Capitolo 1

Varietà e applicazioni differenziabili

1.1 Varietà differenziabili

Il concetto di varietà differenziabile viene introdotto come una naturale generalizzazione del concetto di superficie regolare. Quindi, iniziamo ricordando la definizione di *superficie regolare di* $\mathbb{R}^3$.

Sia M un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ con la topologia indotta. Questo sottospazio M è detto superficie regolare se ha una parametrizzazione regolare nell'intorno di ogni suo punto, ossia:

$\forall p_0 \in M\ \exists V$ intorno aperto di p_0 in $\mathbb{R}^3$, $\exists D$ aperto di $\mathbb{R}^2$, tali che

a) $M \cap V : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \qquad (u, v) \in D,$

con $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ funzioni differenziabili;

b) $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ ha rango 2 in ogni punto di D;

c) $\varphi : U = V \cap M \to D, \quad p = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mapsto (u, v),$ è un omeomorfimo.

L'aperto $U = V \cap M$ è detto dominio (o intorno) parametrizzato e (u, v) parametri. Un aspetto importante della definizione di superficie regolare è che se consideriamo due parametrizzazioni regolari $((u, v), \varphi)$ e $((u', v'), \varphi')$ con domini a intersezione non vuota, allora il cambio di parametrizzazione

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U')(\subset \mathbb{R}^2) \to \varphi'(U \cap U') \subset \mathbb{R}^2$$

è differenziabile (cfr. [30], p.70). Analogamente per l'inversa. Altro aspetto importante di questa nozione, che però è un difetto, è la dipendenza dallo spazio $\mathbb{R}^3$ in cui è immersa la superficie. In altre parole, la definizione di superficie regolare non ha carattere intrinseco.

Come detto all'inizio, il concetto di varietà differenziabile è una naturale astrazione e generalizzazione del concetto di superficie regolare, e quindi viene introdotto in modo che sia possibile l'*impiego intrinseco* degli strumenti dell'analisi ordinaria. Questo concetto è stato introdotto per la prima volta da B. Riemann nel 1854 senza una precisa definizione. Hermann Weyl nel 1913 fu il primo a introdurre il concetto in termini più precisi. Il concetto di varietà differenziabile divenne completamente chiaro nel famoso articolo di Hassler Whitney [119].

Definizione 1.1. Una varietà topologica è uno spazio topologico di Hausdorff M che soddisfa la seguente proprietà: per ogni punto $p_0 \in M$ esiste un intorno aperto U omeomorfo a un aperto D di $\mathbb{R}^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. L'omeomorfismo $\phi : U \to D = \phi(U), p \mapsto \phi(p) = (x_1, ..., x_n)$, si dice *applicazione coordinata*, la coppia (U, ϕ) si dice carta locale e $(x_1, ..., x_n)$ si dicono *coordinate locali* del punto p.

Dalla definizione segue che i domini di tutte le carte ricoprono lo spazio M. L'intero $n = n(p_0)$ si dice dimensione della varietà M in p_0. La dimensione $n = n(p)$ è costante sulle componenti connesse di M. In particolare, se M è connessa, l'intero n è detto *dimensione* della varietà. Nel seguito, le varietà che si considerano si assumeranno sempre connesse. Inoltre, col termine differenziabile intenderemo sempre di classe C^∞.

Osservazione 1.2. Ricordiamo alcune nozioni dalla topologia generale. Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso per archi* se ogni punto $x \in X$ possiede un sistema fondamentale di intorni aperti connessi per archi. X si dice *localmente semplicemente connesso* se ogni punto $x \in X$ è contenuto in un aperto U tale che $\pi_1(U, x) = 0$. Se X è uno spazio topologico connesso per archi, localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso, allora X possiede un (unico) rivestimento universale $\tilde{X}$. L'unicità del rivestimento significa che se $p_1 : (Y_1, y_1) \to (X, x_0)$ e $p_2 : (Y_2, y_2) \to (X, x_0)$ sono due rivestimenti universali, quindi due rivestimenti con Y_1, Y_2 semplicemente connessi, allora esiste un omeomorfismo $\phi : (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$ tale che $p_2 \circ \phi = p_1$. In particolare, ogni varietà topologica (connessa) possiede un (unico) rivestimento universale $\tilde{M}$.

Definizione 1.3. Un atlante differenziabile su una varietà topologica M, $\dim M = n$, è una famiglia di carte locali $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ che verifica le seguenti proprietà:
1) i domini delle carte ricoprono M, cioè $M = \cup_i U_i$;
2) per ogni $i, j \in I$, con $U_i \cap U_j$ non vuoto, le applicazioni

$$\begin{aligned} &\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j), \\ &\quad (x_1, ..., x_n) = \phi_i(p) \mapsto (y_1, ..., y_n) = \phi_j(p), \end{aligned}$$

e

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j),$$
$$(y_1, ..., y_n) = \phi_j(p) \mapsto (x_1, ..., x_n) = \phi_i(p),$$

sono applicazioni differenziabili tra aperti di $\mathbb{R}^n$ (cfr. Figura 1.1). In altre parole, la proprietà 2) ci dice che il cambiamento di coordinate avviene con applicazioni differenziabili.

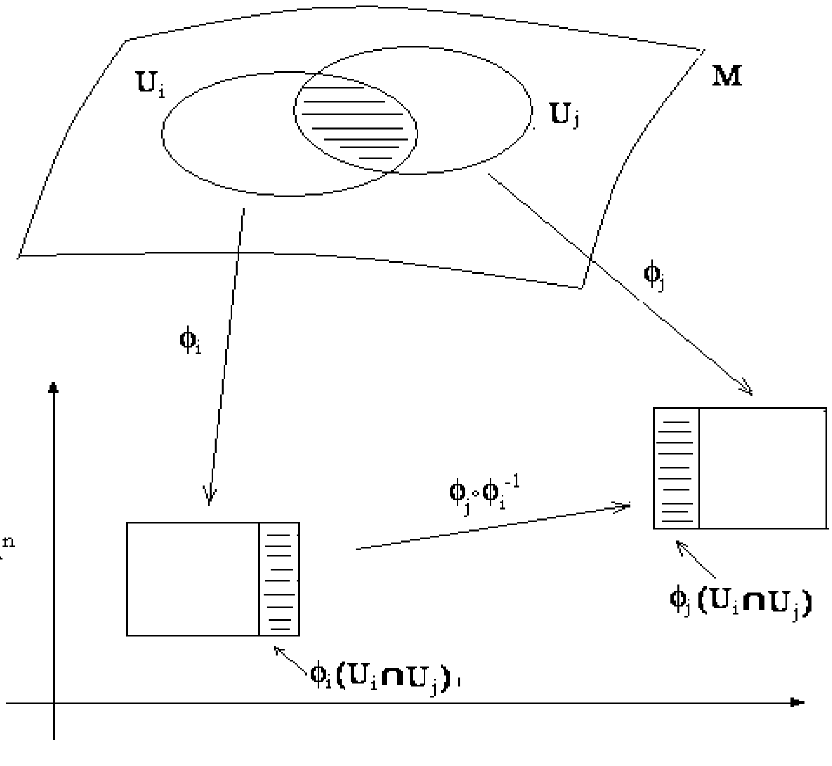


Figura 1.1: Cambiamento di coordinate.

