

UNIVERSITÀ DEL SALENTO  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA  
“ENNIO DE GIORGI”

Domenico Perrone

Un'introduzione alla Geometria Differenziale  
di curve e superfici  
(Seconda edizione)



Quaderno 2/2022  
Università del Salento - Coordinamento SIBA

# QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA “ENNIO DE GIORGI”  
UNIVERSITÀ DEL SALENTO

---

## Comitato di Redazione

Angela Albanese  
Francesco Catino  
Domenico Perrone

---

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi” della Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell’attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

- (1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
- (2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
- (3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all’approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 2/2022:

Università del Salento - Coordinamento SIBA

eISBN: 978-88-8305-187-6

La presente è la versione riveduta (con correzioni ed aggiunte) della precedente edizione del Quaderno 2/2017, Università del Salento - Coordinamento SIBA (eISBN: 978-88-8305-132-6) e la sostituisce integralmente.

*Dedicato*  
*al mio nipotino Davide*  
*e*  
*alla mia nipotina Elisa*

*“A quelli che non conoscono la matematica è difficile farsi un’idea precisa della bellezza, la profonda bellezza, della natura”*

R. Feynman (1967)

## Indice

Prefazione	vii
Capitolo 1. Calcolo differenziale nello spazio euclideo	1
1.1. Curve parametrizzate regolari	1
1.2. Lunghezza di un arco di curva e ascissa curvilinea	7
1.3. Campi vettoriali e derivazione nello spazio euclideo	11
1.4. Il differenziale (di un'isometria)	18
1.5. Orientazione e prodotto vettoriale	25
1.6. Campi vettoriali lungo curve	28
Capitolo 2. Geometria differenziale delle curve di $\mathbb{R}^3$	35
2.1. Apparato di Frenet	35
2.2. Apparato di Frenet per curve a velocità arbitraria	45
2.3. Curvatura (con segno) di curve piane	47
2.4. Eliche circolari	53
2.5. Eliche cilindriche	55
2.6. Il campo vettoriale di Darboux	64
2.7. Il teorema fondamentale sulle curve	67
2.8. Curve magnetiche	76
2.9. Curve magnetiche di Killing	82
Capitolo 3. Superfici regolari di $\mathbb{R}^3$	87
3.1. Definizione, osservazioni ed esempi	87
3.2. Superfici quadriche	97
3.3. Funzioni differenziabili su superfici	106
3.4. Curve su una superficie	111
3.5. Piano tangente a una superficie	113
3.6. Differenziale e derivata direzionale	117
3.7. Prima forma fondamentale	121
3.8. Area	126
3.9. Superfici orientabili	128
3.10. Struttura complessa e 2-forma d'area	133
Capitolo 4. Operatore forma e curvatures di una superficie	141
4.1. L'operatore forma e la seconda forma fondamentale	141
4.2. I simboli di Christoffel	146
4.3. Curvature principali, curvatura di Gauss e curvatura media	148

4.4.	Superfici minimali	156
4.5.	Curvatura normale	159
4.6.	L'applicazione di Gauss	166
4.7.	Approssimazione quadratica di una superficie	168
4.8.	Qualche teorema globale sulle superfici	172
4.9.	La pseudo-sfera di Beltrami	175
Capitolo 5. Geometria intrinseca delle superfici		181
5.1.	Distanza intrinseca	181
5.2.	Superfici isometriche e il Teorema egregium di Gauss	184
5.3.	Superfici congruenti	195
5.4.	Derivata covariante e curve geodetiche	198
5.5.	La connessione di Levi-Civita delle superfici	207
5.6.	Gradiente, divergenza e l'operatore di Laplace-Beltrami	209
5.7.	Curvatura gaussiana e tensore di curvatura	215
5.8.	Esempi di curve geodetiche	220
5.9.	Geodetiche e curve minimali	229
5.10.	Energia di una curva	235
5.11.	Curve magnetiche su superfici orientabili	241
Capitolo 6. Geometria iperbolica		249
6.1.	Domini riemanniani e varietà riemanniane	249
6.2.	Isometrie del semipiano di Poincaré	254
6.3.	Le geodetiche del semipiano di Poincaré	260
6.4.	La distanza nel semipiano di Poincaré	265
6.5.	L'iperboloide e il modello di Poincaré nel disco	267
Capitolo 7. Il Teorema di Gauss-Bonnet		273
7.1.	Il Teorema locale di Gauss-Bonnet	273
7.2.	Il Teorema globale di Gauss-Bonnet	280
7.3.	Applicazioni del Teorema di Gauss-Bonnet	285
Capitolo 8. Il Teorema di Lancret sulla sfera $\mathbb{S}^3$		291
8.1.	Apparato di Frenet per curve di $\mathbb{S}^3$	291
8.2.	Eliche generalizzate e Teorema di Lancret sulla sfera $\mathbb{S}^3$	294
8.3.	Modelli di eliche sulla sfera $\mathbb{S}^3$	299
Bibliografia		305
Indice analitico		307

## Prefazione

Queste note riflettono, in una versione molto ampliata, gli argomenti del corso di Geometria III da me svolto negli anni accademici 2012-13,.....,2019-20 presso il corso di Laurea in Matematica dell'Università del Salento (Lecce). Lo scopo é quello di dare un'introduzione allo studio delle geometria differenziale classica delle curve e delle superfici dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ . Un importante ruolo, per meglio capire i concetti introdotti, é svolto dai numerosi esempi (ed esercizi) che sono stati scelti con particolare attenzione. Data la natura degli argomenti trattati, queste note sono adatte oltre che per gli studenti di Matematica anche per quelli di Fisica. Inoltre, alcuni argomenti potrebbero essere inseriti in un corso della Laurea Magistrale. Riguardo ai prerequisiti necessari per la comprensione del contenuto di questo quaderno, si richiede una buona conoscenza dell'algebra lineare e dell'analisi reale a piú variabili, inoltre si richiedono le conoscenze di base della teoria delle equazioni differenziali ordinarie e della topologia generale.

Il Capitolo 1 é dedicato ad alcuni aspetti del calcolo differenziale nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ .

Nel Capitolo 2 si studia la geometria differenziale delle curve di  $\mathbb{R}^3$ . Un ruolo fondamentale in tale studio é svolto dal riferimento di Frenet e quindi dalle funzioni curvatura e torsione, tali funzioni determinano la “forma” della curva in  $\mathbb{R}^3$ . Nello stesso capitolo, un'attenzione particolare é rivolta, vista la loro importanza anche in Fisica e non solo (cf., ad esempio, [2]–[6]), alle eliche cilindriche (dette anche curve di Lancret) e alle curve magnetiche di  $\mathbb{R}^3$ .

Nei capitoli successivi viene data un'introduzione a concetti e metodi di base della geometria differenziale delle superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$ . In tale studio, si é cercato di enfatizzare in modo particolare le differenze tra geometria intrinseca e geometria estrinseca. Si noti che nel famoso articolo sulla teoria delle superfici di Carl Friedrich Gauss (1777-1855) “*Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*” (1827), che è il certificato di nascita della geometria differenziale moderna, l'idea principale è che una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$  ha una geometria intrinseca. Le idee di Gauss furono poi sviluppate dal suo allievo Bernhard Riemann (1826-1866) al caso delle varietà differenziabili  $n$ -dimensionali. Riemann introdusse concetti di straordinaria importanza per la geometria differenziale. L'applicazione delle idee di Riemann alla teoria della relatività generale di Einstein diede un forte impulso allo sviluppo della geometria riemanniana, la quale si è rivelata uno dei campi di ricerca più significativi della matematica contemporanea.

Tornando al contenuto di queste note, nel Capitolo 3 vengono introdotti i primi strumenti e concetti sulle superfici regolari, tra questi spicca, per importanza, la prima forma fondamentale la quale gioca un ruolo fondamentale per la geometria intrinseca di una superficie.

Il Capitolo 4 é dedicato al concetto di curvatura su una superficie regolare. Nel caso di una curva  $\gamma(s)$ ,  $s$  ascissa curvilinea, la curvatura é definita come la lunghezza del vettore accelerazione  $\ddot{\gamma}(s)$ . Nel caso di una superficie, la situazione é ovviamente piú articolata, basti pensare che una superficie puó curvarsi lungo piú direzioni (quelle che determinano il piano tangente) e in modo diverso. L'operatore forma, che é definito come la variazione del campo normale lungo le diverse direzioni del piano tangente, e quindi studia la variazione dello stesso piano tangente, é lo strumento tecnico che permette di definire, dal punto di vista estrinseco, il concetto di curvatura per una superficie.

Nel Capitolo 5 studiamo principalmente proprietá e concetti di natura intrinseca di una superficie regolare, ossia proprietá e concetti che dipendono soltanto dalla prima forma fondamentale e quindi sono invarianti per isometrie. Ad esempio, sono concetti di natura intrinseca: la distanza intrinseca, la derivata covariante (di Levi-Civita), curve geodetiche e curvatura gaussiana (Teorema egregium di Gauss). In particolare, la derivata covariante di Levi-Civita permette di introdurre in modo intrinseco, su una superficie regolare, l'operatore di Laplace-Beltrami. Superfici (localmente) isometriche sono superfici che hanno la "stessa" prima forma fondamentale. Proprietá che dipendono dall'operatore forma, ovvero dalla seconda forma fondamentale, e quindi dalla "forma" della superficie in  $\mathbb{R}^3$ , si dicono proprietá estrinseche. Il capitolo si chiude con una breve presentazione delle curve magnetiche su superfici regolari orientabili. Dal punto di vista dei sistemi dinamici, una geodetica corrisponde alla traiettoria di un a particella che si muove senza l'azione di un campo magnetico. In questo contesto, le curve magnetiche generalizzano le curve geodetiche.

Nel Capitolo 6 si introducono i domini riemanniani  $(D, g)$ , dove  $D$  é un dominio di  $\mathbb{R}^2$  e  $g$  é una metrica riemanniana su  $D$ , ovvero una matrice simmetrica definita positiva di ordine 2 i cui coefficienti sono funzioni differenziabili su  $D$ . Quindi, si studiano isometrie e geodetiche di modelli di geometria iperbolica come esempi di domini riemanniani. In particolare, assumendo come "rette" del piano iperbolico le sue geodetiche massimali, si ottiene un modello di geometria non euclidea iperbolica.

Nel Capitolo 7 diamo una presentazione del Teorema di Gauss-Bonnet nel caso delle superfici regolari connesse compatte di  $\mathbb{R}^3$ . Il Teorema di Gauss-Bonnet, il piú elegante teorema di geometria differenziale globale, evidenzia un sorprendente legame tra due nozioni a priori molto distanti tra loro: la caratteristica di Eulero-Poincaré (invariante topologico) e la curvatura gaussiana (invariante metrico).

