

Capitolo 6

Connessioni lineari e connessione di Levi-Civita

Abbiamo visto che su una varietà differenziabile esiste un modo naturale di derivare una funzione rispetto a un vettore tangente, tuttavia non esiste un modo naturale di derivare campi di vettori in quanto ciò dipende dall'introduzione di un'ulteriore nozione: la “*connessione lineare*”, ovvero l'operazione di *derivata covariante*. D'altro canto spazi tangenti in punti distinti sono isomorfi (in quanto hanno stessa dimensione), ma l'isomorfismo non è canonico, per cui non è possibile definire la derivata di un campo di vettori con un rapporto incrementale. L'assegnazione di una connessione lineare (da cui il nome) permette di collegare i vari spazi tangenti mediante la conseguente nozione di trasporto parallelo. Nel caso di una varietà riemanniana esiste un modo naturale di differenziare, e quindi un parallelismo canonico, nel senso che esiste un'unica connessione lineare (simmetrica) compatibile con la metrica: la “*connessione di Levi-Civita*”. Storicamente il parallelismo fu introdotto da T. Levi-Civita nel 1917 e quindi prima della connessione lineare. L'idea usata da Levi-Civita è la seguente. Siano S una superficie regolare di \mathbb{R}^3 , $\sigma(t)$ una curva differenziabile di S e V_o un vettore tangente a S in un fissato punto $\sigma(t_o)$. Se S è un piano, il trasporto parallelo di V_o da $\sigma(t_o)$ a $\sigma(t_1)$ lungo σ non dipende dalla curva σ considerata. Se S non è un piano, si considera la famiglia di piani tangenti $\{\pi(t) = T_{\sigma(t)}S\}_t$ ad S lungo $\sigma(t)$. Questa famiglia di piani determina una superficie rigata sviluppabile Σ detta superficie involuppo. Σ ha le proprietà di essere localmente piatta e tangente ad S lungo σ (cioè $T_{\sigma(t)}\Sigma = T_{\sigma(t)}S$). Pertanto, il trasporto parallelo di V_o lungo σ in S coincide con il trasporto parallelo di V_o lungo σ in Σ . Poiché Σ è localmente piatta, il trasporto parallelo lungo σ in Σ si realizza in modo euclideo nell'immagine isometrica di Σ e poi si riporta su S . Il parallelismo di Levi-Civita stimolò poi le ricerche di É. Cartan il quale generalizzò tale nozione sviluppando la teoria degli spazi a connessione affine, proiettiva e conforme.

6.1 Connessioni lineari

La presentazione di connessione lineare che diamo è dovuta a J.L. Koszul.

Definizione 6.1. Una connessione lineare ∇ su una varietà differenziabile M è una applicazione

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

che soddisfa:

$$a) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$b) \quad \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$c) \quad \nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (\nabla_X f)Y,$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $f, g \in \mathcal{F}(M)$, dove $\nabla_X f := X(f)$.

L'operatore $\nabla_X : Y \mapsto \nabla_X Y$, si dice *derivata covariante rispetto a X*.

Attenzione: ∇ non è un tensore!

Se $M = \mathbb{R}^n$, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$, ∇^0 definita da

$$\nabla_X^0 Y = \sum_i X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x_i} = (X(Y^1), \dots, X(Y^n))$$

è una connessione lineare che viene detta *connessione euclidea*.

La definizione di connessione lineare si può estendere al caso più generale di un fibrato vettoriale E su M . Indichiamo con $\Gamma(E)$ lo spazio delle sezioni del fibrato E . Una connessione lineare su E è un'applicazione

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), (X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma,$$

che soddisfa:

$$a) \quad \nabla_{X+Y} \sigma = \nabla_X \sigma + \nabla_Y \sigma, \quad \nabla_{fX} \sigma = f\nabla_X \sigma,$$

$$b) \quad \nabla_X (\sigma + \sigma') = \nabla_X \sigma + \nabla_X \sigma',$$

$$c) \quad \nabla_X (f\sigma) = f\nabla_X \sigma + X(f)\sigma,$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, per ogni $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E)$ e per ogni $f \in \mathcal{F}(M)$.

Se E è il fibrato tangente TM , ritroviamo la precedente definizione in quanto $\Gamma(E) = \mathfrak{X}(M)$.

Nel seguito M denoterà sempre una varietà differenziabile munita di una connessione lineare ∇ .

Proposizione 6.2. Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni aperto U di M , $(\nabla_X Y)|_U$ dipende solo da $X|_U$ e $Y|_U$.

Dimostrazione. Proviamo che se $X, Y, X', Y' \in \mathfrak{X}(M)$ soddisfano $X|_U = X'$ e $Y|_U = Y'$, allora $(\nabla_{X'} Y')|_U = (\nabla_X Y)|_U$. Siano $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Intanto, proviamo che se $V = 0$ su U oppure $W = 0$ su U , allora $(\nabla_V W)|_U = 0$. Supponiamo $W = 0$ su U e proviamo che $(\nabla_V W)_p = 0$ per ogni $p \in U$. Fissato $p \in U$, consideriamo $f \in \mathcal{F}(M)$ tale che $f(p) = 1$ e $f|_{M \setminus U} = 0$. Allora $fW = 0$ su M e quindi, applicando la b) della Definizione 6.1, $\nabla_V fW = 0$ su M . Applicando poi la c), si ha

$$0 = (\nabla_V fW)_p = \{V(f)W + f\nabla_V W\}_p = (\nabla_V W)_p.$$

In modo analogo si procede quando $V = 0$ su U . Allora, considerando prima $V = X - X'$, $W = Y$ e poi $V = X'$, $W = Y - Y'$, si ottiene $(\nabla_{X'} Y')|_U = (\nabla_X Y)|_U$. \square

Corollario 6.3. ∇ induce una connessione lineare su ogni aperto A di M .

Dimostrazione. Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$ e sia $p \in A$. Applicando la Proposizione 1.28, esistono V, V' intorni aperti di p con $\bar{V} \subset V' \subset A$ ed esiste $f \in \mathcal{F}(M)$ tale che $f|_V = 1$ e $f|_{M \setminus V'} = 0$. Allora, $\tilde{X} = fX, \tilde{Y} = fY \in \mathfrak{X}(M)$, $\tilde{X}|_V = X|_V$, $\tilde{Y}|_V = Y|_V$, e quindi basta definire $(\nabla_X Y)_p := (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p$. Tale definizione è ben posta per la Proposizione 6.2. \square

Siano (x_1, \dots, x_n) coordinate locali definite in U . Poniamo $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Le n^3 funzioni $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F}(U)$ definite da:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

sono dette *coefficienti di Christoffel* della connessione lineare ∇ . Si noti che nel caso della connessione euclidea ∇^0 , i coefficienti di Christoffel sono nulli. Usando le proprietà a), b), c) di ∇ , se $X = \sum_i X^i \partial_i$ e $Y = \sum_j Y^j \partial_j$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left(\sum_j Y^j \partial_j \right) = \sum_j \left(X(Y^j) \partial_j + Y^j \nabla_X \partial_j \right) \\ &= \sum_j \left(X(Y^j) \partial_j \right) + \sum_{i,j} \left(X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j \right), \quad \text{ossia} \\ \nabla_X Y &= \sum_k \left(X(Y^k) + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Quindi, i coefficienti Γ_{ij}^k determinano univocamente ∇ sull'aperto coordinato U . Inoltre, per ogni fissato $p \in M$, assumendo U intorno coordinato di p , dall'equazione (6.1) segue che:

$$(\nabla_X Y)_p = \sum_k \left(X_p(Y^k) + \sum_{i,j} X^i(p) Y^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) (\partial_k)_p. \quad (6.2)$$

Pertanto, si ottiene la seguente

Proposizione 6.4. Per ogni $p \in M$ e per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $(\nabla_X Y)_p$ dipende solo da X_p e da Y in un intorno di p .

La Proposizione 6.4 giustifica la seguente definizione.

Definizione 6.5. Siano $V \in T_p M$ e $Y \in \mathfrak{X}(A)$, A aperto di M contenente p . Allora,

$$\nabla_V Y := (\nabla_X Y)_p,$$

dove $X \in \mathfrak{X}(U)$, $U \subset A$ intorno aperto di p , e soddisfa $X(p) = V$.

Di conseguenza, l'operatore

$$\nabla : T_p M \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow T_p M, (V, Y) \mapsto \nabla_V Y,$$

soddisfa le seguenti proprietà:

$$a) \quad \nabla_{\lambda V + \mu W} Y = \lambda \nabla_V Y + \mu \nabla_W Y,$$

$$b) \quad \nabla_V (Y + Z) = \nabla_V Y + \nabla_V Z,$$

$$c) \quad \nabla_V (fY) = f(p) \nabla_V Y + V(f) Y_p,$$

dove $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$, $V, W \in T_p M$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

La seguente proposizione migliora la Proposizione 6.4.

Proposizione 6.6. *Se $X_p \in T_p M$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora $\nabla_{X_p} Y$ dipende solo da X_p e da Y lungo una curva differenziabile $\gamma(t)$ con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$.*

Dimostrazione. Sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$. Posto $Y(t) = Y(\gamma(t))$ e quindi $Y^k(t) = Y^k(\gamma(t))$, l'enunciato segue dalla formula (6.2) tenendo conto che $X_p(Y^k) = \dot{\gamma}(0)(Y^k) = \frac{dY^k}{dt}(0)$. \square

Osservazione 6.7. Si noti che: ogni varietà differenziabile paracompatta M ammette una connessione lineare, in verità tale M ammette una metrica riemanniana e di conseguenza, come vedremo, ammette una connessione lineare.

Esercizio 6.8. Siano Γ_{ij}^k e $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ i coefficienti di una connessione lineare rispetto a due sistemi di coordinate locali (x_i) e (y_α) definiti entrambi su un aperto U . Osservato che $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} \right) \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$, verificare la seguente formula:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} + \sum_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k}.$$

Esercizio 6.9. Sia $\bar{\nabla}$ una connessione lineare su M . Si verifichi che l'insieme di tutte le connessioni lineari su M è dato da $\{\nabla = \bar{\nabla} + S \text{ con } S \in \mathfrak{X}^{1,2}(M)\}$.

6.2 Il tensore di torsione e l'operatore hessiano

Definizione 6.10. Una connessione lineare ∇ si dice *simmetrica* se per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Se ∇ è simmetrica, $\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = [\partial_i, \partial_j] = 0$ implica che $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. D'altronde, siccome $[X, Y] = \sum_k (X(Y^k) - Y(X^k)) \partial_k$, dalla (6.1) segue

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] + \sum_{i,j,k} X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k.$$

Quindi, vale la seguente

Proposizione 6.11. *Una connessione lineare ∇ è simmetrica se, e solo se, per ogni sistema di coordinate locali: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.*

Definizione 6.12. Il *tensore di torsione* associato a una connessione lineare ∇ è il tensore T di tipo $(1, 2)$ definito da:

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

T stima la non simmetria di ∇ .

Esercizio 6.13. Si verifichi che la connessione euclidea ∇^0 è simmetrica.

Esercizio 6.14. Si verifichi che se T è il tensore di torsione di una connessione lineare ∇ , allora $\nabla^1 = \nabla - \frac{1}{2}T$ è una connessione lineare simmetrica.

L'operatore derivata covariante $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ si estende in modo naturale allo spazio delle 1-forme $\Lambda^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$. Per ogni $\omega \in \Lambda^1(M)$ e per ogni $Y \in \mathfrak{X}(M)$, si pone

$$(\nabla_X \omega)(Y) := \nabla_X \omega(Y) - \omega(\nabla_X Y).$$

Si verifica facilmente che l'operatore

$$\nabla_X : \Lambda^1(M) \rightarrow \Lambda^1(M), \omega \mapsto \nabla_X \omega,$$

soddisfa

$$\nabla_X(\omega_1 + \omega_2) = \nabla_X \omega_1 + \nabla_X \omega_2, \quad \nabla_X(f\omega) = X(f)\omega + f\nabla_X \omega$$

per ogni $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(M)$ e per ogni $f \in \mathcal{F}(M)$. Si noti che per ogni $f \in \mathcal{F}(M)$, la 1-forma df si indica anche con ∇f e si pone

$$\nabla_X f := (\nabla f)(X) = X(f).$$

Possiamo quindi definire, per una funzione $f \in \mathcal{F}(M)$ e rispetto alla fissata connessione lineare ∇ , la derivata seconda $\nabla^2 f$:

$$\nabla_{X,Y}^2 f := (\nabla_X \nabla f)Y,$$

detta anche *hessiano di f* . L'operatore hessiano definisce quindi l'applicazione

$$\begin{aligned} \nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathcal{F}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_{X,Y}^2 f, \text{ dove} \\ \nabla_{X,Y}^2 f &= (\nabla_X \nabla f)Y = \nabla_X \nabla_Y f - (\nabla f)(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X \nabla_Y f - (\nabla_X Y)(f) = XY(f) - (\nabla_X Y)(f). \end{aligned}$$

Esercizio 6.15. Si verifichi che l'operatore hessiano $\nabla^2 f$ è un tensore (covariante di ordine 2).

Denotiamo con $(H_{ij}f)$ la matrice associata, rispetto alla base coordinata (∂_i) , al tensore hessiano $\nabla^2 f$, quindi

$$H_{ij}f = \nabla_{\partial_i, \partial_j}^2 f = \partial_i \partial_j f - (\nabla_{\partial_i} \partial_j)(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k f.$$

Per $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, la matrice hessiana $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, che è una matrice simmetrica, è esattamente la matrice associata all'operatore $D^2 f$ (hessiano di f rispetto alla connessione euclidea ∇^0) che in questo caso è chiaramente simmetrico. Nel caso di una varietà differenziabile M munita di una arbitraria connessione lineare ∇ , risulta

$$\begin{aligned}\nabla_{X,Y}^2 f - \nabla_{Y,X}^2 f &= \nabla_X \nabla_Y f - (\nabla_X Y)(f) - \nabla_Y \nabla_X f + (\nabla_Y X)(f) \\ &= [X, Y](f) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(f) \\ &= -(T(X, Y))(f).\end{aligned}$$

Pertanto, si ottiene la seguente caratterizzazione

Proposizione 6.16. *Una connessione lineare ∇ è simmetrica se, e solo se, l'operatore hessiano $\nabla^2 f$ è simmetrico per ogni $f \in \mathcal{F}(M)$.*

6.3 Derivata covariante e parallelismo

La nozione di parallelismo, introdotta da Levi-Civita (1917), traduce in termini geometrici l'operazione di derivazione covariante. Consideriamo una curva differenziabile $\gamma(t)$, $t \in I$, I intervallo di \mathbb{R} , di una varietà differenziabile M . Anche in questa sezione con ∂_i indicheremo i campi di vettori coordinati rispetto a un fissato sistema di coordinate locali.

Definizione 6.17. Un campo di vettori differenziabile lungo la curva $\gamma(t)$ è un'applicazione differenziabile $V : I \rightarrow TM$ tale che $\pi \circ V = \gamma$, cioè

$$\forall t \in I : V(t) \in T_{\gamma(t)}M.$$

Localmente:

$$V(t) = \sum_{i=1}^n V^i(t) \partial_i(t),$$

dove $V^i(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni differenziabili e $\partial_i(t) = (\partial_i)(\gamma(t))$. L'insieme di tutti i campi di vettori differenziabili lungo γ , che denotiamo con $\mathfrak{X}(\gamma)$, ha una struttura naturale di $\mathcal{F}(I) = C^\infty(I)$ -modulo rispetto alle seguenti operazioni:

$$(V + W)(t) = V(t) + W(t), \quad (fV)(t) = f(t)V(t),$$

dove $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ e $f \in \mathcal{F}(I)$. Chiaramente il campo tangente $\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Se $X \in \mathfrak{X}(A)$, A aperto di M contenente γ , allora $X(t) = X(\gamma(t)) \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Non vale il viceversa, nel senso che un campo di vettori $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ non può essere esteso, in generale, a un campo di vettori $V \in \mathfrak{X}(A)$. Ad esempio, un campo tangente $\dot{\gamma}(t)$, con $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ e $\dot{\gamma}(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_2)$, non si può estendere. Tuttavia, se $\gamma(t)$ è una curva con $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$, allora γ in un intorno di $p_0 = \gamma(t_0)$ è una curva imbedded in M , e in questo caso un campo di vettori $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ è la restrizione di un campo vettoriale definito in un intorno U di p_0 in M (cfr. Osservazione 2.52).