Due atlanti differenziabili $\mathbb{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ e $\mathbb{A}' = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ su una varietà topologica M si dicono compatibili se $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}'$ è ancora un atlante differenziabile di M. La relazione di compatibilità tra atlanti differenziabili è una relazione di equivalenza, e una *struttura differenziabile* su M è una classe di equivalenza di atlanti differenziabili compatibili.

Definizione 1.4. Una varietà differenziabile è una varietà topologica M munita di una struttura differenziabile.

Naturalmente per avere una varietà differenziabile basta assegnare su una varietà topologica un atlante differenziabile. Di conseguenza, una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ è chiaramente un esempio di varietà differenziabile di dimensione 2.

Osservazione 1.5. Se nelle definizioni precedenti invece di considerare funzioni di classe C^∞ si considerano funzioni di classe C^ω si ha la nozione di *varietà analitica*. Inoltre, sempre con riferimento alle definizioni precedenti, se si sostituisce $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{C}^n$ e funzioni di classe C^∞ con funzioni olomorfe, si ha la nozione di *varietà complessa* di dimensione complessa n. Naturalmente una varietà complessa di dimensione complessa n è una varietà differenziabile di dimensione reale $2n$. Per la nozione di varietà differenziabile con bordo si rinvia, ad esempio, a [14] e [28].

Se M è una varietà differenziabile, $\mathbb{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ un suo atlante differenziabile e A un aperto di M, allora A è una varietà differenziabile con la struttura differenziabile definita dall'atlante $\mathbb{A}' = \left\{(U_i', \phi_i')\right\}_{i\in I}$, dove $U_i' = U_i \cap A$ e $\phi_i' = \phi_{i|U_i'}$. L'aperto A munito di questa struttura differenziabile è detto *sottovarietà aperta* di M, $\dim A = \dim M$.

Nel seguito, quando considereremo una carta locale, questa sarà sempre una carta ammissibile, ossia appartenente a qualche atlante della struttura differenziabile di M. Si noti che se (U, ϕ) è una carta locale ammissibile di M ed $f : \phi(U) \to D$ (aperto di $\mathbb{R}^n$) è un diffeomorfismo, allora $(U, f \circ \phi)$ è ancora una carta ammissibile.

Proposizione 1.6. *Sia M una varietà differenziabile,* $\dim M = n$. *Allora, per ogni fissato punto $p_0 \in M$ esiste sempre una carta locale (U, φ) con $p_0 \in U$, $\varphi(p_0) = (0, ..., 0)$ e $\varphi(U) = B(0, r)$ (palla aperta di centro l'origine e raggio r di $\mathbb{R}^n$).*

Dimostrazione. Sia $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ una carta locale con $p_0 \in \tilde{U}$ e $x_0 = \tilde{\varphi}(p_0) \in \tilde{\varphi}(\tilde{U})$. Siccome $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$, esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset \tilde{\varphi}(\tilde{U})$. La traslazione $T(x) = x - x_0$ trasforma $B(x_0, r)$ in $B(0, r)$. Posto $U = \tilde{\varphi}^{-1}(B(x_0, r))$ e $\varphi = T \circ \tilde{\varphi}_{|U}$, (U, φ) è una carta locale che soddisfa le proprietà richieste. □

Esempio 1.7. R^n
$\mathbb{R}^n$ è un esempio banale di varietà differenziabile n-dimensionale. Un atlante differenziabile per $\mathbb{R}^n$ è dato da $\mathbb{A} = \{(\mathbb{R}^n, I_{\mathbb{R}^n})\}$.

Esempio 1.8. GL(n,R)
Il gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \ \det A \neq 0\}$ è una varietà differenziabile (non connessa) di dimensione n^2. Basta osservare che $GL(n, \mathbb{R})$ è un aperto di $\mathbb{R}^{n,n} \equiv \mathbb{R}^{n^2}$ (in quanto immagine inversa, mediante l'applicazione continua det: $\mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det A$, dell'aperto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ di $\mathbb{R}$).

Esempio 1.9. La circonferenza $\mathbb{S}^1$
$\mathbb{S}^1$ si può pensare definita dalle equazioni $x = \cos 2\pi t,\ y = \sin 2\pi t,\ t \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$U = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \mathbb{S}^1 : t \in]0, 1[\},$$
$$V = \left\{(\cos 2\pi t', \sin 2\pi t') \in \mathbb{S}^1 : t' \in] - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[\right\},$$

e consideriamo gli omeomorfismi

$$\varphi : U \to]0, 1[, (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \mapsto t,$$
$$\psi : V \to] - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[, (\cos 2\pi t', \sin 2\pi t') \mapsto t'.$$

Allora, $U \cup V = \mathbb{S}^1$ e, su $U \cap V$, il cambiamento di coordinata è del tipo $t' = t$ oppure $t' = t - 1$. Quindi, $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ definisce un atlante differenziabile su $\mathbb{S}^1$. Un altro atlante differenziabile su $\mathbb{S}^1$, equivalente al primo, è costruito nel modo seguente. Consideriamo $\mathbb{S}^1$ definita dall'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e poniamo

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x > 0\}, \quad \varphi_1 : U_1 \to] - 1, 1[, (x, y) \mapsto y,$$
$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y > 0\}, \quad \varphi_2 : U_2 \to] - 1, 1[, (x, y) \mapsto x,$$
$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x < 0\}, \quad \psi_1 : V_1 \to] - 1, 1[, (x, y) \mapsto y,$$
$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y < 0\}, \quad \psi_2 : V_2 \to] - 1, 1[, (x, y) \mapsto x.$$

$\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)\}$ è un insieme di carte locali i cui domini ricoprono $\mathbb{S}^1$. Inoltre, nell'intersezione di due domini il cambiamento di coordinata è dato da applicazioni differenziabili, ad esempio su $U_1 \cap U_2$ il cambiamento di coordinata $y \mapsto x$ è dato da $x = \sqrt{1 - y^2}$. Più in generale, ogni curva differenziabile regolare di $\mathbb{R}^3$ (o di $\mathbb{R}^n$) è una varietà differenziabile di dimensione 1. Inoltre, si può dimostrare che ogni varietà (connessa) compatta di dimensione 1 è omeomorfa a $\mathbb{S}^1$ (cfr. [28], p.25).

