)$ una varietà riemanniana di dimensione $> 3$, allora $(M,g)$ è conformemente piatta se e solo se il tensore $C = 0$. Se $\dim M = 3$, $(M,g)$ è conformemente piatta se e solo se vale l'identità (10.7).*

Tenendo presente che $Ric$ di Codazzi implica $r$ costante (cfr. Sezione 8.7), si ottiene il seguente corollario.

**Corollario 10.22.** *a) Se $(M, g)$ è una varietà riemanniana conformemente piatta di dimensione $n \geq 4$, allora $r =$cost. se e solo se $Ric$ è di Codazzi.*
*b) Se $(M, g)$ è una varietà riemanniana di dimensione $n = 3$, allora $(M, g)$ è conformemente piatta e $r =$cost. se e solo se $Ric$ è di Codazzi.*

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione di varietà conformemente piatte in termini di curvature sezionali.

**Teorema 10.23.** (Kulkarni [60]) *Sia $(M, g)$ una varietà riemanniana di dimensione $n \geq 4$. Allora, $(M, g)$ è conformemente piatta se e solo se per ogni punto $p \in M$ e comunque si considerano quattro vettori ortonormali $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $T_pM$ si ha*

$$K(p, P_{12}) + K(p, P_{34}) = K(p, P_{13}) + K(p, P_{24}),$$

*dove $K(p, P_{ij})$ denota la curvatura sezionale in $p$ lungo il piano generato dai due vettori $e_i, e_j$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo $M$ conformemente piatta e quindi $C = 0$. Poniamo $K_{ij} = K(p, P_{ij}) = R_{ijij}$. Da $C_{1212} = C_{2424} = C_{1313} = C_{3434} = 0$, tenendo presente la (10.6), si ottengono le seguenti formule

$$\frac{Ric_{11} + Ric_{22}}{n-2} = K_{12} + \frac{r}{(n-1)(n-2)},$$

$$\frac{Ric_{22} + Ric_{44}}{n-2} = K_{24} + \frac{r}{(n-1)(n-2)},$$

$$\frac{Ric_{11} + Ric_{33}}{n-2} = K_{13} + \frac{r}{(n-1)(n-2)},$$

$$\frac{Ric_{33} + Ric_{44}}{n-2} = K_{34} + \frac{r}{(n-1)(n-2)},$$

e quindi $K_{12} + K_{34} = K_{24} + K_{13}$. Viceversa, fissato $p \in M$, consideriamo una base ortonormale $\{e_1, ..., e_n\}$ e poniamo $K_{ij} = K(p, P_{ij})$. Per ipotesi:

$$K_{ij} + K_{kh} = K_{ik} + K_{jh} \tag{10.8}$$

comunque si scelgono quattro indici $i, j, k, h$ distinti. Dalla (10.8), fissati gli indici $i, j, k$, e sommando su $h$ si ottiene

$$\sum_{h \neq i,j,k} (K_{ij} + K_{kh}) = \sum_{h \neq i,j,k} (K_{ik} + K_{jh})$$

che si puó anche scrivere nella forma

$$(n-3)K_{ij} + Ric_{kk} - K_{ki} - K_{kj} = (n-3)K_{ik} + Ric_{jj} - K_{ji} - K_{jk}\,,$$

e quindi

$$(n-2)K_{ij} + Ric_{kk} = (n-2)K_{ik} + Ric_{jj}\,. \tag{10.9}$$

Dalla (10.9), sommando su $k$, con $k \neq i, j$, si ottiene

$$(n-2)^2 K_{ij} + r - Ric_{ii} - Ric_{jj} = (n-2)Ric_{jj} + (n-2)Ric_{ii} - (n-2)K_{ij}$$

e quindi

$$(n-1)(n-2)K_{ij} = -r + (n-1)(Ric_{ii} + Ric_{jj}).$$

Di conseguenza,

$$R_{ijij} = K_{ij} = \frac{1}{n-2}(Ric_{ii} + Ric_{jj}) - \frac{r}{(n-1)(n-2)}\,.$$

e quindi $C_{ijij} = 0$ per ogni $i, j$. Siccome $C$ è un tensore di curvatura, la condizione $C_{ijij} = 0$ per ogni $i, j$ implica $C_{ijkh} = 0$ per ogni $i, j, k, h$ (cfr. Proposizione 8.17). □