Nel Capitolo 8 viene data una presentazione "elementare" del Teorema di Lancret sulla sfera  $\mathbb{S}^3$ , come una estensione del classico Teorema di Lancret

sulle curve (studiato nel Capitolo 2).

Ulteriori approfondimenti, su quasi tutti gli argomenti trattati in questo quaderno, si possono trovare sui testi classici [9], [20], [23]. Per approfondimenti su curve magnetiche e curve di Lancret generalizzate si rinvia agli articoli riportati in bibliografia. Infine, per uno studio della geometria differenziale di curve e superfici con l'aiuto del programma di manipolazione simbolica *Mathematica* si consiglia [7].

Correzioni e suggerimenti sono benvenuti e possono essere inviati per e-mail all'autore.

Giugno 2022

*Domenico Perrone*

domenico.perrone@unisalento.it



## CAPITOLO 1

### Calcolo differenziale nello spazio euclideo

In questo capitolo presentiamo alcuni concetti del calcolo differenziale nello spazio euclideo che saranno utili per i capitoli successivi.

#### 1.1. Curve parametrizzate regolari

Prima di introdurre le curve parametrizzate, ricordiamo brevemente la definizione di funzione differenziabile e quella di spazio tangente a  $\mathbb{R}^n$ .

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto F(p) = F(x_1, \dots, x_n),$$

si dice *differenziabile* di classe  $C^k$  se  $F$  ammette derivate parziali continue fino all'ordine  $k$ , e quindi si dice di classe  $C^\infty$  se è di classe  $C^k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Sia

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad p = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto F(p) = (F_1(p), \dots, F_m(p)),$$

una funzione a valori in  $\mathbb{R}^m$ . Indichiamo con  $\pi_i$  la *proiezione*

$$\pi_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p = (x_1, \dots, x_m) \longmapsto \pi_i(p) = x_i.$$

La funzione  $F$  si dice differenziabile di classe  $C^k$  (risp.  $C^\infty$ ) se le sue funzioni componenti

$$F_i = \pi_i \circ F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F_i(p) = \pi_i \circ F(p), \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

sono di classe  $C^k$  (risp.  $C^\infty$ ). Tuttavia, nel seguito con il termine differenziabile si intenderà sempre differenziabile di classe  $C^\infty$ .

Consideriamo  $\mathbb{R}^n$  con la struttura naturale di spazio vettoriale reale euclideo. È noto che

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$$

è la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Fissato  $p \in \mathbb{R}^n$ , l'insieme

$$\{p\} \times \mathbb{R}^n = \{v_p = (p, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$$

si indica con  $T_p \mathbb{R}^n$  e si dice *spazio dei vettori tangenti in  $p$  a  $\mathbb{R}^n$*  (o *spazio tangente in  $p$  a  $\mathbb{R}^n$* ). Ogni elemento  $v_p = (p, v) \in T_p \mathbb{R}^n$  si dice *vettore tangente in  $p$  a  $\mathbb{R}^n$*  o *vettore applicato in  $p$* .  $T_p \mathbb{R}^n$  ha una struttura di spazio vettoriale reale  $n$ -dimensionale rispetto alle seguenti operazioni:

$$v_p + w_p := (p, v + w), \quad \lambda v_p := (p, \lambda v).$$

La corrispondenza  $\phi : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $v_p \mapsto \phi(v_p) = v$ , è un isomorfismo tra spazi vettoriali (a volte un vettore tangente si identifica con la sua parte vettoriale). La base canonica di  $T_p \mathbb{R}^n$  è

$$\{e_{1_p} = (p, e_1), \dots, e_{n_p} = (p, e_n)\}.$$

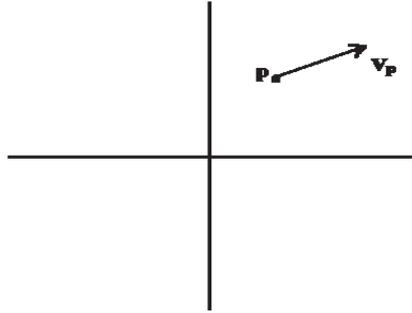


FIGURA 1. Vettore tangente.

$T_p \mathbb{R}^n$  è anche uno spazio vettoriale euclideo rispetto al prodotto scalare:

$$v_p \cdot w_p := v \cdot w \quad \text{per ogni } v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}^n,$$

dove

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

è il prodotto scalare euclideo naturale di  $\mathbb{R}^n$ . Si pone quindi

$$\|v_p\| := \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

Nel seguito con  $I$  indicheremo sempre, salvo diversa indicazione, un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 1.1.** Una curva differenziabile parametrizzata di  $\mathbb{R}^n$  è un'applicazione differenziabile

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Quindi, la curva  $\alpha(t)$  è differenziabile se e solo se le sue funzioni componenti  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  sono differenziabili. La variabile  $t$  si dice *parametro* e il sottoinsieme  $\alpha(I)$  si dice *sostegno* della curva. Se il sostegno  $\alpha(I)$  è contenuto in un piano, allora  $\alpha$  si dice *curva piana*. Nel caso di  $\mathbb{R}^3$ , le coordinate verranno indicate anche con  $(x, y, z)$ .

**Definizione 1.2.** Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto \alpha(t)$ , una curva differenziabile parametrizzata. Il vettore velocità di  $\alpha$  in  $\alpha(t_0)$  è il vettore  $\dot{\alpha}(t_0)$  che ha come componenti le derivate delle componenti di  $\alpha$  calcolate in  $t_0$ :

$$\dot{\alpha}(t_0) = \sum_{i=1}^n x'_i(t_0)(e_i)_{\alpha(t_0)} = (x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0))_{\alpha(t_0)} \in T_{\alpha(t_0)} \mathbb{R}^n.$$

Si noti che, a volte, il vettore tangente  $\dot{\alpha}(t_0)$  verrà indicato anche con la  $n$ -pla  $(x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0))$  omettendo il punto di applicazione  $\alpha(t_0)$ .

**Definizione 1.3.** Una curva parametrizzata differenziabile  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice regolare se il vettore velocità  $\dot{\alpha}(t)$  è non nullo per ogni  $t \in I$ .

Ricordiamo che per una curva parametrizzata differenziabile  $\alpha(t)$  dello spazio  $\mathbb{R}^n$ , la *retta tangente* ad  $\alpha$  nel punto  $\alpha(t_0)$  è la posizione limite (se esiste) della corda  $(\alpha(t_0), \alpha(t))$  per  $t \rightarrow t_0$  (cf. Figura 2). La corda  $(\alpha(t_0), \alpha(t))$  ha equazioni

$$\frac{x_1 - x_1(t_0)}{x_1(t) - x_1(t_0)} = \dots = \frac{x_n - x_n(t_0)}{x_n(t) - x_n(t_0)}.$$

Dividendo i denominatori per  $(t - t_0)$  e facendo il limite per  $t \rightarrow t_0$ , si ottiene

$$\frac{x_1 - x_1(t_0)}{x'_1(t_0)} = \dots = \frac{x_n - x_n(t_0)}{x'_n(t_0)}.$$

Tali equazioni rappresentano una retta se

$$(x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0)) \neq (0, \dots, 0).$$

Pertanto, una curva parametrizzata differenziabile  $\alpha(t)$  di  $\mathbb{R}^n$  è regolare se e solo se esiste la retta tangente in ogni suo punto.

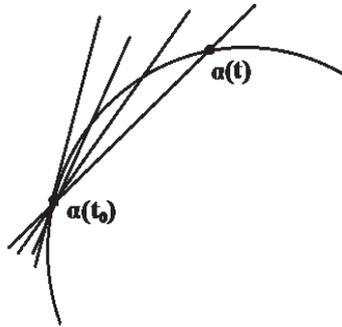


FIGURA 2. Retta tangente.

**Esempio 1.4. La retta.** Siano  $p, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ . La retta per  $p$  e parallela a  $v$ , è la curva regolare

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \alpha(t) = p + tv = (p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n).$$

In particolare vale la seguente proprietà: ogni vettore  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$  si può esprimere come vettore tangente a una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^n$  passante per  $p$ . Ad esempio, la curva  $\alpha(t) = p + tv$  soddisfa  $\alpha(0) = p$  e  $\dot{\alpha}(0) = v$ .

**Esempio 1.5.**

- (1) L'applicazione  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (t^3, t^2, 0)$ , è una curva differenziabile parametrizzata di  $\mathbb{R}^3$ . Osserviamo che  $\alpha$  non è regolare per  $t = 0$  in quanto  $\dot{\alpha}(0) = 0$ .

- (2) L'applicazione  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (t, |t|, 0)$ , è una curva parametrizzata ma non è differenziabile per  $t = 0$ .
- (3) L'applicazione  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4, 0)$ , è una curva parametrizzata differenziabile, inoltre è regolare. Osserviamo che  $\alpha$  non è iniettiva in quanto  $\alpha(2) = 0 = \alpha(-2)$ .

**Esempio 1.6.** La **circonferenza**  $\mathbb{S}^1$ . Le curve parametrizzate

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0),$$

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0),$$

sono distinte, ma hanno lo stesso sostegno in quanto  $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$ , dove  $\mathbb{S}^1$  è la circonferenza di centro  $O$  e raggio 1 del piano  $z = 0$ . La circonferenza (sempre del piano  $z = 0$ ) di centro  $C(x_0, y_0, 0)$  e raggio  $r$  si può parametrizzare con  $\gamma(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t, 0)$ .  $\dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t, 0)$ , e quindi  $\gamma(t)$  è una parametrizzazione regolare di tale circonferenza.

**Esempio 1.7. Ellisse, iperbole e parabola.** Per l'ellisse di equazione cartesiana  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ,  $a, b > 0$ , una sua parametrizzazione regolare è data da

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t, 0), t \in \mathbb{R}.$$

I due rami dell'iperbole di equazione cartesiana  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ,  $a, b > 0$ , sono parametrizzate in modo regolare da

$$\alpha_1(t) = (a \cosh t, b \sinh t, 0), \quad \alpha_2(t) = (-a \cosh t, b \sinh t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ricordiamo che le funzioni **coseno iperbolico** e **seno iperbolico** sono definite da

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \text{e soddisfano } \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Infine, una parametrizzazione regolare della parabola  $y = ax^2$ ,  $a \neq 0$ , è data da

$$\alpha(t) = (t, at^2, 0).$$

Il caso della parabola è un caso particolare di *grafici di funzioni in una variabile*. Infatti, il grafico di una funzione differenziabile  $y = f(x)$  si può parametrizzare con  $\alpha(t) = (t, f(t), 0)$ . Tale parametrizzazione è regolare in quanto

$$\dot{\alpha}(t) = (1, f'(t), 0) \neq (0, 0, 0).$$

**Esempio 1.8. Curve di livello.** Sia  $f(x, y)$  una funzione differenziabile, a valori reali, definita in  $\mathbb{R}^2$ . L'insieme dei punti del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione  $f(x, y) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , si dice curva di livello. Possiamo sempre assumere la costante  $c = 0$  (basta sostituire  $f$  con  $f - c$ ) e quindi considerare la curva definita dall'equazione cartesiana

$$(1.1) \quad f(x, y) = 0.$$

In particolare, se  $f(x, y)$  è un polinomio algebrico, nelle variabile  $x$  e  $y$ , di grado  $n$ , allora la curva definita dall'equazione (1.1) si dice *curva algebrica di ordine  $n$* .