Esempio 1.10. Varietà differenziabile prodotto
Siano M_1 ed M_2 varietà differenziabili con $\dim M_1 = n$ e $\dim M_2 = m$. Inoltre, siano $\mathbb{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ e $\mathbb{A}' = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ atlanti differenziabili di M_1 ed M_2 rispettivamente.

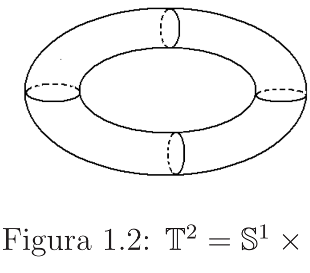


Figura 1.2: $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Consideriamo lo spazio topologico prodotto $M_1 \times M_2$. $\{(U_i \times V_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$ è un ricoprimento aperto di $M_1 \times M_2$, le applicazioni

$$\phi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \phi_i(U_i) \times \psi_j(V_j) \subset \mathbb{R}^{n+m}, (p,q) \mapsto (\phi_i(p), \psi_j(q))$$

sono omeomorfismi e $(\phi_i \times \psi_j) \circ (\phi_h \times \psi_k)^{-1} = \left(\phi_i \circ \phi_h^{-1}\right) \times \left(\psi_j \circ \psi_k^{-1}\right)$. Pertanto, $M_1 \times M_2$ è una varietà differenziabile $(n+m)$-dimensionale, che viene detta *varietà prodotto*.

In modo analogo, si può definire la varietà prodotto $M_1 \times M_2 \times ... \times M_k$ di k varietà differenziabili. In particolare, il *toro n-dimensionale* $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$ (n-volte) è una varietà differenziabile n-dimensionale.

Esempio 1.11. La sfera $\mathbb{S}^n$
Allo stesso modo in cui si è costruito il secondo atlante su $\mathbb{S}^1$, si può costruire su $\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\right\}$ un atlante differenziabile formato da $2(n+1)$ carte locali $\{(U_i, \varphi_i), (V_i, \psi_i)\}$, $i = 1, ..., n+1$, dove

$$U_i = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_i > 0\}, V_i = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_i < 0\},$$

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i \to B^n &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 < 1\right\}, \\ \varphi_i : (x_1, ..., x_{n+1}) &\mapsto (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_{n+1}), \\ \psi_i : V_i \to B^n &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 < 1\right\}, \\ \psi_i : (x_1, ..., x_{n+1}) &\mapsto (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_{n+1}). \end{aligned}$$

Quindi, $\mathbb{S}^n$ è una varietà differenziabile n-dimensionale. Un altro atlante differenziabile su $\mathbb{S}^n$ si può costruire nel modo seguente.

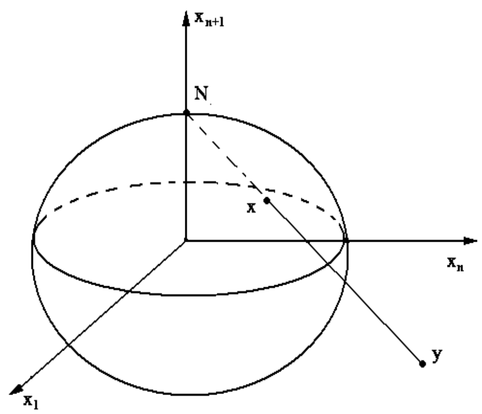


Figura 1.3: La proiezione stereografica dal polo nord.

Poniamo $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ e $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$, dove N è il polo nord $(0, ..., 0, 1)$ ed S è il polo sud $(0, ..., 0, -1)$. Consideriamo la *proiezione stereografica* φ dal polo nord, la quale ad ogni $x \in U$ associa il punto di intersezione della retta $[x, N]$ con l'iperpiano $x_{n+1} = 0$. Quindi,

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n, \ (x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto (y_1, ..., y_n) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

è un omeomorfismo con inverso

$$\varphi^{-1} : y = (y_1, ..., y_n) \mapsto \varphi^{-1}(y) = \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, ..., \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, -\frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2} \right).$$

Analogamente, possiamo definire la proiezione stereografica dal polo sud

$$\psi : V \to \mathbb{R}^n, (x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto (z_1, ..., z_n) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right),$$

con omeomorfismo inverso

$$\psi^{-1} : z = (z_1, ..., z_n) \mapsto \psi^{-1}(z) = \left(\frac{2z_1}{1 + \|z\|^2}, .., \frac{2z_n}{1 + \|z\|^2}, \frac{1 - \|z\|^2}{1 + \|z\|^2} \right).$$

Le applicazioni

$$\varphi \circ \psi^{-1}(z) = \frac{z}{\|z\|^2} \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2}$$

sono diffeomorfismi di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (che rappresentano l'inversione rispetto alla sfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ di $\mathbb{R}^n$). Quindi $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ è un atlante differenziabile su $\mathbb{S}^n$ (equivalente al precedente). Si noti che, identificato $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, gli omeomorfismi $\varphi : p = (x, y, u) \to z = \varphi(p) = \frac{x+iy}{1-u}$ e $\bar{\psi} : p = (x, y, u) \to z' = \bar{\psi}(p) = \frac{x-iy}{1+u}$ definiscono su $\mathbb{S}^2$ una struttura di varietà complessa 1-dimensionale (infatti: $z \cdot z' = 1$ su $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$). $\mathbb{S}^2$ con tale struttura complessa è detta *sfera di Riemann.* L'applicazione φ^{-1}, facendo corrispondere per estensione il polo nord N al punto all'infinito ∞ del piano complesso, permette di identificare $\mathbb{S}^2$ con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ piano complesso compattificato.