Abbiamo osservato che lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, la sfera canonica $\mathbb{S}^n(k)$ di curvatura sezionale costante $k > 0$ e lo spazio iperbolico $H^n(-k)$ di curvatura sezionale costante $-k < 0$, sono esempi di spazi conformemente piatti e di Einstein. Vale anche il viceversa, nel senso che: una varietà riemanniana conformemente piatta e di Einstein ha curvatura sezionale costante (cfr. Appendice D). Inoltre, usando la teoria esposta nella suddetta appendice, non è difficile provare che le seguenti varietà riemanniane prodotto: $\mathbb{S}^{n-p}(k) \times H^p(-k)$, $p \geq 2$, $\mathbb{S}^{n-1}(k) \times \mathbb{R}$ e $H^{n-1}(-k) \times \mathbb{R}$ sono conformemente piatte. Si può vedere che tali spazi soddisfano anche la condizione $\nabla R = 0$, cioè sono anche localmente simmetrici. In effetti, ogni spazio conformemente piatto e localmente simmetrico è localmente isometrico a uno degli esempi precedenti. Più precisamente abbiamo il seguente risultato di Ryan (cfr. [99])

**Teorema 10.24.** *Sia $(M, g)$ una varietà riemanniana di dimensione $n \geq 3$, conformemente piatta e localmente simmetrica. Allora, il rivestimento riemanniano universale $(\tilde{M}, \tilde{g})$ è una delle seguenti varietà:*

$$\mathbb{R}^n,\ \ \mathbb{S}^n(k),\ \ H^n(-k),\ \ \mathbb{S}^{n-p}(k) \times H^p(-k),\ \ \mathbb{S}^{n-1}(k) \times \mathbb{R},\ \ H^{n-1}(-k) \times \mathbb{R}.$$

Si noti che per una varietà riemanniana conformemente piatta le condizioni $\nabla R = 0$ e $\nabla Ric = 0$ sono equivalenti.

## 10.5 Il Teorema di Gauss-Bonnet-Chern

**Il Teorema di Gauss-Bonnet in dimensione** 2

Topologia e curvatura sono due nozioni a priori molto distanti tra loro. Il Teorema di Gauss-Bonnet, il più elegante teorema di geometria differenziale globale, evidenzia un sorprendente legame tra le due nozioni. Iniziamo questa sezione con una breve presentazione di tale teorema nel caso delle superfici connesse compatte di $\mathbb{R}^3$ (per una dettagliata descrizione di questo teorema si rinvia a [30] e [78]).

**Teorema 10.25.** (di Gauss-Bonnet) *Sia $M$ una superficie (connessa) compatta di $\mathbb{R}^3$. Allora*

$$\int_M K\,d\sigma = 2\pi\chi(M),$$

*dove $\chi(M)$ denota la caratteristica di Eulero-Poincaré di $M$. In particolare, la curvatura totale $\int_M K\,d\sigma$ è un invariante topologico.*

*Dimostrazione.* (sunto) Ricordiamo che ogni superficie (connessa) compatta di $\mathbb{R}^3$ è orientabile. Inoltre, una 2-varietà connessa compatta orientabile è somma connessa della sfera $\mathbb{S}^2$ con superfici toriche $\mathbb{T}^2$. Siccome $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{T}^2$ sono superfici triangolabili, allora ogni 2-varietà connessa compatta orientabile $M$ è triangolabile. Più precisamente, fissata una orientazione su $M$, si può considerare una triangolazione $T = \{T_1, ..., T_f\}$ di $M$ nella quale i triangoli $T_i = (A_i, B_i, C_i)$ sono tutti orientati positivamente.

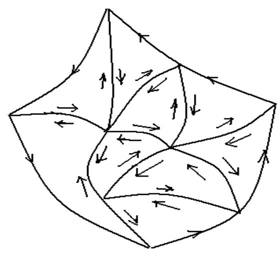

Figura 10.1: Una triangolazione di $M$.