Si consideri una curva  $\gamma$  del piano  $z = 0$ , definita dall'equazione cartesiana (1.1). Dal Teorema del Dini segue che se una delle due derivate parziali di  $f$ , ad esempio  $f_y$ , è diversa da zero in un punto  $(x_0, y_0)$  di  $\gamma$ , allora esiste una funzione differenziabile  $g(x)$ , definita in un intorno di  $x_0$ , tale che (in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$ ) l'equazione  $f(x, y) = 0$  è verificata se e solo se  $y = g(x)$ . Pertanto, in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$ ,  $\gamma$  è una curva differenziabile regolare, parametrizzata da  $\gamma(t) = (t, g(t), 0)$ . Inoltre, si ha l'identità

$$f(x, g(x)) = 0$$

che, derivata rispetto a  $x$ , dà  $f_x(x, g(x)) + g'(x)f_y(x, g(x)) = 0$ , da cui

$$g'(x) = -f_x/f_y.$$

Pertanto, nel piano  $z = 0$ , la tangente alla curva  $\gamma$  nel punto  $(x_0, y_0)$  ha equazione cartesiana

$$f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) = 0.$$

**Esercizio 1.9.** Verificare che le curve algebriche

$\mathcal{C}_1 : x^3 - y^2 = 0$  (cubica cuspidale) e  $\mathcal{C}_2 : x^3 + x^2 - y^2 = 0$  (cubica nodale) non sono regolari (cf. Figura 3).

*Suggerimento:* parametrizzare  $\mathcal{C}_1$  con  $(t^2, t^3)$  e  $\mathcal{C}_2$  con  $(t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ .



FIGURA 3. Curve non regolari.

**Esempio 1.10. L'elica circolare.** La curva parametrizzata

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto \alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad , \quad \text{con } a > 0 \text{ e } b \neq 0,$$

si dice *elica circolare*. Osserviamo che il sostegno  $\alpha(\mathbb{R})$  è contenuto nel cilindro circolare retto di equazione  $x^2 + y^2 = a^2$ . L'elica circolare è una curva regolare e il suo vettore velocità

$$\dot{\alpha}(t) = (-a \operatorname{sen} t, a \cos t, b)_{\alpha(t)} \neq (0, 0, 0)_{\alpha(t)}$$

forma un angolo  $\vartheta$  costante con l'asse delle  $z$  :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cos \vartheta = \dot{\alpha}(t) \cdot e_{3\alpha(t)} = b = \text{const} \neq 0.$$

Uno studio più approfondito sulle eliche (curve molto importanti in Fisica) verrà fatto nella Sezione 2.4 .

**Esercizio 1.11.** Determinare la curva  $\gamma(t)$  che soddisfa le seguenti condizioni:  $\gamma(0) = (-1, 3, -2)$  e  $\dot{\gamma}(t) = (t, e^t, t^2)$ .

**Esercizio 1.12.** Per tutti gli esempi di curve regolari dati precedentemente, determinare il vettore velocità e la retta tangente per  $t = 0$ .

**Esercizio 1.13.** Si consideri la curva

$$\gamma(t) = (\cos \alpha \cos at, \cos \alpha \operatorname{sen} at, \operatorname{sen} \alpha \cos bt, \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} bt)$$

dello spazio  $\mathbb{R}^4$ , dove  $\alpha \in ]0, \pi/2[$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Si verifichi che  $\gamma(t)$  è una curva della sfera  $\mathbb{S}^3$  di centro l'origine e raggio 1 di  $\mathbb{R}^4$ . Inoltre, trovare la condizione che devono soddisfare le costanti  $a, b$  affinché  $\gamma(t)$  sia regolare.

**Esercizio 1.14.** Fissate nel piano le coordinate polari  $(\varrho, \vartheta)$ ,  $\varrho > 0, \vartheta \in ]0, 2\pi[$ , si verifichi che la curva parametrizzata

$$\gamma(t) = (\varrho(t), \vartheta(t)) = \left( \sqrt{t^2 + \varrho_0^2}, \vartheta_0 + \arccos \frac{\varrho_0}{\sqrt{t^2 + \varrho_0^2}} \right)$$

è una retta del piano.

**Osservazione 1.15.** Una curva regolare  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice che è una **curva semplice** se l'applicazione  $\gamma$  è un omeomorfismo dall'intervallo  $I$  su  $\gamma(I)$ . Se, inoltre,  $I = [a, b]$  con  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , allora curva  $\gamma$  è detta *curva chiusa semplice*. Un classico risultato di topologia (*Teorema della curva di Jordan*) afferma che: *ogni curva chiusa semplice piana divide il piano in due componenti connesse int( $\gamma$ ) ed ext( $\gamma$ )*, dove int( $\gamma$ ) è la componente limitata (quindi contenuta in un disco di raggio abbastanza grande) ed ext( $\gamma$ ) è la componente connessa illimitata. Più in generale, se  $c$  è una costante positiva, una curva regolare  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  che soddisfa

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad \text{se e solo se} \quad t_2 = t_1 + kc \quad \text{per qualche intero } k,$$

si dice *curva chiusa periodica*, e il più piccolo  $c$  che soddisfa tale proprietà è detto periodo di  $\gamma$ . Ad esempio, la curva  $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è periodica di periodo  $2\pi$ .

Denotiamo con  $J$  la rotazione antioraria di 90 gradi del piano (cf. Sezione 2.3). Diciamo che una curva chiusa semplice piana  $\gamma(t)$  è orientata positivamente se il vettore  $J\dot{\gamma}(t)$  è sempre diretto verso l'interno di  $\gamma$ . Possiamo sempre assumere che la curva  $\gamma$  sia orientata positivamente (cambiando se necessario  $t$  con  $-t$ ). Se  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è una curva chiusa semplice piana di periodo  $c$  e orientata positivamente, allora vale la seguente formula

$$\text{area}(\text{int}(\gamma)) := \iint_{\text{int}(\gamma)} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^c (xy' - yx') dt.$$

Infatti, applicando il Teorema di Green alle funzioni  $f(x, y) = (-1/2)y$  e  $g(x, y) = (1/2)x$ , si ha

$$\begin{aligned} \text{area}(\text{int}(\gamma)) &:= \iint_{\text{int}(\gamma)} dx dy = \iint_{\text{int}(\gamma)} (g_x - f_y) dx dy \\ &= \int_{\gamma} f(x, y) dx + \int_{\gamma} g(x, y) dy = \frac{1}{2} \left( \int_{\gamma} x dy - \int_{\gamma} y dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^c (xy' - yx') dt. \end{aligned}$$

**Esercizio 1.16.** Verificare che l'area dell'interno dell'ellisse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ,  $a, b > 0$ , è data da  $\pi ab$ .

*Suggerimento:* considerare la parametrizzazione  $(a \cos t, b \sin t)$ .

## 1.2. Lunghezza di un arco di curva e ascissa curvilinea

Nello studio di una curva le proprietà più interessanti sono quelle invarianti per cambiamenti di parametro. Consideriamo una curva differenziabile parametrizzata  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , e un diffeomorfismo

$$h : J \rightarrow I, \quad s \mapsto t = h(s), \quad \text{quindi } h'(s) \neq 0 \text{ per ogni } s \in J,$$

dove  $J$  è un altro intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ . In tal caso,

$$\beta(s) := \alpha(h(s)), \quad \beta : J \xrightarrow{h} I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3,$$

è una *riparametrizzazione (regolare)* di  $\alpha(t)$ . La funzione  $h$  si dice **cambiamento regolare di parametro**. Posto

$$\beta(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s)) = (x_1(h(s)), \dots, x_n(h(s))),$$

si ha

$$x'_1(s) = h'(s) x'_1(h(s)), \dots, x'_n(s) = h'(s) x'_n(h(s)),$$

per cui il vettore velocità  $\dot{\beta}(s)$  soddisfa

$$\dot{\beta}(s) = (x'_1(s), \dots, x'_n(s)) = h'(s) \dot{\alpha}(h(s)) = h'(s) \dot{\alpha}(t).$$

Di conseguenza,

$$\alpha(t) \text{ è regolare} \iff \beta(s) = \alpha(h(s)) \text{ è regolare.}$$

Osserviamo che essendo  $h'(s) \neq 0$ , allora  $h(s) > 0$  oppure  $h(s) < 0$  per ogni  $s \in J$ . Pertanto,

- $h'(s) > 0 \iff$  i vettori  $\dot{\alpha}(t)$  e  $\dot{\beta}(s)$  sono concordi,
- $h'(s) < 0 \iff$  i vettori  $\dot{\alpha}(t)$  e  $\dot{\beta}(s)$  sono discordi.

Si noti che a volte la curva riparametrizzata  $\beta(s) = \alpha(h(s))$  si indica anche con  $\alpha(s) = \alpha(h(s))$ .

**Esempio 1.17.** Sia data la curva regolare  $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t)$ ,  $t \in ]0, +\infty[$ . Si consideri il cambiamento di parametro

$$h : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[, s \mapsto t = h(s) = s^2.$$

$t = h(s)$  è un cambiamento regolare di parametro con inverso dato  $s = h^{-1}(t) = \sqrt{t}$ . La nuova parametrizzazione

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = (s, s^3, 1-s^2)$$

conserva il verso di percorrenza definito da  $\alpha(t)$ , infatti  $h'(s) = 2s > 0$  per ogni  $s > 0$ .

Data una curva differenziabile parametrizzata  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \alpha(t)$ , consideriamo un intervallo  $[a, b]$  contenuto in  $I$  e sia

$$\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

una partizione dell'intervallo  $[a, b]$ . Poniamo

$$\ell(\alpha, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k d(\alpha(t_i), \alpha(t_{i-1})).$$

$\ell(\alpha, \mathcal{P})$  è la lunghezza della poligonale di vertici  $\alpha(t_0), \dots, \alpha(t_k)$ .