Esercizio 1.12. Si verifichi che i due atlanti definiti su $\mathbb{S}^n$ sono equivalenti.

Esempio 1.13. Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
In $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiamo la seguente relazione di equivalenza:

$$\forall \ x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \ \ y \wp x \Leftrightarrow y = tx \text{ per qualche } \ t \neq 0.$$

Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, che indicheremo più brevemente con $\mathbb{P}^n$, è l'insieme quoziente $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \wp$ munito della topologia quoziente, dove su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ si considera la topologia indotta dalla topologia naturale di $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n, x \mapsto \pi(x) = [x]$, è la proiezione quoziente, allora un sottoinsieme A di $\mathbb{P}^n$ è un aperto di $\mathbb{P}^n$ se e solo se $\pi^{-1}(A)$ è un aperto di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. I punti di $\mathbb{P}^n$ si possono pensare come rette per l'origine, private della stessa origine, di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Di conseguenza, i coni aperti di rette per l'origine sono aperti nella topologia di $\mathbb{P}^n$. In particolare, $\mathbb{P}^n$ è uno spazio topologico separato (di Hausdorff). Costruiamo su $\mathbb{P}^n$ un atlante differenziabile nel modo seguente. Per ogni $i = 1, ..., n+1$, $U_i = \{p = [x] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$ è un aperto di $\mathbb{P}^n$. La corrispondenza

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n,$$
$$p = [(x_1, ..., x_{n+1})] \mapsto (y_1, ..., y_n) = \left(\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i}\right),$$

è un omeomorfismo con inverso

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_i, (y_1, ..., y_n) \mapsto [(y_1, ..., y_{i-1}, 1, y_i, ..., y_n)].$$

D'altronde gli U_i ricoprono $\mathbb{P}^n$, quindi $\{(U_i, \varphi_i)\}$ è un atlante di $\mathbb{P}^n$. Infine, se U_i, U_j sono due domini a intersezione non vuota, allora $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ è del tipo (assumendo $j < i$):

$$(y_1, ..., y_n) \mapsto (z_1, ..., z_n) = \left(\frac{y_1}{y_j}, ..., \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, ..., \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, ..., \frac{y_n}{y_j}\right)$$

e quindi è un'applicazione differenziabile. Pertanto, $\mathbb{P}^n$ è una varietà differenziabile n-dimensionale.

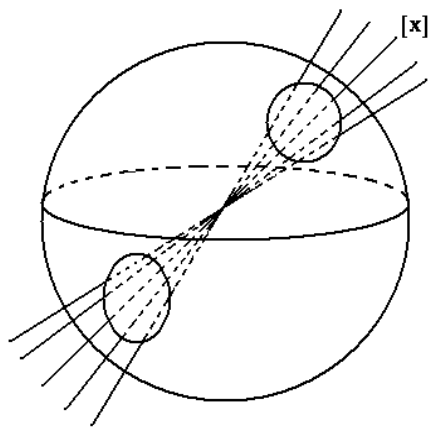


Figura 1.4: Il piano proiettivo.

Esercizio 1.14. Verificare che lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n$ è omeomorfo allo spazio topologico quoziente $\mathbb{S}^n / \{\pm I_d\}$. In particolare, $\mathbb{P}^n$ è compatto e connesso per archi.

Teorema 1.15. *Sia $F : \mathbb{R}^{n+h} \to \mathbb{R}^h, x \mapsto (F_1(x), ..., F_h(x))$, una funzione differenziabile. Poniamo $M = F^{-1}(c)$, con $c = (c_1, ..., c_h)$ elemento di $\mathbb{R}^h$. Se per ogni $p \in M$ la matrice jacobiana*

$$J(F)_p = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)(p) = ((\nabla F_i)_p) \in \mathbb{R}^{h,n+h}$$

ha rango costante h, allora M, detta n-superficie regolare, ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione n.

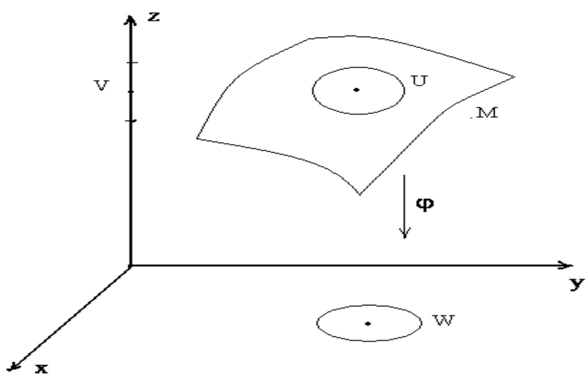
Dimostrazione. Sia p_0 un fissato punto di M. Siccome la matrice jacobiana $J(F)_{p_0}$ ha rango h, cambiando eventualmente ordine alle coordinate, possiamo assumere che

$$\det J_h(F)_{p_0} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{x_h} \\ \frac{\partial F_2}{x_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{x_h} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_h}{x_1} & \dots & \frac{\partial F_h}{x_h} \end{pmatrix}_{p_0} \neq 0.$$

Poniamo $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$. Applicando il Teorema del Dini per funzioni a valori vettoriali, esiste un intorno aperto W di x_0 in $\mathbb{R}^n$ e un intorno aperto V di y_0 in $\mathbb{R}^h$ ed un'unica funzione differenziabile $G : W \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^h$, tali che

$$y_0 = G(x_0) \quad \text{e} \quad F(x, G(x)) = c \quad \forall x \in W.$$

$\tilde{U} = W \times V$ è un aperto di $\mathbb{R}^{n+h}$ intorno di p_0. L'insieme $U = \tilde{U} \cap M$ è un intorno aperto di p_0 in M rispetto alla topologia indotta. Inoltre, la proiezione ortogonale sul sottospazio $\mathbb{R}^n$ ristretta ad U definisce un omeomorfismo



$$\varphi : U \to W, \ (x_1, ..., x_{n+h}) \mapsto (y_1, ..., y_n) = (x_1, .., x_n), \text{ con inverso}$$

$$\varphi^{-1} : W \to U, \ (y_1, ..., y_n) \mapsto (x_1, ..., x_{n+h}) = (y_1, .., y_n, G(y_1, .., y_n)).$$