La caratteristica di Eulero-Poincaré di $M$, la quale è un invariante topologico (e quindi non dipende dalla particolare triangolazione considerata) è data da

$$\chi(M) = v - l + f,$$

dove $v$(numero di vertici), $l$(numero di lati), ed $f$(numero di triangoli), sono riferiti alla triangolazione considerata. Ricordiamo ora la nozione di curvatura geodetica con segno. Sia $\gamma(s)$ una curva differenziabile parametrizzata a velocità unitaria. Poiché $M$ è orientabile esiste un campo unitario $\xi$ ortogonale alla superficie. Allora, lungo la curva $\gamma$, $\{E_1(s) = \dot\gamma(s), E_2(s) = \xi(s)\wedge\dot\gamma(s)\}$ è una base ortonormale positiva del piano tangente $T_{\gamma(s)}M$, dove $\wedge$ denota l'usuale prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Da $\|\dot\gamma(s)\| = 1$ segue che il vettore accelerazione (intrinseca) $\frac{D\dot\gamma}{\mathrm{d}s}$ è parallelo a $E_2(s)$. La curvatura geodetica (con segno) di $\gamma(s)$ è la funzione $k_g(s)$ definita da

$$\frac{D\dot\gamma}{\mathrm{d}s} = k_g(s)\ E_2(s).$$

L'estensione del Teorema 8.4 (elegantissimo di Gauss) al caso di una regione limitata da una curva chiusa semplice (non geodetica) regolare a tratti è dovuta a Bonnet. Sia $\mathcal{R}$ una regione (poligonale) di $M$ omeomorfa a un disco, il cui bordo $\partial\mathcal{R}$ è una curva $\gamma$ chiusa semplice regolare a tratti e orientata positivamente. Se $\gamma_i\,(i = 1, ..., k)$ sono i tratti regolari parametrizzati con l'ascissa curvilinea e $\vartheta^i(i = 1, ..., k)$ denotano le misure degli angoli interni nei corrispondenti vertici, allora la formula di Bonnet è la seguente

$$\int_{\mathcal{R}} K\mathrm{d}\sigma + \sum_{i=1}^{k}\int_{\gamma_i} k_g(s)\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{k}\vartheta^i + (2-k)\pi\,,$$

dove $k_g(s)$ è la curvatura geodetica della curva $\gamma_i$. In particolare, per un triangolo $T_i$ (della triangolazione $T$) risulta

$$\int_{T_i} K\mathrm{d}\sigma + \int_{\partial T_i} k_g(s)\mathrm{d}s = \widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i - \pi,$$

dove $k_g(s)$ è la curvatura geodetica della curva bordo di $T_i$ e $\widehat{A}_i$, $\widehat{B}_i$, $\widehat{C}_i$ sono le misure degli angoli interni del triangolo $T_i$. Poiché $M$ è una varietà priva di bordo, ogni lato della triangolazione $T$ è comune esattamente a due triangoli. Inoltre, tutti i triangoli di $T$ sono orientati positivamente, quindi triangoli adiacenti determinano orientazioni opposte sul lato in comune (cfr. Figura 10.1). Di conseguenza,

$$\sum_{i=1}^{f}\int_{\partial T_i} k_g(s)\mathrm{d}s = 0$$

e quindi:

$$\int_M K\mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{f}\int_{T_i} K\mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{f}(\widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i - \pi) = \sum_{i=1}^{f}(\widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i) - f\pi.$$

Siccome in ogni vertice confluisce un angolo giro, si ha

$$\int_M K\mathrm{d}\sigma = 2\pi v - f\pi = 2\pi v - 3\pi f + 2\pi f.$$

D'altronde, poiché il numero totale di lati della triangolazione è uguale a $3f$ e ogni lato è comune a due triangoli, si ha $3f = 2l$ e quindi

$$\int_M K\mathrm{d}\sigma = 2\pi v - 2\pi l + 2\pi f = 2\pi(v - l + f) = 2\pi\chi(M).$$

□

**Esempio 10.26.** Una triangolazione (geodetica) di $\mathbb{S}^2$ è data dalla Figura 10.2. Siccome $f = 8, l = 12, v = 6$, si ottiene $\chi(\mathbb{S}^2) = v - l + f = 6 - 12 + 8 = 2$.

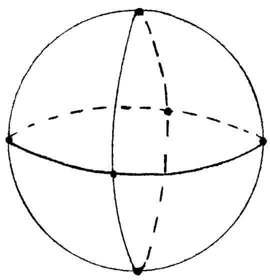

Figura 10.2: Una triangolazione di $\mathbb{S}^2$.