Teorema 6.18. *Sia M una varietà differenziabile munita di una connessione lineare ∇ . Allora esiste un unico endomorfismo (detto derivata covariante lungo curve)*

$$\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$$

che soddisfa le ulteriori proprietà:

$$a) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt} \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma) \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}(I);$$

b) se $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ è indotto da $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(A)$, A aperto di M contenente γ , cioè $V(t) = \tilde{V}(\gamma(t))$, allora

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{V}.$$

Dimostrazione. Sia $\frac{D}{dt}$ un endomorfismo di $\mathfrak{X}(\gamma)$ che verifica le proprietà a), b). Sia U un intorno coordinato con $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$. Consideriamo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $V(t) = \sum_j V^j(t) \partial_j(t)$, allora

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{D}{dt} (V^j(t) \partial_j(t)) = \sum_j \left(\frac{dV^j}{dt} \partial_j(t) + V^j \frac{D \partial_j}{dt} \right).$$

Quindi,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \left(\frac{dV^j}{dt} \partial_j(t) + V^j(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \partial_j \right) \quad (6.3)$$

oppure, equivalentemente,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} V^j \Gamma_{ij}^k \right) (t) \partial_k(t). \quad (6.4)$$

Se (y_α) è un altro sistema di coordinate locali definito in U , posto $V(t) = \sum_\alpha V^\alpha(t) \partial_\alpha(t)$, siccome $V^k(t) = \sum_\alpha V^\alpha(t) \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha}(t)$, si ha

$$\frac{dV^k}{dt} = \sum_\alpha \frac{dV^\alpha}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha}(t) + \sum_{\alpha,\beta} V^\alpha(t) \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} \frac{dy_\beta}{dt}. \quad (6.5)$$

Inoltre, vale (cfr. Esercizio 6.8)

$$\sum_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x_k}{\partial y_\gamma} = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\alpha \partial y_\beta},$$

dove $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ sono i coefficienti di ∇ rispetto al nuovo sistema di coordinate locali (y_α) . Usando questa formula e la (6.5), partendo dalla (6.4) si ottiene

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} V^j \right) (t) \partial_k(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,\gamma} \left(\frac{dV^\alpha}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} + \sum_{\alpha,\beta} V^\alpha \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} \frac{dy_\beta}{dt} \right) \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \partial_\gamma(t) \\
&\quad + \sum_{k,\gamma} \left(\sum_{i,j,\alpha} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} V^\alpha \frac{\partial x_j}{\partial y_\alpha} \right) \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \partial_\gamma(t) \\
&= \sum_{k,\gamma,\alpha} \frac{dV^\alpha}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \partial_\gamma(t) \\
&\quad + \sum_{i,j,k,\alpha,\beta,\gamma} V^\alpha \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} \frac{dy_\beta}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{dy_\beta}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial y_\alpha} \right) \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \partial_\gamma(t) \\
&= \sum_\gamma \left(\frac{dV^\gamma}{dt} + \sum_{i,j,k,\alpha,\beta} V^\alpha \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial x_j}{\partial y_\alpha} \right) \frac{dy_\beta}{dt} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \right) \partial_\gamma(t) \\
&= \sum_\alpha \frac{dV^\alpha}{dt} \partial_\alpha(t) + \sum_{k,\alpha,\beta,\gamma,\theta} V^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\theta \frac{\partial x_k}{\partial y_\theta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \frac{dy_\beta}{dt} \partial_\gamma(t) \\
&= \sum_\alpha \frac{dV^\alpha}{dt} \partial_\alpha(t) + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \frac{dy_\beta}{dt} V^\alpha \partial_\gamma(t) \\
&= \sum_\gamma \left(\frac{dV^\gamma}{dt} + \sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \frac{dy_\beta}{dt} V^\alpha \right) \partial_\gamma(t).
\end{aligned}$$

Pertanto, abbiamo

$$\left(\frac{DV}{dt} \right)_{(x_i)} = \left(\frac{DV}{dt} \right)_{(y_\alpha)}. \quad (6.6)$$

La (6.4) e la (6.6) ci dicono che l'operatore $\frac{D}{dt}$ è univocamente determinato dai coefficienti della connessione lineare ∇ . Proviamo ora l'esistenza. Consideriamo prima il caso in cui γ ha sostegno $\gamma(I) \subset U$, U intorno coordinato. Definiamo $\frac{D}{dt} : V \mapsto \frac{DV}{dt}$ mediante la (6.4) (che non dipende dalle coordinate locali scelte). $\frac{D}{dt}$ è chiaramente un endomorfismo di $\mathfrak{X}(\gamma)$ che verifica la proprietà *a*). Verifichiamo ora la *b*) per $V(t) = \tilde{V}(\gamma(t))$ con $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(A)$. Usando la (6.3), si ha

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\tilde{V}^i}{dt} \partial_i(t) + \tilde{V}^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \partial_i \right).$$

Siccome $\tilde{V}^i(t) = \tilde{V}^i(\gamma(t))$ implica che $\frac{d\tilde{V}^i}{dt} = \dot{\gamma}(t)(\tilde{V}^i)$, si ottiene

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \left(\dot{\gamma}(t)(\tilde{V}^i) \partial_i(t) + \tilde{V}^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \partial_i \right) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{V}.$$

Supponiamo ora che γ abbia sostegno $\gamma(I)$ non contenuto in un singolo intorno coordinato. Fissato $t_0 \in I$, per ogni $t \in I$, $t > t_0$, possiamo ricoprire

$\gamma[t_0, t]$ con un numero finito di intorni coordinati e definire $\frac{DV}{dt}$ in ogni intorno coordinato. La (6.6) assicura che le varie determinazioni coincidono nei domini coordinati con intersezione non vuota. Analogamente per $t < t_0$. Quindi, $\frac{DV}{dt}$ è definito per ogni $t \in I$. \square

Si noti che l'operatore $\frac{D}{dt}$, per come definito, ha carattere locale.

Definizione 6.19. Un campo di vettori $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ si dice *parallelo* lungo γ se

$$\frac{DV}{dt} = 0 \quad \forall t \in I.$$

Poiché l'operatore $\frac{D}{dt}$ ha carattere locale, anche la nozione di campo di vettori parallelo ha carattere locale.

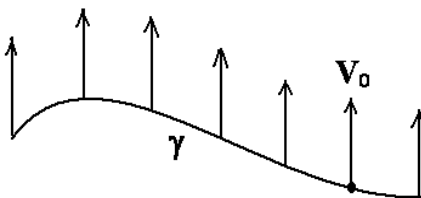


Figura 6.1: Trasporto parallelo del vettore V_0 lungo γ .

Nel seguito, M denoterà sempre una varietà differenziabile munita di una connessione lineare ∇ con associato operatore $\frac{D}{dt}$, dove $\gamma(t)$ (con $t \in I$, I intervallo di \mathbb{R}) è una curva differenziabile di M .

Osservazione 6.20. Dato $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$, consideriamo un cambiamento regolare di parametro: $t = t(s)$, $\frac{dt}{ds} \neq 0$. Posto $V(s) = V(t(s))$, dalla definizione di $\frac{DV}{dt}$ segue che

$$\frac{DV}{ds} = \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt} \frac{dt}{ds} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dt}{ds} V^j \right) (\partial_k)_{\gamma(t)} = \frac{dt}{ds} \frac{DV}{dt}.$$

Dunque, il parallelismo è invariante per cambiamenti regolari di parametro.

Esempio 6.21. L'operatore $\frac{D}{dt}$ associato alla connessione euclidea ∇^0 di \mathbb{R}^n è l'usuale operatore di derivazione $\frac{d}{dt}$. Infatti, siccome ∇^0 ha coefficienti di Christoffel nulli, dalla (6.4) si ha:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \frac{dV^k}{dt} (\partial_k)_{\gamma(t)},$$

equivalentemente si usa scrivere

$$\frac{DV}{dt} = \frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV^1}{dt}, \dots, \frac{dV^n}{dt} \right).$$

Quindi, in \mathbb{R}^n , un campo di vettori $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ è parallelo (rispetto a ∇^0), cioè $(dV/dt) = 0$, se e solo se $V(t) = \text{cost.}$, ossia $V(t) = \sum_i V^i(t) (\partial_i)_{\gamma(t)}$ con $V^i(t) = a^i$ funzioni costanti. Dato $V_0 = \sum_i a^i (\partial_i)_{\gamma(t_0)}$, il campo di vettori $V(t) = \sum_i a^i (\partial_i)_{\gamma(t)}$ è l'unico campo vettoriale parallelo che soddisfa $V(t_0) = V_0$ per ogni curva γ .

Il seguente lemma, che è un teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali ordinarie, è utile per l'esistenza di campi paralleli su una varietà differenziabile munita di un'arbitraria connessione lineare.

Lemma 6.22. *Siano $A_j^k : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni differenziabili, $k, j = 1, \dots, n$, I un intervallo aperto di \mathbb{R} , $t_0 \in I$. Allora, per ogni fissato $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$, il sistema lineare di equazioni differenziali*

$$\frac{dV^k}{dt} = \sum_j A_j^k(t) V^j \quad k = 1, \dots, n,$$

ammette un'unica soluzione $(V^1(t), \dots, V^n(t))$, definita per ogni $t \in I$, tale che $V^i(t_0) = v^i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Teorema 6.23. (di esistenza e unicità di campi paralleli) *Per ogni fissato $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, esiste un unico campo di vettori $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ parallelo lungo γ tale che $V(t_0) = V_0$.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui la curva ha sostegno $\gamma(I) \subset U$ (intorno coordinato). Poniamo $V_0 = \sum_i V_0^i \partial_i(t_0)$ e $V(t) = \sum_i V^i(t) \partial_i(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Allora, applicando la (6.4), il campo di vettori $V(t)$ è parallelo lungo γ se, e solo se,

$$\frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} V^j = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (6.7)$$

Tale sistema si può scrivere nella forma

$$dV^k/dt = \sum_j A_j^k(t) V^j, \text{ dove } A_j^k(t) = - \sum_i \Gamma_{ij}^k (dx_i/dt), \quad k = 1, \dots, n.$$

Il Lemma 6.22 ci dice che esiste un'unica soluzione $(V^1(t), \dots, V^n(t))$, definita per ogni $t \in I$, soddisfacente le condizioni iniziali $V^i(t_0) = V_0^i$. Tale soluzione definisce il campo parallelo $V(t)$ con $V(t_0) = V_0$. Supponiamo ora che γ abbia sostegno $\gamma(I)$ non contenuto in un singolo intorno coordinato. Fissato $t_0 \in I$, per ogni $t \in I$, $t > t_0$, possiamo ricoprire $\gamma[t_0, t]$ con un numero finito di intorni coordinati e determinare $V(t)$ lungo i tratti di curva contenuti in ognuno di questi intorni coordinati. L'unicità di $V(t)$ assicura che le varie determinazioni di $V(t)$ coincidono nei domini coordinati con intersezione non vuota. Analogamente per $t < t_0$. Quindi $V(t)$ è determinato per ogni $t \in I$. \square

Lo Spostamento parallelo.

Consideriamo l'applicazione

$$\tau_{t_0}^{t_1}(\gamma) : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M, \quad V_0 \mapsto V(t_1),$$

dove $V(t_1)$ è ottenuto, per $t = t_1$, dal campo $V(t)$ parallelo lungo γ con $V(t_0) = V_0$. Tale applicazione è detta *spostamento parallelo lungo γ* . Dalla linearità del sistema (6.7) segue che $\tau_{t_0}^{t_1}(\gamma)$ è un'applicazione lineare. Inoltre, è un isomorfismo con isomorfismo inverso dato da $\tau_{t_0}^{t_1}(\gamma^{-1})$, cioè dallo spostamento parallelo lungo la curva $\gamma^{-1}(t) = \gamma(t_0 + t_1 - t)$, $t \in [t_0, t_1]$; in tal caso il campo W parallelo lungo $\gamma^{-1}(t)$, con $W(t_0) = V(t_1)$, è $W(t) = V(t_0 + t_1 - t)$. Nel seguito con $\tau_t(\gamma)$ denoteremo lo spostamento parallelo lungo γ a partire da un fissato punto $\gamma(t_0)$. Se γ è una curva differenziabile a tratti, lo spostamento parallelo lungo γ si può definire come composizione degli spostamenti paralleli lungo i tratti differenziabili assumendo come vettore iniziale di un tratto il vettore finale del tratto precedente. Il campo di vettori lungo γ così ottenuto è differenziabile a tratti.

Esempio 6.24. Nel caso di (\mathbb{R}^n, ∇^0) , un campo di vettori è parallelo se, e solo se, è costante. Quindi, lo spostamento parallelo è l'usuale traslazione (che non dipende dalla curva). Inoltre, considerata una curva differenziabile

$\gamma(t)$ di \mathbb{R}^n e un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, abbiamo $\left(\frac{DV}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t_0}$. Più precisamente, abbiamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{DV}{dt}\right)_{t_0} &= \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt}\right)_{t_0} (\partial_k)_{\gamma(t_0)} = \sum_k \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V^k(t) - V^k(t_0)}{t - t_0} (\partial_k)_{\gamma(t_0)} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_t^{-1}(V(t)) - V(t_0)}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Vogliamo ora trovare una formula per (M, ∇) analoga a quella trovata nell'Esempio 6.24. Sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile e sia $\tau_t(\gamma)$ lo spostamento parallelo lungo γ da $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t)$. Sia $\{e_i\}$ una base di $T_{\gamma(t_0)}M$. Poiché $\tau_t(\gamma)$ è un isomorfismo, $\{e_i(t) = \tau_t(\gamma)(e_i)\}$ è una base di $T_{\gamma(t)}M$. $\{e_i(t)\}$ è detto *riferimento mobile* lungo $\gamma(t)$. Sia $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, allora $V(t) = \sum_i V^i(t)e_i(t)$ e, siccome $\frac{De_i}{dt}(t) = 0$, si ha

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt} e_i(t) + V^i \frac{De_i}{dt}(t) \right) = \sum_i \frac{dV^i}{dt} e_i(t).$$

Quindi, per tale $V(t)$, vale la seguente proprietà:

$$V \text{ è parallelo lungo } \gamma \Leftrightarrow V^i(t) = \text{cost.} \quad \forall i.$$

Proposizione 6.25. Per ogni $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$:

$$\left(\frac{DV}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_t^{-1}(V(t)) - V(t_0)}{t - t_0}.$$

Dimostrazione. Sia $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $V(t) = \sum_i V^i(t)e_i(t)$. Allora,

$$\tau_t \left(\sum_i V^i(t)e_i(t_0) \right) = \sum_i V^i(t)\tau_t(e_i(t_0)) = \sum_i V^i(t)e_i(t) = V(t),$$

cioè

$$\tau_t^{-1}(V(t)) = \sum_i V^i(t)e_i(t_0).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \left(\frac{DV}{dt} \right)_{t_0} &= \left(\sum_i \frac{dV^i}{dt} e_i(t) \right)_{t_0} = \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt} \right)_{t_0} e_i(t_0) \\ &= \sum_i \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V^i(t) - V^i(t_0)}{t - t_0} e_i(t_0) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sum_i V^i(t)e_i(t_0) - \sum_i V^i(t_0)e_i(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_t^{-1}(V(t)) - V(t_0)}{t - t_0}. \end{aligned}$$

□

Corollario 6.26. *Una connessione lineare è completamente determinata dal suo spostamento parallelo.*

Dimostrazione. Verifichiamo che per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $p \in M$, il vettore $(\nabla_X Y)_p$ è completamente determinato dallo spostamento parallelo. Sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$, allora

$$(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y = \nabla_{\dot{\gamma}(0)} Y = \left(\frac{DY}{dt} \right)_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^{-1}(Y(t)) - Y(0)}{t}.$$

□

Quindi, le nozioni di parallelismo e di derivata covariante sono equivalenti. Attualmente, per ragioni pratiche, si introduce prima la derivata covariante e poi lo spostamento parallelo, storicamente il parallelismo è stato introdotto prima della derivata covariante.

Definizione 6.27. Un campo di vettori $Y \in \mathfrak{X}(M)$ è detto *parallelo*, o *invariante per parallelismo*, se $Y(t) = Y(\gamma(t))$ è trasportato per parallelismo, cioè $\frac{DY}{dt} = 0$, per ogni curva differenziabile $\gamma(t)$.