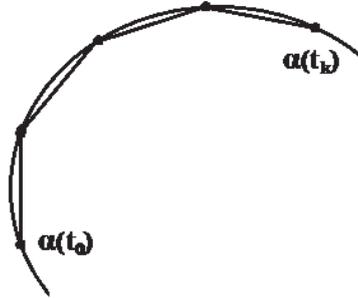


FIGURA 4. Poligonale di vertici  $\alpha(t_0), \dots, \alpha(t_k)$ .

Inoltre, poniamo

$$|\mathcal{P}| := \max_{i=1, \dots, k} |t_i - t_{i-1}|.$$

$|\mathcal{P}|$  è detta *norma della partizione* e rappresenta l'ampiezza massima degli intervalli che costituiscono la stessa partizione. Osserviamo che se  $\mathcal{P}'$  è un'altra partizione con  $|\mathcal{P}'| < |\mathcal{P}|$ , allora  $\ell(\alpha, \mathcal{P}') > \ell(\alpha, \mathcal{P})$ . Possiamo dunque dare la seguente definizione.

**Definizione 1.18.** Si definisce **lunghezza dell'arco**  $\alpha_{|[a,b]}$  la quantità:

$$\mathcal{L}(\alpha_{|[a,b]}) := \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \ell(\alpha, \mathcal{P}) = \sup_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \ell(\alpha, \mathcal{P}).$$

Risulta che

$$\mathcal{L}(\alpha_{|[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt < +\infty,$$

dove  $\|\dot{\alpha}(t)\|^2 = \dot{\alpha}(t) \cdot \dot{\alpha}(t) = x_1'^2(t) + \dots + x_n'^2(t)$ , ovvero  $\|\dot{\alpha}(t)\|$  è la lunghezza del vettore velocità (detta *velocità scalare*, o semplicemente velocità, di  $\alpha(t)$  all'istante  $t$ ).

**Proposizione 1.19.** *La lunghezza di un arco di curva è invariante per un cambiamento regolare di parametro.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $h : [c, d] \subset J \rightarrow [a, b] \subset I$ ,  $s \mapsto t = h(s)$ , un cambiamento regolare di parametro. Allora

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) \quad \text{e} \quad \dot{\beta}(s) = h'(s) \dot{\alpha}(h(s)), \quad \text{con } h'(s) \neq 0 \text{ per ogni } s,$$

e quindi

$$\mathcal{L}(\beta) = \int_c^d \|\dot{\beta}(s)\| ds = \int_c^d |h'(s)| \|\dot{\alpha}(h(s))\| ds.$$

Distinguiamo due casi. Se  $h'(s) > 0$ , allora

$$\mathcal{L}(\beta) = \int_c^d h'(s) \|\dot{\alpha}(h(s))\| ds = \int_{h(c)=a}^{h(d)=b} \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \mathcal{L}(\alpha)$$

Se  $h'(s) < 0$ , anche in questo caso

$$\mathcal{L}(\beta) = - \int_c^d h'(s) \|\dot{\alpha}(h(s))\| ds = - \int_{h(c)=b}^{h(d)=a} \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \mathcal{L}(\alpha).$$

□

Proviamo ora la seguente

**Proposizione 1.20.** *Ogni curva regolare  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto \alpha(t)$ , ammette una riparametrizzazione  $\beta(s) = \alpha(h(s))$ ,  $s \in J$  (intervallo di  $\mathbb{R}$ ), a velocità unitaria, ovvero  $\|\dot{\beta}(s)\| = 1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo un  $t_0 \in I$  e consideriamo la funzione

$$s : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(t)\| dt,$$

detta **ascissa curvilinea** di origine  $\alpha(t_0)$ . La funzione  $s(t)$  rappresenta la lunghezza (con segno) dell'arco di curva compresa tra l'estremo fisso  $\alpha(t_0)$  e l'estremo variabile  $\alpha(t)$ . Osserviamo che  $J = s(I)$  è un intervallo in quanto  $s(t)$  è continua e  $I$  intervallo,  $s(t)$  è differenziabile e  $s'(t) = ds/dt = \|\dot{\alpha}(t)\|$ . Inoltre, siccome  $\alpha(t)$  è una curva regolare,  $\|\dot{\alpha}(t)\| > 0$  per ogni  $t \in I$  e di conseguenza  $s'(t) > 0$  per ogni  $t \in I$ . Pertanto,  $s(t)$  è una funzione strettamente crescente in  $I$  e quindi invertibile su  $J = s(I)$ , con funzione inversa differenziabile

$$t(s) : J \rightarrow I, \quad s \mapsto t(s),$$

che soddisfa

$$t'(s) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t(s))\|} = \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|} > 0.$$

Dunque,  $t = t(s)$  è un cambiamento regolare di parametro e la curva riparametrizzata  $\beta(s) = \alpha(t(s))$  ha velocità scalare

$$\|\dot{\beta}(s)\| = t'(s) \|\dot{\alpha}(t(s))\| = \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t(s))\|} \|\dot{\alpha}(t(s))\| = 1.$$

□

Il nuovo parametro ascissa curvilinea  $s = s(t)$  non è un parametro fra i tanti, esso è un parametro intrinseco, essendo legato alla geometria della curva. La nuova parametrizzazione è espressa da  $\alpha(t(s))$  che, con abuso di notazione, scriveremo  $\alpha(s)$ . Si noti che il calcolo esplicito della funzione inversa  $t = t(s)$  è spesso molto complicato, ma in compenso (come già visto) la sua derivata è data dalla formula  $t'(s) = 1/\|\dot{\alpha}(t(s))\|$ . Se si fissa come origine un altro punto invece che  $\alpha(t_0)$ , la nuova ascissa curvilinea si altera solo per l'aggiunta di una costante. Più in generale, vale la seguente

**Proposizione 1.21.** *Sia  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$ , una curva regolare. Se  $s = s(t)$  è ascissa curvilinea per  $\gamma(t)$  e  $\bar{t} = \bar{t}(s)$  è una riparametrizzazione di  $\gamma(t)$  a velocità unitaria, allora*

$$\bar{t} = \pm s + c, \quad \text{dove } c \text{ è una costante.}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Posto  $\bar{t} = \bar{t}(t)$  e  $s = s(t)$ , da  $\gamma(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}(t))$  e  $\dot{\gamma}(\bar{t}) = \dot{\gamma}(s(t))$  segue che

$$\dot{\gamma}(\bar{t}) = \bar{t}'(t) \dot{\gamma}(\bar{t}) \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(t) = s'(t) \dot{\gamma}(s).$$

Di conseguenza,

$$\|\dot{\gamma}(\bar{t})\| |\bar{t}'(t)| = \|\dot{\gamma}(s)\| |s'(t)|$$

e quindi  $|\bar{t}'(t)| = |s'(t)|$  da cui si ottiene  $\bar{t}(t) = \pm s(t) + c$ , con  $c$  costante. □

**Esempio 1.22.** Consideriamo l'elica circolare  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , con  $a > 0$  e  $b \neq 0$ . L'elica  $\gamma(t)$  è regolare, infatti

$$\dot{\gamma}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)_{\gamma(t)} \neq (0, 0, 0)_{\gamma(t)},$$

tuttavia non è parametrizzata a velocità unitaria. Siccome

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2,$$

l'ascissa curvilinea è data da

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \sqrt{a^2 + b^2} t \quad \text{e quindi} \quad t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pertanto, una riparametrizzazione a velocità unitaria dell'elica circolare è data da

$$\gamma(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

**Esempio 1.23.** Consideriamo la spirale logaritmica

$$\gamma(t) = (ae^{-bt} \cos t, ae^{-bt} \sin t, 0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

La spirale logaritmica  $\gamma(t)$  è regolare. Infatti,

$$\dot{\gamma}(t) = ae^{-bt}(-b \cos t - \sin t, -b \sin t + \cos t, 0)_{\gamma(t)}$$

e

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = a^2 e^{-2bt}(1 + b^2) \neq 0.$$

L'ascissa curvilinea è data da

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^t a e^{-bt} \sqrt{1 + b^2} dt = a\sqrt{1 + b^2} \frac{e^{-bt} - 1}{-b}.$$

Quindi,

$$s(t) = \frac{a\sqrt{1 + b^2}}{b} (1 - e^{-bt}).$$

Per  $a = 1/\sqrt{2}$  e  $b = 1$ , si ha  $s(t) = 1 - e^{-t} < 1$ . Si noti che  $\gamma(0) = (a, 0, 0) = (1/\sqrt{2}, 0, 0)$  e per  $t \rightarrow +\infty$  il punto  $\gamma(t)$  si avvicina all'origine e l'ascissa curvilinea  $s(t)$  tende a 1.

**Esempio 1.24.** Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0), t \in ]0, 2\pi[.$$

Tale curva  $\gamma(t)$  è regolare. Infatti

$$\dot{\gamma}(t) = (1 - \cos t, \sin t, 0)_{\gamma(t)} \quad \text{e} \quad \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 2(1 - \cos t) = 4\sin^2(t/2) \neq 0.$$

L'ascissa curvilinea è data da

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt = 2 \int_0^t \sin(t/2) dt = 4(1 - \cos(t/2)).$$

**Osservazione 1.25.** Consideriamo la circonferenza  $\gamma_0$  parametrizzata da  $\gamma_0(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , di  $\mathbb{R}^3$ .  $\gamma_0$  è una curva chiusa semplice piana, e chiaramente

$$\mathcal{L}^2(\gamma_0)/4\pi = (2\pi r)^2/4\pi = \pi r^2 = \text{area}(\text{int}(\gamma_0)).$$

In generale, se  $\gamma(t)$  è una curva chiusa semplice piana, vale la classica *disuguaglianza isoperimetrica*

$$\text{area}(\text{int}(\gamma)) \leq \mathcal{L}^2(\gamma)/4\pi$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se  $\gamma$  è una circonferenza (per una dimostrazione di questo risultato si può vedere, ad esempio, [9] p. 31).

### 1.3. Campi vettoriali e derivazione nello spazio euclideo

Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione differenziabile in un intorno  $U$  di un fissato punto  $p$ .