**Osservazione 10.27.** Una superficie connessa compatta orientabile $M$ è omeomorfa a una sfera con $p$-manici (detta anche ciambella con $p$-buchi o $p$-toro), $p$ è detto *genere della superficie.* Siccome $\chi(M) = 2 - 2p$, si vede che $\chi(M)$ determina la configurazione topologica di $M$. Di conseguenza, la curvatura totale determina la configurazione topologica di $M$. In dimensione $> 2$, la curvatura influenza ma non controlla la configurazione topologica della varietà.

**Corollario 10.28.** *Sia $M$ una superficie connessa compatta orientata. Allora,*

$$\int_M K\,d\sigma > 0 \Leftrightarrow M =_{top} \mathbb{S}^2; \quad \int_M K\,d\sigma = 0 \Leftrightarrow M =_{top} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1;$$

$$\int_M K\,d\sigma < 0 \Leftrightarrow M \text{ ha genere } p > 1.$$

Inoltre, se $M$ ha curvatura gaussiana costante $K$, il genere $p$ della superficie è dato da :

$$p = 1 - (K/4\pi)\mathrm{vol}(M).$$

Se $g$ è una metrica sulla sfera $\mathbb{S}^2$ con curvatura gaussiana $\leq 1$, allora

$$\mathrm{vol}(\mathbb{S}^2, g) \geq \mathrm{vol}(\mathbb{S}^2(1)) = 4\pi.$$

**Osservazione 10.29.** Più in generale, il Teorema di Gauss-Bonnet vale per una 2-varietà riemanniana (connessa) compatta. Il caso orientabile si prova come per le superficie di $\mathbb{R}^3$. Se $(M, g)$ è una 2-varietà riemanniana (connessa) compatta non orientabile, indichiamo con $\mathrm{d}\sigma$ la misura canonica indotta dalla metrica $g$. Applicando il Teorema di Gauss-Bonnet al rivestimento doppio orientato $p : \tilde{M} \to M$ con metrica $\tilde{g} = p^*g$, si ha $\int_{\tilde{M}} \tilde{K}\mathrm{d}\tilde{\sigma} = 2\pi\chi(\tilde{M}) = 4\pi\chi(M)$. Inoltre, se $\tilde{f} : \tilde{M} \to \mathbb{R}$, posto $f_1(x) := \tilde{f}(\tilde{x}_1) + \tilde{f}(\tilde{x}_2)$, dove $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ è la fibra in $x$, allora si ha (cfr. Proposizione III.1 di [7], p.15)

$$\int_{\tilde{M}} \tilde{f}\mathrm{d}\tilde{\sigma} = \int_M f_1 \mathrm{d}\sigma.$$

Prendendo come funzione $\tilde{f}$ la curvatura $\tilde{K}$ di $\tilde{M}$, allora $\tilde{K}(\tilde{x}_1) = \tilde{K}(\tilde{x}_2) = K(x)$ e quindi $\int_{\tilde{M}} \tilde{K}\mathrm{d}\tilde{\sigma} = 2\int_M K\mathrm{d}\sigma$. Di conseguenza,

$$\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\tilde{M}} \tilde{K}\mathrm{d}\tilde{\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_M K\mathrm{d}\sigma.$$

In particolare, siccome $\chi(M) = 2 - q$ dove $q$ è il genere di $M$, si ha

$$\int_M K\mathrm{d}\sigma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{M} =_{top} \mathbb{S}^2 \quad \Leftrightarrow \quad M =_{top} \mathbb{P}^2,\ q = 1;$$

$$\int_M K\mathrm{d}\sigma = 0 \Leftrightarrow \tilde{M} =_{top} \mathbb{T}^2 \Leftrightarrow M =_{top} \mathcal{K}\,(\text{bottiglia di Klein}),\ q = 2;$$

$$\int_M K\mathrm{d}\sigma < 0 \Leftrightarrow \tilde{M} \text{ ha genere } p > 1 \Leftrightarrow M \text{ ha genere } q > 2.$$

Inoltre, si ottengono facilmente le seguenti proprietà:

- se $M$ è una 2-varietà riemanniana (connessa) compatta omeomorfa alla sfera o al piano proiettivo, allora $K > 0$ in qualche punto;
- se $M$ è una 2-varietà riemanniana (connessa) compatta omeomorfa al toro o alla bottiglia di Klein, allora $K \equiv 0$ oppure esistono necessariamente punti dove $K > 0$ e punti dove $K < 0$;
- in tutti gli altri casi la curvatura $K < 0$ in qualche punto.