Proposizione 6.28. *Un campo di vettori $Y \in \mathfrak{X}(M)$ è parallelo se e solo se il tensore, di tipo $(1, 1)$, $\nabla Y : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $X \mapsto \nabla_X Y$, è nullo.*

Dimostrazione. Sia Y invariante per parallelismo. Allora, per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $p \in M$, si ha

$$(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y = \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} Y = \left(\frac{DY}{dt} \right)_{t_0} = 0.$$

Quindi, $\nabla Y = 0$. Viceversa, sia $\nabla Y = 0$. Allora, per ogni curva differenziabile $\gamma(t)$ e per ogni fissato t_0 , detto X un campo di vettori con $X_p = \dot{\gamma}(t_0)$, si ha

$$\left(\frac{DY}{dt}\right)_{t_0} = \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} Y = \nabla_{X_p} Y = (\nabla_X Y)_p = 0.$$

□

6.4 Curve geodetiche

Le geodetiche rivestono un'importanza fondamentale in relatività generale. Una delle intuizioni di Einstein è che lo spazio si incurvi nelle vicinanze dei corpi celesti. Di conseguenza, un raggio di luce che passi vicino al sole, si muoverà lungo una curva geodetica sensibilmente diversa da una retta. La deviazione dei raggi luminosi osservata durante le eclissi di sole, è una delle conferme sperimentali della relatività generale.

Definizione 6.29. Una curva differenziabile $\gamma : I \rightarrow M$ è detta curva *geodetica* se il suo campo tangente $V = \dot{\gamma}(t)$ è parallelo lungo γ , cioè se per ogni $t \in I$:

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0.$$

Teorema 6.30 (di esistenza e unicità delle geodetiche). *Per ogni $p \in M$ e per ogni $V_0 \in T_p M$, esiste un $\epsilon > 0$ ed esiste un'unica geodetica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V_0$.*

Dimostrazione. Siano (x_i) coordinate locali definite in un intorno U di p . Sia $\gamma(t)$ un curva con sostegno in U , $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Dalla 6.4 segue che: $\gamma(t)$ è una geodetica, cioè $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$, se e solo se

$$\sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \partial_k(t) = 0.$$

Quindi, $\gamma(t)$ è una geodetica con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V_0$ se, e solo se, è soddisfatto il seguente sistema di equazioni differenziali del secondo ordine:

$$d^2 x_k / dt^2 + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k (dx_i / dt)(dx_j / dt) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

con le $2n$ condizioni iniziali $x_i(0) = x_i(p)$, $\dot{x}_i(0) = V_0^i$, $i = 1, \dots, n$. Dalla teoria delle equazioni differenziali, segue che esiste un $\epsilon > 0$ ed un'unica n -pla $(x_1(t), \dots, x_n(t))$, $-\epsilon < t < \epsilon$, soluzione del precedente sistema e soddisfacente le $2n$ -condizioni iniziali. Tale soluzione definisce la curva geodetica cercata. □

Se γ e σ sono due curve geodetiche definite in un intervallo aperto I , $0 \in I$, con $\gamma(0) = \sigma(0)$ e $\dot{\gamma}(0) = \dot{\sigma}(0)$, per il Teorema 6.30, tali curve coincidono

in un intorno di 0. Sia $] - a, a[\subset I$ tale che $\gamma(t) = \sigma(t)$ per ogni $t \in] - a, a[$. Per continuità si ha $\gamma(a) = \sigma(a)$ e $\dot{\gamma}(a) = \dot{\sigma}(a)$. Quindi, applicando il Teorema 6.30, si ha che γ e σ coincidono anche su un intorno destro di a . Analogamente su un intorno sinistro di $-a$. Così procedendo si ha che $\gamma(t) = \sigma(t)$ per ogni $t \in I$. Di conseguenza, si ha l'unicità anche della geodetica massimale $\gamma : I \rightarrow M$.

Esempio 6.31. Abbiamo visto che l'operatore $\frac{D}{dt}$ associato alla connessione euclidea ∇^0 di \mathbb{R}^n è l'usuale operatore di derivazione $\frac{dV}{dt}$, quindi un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ è parallelo (rispetto a ∇^0) se, e solo se, $V(t) = \text{cost.}$ Di conseguenza, la curva $\gamma(t)$ è una curva geodetica se, e solo se, γ è una retta parametrizzata da $\gamma(t) = tv + p$.

Esercizio 6.32. La nozione di curva geodetica dipende oltre che dalla sua "forma" anche dalla sua parametrizzazione. Se γ è una geodetica (come insieme di punti), un parametro t per cui $\gamma(t)$ risulti geodetica si dice *parametro ammissibile*. Assumiamo t parametro ammissibile e sia $t = t(s)$, $dt/ds \neq 0$, un cambiamento di parametro. Posto $\gamma(s) = \gamma(t(s))$, si verifichi che

$$\gamma(s) \text{ è geodetica se, e solo se, } t = as + b, a \neq 0.$$

6.5 La connessione di Levi-Civita

Abbiamo già osservato che la connessione euclidea ∇^0 di \mathbb{R}^n è simmetrica, ora notiamo che, come si può verificare facilmente, è compatibile con la metrica euclidea g_0 , ossia:

$$\nabla_Z^0 g_0(X, Y) := Z(g_0(X, Y)) = g_0(\nabla_Z^0 X, Y) + g_0(X, \nabla_Z^0 Y).$$

Inoltre, notiamo che la traslazione, che è lo spostamento parallelo definito da ∇^0 , è un'isometria dello spazio euclideo. Scopo di questa sezione è vedere che anche per un'arbitraria varietà riemanniana esiste una particolare connessione lineare con queste stesse proprietà di ∇^0 .

Definizione 6.33. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Una connessione lineare ∇ su M si dice *compatibile* con la metrica g se soddisfa la seguente proprietà: $(\nabla_Z g)(X, Y) = 0$, ossia

$$\nabla_Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

dove $\nabla_Z g(X, Y) := Z(g(X, Y))$.

Si noti che la precedente proprietà è equivalente alla seguente:

$$Z_p g(X, Y) = g_p(\nabla_{Z_p} X, Y_p) + g_p(X_p, \nabla_{Z_p} Y) \quad \forall p \in M \text{ e } \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Il seguente teorema interpreta geometricamente la precedente definizione.

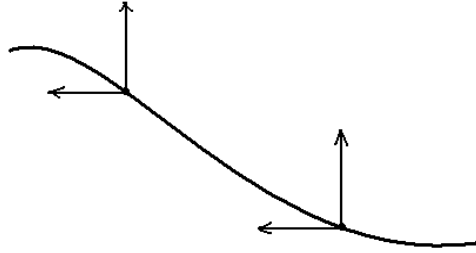


Figura 6.2: Il trasporto parallelo è un'isometria.

Teorema 6.34. Siano (M, g) una varietà riemanniana, ∇ una connessione lineare su M e $\gamma(t)$ una curva differenziabile di M . Allora le seguenti proprietà sono equivalenti.

(a) Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$, campi vettoriali paralleli lungo $\gamma(t)$, il prodotto scalare $g(X(t), Y(t)) = \text{cost.}$, ossia τ_t (lo spostamento parallelo lungo γ) è un'isometria:

$$g_{\gamma(t)}(\tau_t X(t_0), \tau_t Y(t_0)) = g_{\gamma(t_0)}(X(t_0), Y(t_0)).$$

(b) Per ogni $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$, si ha:

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(V(t), W(t)) = g_{\gamma(t)}\left(\frac{DV}{dt}, W(t)\right) + g_{\gamma(t)}\left(V(t), \frac{DW}{dt}\right).$$

(c) ∇ è compatibile con g .

Dimostrazione. “(a) \Rightarrow (b)”

Siano $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ e $\{e_i\}$ una base ortonormale di $T_{\gamma(t_0)}M$. Poiché τ_t è un'isometria, $\{e_i(t) = \tau_t(e_i)\}$ è una base ortonormale di $T_{\gamma(t)}M$. Allora, posto $V(t) = \sum_i V^i(t)e_i(t)$ e $W(t) = \sum_i W^i(t)e_i(t)$, si ha $g(V(t), W(t)) = \sum_i V^i(t)W^i(t)$ e quindi

$$\frac{d}{dt} g(V(t), W(t)) = \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt} W^i(t) + V^i(t) \frac{dW^i}{dt} \right).$$

D'altronde $\frac{DV}{dt} = \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt} e_i(t) + V^i(t) \frac{De_i(t)}{dt} \right) = \sum_i \frac{dV^i}{dt} e_i(t)$, e quindi

$$\frac{d}{dt} g(V(t), W(t)) = g\left(\frac{DV}{dt}, W(t)\right) + g\left(V(t), \frac{DW}{dt}\right).$$

“(b) \Rightarrow (a)”

Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ e paralleli lungo γ . Dalla (b), essendo X, Y paralleli,

segue:

$$\frac{d}{dt}g(X(t), Y(t)) = g\left(\frac{DX}{dt}, Y(t)\right) + g\left(X(t), \frac{DY}{dt}\right) = 0 \quad \forall t,$$

pertanto $g(X(t), Y(t)) = \text{cost.}$

“(b) \Rightarrow (c)”

Proviamo che per ogni $p \in M$ e per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$Z_p g(X, Y) = g_p(\nabla_{Z_p} X, Y_p) + g_p(X_p, \nabla_{Z_p} Y).$$

Fissato $p \in M$, sia σ una curva differenziabile di M con $\sigma(0) = p$ e $\dot{\sigma}(0) = Z_p$. Allora, applicando la (b), si ha

$$\begin{aligned} Z_p g(X, Y) &= \dot{\sigma}(0)g(X, Y) = \left\{ \frac{d}{dt}g(X(t), Y(t)) \right\}_{t=0} \\ &= g_p\left(\frac{DX}{dt}(0), Y(0)\right) + g_p\left(X(0), \frac{DY}{dt}(0)\right) \\ &= g_p(\nabla_{\dot{\sigma}(0)} X, Y(0)) + g_p(X(0), \nabla_{\dot{\sigma}(0)} Y) \\ &= g_p(\nabla_{Z_p} X, Y_p) + g_p(X_p, \nabla_{Z_p} Y). \end{aligned}$$

“(c) \Rightarrow (b)”

La (b) esprime l'uguaglianza tra due funzioni definite nel dominio di γ , quindi basta provare che esse coincidono su un intorno di un fissato t_0 . Sia U un intorno coordinato del punto $\gamma(t_0)$. Consideriamo una base ortonormale locale $\{u_i\}$ di campi vettoriali con $u_i \in \mathfrak{X}(U)$. Per ogni $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$, posto $V(t) = \sum_i V^i(t)u_i(t)$ e $W(t) = \sum_j W^j(t)u_j(t)$, si ha

$$g(V(t), W(t)) = \sum_i V^i(t)W^i(t),$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}g(V(t), W(t)) = \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt}W^i(t) + V^i(t)\frac{dW^i}{dt} \right).$$

Poiché gli $u_i(t)$ sono indotti dai campi di vettori definiti su U , si ha:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt}u_i(t) + V^i(t)\frac{Du_i}{dt} \right) = \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt}u_i(t) + V^i(t)\nabla_{\dot{\gamma}(t)}u_i \right)$$

e

$$\frac{DW}{dt} = \sum_i \left(\frac{dW^i}{dt}u_i(t) + W^i(t)\nabla_{\dot{\gamma}(t)}u_i \right).$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}
& g\left(\frac{DV}{dt}, W(t)\right) + g\left(V(t), \frac{DW}{dt}\right) \\
&= \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt} W^i(t) + V^i(t) \frac{dW^i}{dt}\right) \\
&\quad + \sum_{ij} V^i(t) W^j(t) \left(g(\nabla_{\dot{\gamma}(t)} u_i, u_j) + g(u_i, \nabla_{\dot{\gamma}(t)} u_j)\right) \\
&= \frac{d}{dt} g(V(t), W(t)) + \sum_{ij} V^i(t) W^j(t) \dot{\gamma}(t) (g(u_i, u_j)) \\
&= \frac{d}{dt} g(V(t), W(t)).
\end{aligned}$$

□

Definizione 6.35. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Una connessione lineare ∇ su M si dice *riemanniana* o *di Levi-Civita* se soddisfa le seguenti proprietà:

- 1) ∇ è simmetrica, cioè $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
- 2) ∇ è compatibile con la metrica g .

Teorema 6.36. Una varietà riemanniana (M, g) ammette un'unica connessione di Levi-Civita. Inoltre, tale connessione è determinata dalla (6.8).

Dimostrazione. Unicità. Sia ∇ una connessione di Levi-Civita. Usando la simmetria e la compatibilità con g , si ha:

$$\begin{aligned}
Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\
&= g([X, Y] + \nabla_Y X, Z) + g(Y, [X, Z] + \nabla_Z X), \\
Yg(X, Z) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) \\
&= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, [Y, Z] + \nabla_Z Y), \\
-Zg(X, Y) &= -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y),
\end{aligned}$$

e quindi sommando:

$$\begin{aligned}
g(\nabla_Y X, Z) &= \frac{1}{2} \left(Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \right. \\
&\quad \left. - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [X, Y]) \right).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

La (6.8), nota in letteratura anche con il nome di *formula di Koszul*, mostra che ∇ è univocamente determinata da g tenendo conto che la stessa metrica g è definita positiva e quindi non degenera.

Esistenza. Basta definire ∇ con la formula di Koszul e verificare che è una connessione lineare, simmetrica e compatibile con g . □

Poiché ogni varietà differenziabile paracompatta ammette una metrica riemanniana, dal teorema precedente segue il seguente corollario.

Corollario 6.37. *Ogni varietà differenziabile paracompatta ammette una connessione lineare.*

Osservazione 6.38. Esaminando la dimostrazione del Teorema 6.34 e quella del Teorema 6.36 di esistenza e unicità della connessione di Levi-Civita, si può vedere che tali teoremi valgono più in generale per una varietà semi-riemanniana (cfr. anche [79], p.61, 65-67).

Esempio 6.39. Abbiamo già osservato che la connessione euclidea ∇^0 è una connessione lineare, simmetrica e compatibile con la metrica euclidea. Quindi ∇^0 è la connessione di Levi-Civita dello spazio euclideo (\mathbb{R}^n, g_0) . Se consideriamo lo spazio di Minkowski (\mathbb{R}^{n+1}, q) , la connessione ∇^0 è compatibile anche con q :

$$\begin{aligned} Zq(X, Y) &= \sum_{i=1}^n (Z(X^i)Y^i + X^i Z(Y^i)) - Z(X^{n+1})Y^{n+1} - X^{n+1}Z(Y^{n+1}) \\ &= q(\nabla_Z^0 X, Y) + q(X, \nabla_Z^0 Y). \end{aligned}$$

Quindi ∇^0 è anche la *connessione di Levi-Civita dello spazio di Minkowski* (\mathbb{R}^{n+1}, q) .

Esempio 6.40. La connessione di Levi-Civita di un gruppo di Lie riemanniano.

Sia G un gruppo di Lie dotato di una metrica g invariante a sinistra. Essendo la metrica g invariante a sinistra, $g(X, Y)$ è una funzione costante per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ (cfr. Proposizione 5.16) dove \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di G , e quindi

$$Xg(Y, Z) = Yg(Z, X) = Zg(X, Y) = 0.$$

Pertanto, applicando la (6.8), la connessione di Levi-Civita ∇ di (G, g) è univocamente determinata dall'equazione

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y), \quad (6.9)$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. In particolare se la metrica g è bi-invariante, allora (cfr. (5.3))

$$g([Y, Z], X) = g([Z, X], Y)$$

e la (6.9) diventa

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (6.10)$$

Dalla (6.10) segue che, per una metrica bi-invariante, i campi di vettori invarianti a sinistra sono geodetici, cioè $\nabla_X X = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$, equivalentemente: *le curve integrali γ_X di campi di vettori invarianti a sinistra sono curve geodetiche.*

Esempio 6.41. La connessione di Levi-Civita di \mathbb{R}_+^n .