**Definizione 1.26.** Il vettore **gradiente** di  $f$  in  $p$ , che si indica con  $(\nabla f)_p$ , è il vettore tangente in  $p$  che ha come componenti le derivate parziali di  $f$  calcolate in  $p$ :

$$(\nabla f)_p := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)_p \in T_p \mathbb{R}^n.$$

Fissato  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$ , per  $\varepsilon$  “piccolo”, consideriamo l’applicazione

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad t \mapsto (p + tv) \mapsto f(p + tv).$$

**Definizione 1.27.** La **derivata direzionale** di  $f$  rispetto al vettore tangente  $v_p$  è definita da

$$v_p(f) := \frac{d}{dt} f(p + tv)|_{t=0}.$$

**Proposizione 1.28.** Sia  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$ ,  $v_p = (v_1, \dots, v_n)_p$ , allora

$$(1.2) \quad v_p(f) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = v_p \cdot (\nabla f)_p.$$

Inoltre, se  $\alpha(t)$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^n$  con  $\alpha(I) \subset U$ , risulta

$$(1.3) \quad \dot{\alpha}(t)(f) = \frac{d}{dt} f(\alpha(t)).$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione  $v_p(f) := \frac{d}{dt} f(p + tv)|_{t=0}$ , dove

$$f(p + tv) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = f(p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n).$$

Esplicitando, si ha

$$v_p(f) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + tv) \frac{dx_i}{dt} \right)_{|t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = v_p \cdot (\nabla f)_p.$$

Ora, sia  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $\dot{\alpha}(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)} \mathbb{R}^n$ . Allora, applicando la (1.2) e la formula di derivazione per la funzione  $f(\alpha(t))$ , si ha

$$\dot{\alpha}(t)(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t)) \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} f(\alpha(t)).$$

□

**Esercizio 1.29.** Siano dati il vettore tangente  $v_p = (1, 2, 3)_p \in T_p \mathbb{R}^3$ ,  $p = (1, 2, -1)$ , e la funzione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x, y, z) = xy^2z^3$ . Si calcoli la derivata direzionale  $v_p(f)$ .

**Osservazione 1.30.** Dalla (1.2), prendendo  $v_p = e_{j_p}$ , segue facilmente che

$$e_{j_p}(f) = (\partial f / \partial x_j)(p).$$

Quindi, in questo contesto,

$$e_{j_p} \text{ si può identificare con la derivata parziale } (\partial / \partial x_j)_p.$$

Denotiamo con  $\mathcal{F}(A)$  l’insieme di tutte le funzioni differenziabili

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dove } A \text{ è un aperto di } \mathbb{R}^n.$$

$\mathcal{F}(A)$  ha una struttura naturale di spazio vettoriale reale. Inoltre, considerando anche il prodotto interno  $(f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2$ ,  $\mathcal{F}(A)$  ha una struttura di algebra reale commutativa. Analogamente, l'insieme  $\mathcal{F}(p)$  di tutte le funzioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabili in un intorno  $U$  di  $p$ , ha una struttura di algebra reale commutativa.

**Proposizione 1.31.** *Siano  $v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}^n$ . Per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e per ogni  $f, g \in \mathcal{F}(p)$ , valgono le seguenti proprietà:*

- (1)  $v_p(\lambda f + \mu g) = \lambda v_p(f) + \mu v_p(g)$
- (2)  $v_p(f \cdot g) = f(p) v_p(g) + g(p) v_p(f)$
- (3)  $(\lambda v_p + \mu w_p)(f) = \lambda v_p(f) + \mu w_p(f)$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla (1.2). □

Le proprietà (1) e (2) ci dicono che l'applicazione  $v_p^* : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto v_p(f)$ , è una derivazione dell'algebra  $\mathcal{F}(p)$ .

**Definizione 1.32.** *Un **campo di vettori** su  $A$  (aperto di  $\mathbb{R}^n$ ) è una corrispondenza*

$$V : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow TA := \bigcup_{p \in A} T_p \mathbb{R}^n, p \mapsto V(p) \in T_p \mathbb{R}^n.$$

In particolare, i vettori  $e_1, \dots, e_n$  della base canonica di  $\mathbb{R}^n$  si possono considerare come campi vettoriali su  $\mathbb{R}^n$ . Nel seguito denoteremo con  $E_1, \dots, E_n$  i campi vettoriali definiti dalla **base canonica**,  $E_i : p \mapsto E_{ip} = e_{ip}$ . Se  $V, W$  sono campi vettoriali su  $A$  e  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , si possono definire i campi vettoriali  $V + W$  e  $gV$  ponendo

$$(V + W)(p) = V(p) + W(p) \quad \text{e} \quad (gV)(p) = g(p)V(p).$$

Se  $V$  è campo vettoriale su  $A$  ed  $f \in \mathcal{F}(A)$ , si può definire la funzione  $V(f)$  *derivata di  $f$  rispetto al campo vettoriale  $V$*  nel seguente modo:

$$V(f) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto V(f)(p) := V_p(f).$$

Naturalmente, se  $V, W$  sono campi vettoriali ed  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \in \mathcal{F}(A)$ , allora

$$(V + W)(f) = V(f) + W(f) \quad \text{e} \quad (gV)(f) = gV(f).$$

**Definizione 1.33.** *Un **campo vettoriale**  $V$  si dice campo di vettori differenziabile se per ogni  $f \in \mathcal{F}(A)$  risulta  $V(f) \in \mathcal{F}(A)$ .*

Denotiamo con  $\mathfrak{X}(A)$  l'insieme di tutti i campi vettoriali differenziabili definiti sull'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . I campi vettoriali  $E_1, \dots, E_n$  sono differenziabili in quanto per ogni  $f \in \mathcal{F}(A)$ :

$$E_i(f)(p) = E_{ip}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad \text{per ogni } p \implies E_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Quindi, in questo contesto,

$$E_j \text{ si può identificare con la derivata parziale } (\partial/\partial x_j).$$

Sia  $V$  un campo vettoriale su  $A$  e sia  $p \in A$ . Ricordiamo che  $\{(E_i)_p\}$  è una base ortonormale di  $T_p \mathbb{R}^n$  per ogni  $p \in \mathbb{R}^n$ . Allora,  $V(p) \in T_p \mathbb{R}^n$  e quindi

$$V(p) = \sum_{i=1}^n V^i(p) E_{i_p} = \sum_{i=1}^n (V(p) \cdot E_{i_p}) E_{i_p} = \sum_i (V^i E_i)(p) \quad \forall p \in A,$$

per cui

$$V = \sum_{i=1}^n V^i E_i.$$

Le funzioni

$$V^i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto V^i(p) = V(p) \cdot E_{i_p} = (V \cdot E_i)(p),$$

si dicono *funzioni componenti* di  $V$  (rispetto alla base canonica), e quindi

$$V^i = V \cdot E_i.$$

**Esempio 1.34.** Per ogni funzione differenziabile  $f \in \mathcal{F}(A)$ , il gradiente  $\nabla f$  è un esempio di campo vettoriale differenziabile su  $A$ . Più precisamente,

$$\nabla f : p \mapsto (\nabla f)_p \in T_p \mathbb{R}^n$$

e quindi

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

**Proposizione 1.35.** *Un campo vettoriale  $V$  è differenziabile se e solo se le sue funzioni componenti  $V^i$  sono differenziabili.*

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo esprimere  $V = \sum_{i=1}^n V^i E_i$ . Assumiamo  $V$  differenziabile. Consideriamo la funzione coordinata  $i$ -esima

$$f = x_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = x_i.$$

Tale funzione è differenziabile e

$$V(f) = V(x_i) = \sum_{j=1}^n V^j E_j(x_i) = \sum_j V^j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = V^i.$$

Pertanto, le funzioni componenti  $V^i$  sono differenziabili per ogni  $i$ . Viceversa, se le funzioni  $V^i$  sono differenziabili, allora per ogni  $f \in \mathcal{F}(A)$  si ottiene  $V(f) = \sum_{i=1}^n V^i E_i(f) \in \mathcal{F}(A)$ .  $\square$

**Osservazione 1.36.** Sia  $V = \sum_i V^i E_i$  un campo vettoriale su  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Da  $V(f) = \sum_{i=1}^n V^i (\partial f / \partial x_i)$  seguono le proprietà:

$$V(af + bg) = aV(f) + bV(g) \quad \text{e} \quad V(f \cdot g) = fV(g) + gV(f)$$

per ogni  $f, g \in \mathcal{F}(A)$  e per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ . Quindi, un campo vettoriale differenziabile definisce una **derivazione** di  $\mathcal{F}(A)$ . Inoltre, se  $V, W$  sono due campi

vettoriali su  $A$  e  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(A)$ , si può definire in modo naturale il campo di vettori

$$f_1V + f_2W : p \mapsto (f_1(p)V_p + f_2(p)W_p) \in T_p\mathbb{R}^n.$$

Risulta facilmente che

$$(f_1V + f_2W)(f) = f_1V(f) + f_2W(f) \text{ per ogni } f \in \mathcal{F}(A).$$

**Osservazione 1.37.** Si può dimostrare che ogni derivazione dell'algebra  $\mathcal{F}(A)$  (resp.  $\mathcal{F}(p)$ ) definisce un campo di vettori differenziabile su  $A$  (resp. un vettore tangente in  $p$  a  $\mathbb{R}^n$ ).

**Esempio 1.38.** Data la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$$

si consideri la circonferenza  $\mathbb{S}^1$  parametrizzata da  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Il campo vettoriale gradiente

$$\nabla f : p \mapsto (\nabla f)_p = 2(x_1, x_2)_p$$

e il campo vettoriale

$$X : p \mapsto X_p = -x_2(E_1)_p + x_1(E_2)_p$$

soddisfano

$$X_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t) \quad \text{e} \quad (\nabla f)_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

In generale, dato un campo vettoriale differenziabile  $X$ , una curva differenziabile  $\gamma(t)$ ,  $|t| < \varepsilon$ , che soddisfa

$$\gamma(0) = p_0 \quad \text{e} \quad X_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t) \quad \text{per ogni } t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

si dice **curva integrale** di  $X$  con inizio in  $p_0$ .

**Esempio 1.39.** Siano  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  definiti da

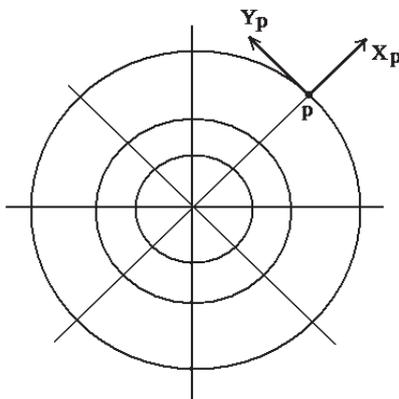


FIGURA 5. Curve integrali di  $X$  e  $Y$ .

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2, \quad Y = x_2 E_1 - x_1 E_2, \quad Z = x_1 E_1 - x_2 E_2.$$

La curva integrale di  $X$  con inizio in  $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$  è data da  $\gamma(t) = (a_1 e^t, a_2 e^t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (cf. Figura 5). Quindi le curve integrali di  $X$  sono semirette radiali (il parametro non è affine). La curva integrale di  $Y$  con inizio in  $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$  è data da  $\gamma(t) = (a_1 \cos t - a_2 \sin t, a_1 \sin t + a_2 \cos t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , che è una circonferenza di centro l'origine e con inizio in  $p$  (cf. Figura 5). La curva integrale di  $Z$  con inizio in  $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$  è data da  $\gamma(t) = (a_1 e^t, a_2 e^{-t})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . In questo caso, una curva integrale è un semiasse coordinato (quando  $a_1 a_2 = 0$ ) oppure un ramo di iperbole equilatera (quando  $a_1 a_2 \neq 0$ ).