**Il Teorema di Gauss–Bonnet nelle dimensioni 4 e 6**

Abbiamo esaminato il Teorema di Gauss–Bonnet per varietà riemanniane compatte orientabili di dimensione 2. Questo importante teorema è stato generalizzato da S.S. Chern [25] anche per varietà riemanniane compatte orientabili di dimensione pari $n = 2m \geq 2$, in tal caso la formula che esprime la caratteristica di Eulero-Poincaré è notevolmente più complicata:

$$\chi(M) = \frac{1}{2^{3m}\pi^m m!} \int_M F(R)\, dv_g,$$

dove

$F(R) = \sum_{\sigma,\tau} sgn(\sigma) sgn(\tau) R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau(1)\tau(2)} \cdots R_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)\tau(2m-1)\tau(2m)}$,

$sgn(\sigma)$ denota il segno della permutazione $\sigma$ e le componenti del tensore di curvatura sono riferite a una base ortonormale positiva. Per $n = 2$ si ottiene il classico Teorema di Gauss-Bonnet.

In dimensione 4, si ha (cfr. anche [7], p. 82)

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M \left( \|R\|^2 - 4\,\|Ric\|^2 + r^2 \right) dv_g. \tag{10.10}$$

Ricordiamo che, per una varietà riemanniana di dimensione $n \geq 4$, le forme quadratiche $\|R\|^2$, $\|Ric\|^2$ e $r^2$ soddisfano (cfr. Appendice D):

$\|R\|^2 \geq (2r^2)/n(n-1)$, dove l'uguale vale se e solo se $M$ ha curvatura sezionale costante;

$\|Ric\|^2 \geq r^2/n$, dove l'uguale vale se e solo se $M$ è di Einsten;

$\|R\|^2 \geq (4\|Ric\|^2)/(n-2) - (2r^2)/(n-1)(n-2)$, dove l'uguale vale se e solo se $M$ è conformemente piatta.

Nel caso della dimensione 4, se $M$ è di Einstein cioè $\|Ric\|^2 = (1/4)r^2$, dalla (10.10) si ottiene $\chi(M) = \dfrac{1}{32\pi^2} \int_M \|R\|^2 \, dv_g \geq 0$ e quindi

$$\chi(M) \geq 0 \quad \text{e} \quad \chi(M) \geq \frac{r^2}{192\pi^2} vol(M,g),$$

dove l'uguaglianza, nel primo caso, vale se e solo se $M$ è piatta, e nel secondo caso, vale se e solo se $M$ è a curvatura sezionale costante. Sempre nel caso della dimensione 4, se $M$ è conformemente piatta, cioè $\|R\|^2 = 2\|Ric\|^2 - \frac{r^2}{3}$, siccome $\|Ric\|^2 \geq \frac{r^2}{4}$, dalla (10.10) si ha

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M \left( \frac{2r^2}{3} - 2\,\|Ric\|^2 \right) dv_g \leq \frac{1}{192\pi^2} \int_M r^2\, dv_g,$$

dove l'uguaglianaza vale se e solo se $M$ è a curvatura sezionale costante.

In dimensione 6 si ha (cfr. [29])

$$\chi(M) = \frac{1}{384\pi^3} \int_M \Big( r^3 + 3r\,\|R\|^2 - 12r\,\|Ric\|^2 \tag{10.11}$$
$$+ 16\check{Ric} + 24\alpha - 24\beta - 8\gamma + 4\delta \Big)\, dv_g,$$

dove

$$\check{Ric} = \sum Ric_{ij} Ric_{ih} Ric_{jh}, \quad \alpha = \sum Ric_{ij} Ric_{kh} R_{ikjh}, \quad \beta = \sum Ric_{ij} R_{ipqr} R_{jpqr},$$
$$\gamma = \sum R_{ikjh} R_{kphq} R_{piqj}, \quad \delta = \sum R_{ijkh} R_{khpq} R_{pqij}.$$

Se $M$ è di Einstein, la (10.11) diventa

$$\chi(M) = \frac{1}{384\pi^3} \int_M \Big( \frac{r^3}{9} - r \left\| R \right\|^2 - 8\gamma + 4\delta \Big) \, dv_g.$$