Ricordiamo che la metrica iperbolica del semispazio di Poincaré $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$ è invariante a sinistra rispetto alla struttura di gruppo di Lie, e i campi vettoriali $V_i = x_n \partial_i$, dove $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, costituiscono una base ortonormale di campi di vettori invarianti a sinistra (cfr. Sezione 5.3). Inoltre, per $i, j = 1, \dots, n-1$, risulta

$$[V_n, V_j] = [x_n \partial_n, x_n \partial_j] = V_j \quad \text{e} \quad [V_i, V_j] = [x_n \partial_i, x_n \partial_j] = 0.$$

Di conseguenza, la connessione di Levi-Civita associata a questa metrica è determinata, applicando la (6.9), da

$$\nabla_{V_i} V_i = V_n, \quad \nabla_{V_i} V_n = -V_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \nabla_{V_i} V_j = 0 \quad (\text{negli altri casi}).$$

In particolare V_n è un campo geodetico. Se consideriamo la presentazione dello spazio iperbolico come sottogruppo di Lie G di $GL(n, \mathbb{R})$ (cfr. Esempio 5.20), allora una base di campi vettoriali invarianti a sinistra è data da

$$E_n = c \partial_n, \quad E_i = c e^{x_n} \partial_i \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

e la parentesi di Lie soddisfa: $[E_n, E_i] = c E_i$, $[E_i, E_j] = 0$ (negli altri casi). La metrica riemanniana \tilde{g} su G definita da: $\tilde{g}(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ è invariante a sinistra ed è isometrica alla metrica iperbolica $g = \frac{1}{(cy_n)^2} \sum_i dy_i \otimes dy_i$. Anche in questo caso, applicando la (6.9), si trova che la connessione di Levi-Civita è data da

$$\begin{aligned} \nabla_{E_i} E_i &= c E_n, & \nabla_{E_i} E_n &= -c E_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ \nabla_{E_i} E_j &= 0 \quad (\text{negli altri casi}). \end{aligned}$$

Teorema 6.42. *La connessione di Levi-Civita è invariante per isometrie.*

Dimostrazione. Siano (M, g) e (\tilde{M}, \tilde{g}) due varietà riemanniane, ∇ e $\tilde{\nabla}$ le corrispondenti connessioni di Levi-Civita, ed $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ un'isometria, ossia $\tilde{g}(F_*X, F_*Y) \circ F = g(X, Y)$. Proviamo che per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$F_* \nabla_X Y = \tilde{\nabla}_{F_*X} F_* Y.$$

Ricordiamo che il differenziale F_* indotto dal diffeomorfismo F , definito da $(F_*X)_q = F_{*p}(X_p)$, $p = F^{-1}(q)$, è \mathbb{R} -lineare e inoltre verifica le seguenti proprietà:

$(F_*X)(h) = X(h \circ F) \circ F^{-1}$, $F_*(fX) = (F_*f)F_*X$, $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$, dove $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$, $h \in \mathcal{F}(\tilde{M})$ e $F_*f := f \circ F^{-1}$. Analoghe proprietà valgono per l'inverso F_*^{-1} . Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, poniamo:

$$\nabla'_X Y := F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} F_* Y$$

e verifichiamo che $\nabla' = \nabla$. Intanto ∇' è \mathbb{R} -lineare in quanto lo sono $\tilde{\nabla}$ e F_* . Inoltre:

$$\begin{aligned} \nabla'_{fX} Y &= F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*(fX)} F_* Y = F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{(F_*f)F_*X} F_* Y \\ &= F_*^{-1} \left((F_*f) \tilde{\nabla}_{F_*X} F_* Y \right) \\ &= F_*^{-1} (F_*f) F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} F_* Y = f \nabla'_X Y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla'_X fY &= F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*(X)} F_*(fY) = F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} (F_*f) F_*Y \\
&= F_*^{-1} \left((F_*X)(F_*f) F_*Y + (F_*f) \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y \right) \\
&= F_*^{-1} \left((X(F_*f \circ F) \circ F^{-1}) F_*Y \right) \\
&\quad + (F_*^{-1} F_*f) F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y \\
&= F_*^{-1} \left((X(f) \circ F^{-1}) F_*Y \right) + f \nabla'_X Y \\
&= F_*^{-1} (X(f) \circ F^{-1}) F_*^{-1} F_*Y + f \nabla'_X Y \\
&= X(f)Y + f \nabla'_X Y; \\
\nabla'_X Y - \nabla'_Y X &= F_*^{-1} \left(\tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y - \tilde{\nabla}_{F_*Y} F_*X \right) \\
&= F_*^{-1} [F_*X, F_*Y] = F_*^{-1} F_*[X, Y] \\
&= [X, Y].
\end{aligned}$$

Dunque, ∇' è una connessione lineare simmetrica. Infine, proviamo la compatibilità di ∇' con la metrica g . Poiché F è un'isometria, si ha:

$$\begin{aligned}
g(\nabla'_X Y, Z) + g(Y, \nabla'_X Z) &= g(F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y, Z) + g(Y, F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y, F_*Z) \circ F \\
&\quad + \tilde{g}(F_*Y, \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Z) \circ F \\
&= \left((F_*X) \tilde{g}(F_*Y, F_*Z) \right) \circ F \\
&= \left(X(\tilde{g}(F_*Y, F_*Z) \circ F) \circ F^{-1} \right) \circ F \\
&= Xg(Y, Z).
\end{aligned}$$

Per l'unicità della connessione di Levi-Civita, si ha $\nabla' = \nabla$. \square

Teorema 6.43. *Siano $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ un'isometria e $\sigma(t)$ una curva differenziabile di M . Posto $\tilde{\sigma}(t) = F \circ \sigma(t)$, per ogni $V \in \mathfrak{X}(\sigma)$ si ha:*

$$(F_*)_{\sigma(t)} \frac{DV}{dt} = \frac{D\tilde{V}}{dt} (F_*)_{\sigma(t)} V.$$

Dimostrazione. Sia $\{(U_i, \phi_i)\}_i$ un atlante differenziabile di M . Poiché F è un diffeomorfismo, $\{(\tilde{U}_i = F(U_i), \tilde{\phi}_i = \phi_i \circ F^{-1}|_{\tilde{U}_i})\}_i$ è un atlante differenziabile di \tilde{M} . Se (x_k) sono coordinate su U e (y_k) le corrispondenti coordinate su \tilde{U} , allora

$$(y_k)(F(p)) = \tilde{\phi}(F(p)) = \phi(p) = (x_k)(p).$$

Di conseguenza, la F rispetto a queste coordinate locali è l'identità e

$$F_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{F(p)}.$$

Sia $V \in \mathfrak{X}(\sigma)$, $V(t) = \sum_k V^k(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{\sigma(t)}$, allora

$$(F_*)_{\sigma(t)} V = \sum_k V^k(t) (F_*)_{\sigma(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{\sigma(t)} = \sum_k V^k(t) \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{\tilde{\sigma}(t)}$$

e quindi

$$\frac{\tilde{D}}{dt} (F_*)_{\sigma(t)} V = \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{\tilde{\sigma}(t)} + V^k(t) \tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\sigma}}(t)} \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

Applicando il Teorema 6.42, si ha:

$$\begin{aligned} (F_*)_{\sigma(t)} \frac{DV}{dt} &= (F_*)_{\sigma(t)} \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{\sigma(t)} + V^k(t) \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{\tilde{\sigma}(t)} + V^k(t) (F_*)_{\sigma(t)} \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{\tilde{\sigma}(t)} + V^k(t) \tilde{\nabla}_{(F_*)_{\sigma(t)} \dot{\sigma}(t)} F_* \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{\tilde{\sigma}(t)} + V^k(t) \tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\sigma}}(t)} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) = \frac{\tilde{D}}{dt} (F_*)_{\sigma(t)} V. \end{aligned}$$

□

Corollario 6.44. *Siano $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ un'isometria, $\sigma(t)$ una curva differenziabile di M e $V \in \mathfrak{X}(\sigma)$. Posto $\tilde{\sigma} = F \circ \sigma$, si hanno le seguenti proprietà.*

- (a) V è parallelo lungo $\sigma \Leftrightarrow (F_*)_{\sigma(t)} V$ è parallelo lungo $\tilde{\sigma}$.
 (b) Il differenziale di F commuta con lo spostamento parallelo:

$$\tilde{\tau}_t \circ (F_*)_{\sigma(t_0)} = (F_*)_{\sigma(t)} \circ \tau_t,$$

dove τ_t è lo spostamento parallelo lungo σ da $\sigma(t_0)$ a $\sigma(t)$ e $\tilde{\tau}_t$ è lo spostamento parallelo lungo $\tilde{\sigma}$ da $\tilde{\sigma}(t_0)$ a $\tilde{\sigma}(t)$.

- (c) $\sigma(t)$ è una geodetica di $M \Leftrightarrow \tilde{\sigma}(t)$ è una geodetica di \tilde{M} .

Dimostrazione. (a) Segue in modo immediato dal Teorema 6.43.

(b) Segue da (a). Infatti: dato $V_0 \in T_{\sigma(t_0)} M$, se $V(t)$ è parallelo lungo σ con $V(t_0) = V_0$, allora $\tilde{V}(t) = (F_*)_{\sigma(t)} V(t)$ è parallelo lungo $\tilde{\sigma}$ con $\tilde{V}(t_0) = (F_*)_{\sigma(t_0)} V_0$, per cui

$$\tilde{\tau}_t \left((F_*)_{\sigma(t_0)} V_0 \right) = \tilde{V}(t) = (F_*)_{\sigma(t)} V(t) = (F_*)_{\sigma(t)} (\tau_t V_0).$$

- (c) Basta prendere $V(t) = \dot{\sigma}(t)$ e applicare la (a). □

Osservazione 6.45. Poiché la nozione di trasporto parallelo è di natura locale, anche una isometria locale trasforma campi paralleli in campi paralleli e geodetiche in geodetiche. Inoltre, si noti che i risultati del Corollario 6.44 continuano a valere considerando un diffeomorfismo F che conserva la connessione di Levi-Civita. In generale, se M è una varietà differenziabile e ∇ una connessione lineare su M , un diffeomorfismo F di M si dice *trasformazione affine* se $F_*\nabla_X Y = \nabla_{F_*X} F_*Y$. Equivalentemente, un diffeomorfismo F è una trasformazione affine se, e solo se, verifica la proprietà a) del Corollario 6.44 (cfr. anche Kobayashi–Nomizu [56] vol. I, p.228).

Osservazione 6.46. Sia $\gamma(s)$ una curva differenziabile, parametrizzata con l'ascissa curvilinea $s \in I$, di una varietà riemanniana. Si noti che la *curvatura geodetica* di $\gamma(s)$, ossia la funzione $k_g(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto k_g(s) = \left\| \frac{D\dot{\gamma}}{ds}(s) \right\|$, è invariante per isometrie (locali).

Osservazione 6.47. La connessione di Levi-Civita è invariante per omotetie (cfr. Esercizio 6.50), ciò vale anche nel caso semi-riemanniano. Di conseguenza, tutte le nozioni geometriche che derivano dalla connessione di Levi-Civita, come ad esempio la derivata covariante lungo curve, trasporto parallelo e curve geodetiche sono invarianti per omotetie. Anche il tensore di curvatura R di tipo $(1, 3)$ e il tensore di Ricci (che studieremo nel Capitolo 8) sono invarianti per omotetie. Tuttavia, curvatura sezionale e curvatura scalare non sono invarianti per omotetie (cfr. Esercizi 8.42 e 8.52).

Osservazione 6.48. Olonomia

Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale e p un fissato punto di M . Se σ è una curva chiusa (differenziabile a tratti): $\sigma(0) = p = \sigma(1)$, in altre parole se σ è un cappio in p , allora lo spostamento parallelo $\tau(\sigma)$ (rispetto alla connessione di Levi-Civita) è una isometria di $T_p M$. L'insieme delle isometrie così costruite lo denotiamo con $H_p(M, g)$. Se σ_1, σ_2 sono due cappi in p , con $\sigma_1 * \sigma_2$ denotiamo il cappio in p prodotto di σ_1 e σ_2 :

$$\sigma_1 * \sigma_2(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Allora: $\tau(\sigma_1 * \sigma_2) = \tau(\sigma_2) \circ \tau(\sigma_1)$, $\tau(\sigma^{-1}) = \tau(\sigma)^{-1}$, dove σ^{-1} denota il cappio opposto di σ , e $\tau(\sigma_0) = I_d$ dove σ_0 è il cappio costante. Pertanto, $H_p(M, g)$ è un sottogruppo del gruppo ortogonale $O(n)$ che viene detto *gruppo di olonomia* della varietà riemanniana (M, g) in p . Si noti che spesso si parla di olonomia di (M, g) , e si denota con $H(M, g)$, senza fare riferimento al punto base perché, essendo M connessa, gruppi di olonomia relativi a punti distinti sono isomorfi. Se α è un cammino (differenziabile a tratti) che congiunge due punti p, q di M , l'applicazione $\alpha_* : H_p(M, g) \rightarrow H_q(M, g)$, $\tau(\sigma) \mapsto \tau(\alpha) \circ \tau(\sigma) \circ \tau(\alpha^{-1})$, è un isomorfismo. Se ci limitiamo a considerare cappi in p omotopi al cappio costante, si ottiene un sottogruppo $H^0(M, g)$ di $H(M, g)$, che viene detto *gruppo di olonomia ristretto* della varietà riemanniana M . Naturalmente, se $\pi_1(M) = 0$, $H^0(M, g) = H(M, g)$.

Nel caso della connessione euclidea ∇^0 di \mathbb{R}^n , lo spostamento parallelo è definito dalla traslazione per cui il gruppo di ologonia dello spazio euclideo è banale: $H(\mathbb{R}^n) = H^0(\mathbb{R}^n) = \{I_d\}$. Più in generale vale il seguente risultato (cfr. [10], p. 283): *una varietà riemanniana (M, g) è piatta se, e solo se, $H^0(M, g) = \{I_d\}$* . Infine, ricordiamo alcune proprietà dei gruppi di ologonia da cui si vede che la struttura di tali gruppi riflette proprietà geometriche della varietà (cfr. [97], p.226 oppure [100], p.122):

- $H(\mathbb{S}^n) = SO(n)$, $H(H^n) = SO(n)$;
- $H(M, g) \subset SO(n)$ se, e solo se, M è orientabile;
- $H(\tilde{M}, \tilde{g}) = H^0(\tilde{M}, \tilde{g}) = H(M, g)$, dove (\tilde{M}, \tilde{g}) denota il rivestimento riemanniano universale di (M, g) ;
- $H(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) = H(M_1, g_1) \times H(M_2, g_2)$;
- (M, g) è kähleriana se, e solo se, $\dim M = 2m$ e $H(M, g) \subset U(m)$ (gruppo unitario).

Esercizi sulla connessione di Levi-Civita

Esercizio 6.49. Verificare che l'operatore ∇ definito dalla (6.8) è una connessione lineare, simmetrica e compatibile con g .

Esercizio 6.50. Verificare, usando la (6.8), che metriche riemanniane omotetiche g e $g' = kg$, $k = \text{cost.} > 0$, hanno la stessa connessione di Levi-Civita. Più in generale, siano g e \tilde{g} due metriche riemanniane conformi, $\tilde{g} = e^{2f}g$, $f \in \mathcal{F}(M)$, e siano ∇ e $\tilde{\nabla}$ le corrispondenti connessioni di Levi-Civita. Verificare che

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)\nabla f,$$

dove ∇f è il gradiente di f rispetto alla metrica g , ovvero il campo vettoriale definito da $g(\nabla f, X) := (df)(X) = X(f)$.

Esercizio 6.51. Sia (M, g) una varietà riemanniana con connessione di Levi-Civita ∇ . Sia T un tensore di tipo $(1, 2)$ su M . Si verifichi che $\tilde{\nabla} = \nabla + T$ è una connessione lineare. Quindi, una varietà riemanniana ammette connessioni lineari che non sono di Levi-Civita.

Esercizio 6.52. Siano (M_1, g_1) e (M_2, g_2) due varietà riemanniane con connessioni di Levi-Civita ∇^1 e ∇^2 rispettivamente. Usando la (6.8), verificare che la connessione di Levi-Civita ∇ della varietà riemanniana prodotto $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ è data da

$$\nabla_X Y = \nabla_{X_1}^1 Y_1 + \nabla_{X_2}^2 Y_2,$$

dove X_i, Y_i denotano le proiezioni di X, Y su TM_i ($i = 1, 2$).

Esercizio 6.53. Come una conseguenza della formula dell'Esercizio 6.52, si verifichi che sulla varietà riemanniana prodotto $(M \times \mathbb{R}, g \times dt \otimes dt)$ il campo di vettori $V = d/dt$ è parallelo rispetto alla connessione di Levi-Civita della metrica prodotto $g \times dt \otimes dt$.