In questo modo si ottiene una famiglia di carte locali (U, φ), i cui domini ricoprono M. Se (U, φ) e (U', φ') sono due carte locali di questo tipo i cui domini hanno intersezione non vuota, il cambiamento di coordinate $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ è differenziabile in quanto le sue funzioni componenti sono date da funzioni banali oppure da funzioni componenti di G. □

Con riferimento alla dimostrazione del Teorema 1.15, notiamo che se sull'aperto $\tilde{U}$ di $\mathbb{R}^{n+h}$, intorno di p_0, consideriamo le coordinate $(z_1, ..., z_{n+h})$ definite da

$$z_i = x_i \ \text{ per } \ i = 1, .., n \ \text{ e } \ z_i = x_i - G_i(x_1, .., x_n) \ \text{ per } \ i = n+1, ..., n+h,$$

allora la carta $(U, \varphi, (y_i))$ di M risulta definita da

$$U = \left\{ p \in \tilde{U} : z_i(p) = 0 \ \forall \ i = n+1, ..., n+h \right\} \quad \text{e} \quad y_i = z_{i|U}.$$

Per $h = 1$, $M = F^{-1}(c)$ è un'ipersuperficie regolare di $\mathbb{R}^{n+1}$. Per $h > 1$, $M = F^{-1}(c)$ è l'intersezione di h ipersuperfici regolari $M_1 = F_1^{-1}(c_1), ...,$ $M_h = F_h^{-1}(c_h)$ indipendenti (nel senso che i vettori $(\nabla F_1)_p$,...,$(\nabla F_h)_p$ sono linearmente indipendenti per ogni $p \in M$).

Esercizio 1.16. Si verifichi che, per ogni funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, il grafico di f, ossia $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, è un'ipersuperficie regolare di $\mathbb{R}^n$.

Esempio 1.17. Superfici connesse compatte
Le superfici connesse compatte $M_p = \mathbb{S}^2 \sharp p \mathbb{T}^2$, $p \geq 0$, e $M_q = \mathbb{S}^2 \sharp q \mathbb{P}^2$, $q \geq 1$, sono varietà differenziabili di dimensione 2. Infatti, la sfera $\mathbb{S}^2$, la superficie torica $\mathbb{T}^2$ e il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ sono varietà differenziabili e la somma connessa $\sharp$ di varietà differenziabili è ancora una varietà differenziabile (Boothby [14], pag. 258). Si noti che M_p è una superficie orientabile di genere p e M_q è una superficie non orientabile di genere q.

1.2 Applicazioni differenziabili

In questa sezione, la nozione di applicazione differenziabile definita su un aperto di $\mathbb{R}^n$ e a valori in $\mathbb{R}^m$ (in particolare per $m = 1$) viene estesa al caso delle varietà differenziabili.

Definizione 1.18. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Diremo che un'applicazione $f : M \to \mathbb{R}$ è differenziabile in un punto $p_0 \in M$ se esiste una carta locale (U, ϕ), con $p_0 \in U$, tale che

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{sia differenziabile.}$$

Diremo che f è differenziabile su un aperto A di M se è differenziabile in p per ogni $p \in A$. La definizione data non dipende dalla particolare carta considerata. Infatti, se (V, ψ) è un'altra carta locale con $p_o \in U \cap V$, si ha

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1}.$$

Se $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sono le coordinate locali definite dalla carta (U, ϕ), si pone

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) \qquad \forall p \in U.$$

Se $(y_1, y_2, ..., y_n)$ sono le coordinate locali definite nel dominio di un'altra carta (V, ψ), con $U \cap V \neq \emptyset$, risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(p) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\phi(p)) \qquad \forall p \in U \cap V.$$

Indichiamo con $\mathcal{F}(A)$ l'insieme di tutte le funzioni reali differenziabili definite su A aperto di M. Rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per un numero reale, $\mathcal{F}(A)$ ha una struttura di spazio vettoriale reale. Inoltre, considerando anche il prodotto interno $\cdot : \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A), (f_1, f_2) \mapsto f_1 \cdot f_2$, $\mathcal{F}(A)$ ha una struttura di algebra reale commutativa unitaria. Analogamente per $\mathcal{F}(p)$, l'algebra delle funzioni reali differenziabili definite in un intorno del punto p.

Definizione 1.19. Siano M e M' due varietà differenziabili ed $F : M \to M'$ una applicazione da M in M'. Assumiamo $\dim M = n$ e $\dim M' = m$. Diremo che F è differenziabile in un punto $p_o \in M$ se esistono una carta locale (U, ϕ) di M con $p_o \in U$, una carta locale (V, ψ) di M' con $F(U) \subset V$, tali che

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(F(U)) \subset \psi(V) \subset \mathbb{R}^m \quad \text{sia differenziabile.}$$

Diremo che F è differenziabile su un aperto A di M se è differenziabile in p per ogni $p \in A$. La definizione data non dipende dalle particolari carte locali scelte. In termini di coordinate locali, se $\phi(p) = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\psi(F(p)) = (y_1, y_2, ..., y_m)$, la differenziabilità di F è data dalla differenziabilità delle m funzioni reali $y_j = y_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ definite sull'aperto $\phi(U)$ di $\mathbb{R}^n$. Se $F : M \to M'$ è un omeomorfismo con F e F^{-1} applicazioni differenziabili, F viene detto *diffeomorfismo* ed M, M' si dicono *diffeomorfe*. L'applicazione $F : M \to M'$ è un *diffeomorfismo locale* se per ogni $p \in M$ esistono un intorno aperto U di p e un intorno aperto U' di $F(p)$ tali che $F_{|U} : U \to U'$ è un diffeomorfismo. Se $F : M \to M'$ è bigettiva, allora F è un diffeomorfismo se e solo se è un diffeomorfismo locale.