Nel caso di $M$ conformemente piatta, la (10.11) diventa (cfr. [86])

$$\chi(M) = \frac{1}{384\pi^3} \int_M \Big( \frac{21}{100} r^3 - \frac{27}{20} r \left\| Ric \right\|^2 + \frac{3}{2} \check{Ric} \Big) \, dv_g;$$

se in aggiunta la curvatura scalare $r$ è costante, si dimostra che

$$384\pi^3 \chi(M) = \frac{4}{25} r^3 \mathrm{vol}(M,g) - \frac{4}{5} r \int_M \left\| Ric \right\|^2 \, dv_g - \int_M \left\| \nabla R \right\|^2 \, dv_g. \tag{10.12}$$

Di conseguenza

$$384\pi^3 \chi(M) \leq \frac{4}{25} r^3 \mathrm{vol}(M,g) - \frac{4}{5} r \int_M \left\| Ric \right\|^2 \, dv_g,$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se $M$ è localmente simmetrica. Inoltre, usando la (10.12) si ottiene il seguente

**Teorema 10.30.** ([86]) *Sia $(M,g)$ una varietà riemanniana compatta orientabile conformemente piatta 6-dimensionale e con curvatura scalare $r$ costante.*

- *Se $r > 0$, allora*
$$14400 \, \pi^3 \chi(M) \leq r^3 \mathrm{vol}(M,g),$$
*dove l'uguaglianza vale se e solo se $M$ è a curvatura sezionale costante (positiva).*

- *Se $r = 0$, allora*
$$\chi(M) \leq 0,$$
*dove l'uguaglianza vale se e solo se $M$ è isometrica a una delle seguenti varietà:*

*(i) $\mathbb{R}^6/G$ (dove $G$ è un gruppo propriamente discontinuo di traslazioni dello spazio euclideo $\mathbb{R}^6$);*

*(j) $\mathbb{S}^3(k) \times H^3(-k)/G$ (dove $G$ è un gruppo propriamente discontinuo di isometrie di $\mathbb{S}^3(k) \times H^3(-k)$).*

- *Se $r < 0$, allora*

$$384\pi^3\chi(M) \leq \frac{151}{600}r^3\mathrm{vol}(M,g) - \frac{27}{20}r\int_M \|Ric\|^2\, dv_g,$$

*dove l'uguaglianza vale se e solo se $M$ è a curvatura sezionale costante (negativa).*

Esempi di varietà riemanniane compatte orientabili di dimensione 6, conformemente piatte e con curvatura scalare costante sono:

$$\begin{aligned}&M_1 = \mathbb{S}^5(k)\times\mathbb{R}/G_1,\ \ M_2 = H^5(-k)\times\mathbb{R}/G_2\ \ M_3 = \mathbb{S}^2(k)\times H^4(-k)/G_3,\\ &M_4 = \mathbb{S}^3(k)\times H^3(-k)/G_4,\ \ M_5 = \mathbb{S}^4(k)\times H^2(-k)/G_5,\\ &M_6(c)\ \text{(spazio a curvatura sezionale costante } c\text{)},\end{aligned}$$

dove $G_i$ è un gruppo propriamente discontinuo di isometrie del corrispondente spazio. Per tali spazi la formula (10.12) diventa

$$384\pi^3\chi(M) = \frac{4}{25}r^3\mathrm{vol}(M,g) - \frac{4}{5}r\,\|Ric\|^2\,\mathrm{vol}(M,g),$$

quindi facili calcoli mostrano che:

$$\chi(M_1) = \chi(M_2) = \chi(M_4) = 0, \quad \chi(M_3) = \frac{3k^3}{8\pi^3}\mathrm{vol}(M_3),$$

$$\chi(M_5) = -\frac{3k^3}{8\pi^3}\mathrm{vol}(M_5), \quad \chi(M_6) = \frac{15c^3}{8\pi^3}\mathrm{vol}(M_6).$$

Per varietà conformemente piatte senza l'ipotesi che la curvatura scalare sia costante, abbiamo il seguente teorema.

**Teorema 10.31.** ([44]) *Se $(M,g)$ è una varietà riemanniana compatta orientabile conformemente piatta con curvatura scalare $r \geq 0$ e di dimensione $n = 4$ o $n = 6$, allora $\chi(M) \leq 2$. Inoltre,*

$$\chi(M) = 2 \iff (M,g)\ \ \textit{è conforme a}\ \ (\mathbb{S}^n, g_0);$$
$$\chi(M) = 1 \iff (M,g)\ \ \textit{è conforme a}\ \ (\mathbb{P}^n, g_0).$$