Esercizio 6.54. Si consideri \mathbb{R}^2 con la metrica riemanniana

$$g = f(dx^2 + dy^2), \text{ dove } f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2).$$

Osservato che $(e_1 = (1/\sqrt{f})\partial_x, e_2 = (1/\sqrt{f})\partial_y)$ è base g -ortonormale di campi vettoriali, si verifichi che la connessione di Levi-Civita ∇ di (\mathbb{R}^2, g) è definita da:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= (y/\sqrt{(1+x^2+y^2)})e_2, & \nabla_{e_1} e_2 &= (-y/\sqrt{(1+x^2+y^2)})e_1, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= (-x/\sqrt{(1+x^2+y^2)})e_2, & \nabla_{e_2} e_2 &= (x/\sqrt{(1+x^2+y^2)})e_1. \end{aligned}$$

Esercizio 6.55. Sia (M, g) una varietà riemanniana con connessione di Levi-Civita ∇ . Siano Γ_{ij}^k i coefficienti di Christoffel di ∇ e g_{ij} i coefficienti della metrica g rispetto a un fissato sistema di coordinate locali (x_i) . Indicata con (g^{ij}) la matrice inversa di (g_{ij}) , usando l'equazione (6.8), si verifichi che:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij} \right\} g^{km},$$

dove $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Questa formula esprime i coefficienti di Christoffel della connessione di Levi-Civita in funzione dei coefficienti della metrica.

Esercizio 6.56. Si consideri la metrica iperbolica g del semispazio $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, quindi $g_{ij} = (1/x_n^2)\delta_{ij}$ e $g^{ij} = (x_n^2)\delta_{ij}$.

Si verifichi che i coefficienti Γ_{ij}^k non nulli della connessione di Levi-Civita della suddetta metrica iperbolica di \mathbb{R}_+^n sono dati da

$$\Gamma_{ii}^n = 1/x_n, \quad \Gamma_{in}^i = \Gamma_{ni}^i = -1/x_n, \quad \Gamma_{nn}^n = -1/x_n, \quad i=1, \dots, n-1.$$

In particolare, i coefficienti Γ_{ij}^k della connessione di Levi-Civita della metrica iperbolica di $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 1/y, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -1/y.$$

Esercizio 6.57. Si verifichi che i coefficienti Γ_{ij}^k della connessione di Levi-Civita della metrica riemanniana dell'Esercizio 4.21 sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(u)r'(u), \quad \Gamma_{12}^2 = r'(u)/r(u),$$

dove si è posto $x_1 = u$ e $x_2 = \vartheta$.

Esercizio 6.58. Si verifichi che un diffeomorfismo di una varietà riemanniana che trasforma geodetiche in geodetiche, in generale, non è un'isometria. In altre parole, dare un esempio di varietà riemanniana (M, g) e di un diffeomorfismo $f \notin \text{Iso}(M, g)$ che trasforma geodetiche in geodetiche.

Esercizio 6.59. Sia $\gamma(t)$ una geodetica di una varietà riemanniana. Si verifichi che il vettore velocità $\dot{\gamma}(t)$ ha lunghezza $\|\dot{\gamma}(t)\| = a$ (costante). Inoltre, si verifichi che l'ascissa curvilinea di $\gamma(t)$ è data da $s(t) = at + b$, e quindi è un parametro ammissibile.

Esercizio 6.60. Sia F un diffeomorfismo di una varietà riemanniana che trasforma campi paralleli in campi paralleli (cioè vale la proprietà a) del Corollario 6.44). Si verifichi che F è una trasformazione affine (cioè conserva la connessione di Levi-Civita).

Esercizio 6.61. Sia (M, g) una varietà riemanniana 2-dimensionale. Siano $V, X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ con V parallelo lungo γ e $V(t) \neq 0$ per ogni t . Si verifichi che X è parallelo lungo γ se, e solo se, la lunghezza di X e l'angolo convesso (X, \hat{V}) sono costanti.

Esercizio 6.62. Sia $\pi : (M, g) \rightarrow (M', g')$ una sommersione riemanniana (suriettiva) (cfr. Sezione 4.3). Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ sollevamenti orizzontali di $X', Y' \in \mathfrak{X}(M')$. Si verifichi, usando la formula di Koszul, che

$$\pi_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{X'} Y' = \nabla'_{\pi_* X} \pi_* Y,$$

dove ∇ e ∇' sono le connessioni di Levi-Civita di M e M' rispettivamente.

6.6 Le equazioni di struttura di Cartan

Sia $\gamma(s) = P(s)$ un arco di curva regolare dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , parametrizzata con l'ascissa curvilinea. È ben noto che la curvatura $k(s)$ e la torsione $\tau(s)$ caratterizzano completamente la curva. D'altronde, è possibile considerare lungo la curva γ il *riferimento di Frenet*: $\{\vec{t}(s)$ (versore tangente), $\vec{n}(s)$ (versore normale), $\vec{b}(s)$ (versore binormale) $\}$, definito da

$$\vec{t}(s) := \dot{\gamma}(s), \quad \vec{n}(s) := \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{\|\dot{\vec{t}}(s)\|} = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|}, \quad \vec{b}(s) := \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s).$$

Derivando $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ si ottengono le *formule di Frenet*:

$$\begin{cases} \dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{n}(s) \\ \dot{\vec{n}}(s) = -k(s)\vec{t}(s) - \tau(s)\vec{b}(s) \\ \dot{\vec{b}}(s) = \tau(s)\vec{n}(s). \end{cases}$$

Le equazioni di struttura di Cartan, in un certo senso, si possono pensare come una generalizzazione delle formule di Frenet per una varietà differenziabile M munita di una connessione lineare ∇ . Sia $\{E_i\}$ una base locale di campi vettoriali, indichiamo con γ_{ij}^k i corrispondenti coefficienti locali di ∇ , cioè

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \gamma_{ij}^k E_k.$$

Indicata con $\{\theta^i\}$ la base locale duale di $\{E_i\}$, definiamo le n^2 1-forme ω_j^k ponendo

$$\omega_j^k(X) := \theta^k(\nabla_X E_j) \quad \text{e quindi} \quad \omega_j^k = \sum_i \omega_j^k(E_i)\theta^i = \sum_i \gamma_{ij}^k \theta^i.$$

Le 1-forme ω_j^k sono dette *1-forme locali della connessione* ∇ . Indicato con T il tensore di torsione di ∇ , le 2-forme Θ^i definite da

$$\Theta^i(X, Y) = \theta^i(T(X, Y))$$

sono dette *2-forme locali di torsione*. Tenendo presente le formule (2.3) e (2.9) relative al prodotto esterno e al differenziale esterno per 1-forme, si

ottiene:

$$\begin{aligned}
\Theta^i(X, Y) &= \theta^i(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\
&= \theta^i\left(\nabla_X \sum_j Y^j E_j - \nabla_Y \sum_j X^j E_j - [X, Y]\right) \\
&= \sum_j \left(X(Y^j) \theta^i(E_j) - Y(X^j) \theta^i(E_j) + Y^j \theta^i(\nabla_X E_j) \right) \\
&\quad - \sum_j \left(X^j \theta^i(\nabla_Y E_j) \right) - \theta^i([X, Y]) \\
&= X(\theta^i(Y)) - Y(\theta^i(X)) - \theta^i([X, Y]) + \sum_j \left(\omega_j^i(X) \theta^j(Y) \right. \\
&\quad \left. - \theta^j(X) \omega_j^i(Y) \right) = (d\theta^i)(X, Y) + \sum_j (\omega_j^i \wedge \theta^j)(X, Y),
\end{aligned}$$

ovvero

$$\Theta^i = d\theta^i + \sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j. \quad (6.11)$$

Definiamo le 2-forme

$$\Omega_j^i(X, Y) := \theta^i(R(X, Y)E_j),$$

dove $R(X, Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z$ è il tensore di curvatura di ∇ (cfr. Sezione 8.2). Le Ω_j^i sono dette *2-forme locali di curvatura* di ∇ .
Risulta:

$$\begin{aligned}
\Omega_j^i(X, Y) &= \theta^i(R(X, Y)E_j) \\
&= \theta^i(\nabla_{[X, Y]} E_j) - \theta^i(\nabla_X \nabla_Y E_j) + \theta^i(\nabla_Y \nabla_X E_j) \\
&= \omega_j^i([X, Y]) - \theta^i(\nabla_X \sum_{h,k} Y^h \gamma_{hj}^k E_k) + \theta^i(\nabla_Y \nabla_X E_j) \\
&= \omega_j^i([X, Y]) - \theta^i(\nabla_X \sum_{h,k} \theta^h(Y) \gamma_{hj}^k E_k) + \theta^i(\nabla_Y \nabla_X E_j) \\
&= \omega_j^i([X, Y]) - \theta^i(\nabla_X \sum_k \omega_j^k(Y) E_k) + \theta^i(\nabla_Y \sum_k \omega_j^k(X) E_k) \\
&= \omega_j^i([X, Y]) - \theta^i\left(\sum_k (X(\omega_j^k(Y)) E_k) + \omega_j^k(Y) \nabla_X E_k\right) \\
&\quad + \theta^i\left(\sum_k (Y(\omega_j^k(X)) E_k) + \omega_j^k(X) \nabla_Y E_k\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega_j^i([X, Y]) - X(\omega_j^i(Y)) - \sum_k \omega_j^k(Y)\omega_k^i(X) + Y(\omega_j^i(X)) \\
&\quad + \sum_k \omega_j^k(X)\omega_k^i(Y) \\
&= -(d\omega_j^i)(X, Y) - \sum_k (\omega_k^i \wedge \omega_j^k)(X, Y).
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\Omega_j^i = -d\omega_j^i - \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k. \quad (6.12)$$

Le equazioni (6.11) e (6.12) sono dette *equazioni di struttura di Cartan*. Se poniamo

$$T(E_j, E_k) = \sum_l T_{jk}^l E_l \quad \text{e} \quad R(E_i, E_j)E_k = \sum_l R_{ijk}^l E_l,$$

allora

$$\begin{aligned}
\Theta^i &= \sum_{j < k} \Theta^i(E_j, E_k) \theta^j \wedge \theta^k = \sum_{j < k} \theta^i(T(E_j, E_k)) \theta^j \wedge \theta^k \\
&= \sum_{j < k} T_{jk}^l \theta^i(E_l) \theta^j \wedge \theta^k = \sum_{j < k} T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k, \\
\Omega_j^i &= \sum_{h < k} \Omega_j^i(E_h, E_k) \theta^h \wedge \theta^k = \sum_{h < k} \theta^i(R(E_h, E_k)E_j) \theta^h \wedge \theta^k \\
&= \sum_{h < k} R_{hjk}^l \theta^i(E_l) \theta^h \wedge \theta^k = \sum_{h < k} R_{hjk}^i \theta^h \wedge \theta^k.
\end{aligned}$$

Pertanto, le equazioni di struttura di Cartan diventano

$$\begin{cases} d\theta^i &= \sum_j \theta^j \wedge \omega_j^i + \sum_{j < k} T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k, \\ d\omega_j^i &= -\sum_j \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \sum_{h < k} R_{hjk}^i \theta^h \wedge \theta^k. \end{cases}$$

Consideriamo ora una varietà riemanniana (M, g) e sia ∇ la connessione di Levi-Civita associata. Supponiamo $\{E_i\}$ base ortonormale locale. Allora,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_i (X(Y^i)E_i + Y^i \nabla_X E_i) \\
&= \sum_i \left(X(Y^i)E_i + Y^i \sum_k \theta^k (\nabla_X E_i) E_k \right) \\
&= \sum_k \left(X(Y^k) + \sum_i Y^i \omega_i^k(X) \right) E_k.
\end{aligned}$$

Esercizio 6.63. Si verifichi che la compatibilità di ∇ con la metrica è espressa da:

$$\gamma_{ij}^k = -\gamma_{ik}^j, \quad \text{equivalentemente} \quad \omega_j^k = -\omega_k^j.$$

Si noti che la simmetria di ∇ , ossia la condizione $T = 0$, è espressa dalla proprietà $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ji}^k$ per ogni sistema di coordinate locali, dove Γ_{ij}^k sono i coefficienti della connessione rispetto alla corrispondente base coordinata. Le equazioni di struttura di Cartan della connessione di Levi-Civita di una varietà riemanniana, con riferimento a una base ortonormale locale, sono date da

$$\begin{cases} d\theta^i &= \sum_j \theta^j \wedge \omega_j^i, & \omega_j^i &= -\omega_i^j; \\ d\omega_j^i &= -\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \sum_{h < k} R_{hjk}{}^i \theta^h \wedge \theta^k. \end{cases} \quad (6.13)$$

Esercizio 6.64. Posto

$$\omega_j^i = \sum_k a_{jk}^i \theta^k \quad \text{e} \quad d\theta^i = \sum_{j < k} b_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k,$$

si verifichi la seguente formula: $2a_{jk}^i = b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k$, la quale fornisce esplicitamente l'unica soluzione del sistema (6.13) (cioè la connessione di Levi-Civita).

6.7 La connessione di Levi-Civita di sottovarietà riemanniane

Sia (M, g) una sottovarietà riemanniana di (\bar{M}, \bar{g}) . Per semplicità assumiamo $M \subset \bar{M}$, quindi $g = i^* \bar{g}$, dove $i : M \hookrightarrow \bar{M}$. Per ogni $p \in M$ poniamo:

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus \mathcal{V}_p M,$$

dove $\mathcal{V}_p M$ è l'ortogonale di $T_p M \equiv i_* T_p M$ in $T_p \bar{M}$. Quindi, per ogni $p \in M$ e per ogni $V \in T_p \bar{M}$:

$$V = V^\top + V^\perp,$$

dove $V^\top \in T_p M$ è la componente tangente e $V^\perp \in \mathcal{V}_p M$ è la componente normale.

Teorema 6.65. *Siano $\nabla, \bar{\nabla}$ le connessioni di Levi-Civita di (M, g) e (\bar{M}, \bar{g}) rispettivamente. Allora per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$:*

$$\nabla_{X_p} Y := (\nabla_X Y)_p = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})_p^\top \quad (6.14)$$

dove \bar{X}, \bar{Y} sono estensioni locali di X, Y su un intorno di p in \bar{M} .

Dimostrazione. Consideriamo U, \bar{U} intorni coordinati speciali (di un fissato punto) in M e \bar{M} rispettivamente. Dati $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, esistono $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ estensioni di X, Y, Z , cioè $i_{*p} X_p = \bar{X}_p$ per ogni $p \in U$, equivalentemente $\bar{X}(\bar{f})|_U = X(f|_U)$ per ogni $f \in \mathcal{F}(\bar{U})$ (cfr. Sezione 2.5). Per ogni $p \in U$:

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p) = \bar{g}_p(i_{*p} X_p, i_{*p} Y_p) = \bar{g}_p(\bar{X}_p, \bar{Y}_p) = \bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})(p),$$

cioè

$$g(X, Y)|_U = \bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})|_U.$$

Di conseguenza,

$$(\bar{Z}\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y}))|_U = Z(\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})|_U) = Z(g(X, Y)|_U). \quad (6.15)$$

Inoltre, siccome anche $[\bar{X}, \bar{Y}] \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ è una estensione di $[X, Y] \in \mathfrak{X}(U)$,

$$\bar{g}([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z})|_U = g([X, Y], Z)|_U. \quad (6.16)$$

Confrontando le equazioni che definiscono le connessioni di Levi-Civita ∇ e $\bar{\nabla}$:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y X, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, \bar{Z}) &= \bar{X}\bar{g}(\bar{Y}, \bar{Z}) + \bar{Y}\bar{g}(\bar{X}, \bar{Z}) - \bar{Z}\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y}) \\ &\quad - \bar{g}(\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Z}]) - \bar{g}(\bar{X}, [\bar{Y}, \bar{Z}]) - \bar{g}(\bar{Z}, [\bar{X}, \bar{Y}]), \end{aligned}$$

e tenendo presente le equazioni (6.15) e (6.16), si ottiene

$$g(\nabla_Y X, Z)|_U = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, \bar{Z})|_U. \quad (6.17)$$

Sia ora $\{u_i\}$ una base ortonormale di campi di vettori definiti su U , e sia $\{\bar{u}_i\}$ una estensione di $\{u_i\}$ su \bar{U} . Allora, applicando la (6.17), per ogni $p \in U$:

$$\begin{aligned} (\nabla_Y X)_p &= \sum_{i=1}^n g_p((\nabla_Y X)_p, u_{ip})u_{ip} = \sum_{i=1}^n \bar{g}_p((\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})_p, \bar{u}_{ip})\bar{u}_{ip} \\ &= (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})_p^\top. \end{aligned}$$

□

Se $\gamma : I \rightarrow M$ è una curva differenziabile di M , $\bar{\gamma} = i \circ \gamma$ è una curva differenziabile di \bar{M} che si identifica con γ , ossia una curva di M si può sempre pensare come una curva di \bar{M} . Sappiamo che il vettore $(\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})_p$ dipende solo da $\bar{Y}_p = Y_p$ e da $\bar{X}(t) = \bar{X}(\gamma(t)) = X(\gamma(t)) = X(t)$, dove $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = Y_p$ (cfr. Proposizione 6.6). Pertanto, si pone $(\bar{\nabla}_Y X)_p = (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})_p$ e quindi la (6.14) diventa

$$(\nabla_Y X)_p = (\bar{\nabla}_Y X)_p^\top.$$

Inoltre, se $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, allora $\bar{V}(t) = i_{*\gamma(t)}V(t) \in \mathfrak{X}(\bar{\gamma})$ si identifica con $V(t)$. Quindi, un campo di vettori differenziabile lungo γ in M si può sempre pensare come un campo di vettori differenziabile lungo $\bar{\gamma}$ in \bar{M} .