Varietà differenziabile quoziente

Esponiamo ora un metodo che permette di costruire varietà differenziabili mediante l'azione di gruppi di diffeomorfismi. Consideriamo una varietà differenziabile $\tilde{M}$ e un gruppo G di diffeomorfismi di $\tilde{M}$ che opera in modo propriamente discontinuo, cioè, per ogni $\tilde{x} \in \tilde{M}$, esiste un intorno aperto $\tilde{U}$ di $\tilde{x}$ tale che :

$$g\tilde{U} \cap \tilde{U} = \emptyset, \qquad \forall g \in G,\ g \neq I_d. \tag{$*$}$$

Denotiamo con M lo spazio topologico quoziente $\tilde{M}/G$. Proviamo che $\tilde{M}$ induce su M una struttura differenziabile. Dalla teoria degli spazi di rivestimento, è noto che la proiezione quoziente $\pi : \tilde{M} \to M = \tilde{M}/G, \tilde{x} \mapsto \pi(\tilde{x}) = G\tilde{x}$ (orbita di $\tilde{x}$), è un'applicazione di rivestimento. Dato $x \in M$, consideriamo $\tilde{x} \in \tilde{M}$, con $\pi(\tilde{x}) = x$, e una carta locale $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$, $\tilde{x} \in \tilde{U}$, di $\tilde{M}$ con $\tilde{U}$ che verifica la proprietà $(*)$. Allora, l'applicazione $\pi_1 = \pi_{|\tilde{U}} : \tilde{U} \to U = \pi(\tilde{U})$ è un omeomorfismo e quindi $\phi = \tilde{\phi} \circ \pi_1^{-1} : U \to \tilde{\phi}(\tilde{U})$ è un omeomorfismo. In questo modo si costruisce un atlante $\mathbb{A}$ di carte locali per M. Resta da vedere che tale atlante è differenziabile. Consideriamo due carte locali (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2) di $\mathbb{A}$ con $U = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Siano $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$ gli aperti di $\tilde{U}_1$ e $\tilde{U}_2$ rispettivamente con $\pi_1(\tilde{V}_1) = U = \pi_2(\tilde{V}_2)$. Allora,

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = \tilde{\phi}_1 \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2 \circ \tilde{\phi}_2^{-1} : \phi_2(U_1 \cap U_2) \to \phi_1(U_1 \cap U_2),$$

dove $\phi_2(U_1 \cap U_2) = \tilde{\phi}_2(\tilde{V}_2)$ e $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \tilde{\phi}_1(\tilde{V}_1)$. Inoltre, l'applicazione

$$\pi_1^{-1} \circ \pi_2 : \tilde{x} \mapsto \pi(\tilde{x}) = G\tilde{x} \mapsto \tilde{y} = g\tilde{x},$$

dove $g \in G$ è differenziabile. Pertanto, $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ è differenziabile in quanto composizione di applicazioni differenziabili. Infine, dalla costruzione di $\mathbb{A}$ segue che $\pi : \tilde{M} \to M$ è un'applicazione (di rivestimento) differenziabile e in particolare un diffeomorfismo locale. Ritroviamo che lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \{\pm I_d\}$ e il toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sono varietà differenziabili.

Osservazione 1.20. Ricordiamo che due strutture differenziabili sulla stessa varietà M, definite dagli atlanti $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$, sono equivalenti se $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}'$ è ancora un atlante differenziabile, in altre parole se l'applicazione identità $I_d : (M, \mathbb{A}) \to (M, \mathbb{A}')$ è un diffeomorfismo. Quindi, strutture differenziabili equivalenti sono sicuramente diffeomorfe. Non vale però il viceversa, come risulta dall'esempio seguente. Consideriamo su $\mathbb{R}$ le strutture differenziabili definite dagli atlanti

$$\mathbb{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \phi = I_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R})\} \quad \text{e} \quad \mathbb{A}_2 = \{(\mathbb{R}, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t^{\frac{1}{3}})\}.$$

Indichiamo con $\mathbb{R}_1$ e $\mathbb{R}_2$ le corrispondenti varietà differenziabili ottenute. Le due strutture differenziabili definite su $\mathbb{R}$ non sono equivalenti, in quanto l'applicazione

$$\psi \circ I_d \circ \phi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^{\frac{1}{3}},$$

non è differenziabile per $t = 0$. Tuttavia, le due strutture differenziabili sono diffeomorfe perché l'applicazione

$$F : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2,\ t \mapsto t^3,$$

è un omeomorfismo con F e F^{-1} differenziabili.

Osservazione 1.21. (Conlon [28], p. 93-94)
a) Siano M_1 e M_2 due varietà differenziabili di dimensione n. Se M_1 e M_2 sono omeomorfe ed $n \leq 3$, allora M_1 e M_2 sono diffeomorfe.
b) Per $n \neq 4$, due strutture differenziabili su $\mathbb{R}^n$ sono sempre diffeomorfe.
c) $\mathbb{S}^n$, per $n \leq 6, n \neq 4$, ammette (a meno di diffeomorfismi) un'unica struttura differenziabile.

Osservazione 1.22. La sfera $\mathbb{S}^7$ ha esattamente 28 strutture differenziabili non equivalenti (cfr. J. Milnor [68]).

Esercizio 1.23. Verificare che le applicazioni

$$f_1 : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, z, 0),\ \ f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n,\ x \mapsto x/\|x\|,$$
$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n, x \mapsto \pi(x) = [x], \quad \text{e} \quad \text{l'inclusione } i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow R^{n+1},$$

sono differenziabili.

Esercizio 1.24. Si verifichi (con un calcolo diretto) che le applicazioni di rivestimento

$$p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2\pi i t}, \quad \text{e} \quad p_2 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n, x \mapsto p(x) = [x],$$

sono diffeomorfismi locali.

Esercizio 1.25. Si verifichi che ogni trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^n$ è un diffeomorfismo. Si noti che una trasformazione proiettiva è definita da una trasformazione lineare omogenea invertibile di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Esercizio 1.26. Sia $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile. Assumiamo che $M = F^{-1}(c)$ sia una n-superficie di $\mathbb{R}^{n+m}$ (cfr. Teorema 1.15). Si verifichi che l'inclusione $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ è differenziabile.

1.3 Costruzione di applicazioni differenziabili

Scopo principale di questa sezione è costruire una partizione dell'unità subordinata a un ricoprimento localmente finito di intorni coordinati di una varietà differenziabile M. La partizione dell'unità è uno strumento essenziale per incollare oggetti definiti solo localmente in modo da ottenere un singolo oggetto globalmente ben definito su tutta la varietà. Ad esempio, è utile per dimostrare l'esistenza di una metrica riemanniana su M e per estendere la teoria dell'integrazione su M.

Lemma 1.27. *Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < \beta$, esiste una funzione differenziabile non negativa $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che*
$\mu(x) = 1$ se $\|x\| \leq \alpha$; $0 < \mu(x) < 1$ se $\alpha < \|x\| < \beta$; $\mu(x) = 0$ se $\|x\| \geq \beta$.