### Parentesi di Lie

Sia  $\mathcal{L}$  uno spazio vettoriale reale.  $\mathcal{L}$  si dice che è un'algebra di Lie (reale) se è definito un prodotto, detto *parentesi di Lie*,

$$[,] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, (X, Y) \mapsto [X, Y],$$

che soddisfa le seguenti proprietà

- (1)  $[,]$  è bilineare,
- (2)  $[,]$  è antisimmetrica:  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- (3)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  (identità di Jacobi).

$\mathbb{R}^3$  con l'usuale prodotto vettoriale e lo spazio vettoriale delle matrici quadrate  $\mathbb{R}^{n,n}$  con  $[A, B] := AB - BA$ , dove  $AB$  denota l'usuale prodotto tra matrici, sono esempi di algebre di Lie. Se  $\mathcal{L}$  è un'algebra di Lie abeliana, cioè  $[X, Y] = [Y, X]$ , allora la parentesi di Lie  $[,] = 0$ .

Consideriamo ora due campi vettoriali  $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $X = (X^1, \dots, X^n)$ ,  $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$ . Il campo vettoriale differenziabile  $[X, Y]$  definito da

$$[X, Y] := \sum_{j=1}^n (X(Y^j) - Y(X^j)) E_j, \quad \text{ossia} \quad [X, Y]^j = X(Y^j) - Y(X^j),$$

viene detto *parentesi di Lie* dei campi vettoriali  $X, Y$  (nell'ordine dato). Il campo vettoriale differenziabile  $[X, Y]$ , pensato come una derivazione di  $\mathcal{F}(A)$ , soddisfa la proprietà

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f), \quad \text{per ogni} \quad f \in \mathcal{F}(A).$$

In particolare, per i campi vettoriali definiti dalla base canonica si ha

$$[E_i, E_j] = 0.$$

Se nello spazio vettoriale  $\mathfrak{X}(A)$ , consideriamo il prodotto

$$[,] : \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \rightarrow \mathfrak{X}(A), (X, Y) \mapsto [X, Y],$$

è facile verificare che  $\mathfrak{X}(A)$  è un'algebra di Lie. Inoltre, vale la seguente proprietà :

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X,$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$  e per ogni  $f, g \in \mathcal{F}(A)$ .

**Esercizio 1.40.** Considerati i campi di vettori  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$  definiti da:

$$X = x_3 E_2 - x_2 E_3, \quad Y = x_1 E_3 - x_3 E_1, \quad Z = -x_1 E_2 + x_2 E_1,$$

verificare che

$$[X, Y] = Z, \quad [Y, Z] = X, \quad [Z, X] = Y.$$

### Derivata covariante (euclidea)

Siano  $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $X = (X^1, \dots, X^n)$ ,  $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$ .

- Il prodotto scalare di  $X$  e  $Y$  è la funzione

$$X \cdot Y : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto (X \cdot Y)(p) := X(p) \cdot Y(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) Y^i(p).$$

Quindi

$$(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^n X^i Y^i \quad \text{e} \quad \|X\|^2 = \sum_{i=1}^n (X^i)^2.$$

In particolare, siccome  $X, Y$  sono differenziabili, la funzione  $X \cdot Y \in \mathcal{F}(A)$ .

- Il campo vettoriale differenziabile  $\bar{\nabla}_X Y$  definito da

$$(1.4) \quad \bar{\nabla}_X Y := (X(Y^1), \dots, X(Y^n)) = \sum_{j=1}^n X(Y^j) E_j = \sum_{i,j=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} E_j.$$

viene detto *derivata covariante (euclidea)* di  $Y$  rispetto a  $X$ . Quindi la derivata covariante è la naturale generalizzazione della derivata direzionale. L'operatore  $\bar{\nabla}_X$  si dice *derivata covariante (euclidea) rispetto a  $X$* .

**Proposizione 1.41.** *L'operatore*

$$\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \rightarrow \mathfrak{X}(A), \quad (X, Y) \mapsto \bar{\nabla}_X Y,$$

soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{fX} Y &= f \bar{\nabla}_X Y, \\ \bar{\nabla}_{X+Y} Z &= \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_Y Z, \\ \bar{\nabla}_X (Y + Z) &= \bar{\nabla}_X Y + \bar{\nabla}_X Z, \\ \bar{\nabla}_X (fY) &= X(f)Y + f \bar{\nabla}_X Y \quad (\text{regola di Leibniz}), \\ X(Y \cdot Z) &= (\bar{\nabla}_X Y) \cdot Z + Y \cdot (\bar{\nabla}_X Z) \quad (\text{compatibilità di } \bar{\nabla} \text{ con } \cdot), \\ \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X &= [X, Y] \quad (\text{simmetria di } \bar{\nabla}), \end{aligned}$$

per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(A)$  e per ogni  $f \in \mathcal{F}(A)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** (Per esercizio). □

Le prime quattro proprietà della Proposizione 1.41 ci dicono che  $\bar{\nabla}$  è una *connessione lineare* su  $\mathbb{R}^n$ . Preferiamo usare il simbolo  $\bar{\nabla}$  per questa esplicita connessione lineare (detta anche **connessione lineare euclidea**), in quanto il simbolo  $\nabla$  generalmente è usato per indicare una arbitraria connessione lineare.

Fissato  $p \in \mathbb{R}^n$ , l'operatore  $\bar{\nabla} : T_p \mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}(A) \rightarrow T_p \mathbb{R}^n$ ,  $(X_p, Y) \mapsto \bar{\nabla}_{X_p} Y$ , dove

$$(1.5) \quad \bar{\nabla}_{X_p} Y = (X_p(Y^1), \dots, X_p(Y^n)),$$

soddisfa proprietà analoghe a quelle della Proposizione 1.41. Si noti che, per  $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$ ,

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = (X(Y^1), \dots, X(Y^n))_p = (X_p(Y^1), \dots, X_p(Y^n)) = \bar{\nabla}_{X_p} Y.$$

**Definizione 1.42.** *Un campo vettoriale differenziabile  $Y$  si dice parallelo se  $\bar{\nabla} Y = 0$ , ossia  $\bar{\nabla}_X Y = 0$  per ogni campo vettoriale differenziabile  $X$ .*

**Esercizio 1.43.** Si verifichi che un campo vettoriale  $Y \in \mathfrak{X}(A)$  è parallelo se, e solo se, le sue funzioni componenti sono delle costanti.

**Definizione 1.44.** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Si definisce divergenza di un campo vettoriale  $Y \in \mathfrak{X}(A)$  la funzione differenziabile*

$$(1.6) \quad \operatorname{div} Y := \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{E_i} Y \cdot E_i) = \dots = \sum_{i=1}^n E_i(Y^i) = \sum_{i=1}^n \partial_i Y^i.$$

L'operatore di Laplace (detto anche laplaciano) è l'operatore

$$(1.7) \quad \Delta : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A), f \mapsto \Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

Siccome il gradiente di  $f$  è il campo vettoriale  $\nabla f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ , allora

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}.$$

**Esercizio 1.45.** Si verifichi che  $\operatorname{div} Y = \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{\bar{E}_i} Y \cdot \bar{E}_i)$ , dove  $(\bar{E}_i)$  è una arbitraria base ortonormale di campi vettoriali differenziabili su  $\mathbb{R}^n$ .

**Esercizio 1.46.** Considerati i campi di vettori  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$  definiti da:

$$X = x_3 E_2 - x_2 E_3, \quad Y = x_1 E_3 - x_3 E_1, \quad Z = -x_1 E_2 + x_2 E_1,$$

calcolare i campi vettoriali  $\bar{\nabla}_X Y, \bar{\nabla}_Y X, \bar{\nabla}_Y Z, \bar{\nabla}_Z Y, \bar{\nabla}_X Z, \bar{\nabla}_Z X$ , e verificare che

$$\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = Z, \quad \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Z Y = X, \quad \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_Z X = Y.$$

**Esercizio 1.47.** Sia  $\bar{R} : \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \rightarrow \mathfrak{X}(A)$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ , l'applicazione definita da

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z.$$

Si verifichi che l'applicazione  $\bar{R}$  è identicamente nulla.

#### 1.4. Il differenziale (di un'isometria)

Nel seguito le isometrie (e il loro differenziale) giocheranno un ruolo fondamentale nello studio della geometria delle curve di  $\mathbb{R}^3$ . Iniziamo introducendo il differenziale di una arbitraria applicazione differenziabile.

**Definizione 1.48.** *Sia  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un'applicazione differenziabile,  $F = (F_1, \dots, F_m)$ , e sia  $p \in \mathbb{R}^n$ . Ogni dato vettore  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$  si può sempre scrivere come vettore tangente a una curva differenziabile passante per  $p$ , quindi sia  $\alpha(t)$  una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^n$  con  $\alpha(0) = p$  e  $\dot{\alpha}(0) = v_p$ . La curva  $\beta(t) =$*

$F(\alpha(t))$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^m$  con  $\beta(0) = F(p)$ . Il differenziale di  $F$  in  $p$ , detta anche applicazione tangente in  $p$ , è l'applicazione

$$F_{*p} : T_p \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^m, \quad v_p \longmapsto F_{*p} v_p := \dot{\beta}(0) \in T_{F(p)} \mathbb{R}^m.$$

La definizione data è ben posta. Infatti, abbiamo il seguente teorema.