Corollario 6.66. Se $\frac{D}{dt}$ e $\frac{\bar{D}}{dt}$ sono le derivate covarianti definite dalle connessioni di Levi-Civita ∇ e $\bar{\nabla}$, allora per ogni $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$:

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{\bar{D}V}{dt} \right)^\top. \quad (6.18)$$

Dimostrazione. Usando le notazioni introdotte nella dimostrazione del Teorema 6.65, poniamo $V(t) = \sum_{i=1}^n V^i(t)u_i(t)$. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dV^i}{dt} u_i(t) + V^i(t) \frac{Du_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dV^i}{dt} u_i(t) + V^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} u_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dV^i}{dt} \bar{u}_i(t) + V^i(t) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \bar{u}_i)^\top \right). \end{aligned}$$

Il campo di vettori $V(t)$, pensato come elemento di $\mathfrak{X}(\bar{\gamma})$, ha componenti $\bar{V}^k(t) = 0$ per ogni $k = n+1, \dots, \bar{n}$, quindi $V(t) = \sum_{i=1}^n V^i(t) \bar{u}_i(t)$ e

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}V}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dV^i}{dt} \bar{u}_i(t) + V^i(t) \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \bar{u}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dV^i}{dt} \bar{u}_i(t) + V^i(t) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \bar{u}_i)^\top + V^i(t) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \bar{u}_i)^\perp \right) \\ &= \frac{DV}{dt} + \sum_{i=1}^n V^i(t) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \bar{u}_i)^\perp. \end{aligned}$$

Pertanto, $\frac{DV}{dt} = \left(\frac{\bar{D}V}{dt} \right)^\top$. □

Consideriamo $\{e_i\}$ base di $\mathfrak{X}(U)$ e $\{\bar{e}_i, \bar{v}_j\}$ base di $\mathfrak{X}(\bar{U})$, con \bar{e}_i estensione di e_i su \bar{U} . Sia $\{E_i\}$ base ortonormale di $\mathfrak{X}(U)$ ottenuta ortonormalizzando con il metodo di Gram-Schmidt la base $\{e_i\}$. Inoltre, sia $\{\bar{E}_i, \bar{\xi}_j\}$ base ortonormale di $\mathfrak{X}(\bar{U})$ ottenuta ortonormalizzando con il metodo di Gram-Schmidt la base $\{\bar{e}_i, \bar{v}_j\}$. Allora \bar{E}_i è una estensione di E_i su \bar{U} . Poniamo $\xi_j = \bar{\xi}_j|_U$. Sia $\mathcal{V}(M) = \sqcup_{p \in M} \mathcal{V}_p(M)$ il fibrato normale su M relativo all'immersione $i : M \hookrightarrow \bar{M}$. $\mathcal{V}(M)$ e TM sono sottofibrati di $T\bar{M}$. Sia $\mathfrak{X}(M)^\perp$ l'insieme dei campi differenziabili di vettori normali ad M , in altre parole $\mathfrak{X}(M)^\perp$ è l'insieme delle applicazioni differenziabili

$$\xi : M \rightarrow \nu(M), \quad p \mapsto \xi_p \in \mathcal{V}_p(M) = (T_p M)^\perp.$$

Localmente si ha

$$\xi = \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} a^j \xi_j, \quad \text{dove } a^j \in \mathcal{F}(U).$$

$\mathfrak{X}(M)^\perp$ è un $\mathcal{F}(M)$ -modulo, inoltre coincide con l'insieme delle sezioni differenziabili del fibrato normale $\mathcal{V}(M)$ (così come $\mathfrak{X}(M)$ è l'insieme delle sezioni differenziabili del fibrato tangente TM). L'applicazione

$$\begin{aligned}\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp, (X, Y) \mapsto \alpha(X, Y), \\ \alpha(X, Y)(p) &:= (\bar{\nabla}_X Y)_p^\perp \text{ (componente normale),}\end{aligned}$$

viene detta *seconda forma fondamentale* dell'immersione. Si vede facilmente che α è un'applicazione $\mathcal{F}(M)$ -bilinare simmetrica, quindi $\alpha(X, Y)(p)$ dipende solo da X_p e Y_p . In altre parole, α è un tensore su M di tipo $(0, 2)$ simmetrico a valori nel fibrato normale. Pertanto, per ogni fissato $p \in M$, possiamo definire l'applicazione bilinare simmetrica

$$\alpha_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathcal{V}_p M, (X_p, Y_p) \mapsto \alpha_p(X_p, Y_p) := \alpha(X, Y)(p),$$

dove $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ con $X(p) = X_p$ e $Y(p) = Y_p$. Decomponendo $\bar{\nabla}_X Y$ come somma della componente tangente e di quella normale, si ottiene l'equazione

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + \alpha(X, Y)_p \quad (6.19)$$

che viene detta *equazione di Gauss* (cfr. Figura 6.3).

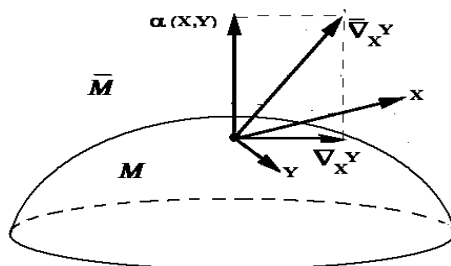


Figura 6.3: La decomposizione di $\bar{\nabla}_X Y$.

Per ogni curva differenziabile $\gamma(t)$ di M e per ogni $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, dalla dimostrazione del Corollario 6.66, segue

$$\frac{\bar{D}V}{dt} = \frac{DV}{dt} + \sum_{i=1}^n V^i(t) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} u_i)^\perp = \frac{DV}{dt} + \sum_{i=1}^n V^i(t) \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), u_i(t))$$

e quindi otteniamo l'equazione di Gauss per campi di vettori lungo curve:

$$\frac{\bar{D}V}{dt} = \frac{DV}{dt} + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), V). \quad (6.20)$$

La sottovarietà M è detta *totalmente geodetica* se $\alpha = 0$, cioè se per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $p \in M$:

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p.$$

Il vettore *curvatura media* della sottovarietà riemanniana M è il vettore

$$H(p) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} \alpha_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_p(e_i, e_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)_p^\perp \in \mathcal{V}_p(M), \quad (6.21)$$

dove $\{e_i\}$ è una base ortonormale locale di $\mathfrak{X}(M)$. Quindi, $nH(p)$ è il vettore ottenuto proiettando $(\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i)_p$ su $(T_p M)^\perp = \mathcal{V}_p(M)$. La sottovarietà M è detta *minimale* se $H = 0$.

Proposizione 6.67. *Sia (M, g) una sottovarietà riemanniana di (\bar{M}, \bar{g}) , $g = i^* \bar{g}$. Allora, M è totalmente geodetica se, e solo se, le geodetiche di M sono tutte e sole le curve geodetiche di \bar{M} contenute in M .*

Dimostrazione. Proviamo che M è totalmente geodetica se, e solo se, per ogni curva differenziabile $\gamma(t)$ di M le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (a) $\gamma(t)$ è una curva geodetica di M ;
- (b) $\gamma(t)$ è una curva geodetica di \bar{M} .

Se M è totalmente geodetica, cioè se $\alpha = 0$, dall'equazione (6.20) si ha

$$\frac{\bar{D}\dot{\gamma}}{dt} = \frac{D\dot{\gamma}}{dt},$$

e quindi $\gamma(t)$ è una geodetica di M se, e solo se, $\gamma(t)$ è una geodetica di \bar{M} . Viceversa, se (a) e (b) sono equivalenti, dall'equazione (6.20), con $V(t) = \dot{\gamma}(t)$, segue che $\alpha = 0$ (in quanto bilineare e simmetrica) e quindi M è totalmente geodetica. \square

Esempio 6.68. Dalla Proposizione 6.67 segue che la sfera canonica \mathbb{S}^n non è una sottovarietà totalmente geodetica dello spazio euclideo \mathbb{R}^{n+1} (non è nemmeno minimale). Più in generale: *non esistono sottovarietà riemanniane minimali compatte immerse nello spazio euclideo* ([56] vol. II, p. 34). Lo spazio euclideo \mathbb{R}^m è chiaramente una sottovarietà totalmente geodetica di \mathbb{R}^n , $m < n$. Verifichiamo che la sfera canonica \mathbb{S}^m è una sottovarietà riemanniana totalmente geodetica della sfera canonica \mathbb{S}^n , $n > m$. Consideriamo le seguenti immersioni:

$$\begin{aligned} i_1 : \mathbb{S}^m &\hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}, & i_2 : \mathbb{R}^{m+1} &\hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m}, \\ j_1 : \mathbb{S}^m &\hookrightarrow \mathbb{S}^n, x \mapsto (x, 0), & j_2 : \mathbb{S}^n &\hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \\ i &= i_2 \circ i_1 : \mathbb{S}^m &\hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m}. \end{aligned}$$

Allora, indicando con g_0 sia la metrica euclidea di \mathbb{R}^{m+1} che quella di \mathbb{R}^{n+1} , si ha

$$i^* g_0 = i_1^* g_0 = g_{\mathbb{S}^m}, \quad i = j_2 \circ j_1, \quad g_{\mathbb{S}^m} = i^* g_0 = j_1^* (j_2^* g_0) = j_1^* g_{\mathbb{S}^n}.$$

Quindi $j_1 : (\mathbb{S}^m, g_{\mathbb{S}^m}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ è un'immersione isometrica. D'altronde, le geodetiche di una sfera (munita della metrica canonica) sono tutte e sole le

circonferenze di raggio massimo (cfr. Teorema 7.7). Pertanto, se $\gamma(t)$ è una curva di \mathbb{S}^m , $\gamma(t)$ è una curva geodetica di \mathbb{S}^m se, e solo se, $\gamma(t)$ è una curva geodetica di \mathbb{S}^n . In conclusione, applicando, la Proposizione 6.67, si ottiene che \mathbb{S}^m è una sottovarietà riemanniana totalmente geodetica di \mathbb{S}^n .

Torniamo al caso di una sottovarietà riemanniana $(M, g) \hookrightarrow (\bar{M}, \bar{g})$. Sia $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Usando le notazioni di prima, localmente

$$\xi = \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} a^j \xi_j, \quad a^j \in \mathcal{F}(U).$$

Per ogni $p \in M$, al vettore $\xi_p \in \mathcal{V}_p(M)$ è associato l'endomorfismo simmetrico

$$S_{\xi_p} : T_p M \rightarrow T_p M,$$

detto *operatore forma* (o *operatore di Weingarten*), definito da

$$g_p(S_{\xi_p} X_p, Y_p) = \bar{g}_p(\alpha_p(X_p, Y_p), \xi_p).$$

In termini di derivate covarianti, l'operatore di Weingarten è dato da

$$S_{\xi_p} X_p = -(\bar{\nabla}_{X_p} \xi)^\top, \quad \text{equivalentemente} \quad S_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top. \quad (6.22)$$

Infatti, se $X_p, Y_p \in T_p M$ e Y è un campo vettoriale definito in un intorno di p con $Y(p) = Y_p$, si ha:

$$\begin{aligned} \alpha_p(X_p, Y_p) &= (\bar{\nabla}_X Y)_p^\perp = \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} \bar{g}_p(\bar{\nabla}_{X_p} Y, \xi_{jp}) \xi_{jp} \\ &= - \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} \bar{g}_p(\bar{\nabla}_{X_p} \xi_j, Y_p) \xi_{jp}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} g_p(S_{\xi_p} X_p, Y_p) &= \bar{g}_p(\alpha_p(X_p, Y_p), \xi_p) \\ &= - \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} \bar{g}_p(\bar{\nabla}_{X_p} \xi_j, Y_p) \bar{g}_p(\xi_{jp}, \xi_p) \\ &= - \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} \bar{g}_p(\bar{\nabla}_{X_p} \xi_j, Y_p) a^j(p) \\ &= - \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} \bar{g}_p(\bar{\nabla}_{X_p} a^j \xi_j, Y_p) \quad (\text{tenendo conto che } \xi_j \perp Y_p) \\ &= \bar{g}_p(-\bar{\nabla}_{X_p} \xi, Y_p) \quad \forall Y_p \in T_p M. \end{aligned}$$

Di conseguenza, $S_{\xi_p} X_p = -(\bar{\nabla}_{X_p} \xi)^\top$. Indicata con $\nabla_X^\perp \xi$ la componente normale di $\bar{\nabla}_X \xi$, dalla (6.22) si ha l'equazione di Weingarten

$$\bar{\nabla}_X \xi = -S_\xi X + \nabla_X^\perp \xi. \quad (6.23)$$

Si noti che ∇^\perp , detta *connessione normale* di M , definisce una connessione lineare nel fibrato normale $\mathcal{V}(M)$, inoltre ∇^\perp risulta compatibile con la metrica riemanniana indotta sul fibrato $\mathcal{V}(M)$ dalla metrica riemanniana \bar{g} di \bar{M} .

Caso delle sottovarietà di codimensione 1

Consideriamo il caso di (M, g) sottovarietà riemanniana n -dimensionale di (\bar{M}, \bar{g}) varietà riemanniana $(n+1)$ -dimensionale. Supponiamo che esista $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, unitario e ortogonale a M , quindi $(T_p M)^\perp = \langle \xi_p \rangle$ per ogni $p \in M$. In tal caso, la formula (6.21) del vettore curvatura media diventa

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)_p^\perp = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, \xi)_p \xi_p = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \xi, e_i)_p \xi_p$$

dove $\{e_i\}$ è una base ortonormale locale di $\mathfrak{X}(M)$, e l'operatore forma S_ξ è dato da

$$S_{\xi_p} X_p = -\bar{\nabla}_{X_p} \xi.$$

Di conseguenza,

$$H(p) = \frac{1}{n} (\text{tr} S_{\xi_p}) \xi_p.$$

Inoltre,

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_\xi \xi, \xi) = 0,$$

per cui tenendo conto della definizione di divergenza data nell'Appendice B, il vettore curvatura media è dato da

$$H = -\frac{1}{n} (\text{div} \xi) \xi.$$

La funzione

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{n} (\text{div} \xi) = \frac{1}{n} (\text{tr} S_\xi).$$

è detta *curvatura media* di (M, g) .