Dimostrazione. Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < \beta$, poniamo $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$ e $c = b - a > 0$. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione differenziabile definita da

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$ e il cui grafico è dato dalla Figura 1.5.

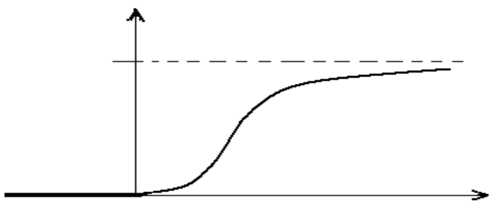


Figura 1.5: Il grafico della funzione g.

La funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin]-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}[, \\ e^{\frac{-1}{(x-\frac{c}{2})^2}} e^{\frac{-1}{(x+\frac{c}{2})^2}} & \text{se } x \in]-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}[, \end{cases}$$

è differenziabile in quanto prodotto di funzioni del tipo g. Quindi anche la funzione $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $k(x) = h(x - \frac{c}{2})$, non negativa e nulla all'esterno dell'intervallo $]0, c[$, è differenziabile. I grafici delle funzioni h e k sono riportati nella Figura 1.6.

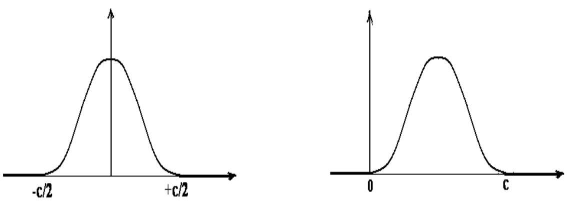


Figura 1.6: I grafici delle funzioni h e k.

Di conseguenza, la funzione $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\ell(x) = \frac{\int_0^x k(t)dt}{\int_0^c k(t)dt},$$

è differenziabile, non negativa, crescente in $]0, c[$ e verifica :

$$\ell(x) = 0 \text{ se } x \leq 0, \quad 0 < \ell(x) < 1 \text{ se } 0 < x < c, \quad \ell(x) = 1 \text{ se } x \geq c.$$

La funzione $\lambda(x) = \ell(x - a)$ è differenziabile e verifica

$$\lambda(x) = 0 \;\text{ se } x \leq a, \quad 0 < \lambda(x) < 1 \;\text{ se } a < x < b, \quad \lambda(x) = 1 \;\text{ se } x \geq b.$$

Infine, la funzione $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $\mu(x) = 1 - \lambda(\|x\|^2)$ è differenziabile e verifica le proprietà del lemma. $\square$

Proposizione 1.28. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Per ogni aperto A di M e per ogni punto $p_0 \in A$, esistono V, V', U intorni aperti coordinati di p_0 con $\bar{V}$, $\bar{V}'$ compatti, $\bar{V} \subset V' \subset U \subset A$, ed esiste $\xi : M \to \mathbb{R}$ funzione differenziabile, tali che*

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi_{|\bar{V}} = 1, \quad \xi_{|M \setminus V'} = 0, \ \ \xi_{|V'} > 0.$$

e

$$supp\xi := \overline{\{p \in M : \xi(p) \neq 0\}} = \bar{V}'.$$

Dimostrazione. Consideriamo una carta locale (U, ϕ) con $p_0 \in U \subset A$ e $\phi(p_0) = (0, ..., 0)$. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta$, tale che $\bar{B}(0, \beta) \subset \phi(U)$, dove $\bar{B}(0, \beta)$ denota la palla chiusa di centro l'origine e raggio β di $\mathbb{R}^n$. Sia $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile non negativa come costruita nel Lemma 1.27 relativamente ai numeri α e β. Poniamo $V = \phi^{-1}(B(0, \alpha))$ e $V' = \phi^{-1}(B(0, \beta))$, allora $\bar{V} \subset V' \subset U \subset A$. La funzione $\bar{\mu} = \mu \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile e verifica: $0 \leq \bar{\mu} \leq 1$, $\bar{\mu} = 1$ su $\bar{V}$, $0 < \bar{\mu} < 1$ su $V' \setminus \bar{V}$, $\bar{\mu} = 0$ su $U \setminus V'$, supp$\bar{\mu} = \bar{V}'$. Siccome $\bar{\mu}_{|U \setminus V'} = 0$, definendo

$$\xi : M \to \mathbb{R}, \ p \mapsto \xi(p) = \begin{cases} \bar{\mu}(p) & \text{se } p \in U, \\ 0 & \text{se } p \notin U, \end{cases}$$

si ottiene una funzione differenziabile su M che verifica le proprietà richieste. □

Proposizione 1.29. *Sia M una varietà differenziabile. Per ogni aperto A di M e per ogni compatto $K \subset A$, esistono V, V' aperti di M, $K \subset V \subset V' \subset A$ e $\xi : M \to \mathbb{R}$ applicazione differenziabile tali che*

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi_{|\bar{V}} = 1, \quad \xi_{|V'} > 0, \quad \xi_{|M \setminus V'} = 0.$$

Dimostrazione. Per $x \in K$, indichiamo con V_x, V'_x intorni aperti di x, $\bar{V}_x \subset V'_x \subset A$ come nella Proposizione 1.28. Sia ξ_x la corrispondente funzione differenziabile non negativa tale che $\xi_{x|V'_x} > 0$, $\xi_{x|\bar{V}_x} = 1$, $\xi_{x|M \setminus V'_x} = 0$ e supp$\xi_x = \bar{V}'_x$. Siccome K è un compatto, lo si può ricoprire con un numero finito di aperti $V_{x_1}, ..., V_{x_r}$. La funzione $g = (\xi_{x_1} + ... + \xi_{x_r})$ è differenziabile, è positiva sull'aperto $V' = V'_{x_1} \cup ... \cup V'_{x_r} \supset \bar{V} = \bar{V}_{x_1} \cup ... \cup \bar{V}_{x_r} \supset K$ e $g_{|M \setminus V'} = 0$. Siccome $\bar{V}$ è compatto, poniamo $c = \min g_{|\bar{V}} > 0$. Ora, sia $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione differenziabile costruita nel Lemma 1.27 e che soddisfa $\ell(t) = 0$ se $t \leq c$, $\ell(t) = 1$ se $t \geq c$ e $0 < \ell(t) < 1$ se $0 < t < c$. Allora, la funzione $\xi = \ell \circ g$ è differenziabile e soddisfa $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi_{|\bar{V}} = 1$, $\xi_{|V'} > 0$, $\xi_{|M \setminus V'} = 0$. □