**Teorema 1.49.** *Sia  $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  applicazione differenziabile, e sia  $p \in \mathbb{R}^n$ . Allora, per ogni  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$  si ha*

$$F_{*p} v_p = \sum_{j=1}^m v_p(F_j) E_{j_{F(p)}} = (v_p(F_1), \dots, v_p(F_m))_{F(p)},$$

e quindi

$$F_{*p} v_p = \sum_{j=1}^m (v_p \cdot (\nabla F_j)_p) E_{j_{F(p)}}.$$

In particolare:

- (a) La definizione di  $F_{*p}$  non dipende dalla scelta della curva  $\alpha(t)$ .
- (b)  $F_{*p}$  è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare tra spazi vettoriali.
- (c) Se  $F = f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , allora  $F_{*p}$  si identifica con la forma lineare

$$(df)_p : T_p \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \equiv T_{f(p)} \mathbb{R}, \quad v_p \longmapsto (df)_p(v_p) = v_p(f) = (\nabla f)_p \cdot v_p.$$

Quindi,  $(df)_p \in T_p^* \mathbb{R}^n$  è la forma lineare duale del vettore  $(\nabla f)_p \in T_p \mathbb{R}^n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$ ,  $v_p = \sum_{i=1}^n v^i E_{i_p}$ . Sia  $\alpha(t)$  una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^n$  con  $\alpha(0) = p$  e  $\dot{\alpha}(0) = v_p$ . Se  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , allora  $\dot{\alpha}(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))_{\alpha(t)}$  e  $v_p = \dot{\alpha}(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) E_{i_p}$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Quindi, la curva

$$\beta(t) = F(\alpha(t)) = (y_1(t), \dots, y_m(t)) = (F_1(x_i(t)), \dots, F_m(x_i(t)))$$

è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^m$  con  $\beta(0) = F(\alpha(0)) = F(p)$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} F_{*p} v_p := \dot{\beta}(0) &= \sum_{j=1}^m \frac{dy_j}{dt}(0) E_{j_{F(p)}} = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\alpha(0)) \frac{dx_i}{dt}(0) \right) E_{j_{F(p)}} \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) v^i \right) E_{j_{F(p)}} = \sum_{j=1}^m ((\nabla F_j)_p \cdot v_p) E_{j_{F(p)}} \\ &= \sum_{j=1}^m v_p(F_j) E_{j_{F(p)}}, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione 1.28. Le proprietà (a), (b), (c) seguono facilmente dalla prima parte del Teorema.  $\square$

**Osservazione 1.50.** Naturalmente per definire il differenziale  $F_{*p}$  basta la differenziabilità di  $F$  in un intorno del punto  $p$ .

**Osservazione 1.51.** Dalla (c) del Teorema 1.49 segue che, per  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , il differenziale  $df$  definisce un elemento di  $\mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^n)$ , ossia la forma  $\mathcal{F}$ -lineare

$$df : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), \quad X \mapsto X(f), \quad \text{dove } X(f)(p) = X_p(f).$$

Naturalmente, si può sostituire  $\mathbb{R}^n$  con un suo aperto.

**Osservazione 1.52.** (*significato geometrico del differenziale*)

Data una curva differenziabile  $\alpha(t)$  di  $\mathbb{R}^n$ . Dalla definizione di  $F_{*p}$ , prendendo  $p = \alpha(t)$  e  $v_p = \dot{\alpha}(t)$ , si ha

$$F_{*\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t)) = \dot{\beta}(t), \quad \text{dove } \beta(t) = F(\alpha(t)).$$

Quindi il differenziale di una applicazione differenziabile  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  trasforma un vettore tangente a una curva  $\alpha(t)$  in un vettore tangente alla curva immagine  $\beta(t) = F(\alpha(t))$ .

**Esercizio 1.53.** Siano dati la funzione  $F(x, y, z) = (xy, xz, yz)$ , il punto  $p = (1, 1, 1)$  e il vettore  $v_p = (1, 2, 3)_p$ . Si determini il vettore  $F_{*p}v_p$ .

**Esempio 1.54.** Un esempio, anche se in una forma un pò mascherata, di applicazione tangente è dato dal vettore velocità di una curva differenziabile  $\alpha(t)$  di  $\mathbb{R}^n$ . Infatti, la curva  $\alpha$  è una funzione differenziabile  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , e  $\alpha_* : T_t I = T_t \mathbb{R} \rightarrow T_{\alpha(t)} \mathbb{R}^n$ . Indicato con  $E_t = (E_1)_t$  il vettore tangente che rappresenta la base canonica di  $T_t \mathbb{R}$ , si ha

$$\alpha_*(E_t) = (E_t(x_1), \dots, E_t(x_n))_{\alpha(t)} = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))_{\alpha(t)} = \dot{\alpha}(t).$$

**Matrice associata al differenziale  $F_{*p}$** 

Il differenziale  $F_{*p} : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^m$  è un'applicazione lineare. Determiniamo quindi la matrice associata a  $F_{*p}$  rispetto alle basi canoniche  $(E_{i_p})$  di  $T_p \mathbb{R}^n$  e  $(E_{j_{F(p)}})$  di  $T_{F(p)} \mathbb{R}^m$ . Dal Teorema 1.49 segue

$$F_*(E_{i_p}) = (E_{i_p}(F_1), \dots, E_{i_p}(F_m))_{F(p)} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(p) \right)_{F(p)}.$$

Pertanto, la matrice associata al differenziale  $F_{*p}$  è la seguente matrice (a  $m$  righe ed  $n$  colonne):

$$\mathcal{M}(F_{*p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(p) & \ddots & & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} = \left( \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) \right) \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n}}.$$

$\mathcal{M}(F_{*p})$  è detta *matrice jacobiana* di  $F$  nel punto  $p$  e si indica con  $J(F)_p$ . Si può anche scrivere

$$J(F)_p = \begin{pmatrix} (\nabla F_1)_p \\ \vdots \\ (\nabla F_m)_p \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza

$F_{*p}$  isomorfismo  $\iff n = m$  e  $\det(J(F)_p) \neq 0$ .

**Esercizio 1.55.** Sia  $F$  la funzione dell'Esercizio 1.53. Si determinino i punti di  $\mathbb{R}^3$  in cui  $F_{*p}$  è un isomorfismo.

Se  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $G : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  sono applicazioni differenziabili, con  $A, B$  aperti e  $F(A) \subseteq B$ , allora  $G \circ F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è differenziabile, e applicando la definizione di differenziale, si ottiene

$$(G \circ F)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p} \quad \text{per ogni } p \in A.$$

Infatti, se  $v_p = \dot{\alpha}(0)$  con  $\alpha(0) = p$ , posto

$$\beta(t) = F(\alpha(t)) \quad \text{e} \quad \gamma(t) = G(\beta(t)) = (G \circ F)(\alpha(t)),$$

si ha

$$G_{*F(p)}(F_{*p}v_p) = G_{*F(p)}(\dot{\beta}(0)) = \dot{\gamma}(0) = (G \circ F)_{*p}(v_p).$$

Inoltre, se  $I_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è l'identità, allora  $(I_d)_* = I_d : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_p\mathbb{R}^n$ .

Queste proprietà implicano il seguente teorema.

**Teorema 1.56.** *Se  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un diffeomorfismo, cioè  $F$  è bigettiva con  $F, F^{-1}$  differenziabili, allora  $F_{*p}$  è un isomorfismo e  $F_{*p}^{-1} = (F^{-1})_{*F(p)}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Da  $F \circ F^{-1} = I = F^{-1} \circ F$  segue che

$$(F \circ F^{-1})_{*F(p)} = I_{T_{F(p)}\mathbb{R}^n} \quad \text{e} \quad (F^{-1} \circ F)_{*p} = I_{T_p\mathbb{R}^n},$$

cioè

$$F_{*p} \circ (F^{-1})_{*F(p)} = I_{T_{F(p)}\mathbb{R}^n} \quad \text{e} \quad (F^{-1})_{*F(p)} \circ F_{*p} = I_{T_p\mathbb{R}^n}.$$

Pertanto,  $F_{*p}$  è un isomorfismo e  $(F_{*p})^{-1} = (F^{-1})_{*F(p)}$ .  $\square$

Inoltre, il Teorema della funzione inversa si può esprimere nella seguente forma (usando il differenziale  $F_{*p}$  al posto della matrice jacobiana).

**Teorema 1.57. (della funzione inversa)** *Sia  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione differenziabile e sia  $p \in \mathbb{R}^n$ . Allora  $F_{*p}$  è un isomorfismo se, e solo se, esistono  $U$  (intorno aperto di  $p$ ) e  $\tilde{U}$  (intorno aperto di  $F(p)$ ) tali che  $F|_U : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  sia un diffeomorfismo.*

Sia ora  $F$  un diffeomorfismo di  $A$  con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $X \in \mathfrak{X}(A)$ , allora si può definire il campo vettoriale  $F_*X$  ponendo per ogni  $q \in F(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$(F_*X)_q = F_{*p}X_p, \quad \text{dove } p = F^{-1}(q).$$

Dall'espressione di  $F_{*p}$  trovata nel Teorema 1.49 segue che  $F_*X \in \mathfrak{X}(F(A))$ . Infatti,

$$(F_*X)_q = \sum_{j=1}^m X_p(F_j) E_{j_q} = \sum_{j=1}^m X(F_j)(p) E_{j_q} = \sum_{j=1}^m X(F_j)(F^{-1}(q)) E_{j_q},$$

quindi le funzioni componenti di  $F_*X$  sono date da

$$(F_*X)^j = X(F_j) \circ F^{-1}.$$

In particolare, se  $F$  è un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^n$ ,  $F_*X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ .

### Differenziale di un'isometria

Le isometrie di  $\mathbb{R}^n$  sono (come vedremo) particolari applicazioni affini. Consideriamo quindi prima il caso di un'**applicazione affine**, ossia di un'applicazione

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ del tipo } F = A + a,$$

dove  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  è un'applicazione lineare (che si può identificare con una matrice quadrata di ordine  $n$ ). Se  $A$  è invertibile,  $F$  è detta **trasformazione affine**.

**Proposizione 1.58.** *Se  $F = A + a$  è un'applicazione affine, allora*

$$F_{*p}v_p = (Av)_{F(p)}.$$

*In particolare, il differenziale di un'applicazione lineare coincide con l'applicazione stessa.*

**DIMOSTRAZIONE.** Applicando la definizione di differenziale,  $F_{*p}v_p$  è il vettore velocità, per  $t = 0$ , della curva

$$\beta(t) = F(p + tv) = A(p + tv) + a = Ap + a + tAv.$$

Pertanto,  $F_{*p}v_p = \dot{\beta}(0) = (Av)_{\beta(0)} = (Av)_{F(p)}$ .

□

Ricordiamo che, per definizione, una **isometria** di  $\mathbb{R}^n$  è un'applicazione  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che conserva la distanza euclidea, ossia per ogni  $p, q \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$\|q - p\| = \|F(q) - F(p)\|.$$

Inoltre, un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è detta **trasformazione ortogonale** se soddisfa la condizione

$$x \cdot y = f(x) \cdot f(y) \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

equivalentemente

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n.$$

Una trasformazione ortogonale  $f$  si può identificare con una matrice ortogonale  $A$  (ossia  $A^T A = I_n$ ), basta considerare la matrice associata ad  $f$  rispetto a una fissata base ortonormale (ad esempio la base canonica).

**Teorema 1.59.** *Le isometrie di  $\mathbb{R}^n$  sono tutte e sole le trasformazioni  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  del tipo*

$$F(x) = A(x) + a,$$

*dove  $A$  è una **trasformazione ortogonale** di  $\mathbb{R}^n$  ed  $a \in \mathbb{R}^n$ . Una trasformazione ortogonale  $A$  è anche detta **isometria lineare**.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $F$  un'applicazione del tipo

$$F(x) = f(x) + a,$$

dove  $f$  è una trasformazione ortogonale e  $a$  è un fissato elemento di  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|F(x) - F(y)\| = \|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| = \|x - y\|,$$

e quindi  $F$  è un'isometria di  $\mathbb{R}^n$ .