Caso delle sottovarietà di \mathbb{R}^n

Per una ipersuperficie regolare $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, l'operatore di Weingarten è dato da

$$S_{\xi_p} X_p = -\nabla_{X_p}^0 \xi.$$

Di conseguenza, se ∇ è la connessione di Levi-Civita dell'ipersuperficie regolare $(M, g = i^* g_0)$, l'equazione di Gauss (6.19) diventa

$$(\nabla_X^0 Y)_p = (\nabla_X Y)_p + g(S_{\xi_p} X_p, Y_p) \xi_p. \quad (6.24)$$

Per la sfera unitaria $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, il campo ξ è definito da $\xi_p = p$ e quindi l'operatore di Weingarten è dato da

$$S_{\xi_p} X_p = -\nabla_{X_p}^0 \xi = -X_p. \quad (6.25)$$

Se (M, g) è una sottovarietà riemanniana di (\mathbb{R}^n, g_0) , la formula (6.18) diventa

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt} \right)^\top. \quad (6.26)$$

In particolare se M è un'ipersuperficie di \mathbb{R}^n , $\mathcal{V}_p M$ è il sottospazio di $T_p \mathbb{R}^n$ generato da ξ_p vettore unitario normale ad M in p (ξ , in generale, è definito solo localmente), quindi $\mathcal{V}_p M$ è 1-dimensionale. In tal caso, se γ è una curva differenziabile di M e $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$, si ha

$$V(t) \text{ è parallelo lungo } \gamma \iff \frac{dV}{dt} \text{ è parallelo al campo normale } \xi_{\gamma(t)}.$$

Le stesse considerazioni valgono considerando \mathbb{R}^n con la metrica g di Minkowski, in tal caso le proiezioni sono riferite alla metrica g .

Esempio 6.69. Sia M una superficie (regolare) di \mathbb{R}^3 con la metrica g indotta da g_0 . Sia $\gamma(s)$ una curva differenziabile (regolare, cioè con $\dot{\gamma}(s) \neq 0$) di M (e quindi di \mathbb{R}^3) parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Dall'equazione (6.20) segue

$$\ddot{\gamma}(s) = \frac{D\dot{\gamma}}{ds} + g_0(\ddot{\gamma}(s), \xi_{\gamma(s)}) \xi_{\gamma(s)}. \quad (6.27)$$

Siccome $k_g(s) = \|\frac{D\dot{\gamma}}{ds}\|$ e $k_n(s) = |g(\ddot{\gamma}(s), \xi_{\gamma(s)})|$ sono rispettivamente la curvatura geodetica e la curvatura normale di $\gamma(s)$ come curva di M , e $k(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$ è la curvatura di $\gamma(s)$ come curva di \mathbb{R}^3 , dall'equazione (6.27) segue la seguente relazione fra le tre curvature:

$$k^2(s) = k_g^2(s) + k_n^2(s).$$

In particolare, se $\gamma(s)$ è un parallelo di colatitudine φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) della sfera canonica \mathbb{S}^2 di raggio R , quindi $\gamma(s)$ ha raggio $r = R \sin \varphi$, allora $k(s) = 1/(R \sin \varphi)$ e $k_n(s) = k(s) \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = 1/R$. Di conseguenza, la curvatura geodetica è data da

$$k_g(p) = \text{cost.} = \frac{\cos \varphi}{R \sin \varphi} \quad \forall p \in \gamma.$$

Proposizione 6.70. Siano M_1, M_2 due superfici di \mathbb{R}^3 , ognuna munita della metrica riemanniana canonica. Se M_1, M_2 sono tangenti lungo una curva differenziabile σ , allora il trasporto parallelo lungo $\sigma(t)$ in M_1 coincide con il trasporto parallelo lungo $\sigma(t)$ in M_2 .

Dimostrazione. Dire che M_1, M_2 sono tangenti lungo una curva differenziabile σ , vuol dire che esistono $\sigma_1 : I \rightarrow M_1, \sigma_2 : I \rightarrow M_2$, curve differenziabili tali che $\sigma_1(t) = \sigma(t) = \sigma_2(t)$ e $T_{\sigma(t)}M_1 = T_{\sigma(t)}M_2$ per ogni $t \in I$. Quindi, $\mathfrak{X}(\sigma_1) = \mathfrak{X}(\sigma_2)$. Sia $\frac{D_i}{dt}$, ($i = 1, 2$) l'operatore di derivazione covariante su M_i . Se $V \in \mathfrak{X}(\sigma_1) = \mathfrak{X}(\sigma_2)$, dalla (6.26) si ottiene $\frac{D_1V}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)^\top = \frac{D_2V}{dt}$. Dunque, $V(t)$ è parallelo lungo $\sigma(t)$ in M_1 se, e solo se, $V(t)$ è parallelo lungo $\sigma(t)$ in M_2 . \square

La proposizione precedente offre una visualizzazione geometrica del trasporto parallelo per superfici di \mathbb{R}^3 . Sia $\sigma(t), t \in I$, una curva differenziabile di una superficie di \mathbb{R}^3 . Consideriamo la famiglia $\{T_{\sigma(t)}M\}_{t \in I}$ dei piani tangenti a M lungo la curva σ . Per $t_0, t \in I$, l'intersezione del piano tangente in $\sigma(t_0)$ e del piano tangente in $\sigma(t)$ sarà in generale una retta. Il suo limite, per $t \rightarrow t_0$, sarà una retta passante per $\sigma(t_0)$ nel piano tangente $T_{\sigma(t_0)}M$. La famiglia di queste rette, al variare di $t_0 \in I$, costituisce una superficie rigata sviluppabile Σ (ossia c'è un unico piano tangente lungo i punti di una stessa retta generatrice), detta *superficie involuppo* di questa famiglia di piani, che risulta tangente a M lungo σ (cfr. Do Carmo [30], p.196). Poiché Σ è localmente isometrica al piano euclideo, la stessa superficie può localmente srotolarsi sul piano euclideo, e sul piano euclideo il trasporto parallelo non è altro che l'ordinaria traslazione. Un cono circolare retto e un cilindro circolare retto sono esempi di superfici rigate sviluppabili.

Esempio 6.71. Trasporto parallelo sul cono di rotazione.

Consideriamo la superficie $\Sigma : z = k\sqrt{x^2 + y^2}, k > 0, (x, y) \neq (0, 0)$. Σ è un semicono di vertice l'origine O e angolo di apertura 2α definito da $\tan \alpha = \frac{1}{k}$. Σ ha equazioni parametriche

$$x = \rho \sin \alpha \cos \beta, \quad y = \rho \sin \alpha \sin \beta, \quad z = \rho \cos \alpha,$$

dove $\rho > 0$ e $\beta \in [0, 2\pi[$. Facciamo vedere che la superficie Σ , munita della metrica riemanniana indotta da quella euclidea di \mathbb{R}^3 , è localmente isometrica al piano euclideo. Nel seguito denotiamo con g_0 sia la metrica euclidea di \mathbb{R}^2 che quella di \mathbb{R}^3 . Sia U l'aperto del piano espresso in coordinate polari (ρ, ϑ) da

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad \text{dove } \rho > 0 \text{ e } \vartheta \in]0, 2\pi \sin \alpha[.$$

È facile vedere che la metrica euclidea $g_0 = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ sull'aperto U , rispetto alle coordinate polari (ρ, ϑ) , è data da

$$g_0 = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\vartheta \otimes d\vartheta.$$

Quando ϑ varia nell'intervallo $]0, 2\pi \sin \alpha[$, l'angolo $\beta = \frac{\vartheta}{\sin \alpha}$ descrive l'intervallo $]0, 2\pi[$. Quindi, se r_0 è la generatrice di Σ ottenuta per $\beta = 0$, l'applicazione

$$F : U \rightarrow \Sigma \setminus r_0, \quad (\rho, \vartheta) \mapsto \left(\rho \sin \alpha \cos\left(\frac{\vartheta}{\sin \alpha}\right), \rho \sin \alpha \sin\left(\frac{\vartheta}{\sin \alpha}\right), \rho \cos \alpha\right),$$

è chiaramente un diffeomorfismo, in termini di coordinate (globali)

$$F : (\rho, \vartheta) \mapsto \left(\rho, \beta = \frac{\vartheta}{\sin \alpha}\right).$$

Sia $g = i^*g_0$ la metrica riemanniana di $\Sigma \setminus r_0$, dove $i : \Sigma \setminus r_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Allora, la metrica $h = F^*g = F^*i^*g_0 = (i \circ F)^*g_0$, dove $i : U \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, ha coefficienti

$$h_{11} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F^i}{\partial \rho} \right)^2 = 1, \quad h_{22} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F^i}{\partial \vartheta} \right)^2 = \rho^2, \quad h_{12} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F^i}{\partial \rho} \frac{\partial F^i}{\partial \vartheta} = 0.$$

Pertanto $F : (U, g_0) \rightarrow (\Sigma \setminus r_0, g)$ è una isometria e quindi Σ è localmente isometrica al piano euclideo. Determiniamo ora il trasporto parallelo τ_t lungo un parallelo di Σ . Siano p un fissato punto di Σ , con $\text{dist}(O, p) = \rho$, e σ il parallelo di Σ passante per p con $\sigma(0) = \sigma(1) = p$. Sia $V_0 \in T_p\Sigma$, vogliamo determinare il vettore $V_1 \in T_p\Sigma$ ottenuto da V_0 per trasporto parallelo lungo σ . Σ è una superficie localmente isometrica al piano euclideo. Sia r_0 la generatrice per p , $\Sigma \setminus r_0$ sviluppata nel piano diventa l'aperto U (cfr. Figura 6.4), ossia il settore angolare definito da: $\rho > 0$ e $\vartheta \in]0, 2\pi \sin \alpha[$. In U il parallelo σ è rappresentato da un arco di circonferenza γ . Se δ è l'angolo sotteso dall'arco γ , siccome $\rho\delta = L(\gamma) = L(\sigma) = 2\pi\rho\sin\alpha$, si ha:

$$\delta = 2\pi\sin\alpha.$$

Sia V_1 il vettore ottenuto trasportando per parallelismo V_0 lungo γ nel piano, quindi effettuando semplicemente una traslazione. Quando riavvolgiamo il settore angolare sul cono (cfr. Figura 6.4), notiamo che V_1 è ottenuto da V_0 con una rotazione (nel verso determinato da $\dot{\sigma}(t)$) di angolo

$$a = 2\pi - \delta = 2\pi(1 - \sin\alpha).$$

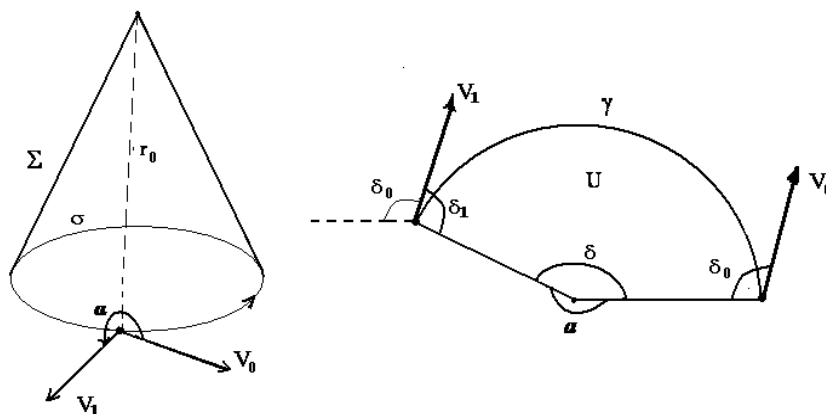


Figura 6.4: *Trasporto parallelo sul cono.*

Si noti che l'angolo a non dipende dal particolare parallelo considerato, ma solo dall'apertura del cono. Se α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) tende a $\frac{\pi}{2}$, allora a tende a 0. In particolare, se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, Σ degenera in un piano.

Esempio 6.72. Trasporto parallelo sulla sfera.

Sia σ un parallelo di colatitudine φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) della sfera canonica \mathbb{S}^2 , con $\sigma(0) = \sigma(1) = p$. Fissato $V_0 \in T_p\mathbb{S}^2$, determiniamo $V_1 = \tau_1(V_0)$, dove τ_1 è lo spostamento parallelo da $\sigma(0) = p$ a $\sigma(1) = p$ lungo σ . Sia Σ il semicono tangente alla sfera \mathbb{S}^2 lungo σ .

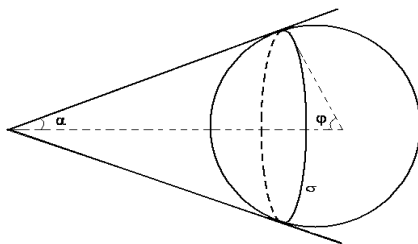


Figura 6.5: Semicono tangente alla sfera.

L'angolo di apertura di Σ è 2α , dove $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (cfr. Figura 6.5). Applicando la Proposizione 6.70, e quanto visto nell'esempio precedente, V_1 è ottenuto da V_0 con una rotazione (nel verso determinato da $\dot{\sigma}(t)$) di angolo

$$a = 2\pi \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) = 2\pi(1 - \cos\varphi).$$

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, allora $a = 2\pi$ e quindi $V_1 = V_0$ (in tal caso σ è un equatore e Σ un cilindro circolare retto). Se $\varphi \rightarrow 0$, allora $a \rightarrow 0$.

6.8 Tensori fondamentali su una distribuzione

Definizione 6.73. Una *distribuzione* D di dimensione r su una varietà differenziabile M di dimensione n ($r < n$) è una corrispondenza che ad ogni punto $p \in M$ associa un sottospazio r -dimensionale D_p di T_pM .

Una distribuzione D si dice *differenziabile* se per ogni $p \in M$ esistono un intorno U di p ed r campi di vettori linearmente indipendenti $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$ che definiscono una base di D_q per ogni $q \in U$. L'insieme $\{X_1, \dots, X_r\}$ è detto *base locale* della distribuzione D . Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X_p \neq 0$ per ogni $p \in M$, definisce una distribuzione differenziabile 1-dimensionale su M . Sia D una distribuzione differenziabile r -dimensionale. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ appartiene alla distribuzione D se $X_p \in D_p$ per ogni $p \in M$. Indichiamo con $\Gamma(D)$ l'insieme di tutti i campi di vettori differenziabile di D . Diremo che la distribuzione D è *involutiva* se per ogni punto $p \in M$, esiste U intorno di p ed esistono $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$ che costituiscono una base locale di D , tale che

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k X_k \quad 1 \leq i, j \leq r.$$

Le c_{ij}^k sono funzioni differenziabili (in generale non costanti) definite nell'intorno considerato. Equivalentemente,

$$D \text{ è involutiva} \Leftrightarrow [X, Y] \in \Gamma(D) \quad \forall X, Y \in \Gamma(D).$$

In analogia alle curve integrali di un campo di vettori (distribuzione 1-dimensionale) abbiamo la nozione di varietà integrale di una distribuzione. Sia D una distribuzione differenziabile su M . Una sottovarietà (connessa) N di M si dice *varietà integrale* di D se $\forall q \in N : T_q N \subset D_q$. Si noti che una varietà integrale può avere dimensione minore di quella di D .

Esempio 6.74. Sia D la distribuzione su $M = \mathbb{R}^{n+k}$ generata da $E_i = \partial/\partial x_i, i = 1, \dots, n$; D associa, ad ogni punto $p \in M$, il sottospazio D_p costituito da tutti i vettori per p e paralleli a \mathbb{R}^n . Tale distribuzione è involutiva poiché $[E_i, E_j] = 0$.