Proposizione 1.30. *Siano M una varietà differenziabile, A un aperto di M ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Per ogni compatto $K \subset A$, esiste V aperto di M, $K \subset V \subset A$, ed esiste un'applicazione differenziabile $\bar{f} : M \to \mathbb{R}$ con $\bar{f}_{|V} = f_{|V}$.*

Dimostrazione. Applicando la Proposizione 1.29, esistono V, V' aperti, $K \subset \bar{V} \subset V' \subset A$, ed esiste $\xi : M \to \mathbb{R}$ funzione differenziabile tali che $\xi_{|\bar{V}} = 1$ e $\xi_{|M\setminus V'} = 0$. Siccome $(\xi \cdot f)_{|A\setminus V'} = 0$, definendo

$$\bar{f} : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto \bar{f}(p) = \begin{cases} (\xi \cdot f)(p) & \text{se } p \in A, \\ 0 & \text{se } p \notin A, \end{cases}$$

si ottiene una funzione differenziabile su M. Inoltre, $\bar{f}(p) = f(p)$ per ogni $p \in V$. □

Ricordiamo le seguenti definizioni di natura topologica. Un ricoprimento $(U_i)_{i\in I}$ di uno spazio topologico M si dice *localmente finito* se per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno aperto di p che ha intersezione non vuota solo con un numero finito di elementi del ricoprimento $(U_i)_{i\in I}$; in particolare ogni punto p di M appartiene solo a un numero finito di aperti U_i. Siano $(U_i)_{i\in I}$ e $(V_j)_{j\in J}$ due ricoprimenti di uno spazio topologico M; $(V_j)_{j\in J}$ si dice che è un raffinamento di $(U_i)_{i\in I}$ se per ogni j esiste i tale che $V_j \subset U_i$. Uno spazio topologico M si dice *paracompatto* se è separato (di Hausdorff) e ogni ricoprimento aperto $(U_i)_{i\in I}$ di M ammette un raffinamento aperto localmente finito $(V_j)_{j\in J}$. Ogni spazio compatto di Hausdorff è paracompatto. Si noti che per una varietà differenziabile M (quindi connessa e di Hausdorff) le seguenti proprietà sono equivalenti ([56] vol.I, p.271; [22] p.171): (1) M è paracompatta; (2) M soddisfa il secondo assioma di numerabilità, cioè M ammette una base numerabile di aperti; (3) M è metrizzabile; (4) M ammette una metrica riemanniana.

Definizione 1.31. ([56] vol.I, p.272) Sia M una varietà differenziabile. Una *partizione dell'unità* di M subordinata a un ricoprimento aperto localmente finito $(U_i)_{i\in I}$ della stessa varietà M, è una famiglia $\{g_i : M \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ di funzioni differenziabili tale che:

(1) $g_i \geq 0$;

(2) $\mathrm{supp} g_i := \overline{\{p \in M : g_i(p) \neq 0\}} \subset U_i$;

(3) $\sum_{i\in I} g_i = 1$.

Teorema 1.32. *Ogni varietà differenziabile paracompatta M ammette una partizione dell'unità $\{g_i\}$ subordinata a un ricoprimento aperto localmente finito di intorni coordinati di M con* $\mathrm{supp} g_i$ *compatto. In particolare, ogni ricoprimento aperto localmente finito $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ammette una partizione dell'unità ad esso subordinata.*

Dimostrazione. Sia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un ricoprimento aperto localmente finito (tale ricoprimento esiste in quanto M è paracompatta). Fissati $\alpha \in \Lambda$ e $p \in A_\alpha$, applicando la Proposizione 1.28, esistono $V'_{p,\alpha}, U_{p,\alpha}$ intorni (coordinati) aperti di p con $\bar{V}'_{p,\alpha}$ compatto contenuto in $U_{p,\alpha} \subset A_\alpha$, ed esiste $\xi_{p,\alpha} : M \to \mathbb{R}$ applicazione differenziabile tale che $\xi_{p,\alpha} \geq 0$, $\xi_{p,\alpha|V'_{p,\alpha}} > 0$, $\mathrm{supp}\xi_{p,\alpha} = \bar{V}'_{p,\alpha} \subset$

$U_{p,\alpha} \subset A_\alpha$ e $\xi_{p,\alpha|M\setminus V'_{p,\alpha}} = 0$. $\left\{V'_{p,\alpha}\right\}_{p\in U_\alpha, \alpha\in\Lambda}$ è ancora un ricoprimento aperto di M. Poiché M è paracompatta, esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{V_i\}$ con, fissato i, $V_i \subset V'_{p,\alpha_i}$ per qualche $\alpha_i \in \Lambda$ e per qualche $p \in M$. Quindi $V_i \subset V'_{p,\alpha_i} \subset U_{p,\alpha_i} \subset A_{\alpha_i}$. Si noti che $i \neq j$ non implica $\alpha_i \neq \alpha_j$. Poniamo $V'_i = V'_{p,\alpha_i}$ e $U_i = U_{p,\alpha_i}$. $\{U_i\}$ e $\{A_{\alpha_i}\}$ sono ricoprimenti in quanto $V_i \subset U_i \subset A_{\alpha_i}$, inoltre sono localmente finiti in quanto sottoricoprimenti di $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ che è localmente finito. Indichiamo con ξ_i la funzione definita sopra e corrispondente all'aperto V'_i (che contiene V_i ed è contenuto in $U_i \subset A_{\alpha_i}$). In particolare le funzioni ξ_i sono non negative, $\xi_{i|V_i} > 0$ e supp ξ_i=compatto $\subset U_i$. La funzione $\sum_i \xi_i$ è ben definita in quanto supp$\xi_i \subset U_i$ e $\{U_i\}$ è localmente finito. Inoltre, $\sum_i \xi_i(p) > 0$ per ogni $p \in M$ in quanto $\{V_i\}$ è un ricoprimento e $\xi_{i|V_i} > 0$. Posto $g_i = \frac{\xi_i}{\sum_i \xi_i}$, si ha che $\{g_i\}$ è una famiglia di funzioni differenziabili non negative, $\sum_i g_i = 1$, supp g_i =compatto $\subset U_i$ e con $\{U_i\}$ ricoprimento aperto localmente finito di intorni coordinati. In particolare, esiste una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. $\square$