La situazione dell'esempio precedente è tipica, almeno localmente, delle distribuzioni involutive. Sia D una distribuzione differenziabile su M di dimensione $r < n$. Diciamo che D è una *distribuzione integrabile*, o completamente integrabile, se ogni punto $p \in M$ ha un intorno coordinato (U, φ) tale che, se (x_1, \dots, x_n) sono le coordinate locali, allora i vettori $\partial/\partial x_i$ ($i = 1, \dots, r$) formano una base locale su U per D . Una distribuzione r -dimensionale integrabile si dice che definisce una *fogliazione* di codimensione $n - r$ di M . In questo caso, per ogni punto $q \in U$, esiste una varietà integrale r -dimensionale N (detta *foglia* per q) tale che $T_q N = D_q$, quindi lo spazio tangente ad N è esattamente D in ognuno dei suoi punti. Infatti, se (a_1, \dots, a_n) denotano le coordinate di q , una varietà integrale per q è data dall'insieme N di tutti i punti di U le cui coordinate soddisfano:

$$x_{r+1} = a_{r+1}, \dots, x_n = a_n.$$

Queste equazioni definiscono un sottospazio r -dimensionale di \mathbb{R}^n , pertanto $N = \varphi^{-1}\{x \in \varphi(U) : x_j = a_j, j = r + 1, \dots, n\}$ è una fetta di U . Naturalmente, in questo caso la distribuzione è involutiva in quanto $[E_i, E_j] = [\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j] = 0, 1 \leq i, j \leq r$. Quindi, una distribuzione integrabile è involutiva. Viceversa, abbiamo

Teorema 6.75. (di Frobenius, cfr. [14], p. 159) *Una distribuzione D su una varietà M è integrabile se, e solo se, è involutiva.*

Esistono distribuzioni che non sono involutive. Su $M = \mathbb{R}^3$, la distribuzione generata da $X_1 = x_3(\partial/\partial x_1) + \partial/\partial x_3$ e $X_2 = \partial/\partial x_2 + \partial/\partial x_3$ non è involutiva (infatti $[X_1, X_2] = -\partial/\partial x_1$). Una distribuzione D di dimensione 1 è un campo di rette, cioè D_p è un sottospazio 1-dimensionale. Una base locale è data da un campo di vettori X , privo di zeri, che appartiene ad D in ogni punto e, naturalmente, una curva integrale di X è una varietà integrale di D . Sappiamo che tali varietà integrali passanti per un dato punto, esistono e sono uniche. Una tale distribuzione è involutiva in quanto $[X, X] = 0$. Sia η una 1-forma differenziale su M . Indichiamo con D la distribuzione definita dal $\ker \eta$. Siccome il differenziale esterno d sulle 1-forme è definito da:

$$(d\eta)(X, Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y]),$$

dal Teorema di Frobenius segue che la distribuzione D è integrabile se, e solo se, $d\eta|_D = 0$. Una *varietà integrale massimale* di una distribuzione involutiva S è una varietà integrale (connessa) N che contiene ogni varietà integrale (connessa) di S che ha un punto in comune con essa. Naturalmente, per quanto osservato precedentemente, una varietà integrale massimale ha la stessa dimensione di S . Si può dimostrare che per ogni punto $p \in M$ passa una ed una sola sottovarietà integrale massimale della distribuzione involutiva.

Esercizio 6.76. Si consideri su $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ la distribuzione 2-dimensionale S definita da $S_p = \{V \in T_p M : g_0(V, p) = 0\}$. Verificare che S è involutiva e trovare le varietà integrali.

Discutiamo ora alcuni tensori fondamentali associati a una distribuzione (differenziabile) r -dimensionale \mathcal{V} su una varietà riemanniana (M, g) . Poiché M è riemanniana, possiamo considerare la distribuzione \mathcal{H} ortogonale a \mathcal{V} . Quindi, per ogni $p \in M$:

$$T_p M = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{H}_p, \quad \mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_p)^\perp.$$

Chiamiamo \mathcal{V} distribuzione verticale e \mathcal{H} distribuzione orizzontale, e denotiamo con v la proiezione su \mathcal{V} e con h la proiezione su \mathcal{H} . La *seconda forma fondamentale* di \mathcal{V} è il tensore A^v , in generale non simmetrico, definito da

$$A^v(X, Y) = A_X^v Y := h(\nabla_{vX} vY) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

dove ∇ è la connessione di Levi-Civita di (M, g) . La *seconda forma fondamentale simmetrizzata* di \mathcal{V} è il tensore B^v definito da

$$B_X^v Y = \frac{1}{2}(A_X^v Y + A_Y^v X) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Il tensore di integrabilità di \mathcal{V} è il tensore I^v definito da

$$I^v(X, Y) = A_X^v Y - A_Y^v X = h[vX, vY] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Quando \mathcal{V} è integrabile, cioè $I^v = 0$, $B^v = A^v$ è l'usuale seconda forma fondamentale delle foglie pensate come sottovarietà di M . Anche se \mathcal{V} non è integrabile, il *vettore curvatura media* di \mathcal{V} è il campo vettoriale (orizzontale) μ^v definito da

$$\mu^v = \frac{1}{r} \operatorname{tr} B^v = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r h(\nabla_{E_i} E_i),$$

dove $\{E_1, \dots, E_r\}$ è una base ortonormale locale di $\Gamma(\mathcal{V})$, cioè per ogni $p \in U$ (aperto di M), $\{(E_1)_p, \dots, (E_r)_p\}$ è una base ortonormale di \mathcal{V}_p . La distribuzione \mathcal{V} è detta *distribuzione minimale* se, per ogni $p \in M$, il vettore curvatura media $\mu^v(p) = 0$, mentre è detta *distribuzione totalmente geodetica* se la seconda forma fondamentale simmetrizzata $B_p^v = 0$ per ogni $p \in M$. Siccome

$$A^v(E, F) = B^v(E, F) + \frac{1}{2}I^v(E, F) \quad \forall E, F \in \Gamma(\mathcal{V}),$$

allora

$$A^v = 0 \quad \text{se, e solo se, } \mathcal{V} \text{ è integrabile e totalmente geodetica.}$$

La *connessione parziale di Bott* su \mathcal{H} (lungo \mathcal{V}) è l'applicazione

$$\nabla^{oh} : \Gamma(\mathcal{V}) \times \Gamma(\mathcal{H}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{H}), (V, F) \mapsto \nabla_V^{oh} F = h(\mathcal{L}_V F) = h([V, F]).$$

La *connessione normale* ∇^h è definita da

$$\nabla_V^h F = h(\nabla_V F) \quad (V \in \Gamma(\mathcal{V}), F \in \Gamma(\mathcal{H})).$$

Risulta che le due connessioni coincidono, cioè $\nabla_V^{oh} F = \nabla_V^h F$ se e solo se \mathcal{H} è integrabile e \mathcal{V} è riemanniana (cioè, $(\mathcal{L}_V g)(E, F) = 0$ per ogni $V \in \Gamma(\mathcal{V}), E, F \in \Gamma(\mathcal{H})$). Si noti che in questa discussione i ruoli di \mathcal{H} e \mathcal{V} si possono scambiare.

Se $\pi : (\bar{M}, \bar{g}) \rightarrow (M, g)$ è una sommersione riemanniana (cfr. Sezione 4.3), allora su \bar{M} abbiamo una distribuzione orizzontale \mathcal{H} e una distribuzione verticale \mathcal{V} . B. O'Neill introdusse due tensori fondamentali A e T per descrivere la geometria della sommersione. Se $\bar{\nabla}$ è la connessione di Levi-Civita di \bar{M} , per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(\bar{M})$:

$$A_X Y = h(\bar{\nabla}_{hX} vY) + v(\bar{\nabla}_{hX} hY), \quad T_X Y = h(\bar{\nabla}_{vX} vY) + v(\bar{\nabla}_{vX} hY).$$

Il tensore A è una ostruzione all'integrabilità della distribuzione orizzontale, ed è detto *tensore di integrabilità* di π . L'annullarsi del tensore T ci dice che le fibre della sommersione sono totalmente geodetiche.

6.9 Derivata covariante di tensori

Lunghezza di tensori

Sia (M, g) una varietà riemanniana. La corrispondenza

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Lambda^1(M) = \mathfrak{X}^*(M), \quad X \longmapsto \omega, \quad \text{tale che } \omega(Y) = g(X, Y),$$

definisce un isomorfismo che permette di identificare in modo naturale $\mathfrak{X}(M)$ con $\Lambda^1(M)$. Se $X = \sum X^i e_i$ e $\omega = g(X, \cdot) = \sum \omega_i \theta^i$, con (θ^i) base (locale) duale della base (e_i) , allora

$$\omega_i = \sum_j g_{ij} X^j \quad \text{e} \quad X^i = \sum_j g^{ij} \omega_j, \quad \text{dove } g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

La stessa procedura può essere applicata ai tensori di tipo (s, r) , in questo modo tutti gli spazi $\mathfrak{X}^{s,r}(M)$, con $s + r = p$, sono isomorfi. Questi isomorfismi commutano con la derivata covariante che definiremo nella sottosezione successiva. Se $T \in \mathfrak{X}^{s,r}(M)$ ha componenti $T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$, allora il corrispondente tensore, che indichiamo ancora con T , di $\mathfrak{X}^{r,s}(M)$ ha componenti

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum T_{k_1 \dots k_r}^{h_1 \dots h_s} g_{j_1 h_1} \dots g_{j_s h_s} g^{k_1 i_1} \dots g^{k_r i_r}.$$

In particolare se $g_{ij} = \delta_{ij}$, cioè se la base locale (e_i) è ortonormale, allora $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$. Se $T, S \in T_p^{s,r} M$,

$$\langle T, S \rangle := \sum T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} S_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$$

definisce un prodotto scalare su $T_p^{s,r} M$. La *norma*, o *lunghezza*, è definita da

$$\|T\| = (\langle T, T \rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

In particolare, se T, S sono due tensori covarianti dello stesso tipo e le componenti sono considerate rispetto a una base ortonormale, si ha

$$\langle T, S \rangle = \sum T_{ij \dots} S_{ij \dots}, \quad \|T\|^2 = \langle T, T \rangle = \sum (T_{ij \dots})^2.$$

Esercizio 6.77. Siano S, T due tensori covarianti dello stesso tipo su (M, g) , con S simmetrico e T antisimmetrico. Si verifichi che

$$\langle T, S \rangle = 0.$$

Inoltre, se T è di tipo $(1, 1)$ e (E_1, \dots, E_n) è una base ortonormale, si verifichi che $\|T\|^2 = \sum_i \|T(E_i)\|^2$.

Derivata covariante di tensori

Sia ∇ la connessione di Levi-Civita associata alla varietà riemanniana (M, g) . Se S è un tensore di tipo (s, r) , ∇S è il tensore di tipo $(s, r + 1)$ definito da:

$$\begin{aligned} (\nabla S)(\theta^1, \dots, \theta^s, X, Y_1, \dots, Y_r) &:= (\nabla_X S)(\theta^1, \dots, \theta^s, Y_1, \dots, Y_r) \\ &= \nabla_X S(\theta^1, \dots, \theta^s, Y_1, \dots, Y_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r S(\theta^1, \dots, \theta^s, Y_1, \dots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^s S(\theta^1, \dots, \theta^{i-1}, \nabla_X \theta^i, \theta^{i+1}, \dots, \theta^s, Y_1, \dots, Y_r), \end{aligned}$$

dove $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ è la base (locale) duale di una fissata base (locale) (e_1, \dots, e_n) di $\mathfrak{X}(M)$. Nel caso riemanniano, come osservato, un tensore di tipo (s, r) si può sempre identificare con un tensore di tipo $(s - k, r + k)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ tale che $r + k, s - k \geq 0$. Ciò è conseguenza del fatto, già osservato, che $\mathfrak{X}(M)$ si può identificare in modo naturale con $\Lambda^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$. Quindi, possiamo limitarci a considerare tensori S del tipo $(0, r)$ oppure di tipo $(1, r)$, in tal caso per il tensore ∇S si ha:

$$\begin{aligned} (\nabla S)(X, Y_1, \dots, Y_r) &:= (\nabla_X S)(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla_X S(Y_1, \dots, Y_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r S(Y_1, \dots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_r). \end{aligned}$$

Valgono le seguenti proprietà :

$$\begin{aligned}\nabla_X \langle T, S \rangle &= X(\langle T, S \rangle) = \langle \nabla_X T, S \rangle + \langle T, \nabla_X S \rangle, \\ \nabla_X(S_1 \otimes S_2) &= (\nabla_X S_1) \otimes S_2 + S_1 \otimes \nabla_X S_2, \\ \nabla_X(\text{tr} S) &= \text{tr} \nabla_X S,\end{aligned}$$

dove tr denota la traccia rispetto a una coppia di indici. Inoltre, se S_1 e S_2 sono tensori di tipo $(1, 1)$ allora il tensore $S_1 S_2 := S_1 \circ S_2$ è ancora di tipo $(1, 1)$ e

$$\nabla_X(S_1 S_2) = (\nabla_X S_1)S_2 + S_1(\nabla_X S_2).$$

Tensori paralleli

Mentre i campi di vettori paralleli rispetto alla connessione di Levi-Civita sono rari. Ciò non accade, in generale, per i campi tensoriali. Un campo tensoriale S , di tipo $(0, r)$ o $(1, r)$, lungo una curva differenziabile $\gamma(t)$ è un'applicazione che associa ad ogni $t \in I$ un tensore $S(t)$ del tipo $(0, r)$ o $(1, r)$ sullo spazio tangente $T_{\gamma(t)}M$ che dipende differenziabilmente da t , nel senso che se $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$, $S(t) = S(X_1(t), \dots, X_r(t))$ è differenziabile. Se $f(t)$ è una funzione differenziabile, si pone $\frac{Df}{dt} = \frac{df}{dt}$. Possiamo allora estendere la derivata covariante ai campi tensoriali lungo γ ponendo:

$$\begin{aligned}\frac{DS}{dt}(X_1(t), \dots, X_r(t)) &= \frac{D}{dt}S(X_1(t), \dots, X_r(t)) \\ &\quad - \sum_r^{i=1} S(X_1(t), \dots, \frac{DX_i}{dt}, \dots, X_r(t)).\end{aligned}$$

DS/dt è un campo tensoriale dello stesso tipo di S . Diremo che S è un *tensore parallelo lungo la curva γ* se $DS/dt = 0$. Come per i campi di vettori paralleli, fissato un tensore S_0 in $\gamma(0)$, si dimostra che esiste un solo campo tensoriale $S(t)$ parallelo lungo γ tale che $S(0) = S_0$. Inoltre, indicato con τ_t lo spostamento parallelo lungo γ e posto

$$\tau_t(S_0)(V_1, \dots, V_r) := S_0(\tau_t^{-1}V_1, \dots, \tau_t^{-1}V_r) \quad \text{se } S_0 \text{ è di tipo } (0, r),$$

$$\tau_t(S_0)(V_1, \dots, V_r) := \tau_t(S_0(\tau_t^{-1}V_1, \dots, \tau_t^{-1}V_r)) \quad \text{se } S_0 \text{ è di tipo } (1, r),$$

dove $V_1, \dots, V_r \in T_{\gamma(t)}M$, risulta $S(t) = \tau_t(S_0)$. Si noti che: se S è un tensore di tipo $(0, r)$ definito, mediante la metrica g , da un tensore S di tipo $(1, r-1)$, allora

$$\frac{DS}{dt}(X_1(t), \dots, X_r(t)) = g_{\gamma(t)}\left(\frac{DS}{dt}(X_1(t), \dots, X_{r-1}(t)), X_r(t)\right).$$

Se S è un tensore di tipo $(1, r)$ o $(0, r)$ su M , e γ una curva differenziabile, allora

$$\frac{DS}{dt}(0) = \nabla_{\dot{\gamma}(0)}S.$$

Un campo tensoriale S su M è *invariante per parallelismo*, oppure è *parallelo*, se per ogni curva differenziabile γ di M si ha: $S(t) = S(\gamma(t)) = \tau_t(S_0)$, dove $S_0 = S(0)$. Segue facilmente che:

$$S \text{ è invariante per parallelismo} \iff \nabla_X S = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Derivata di Lie di un tensore

Nella Sezione 2.7 la derivata di Lie di un tensore S di tipo $(0, p)$ (su una varietà differenziabile M) è stata definita da:

$$(\mathcal{L}_\xi S)(Y_1, \dots, Y_p) = \mathcal{L}_\xi S(Y_1, \dots, Y_p) - \sum_{i=1}^p S(Y_1, \dots, Y_{i-1}, [\xi, Y_i], Y_{i+1}, \dots, Y_p).$$

Se g è una metrica riemanniana su M e ∇ la corrispondente connessione di Levi-Civita, la precedente formula diventa:

$$(\mathcal{L}_\xi S)(Y_1, \dots, Y_p) = (\nabla_\xi S)(Y_1, \dots, Y_p) + \sum_{i=1}^p S(Y_1, \dots, Y_{i-1}, \nabla_{Y_i} \xi, Y_{i+1}, \dots, Y_p).$$

In particolare:

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi),$$

quindi ξ è di *Killing* (cfr. Capitolo 9) se, e solo se, l'operatore $\nabla \xi$ è antisimmetrico. Se ϕ è un tensore di tipo $(1, 1)$:

$$(\mathcal{L}_\xi \phi)Y = (\nabla_\xi \phi)Y - \nabla_{\phi Y} \xi + \phi \nabla_Y \xi.$$

Se ω è la 1-forma g -duale di ξ , $\omega = g(\cdot, \xi)$, allora:

$$(\mathcal{L}_\xi \omega)Y = g(\nabla_\xi \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, \xi).$$

Se M è orientabile e Ω_g è la n -forma di volume riemanniano (cfr. Appendice A), allora (cfr. Appendice B)

$$\nabla_\xi \Omega_g = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_\xi \Omega_g = (\operatorname{div} \xi) \Omega_g.$$