Viceversa, sia ora  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'isometria. Per provare quanto enunciato, basta provare che l'applicazione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  così definita:

$$f(x) = F(x) - F(0)$$

è una trasformazione ortogonale. Poiché  $F$  è una isometria,  $F$  conserva le distanze e quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|f(x)\| = \|F(x) - F(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|.$$

Inoltre, per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|f(x) - f(y)\| = \|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|,$$

dove

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y$$

e

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2f(x) \cdot f(y).$$

Quindi, per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  si ha:

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y.$$

Sia ora  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ , poiché  $f$  conserva il prodotto scalare anche  $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$  sarà una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ . Di conseguenza  $f$  è anche lineare in quanto, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = \sum x_i e_i$ , si ha:

$$f(\sum_i x_i e_i) = f(x) = \sum_i (f(x) \cdot f(e_i)) f(e_i) = \sum_i (x \cdot e_i) f(e_i) = \sum_i x_i f(e_i).$$

Pertanto,  $f$  è una trasformazione ortogonale.  $\square$

Dalla Proposizione 1.58 e dal Teorema 1.59, segue il seguente

**Corollario 1.60.** *Se  $F$  è un'isometria di  $\mathbb{R}^n$ ,  $F = A + a$ , con  $A$  trasformazione (matrice) ortogonale di  $\mathbb{R}^n$  ed  $a \in \mathbb{R}^n$ , allora*

$$F_{*p} v_p = (Av)_{F(p)}.$$

Quindi,  $F_{*p}$  conserva il prodotto scalare:

$$F_{*p} v_p \cdot F_{*p} w_p = v_p \cdot w_p \quad \text{per ogni } v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}^n.$$

In particolare,  $F_{*p}$  trasforma basi ortonormali in basi ortonormali. Inoltre, la lunghezza di un arco di curva è invariante per isometrie.

**Proposizione 1.61.** *Siano  $p, q \in \mathbb{R}^n$  e  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $\{w_1, \dots, w_n\}$  basi ortonormali di  $T_p \mathbb{R}^n$  e  $T_q \mathbb{R}^n$  rispettivamente. Allora, esiste una sola isometria  $F$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che*

$$F(p) = q \quad \text{e} \quad F_{*p} v_{i_p} = w_{i_q} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A$  la trasformazione ortogonale di  $\mathbb{R}^n$  definita da

$$Av_i = w_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Posto  $a := q - A(p) \in \mathbb{R}^n$ , l'isometria  $F = A + a$  soddisfa:

$$F(p) = A(p) + a = q, \quad F_{*p}v_{i_p} = (Av_i)_q = w_{i_q} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Mostriamo ora l'unicità. Sia  $\tilde{F} = \tilde{A} + \tilde{a}$  un'altra isometria tale che  $\tilde{F}(p) = q$  e  $\tilde{F}_{*p}(v_{i_p}) = w_{i_q}$  per ogni  $i$ . Allora, per ogni  $i$ , si ha

$$\tilde{F}_{*p}v_{i_p} = w_{i_q} = F_{*p}v_{i_p} \implies (Av_i)_q = (\tilde{A}v_i)_q \implies Av_i = \tilde{A}v_i,$$

e quindi  $\tilde{A} = A$ . Inoltre,

$$\tilde{F}(p) = q = F(p) \implies \tilde{A}(p) + \tilde{a} = A(p) + a \implies \tilde{a} = a.$$

Pertanto  $\tilde{F} = F$ . □

Ricordiamo che se  $F$  è un'isometria di  $\mathbb{R}^n$ ,  $F = A + a$ , il **segno di  $F$**  è definito da

$$\text{sign}(F) := \det(A) = \pm 1.$$

Una trasformazione ortogonale  $A$  con  $\det(A) = +1$  si dice *rotazione* (o *trasformazione ortogonale speciale*).

**Esercizio 1.62.** Sia  $E$  un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ . Si verifichi che l'applicazione

$$\Phi : \mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp \rightarrow \mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp, x = x_E + x_{E^\perp} \mapsto \Phi(x) = x_E - x_{E^\perp},$$

è una trasformazione ortogonale (che viene detta *riflessione*, o *simmetria ortogonale*, rispetto al sottospazio  $E$ ).

**Esercizio 1.63.** Siano dati i vettori  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ ,  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$  e  $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$  di  $\mathbb{R}^3$ . Si verifichi che l'applicazione lineare  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  definita da

$$F(v_1) = v_1, \quad F(v_2) = \cos \vartheta v_2 + \text{sen } \vartheta v_3, \quad F(v_3) = -\text{sen } \vartheta v_2 + \cos \vartheta v_3,$$

è una trasformazione ortogonale di  $\mathbb{R}^3$ . Inoltre, si determini il tipo di trasformazione ortogonale.

**Esercizio 1.64.** Scrivere in forma esplicita le seguenti isometrie (lineari) di  $\mathbb{R}^3$ :

- $F_i$ (rotazione intorno all'asse  $x_i$ ),  $i = 1, 2, 3$ ;
- $G_1$ (riflessione rispetto al piano coordinato  $\mathbb{R}^2(x_2, x_3)$ );
- $G_2$ (riflessione rispetto al piano coordinato  $\mathbb{R}^2(x_1, x_3)$ );
- $G_3$ (riflessione rispetto al piano coordinato  $\mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ ).

**Esercizio 1.65.** Sia  $A_1$  una matrice le cui colonne definiscono i vettori di una base ortonormale di  $T_p\mathbb{R}^n$  e sia  $A_2$  una matrice le cui colonne definiscono i vettori di una base ortonormale di  $T_q\mathbb{R}^n$ . Determinare, in termini di  $A_1$  e  $A_2$ , la matrice  $A$  dell'isometria  $F$  definita nella Proposizione 1.61.

**Esercizio 1.66.** Sia  $F = A + a$  una isometria di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\pi$  un piano di  $\mathbb{R}^3$  per  $p$  e ortogonale a  $v$ . Si verifichi che  $F(\pi)$  è il piano per  $F(p)$  e ortogonale al vettore  $Av$ .

Sia  $F$  una trasformazione affine,  $F = A + a$ ,  $A$  matrice invertibile. Dalla Proposizione 1.58, per  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  si ha  $F_*X = AX$ , ovvero

$$(F_*X)_q = (AX_{F^{-1}(q)})_q = (AX_p)_q.$$

In particolare, se  $F$  è una isometria, si ha

$$F_*X \cdot F_*Y = (X \cdot Y) \circ F^{-1}$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . Infatti,

$$\begin{aligned} (F_*X \cdot F_*Y)(q) &= (F_*X)_q \cdot (F_*Y)_q = F_{*p}X_p \cdot F_{*p}Y_p \\ &= X_p \cdot Y_p = (X \cdot Y)(p) \\ &= (X \cdot Y) \circ F^{-1}(q). \end{aligned}$$

**Esercizio 1.67.** Siano dati il campo vettoriale  $X = (\sqrt{2}x_1, x_2 - x_3, x_2 + x_3)$  e l'isometria  $F = A + a$  di  $\mathbb{R}^3$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad a = (1, 1, 1).$$

Determinare il campo vettoriale  $F_*X$  e il vettore tangente  $(F_*X)_q$  nel punto  $q = (2, 2, 2)$ .

*Soluzione:* per quanto osservato prima,  $F_*X = AX = \sqrt{2}(x_1, x_2, x_3)$ . Inoltre, ponendo  $F(p) = q = (2, 2, 2)$  si trova  $p = (1, 0, \sqrt{2})$ . Pertanto,

$$X_p = \sqrt{2}(1, -1, 1) \quad \text{e} \quad (F_*X)_q = (AX_p)_q = (\sqrt{2}, 0, 2)_q.$$

## 1.5. Orientazione e prodotto vettoriale

Siano  $(v_1, \dots, v_n)$  e  $(w_1, \dots, w_n)$  due basi ordinate di  $\mathbb{R}^n$ . Poniamo

$$w_j = \sum a_{ij}v_i, \quad (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Allora

$$(v_i) \sim (w_i) \text{ (basi equiverse)} \stackrel{\text{def}}{\iff} \det(a_{ij}) > 0.$$

Si vede facilmente che  $\sim$  è una relazione di equivalenza nell'insieme  $\mathcal{B}$  di tutte le basi ordinate di  $\mathbb{R}^n$ . Una classe di equivalenza di basi equiverse  $[(v_1, \dots, v_n)]$  si dice **orientazione** di  $\mathbb{R}^n$ . L'insieme quoziente  $\mathcal{B}/\sim$  ha chiaramente solo due classi di equivalenza, e quindi  $\mathbb{R}^n$  ha due orientazioni. Si assume come *orientazione positiva* quella individuata dalla base canonica  $(e_1, \dots, e_n)$ , e quindi  $(e_2, e_1, e_3, e_4, \dots, e_n)$  individua l'orientazione negativa di  $\mathbb{R}^n$ . Pertanto, una base  $(v_1, \dots, v_n)$  la diremo positiva se è equiversa alla base canonica.

• Per  $n = 1$ , fissare un'orientazione significa fissare un verso positivo di percorrenza della retta (cf. Fig. 6).

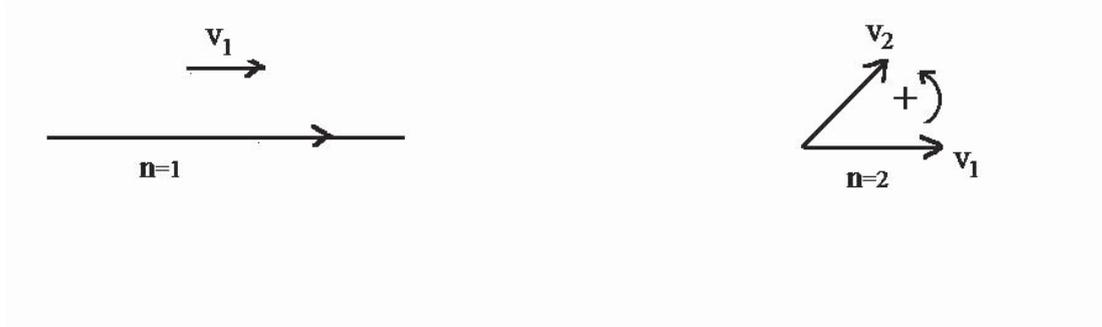


FIGURA 6. Retta e piano orientati.

• Per  $n = 2$ , fissare un'orientazione significa fissare un verso positivo di rotazione nel piano (cf. Fig. 6). L'orientazione positiva è quella determinata dalla base canonica  $(e_1, e_2)$ . In questo caso, una base ordinata  $(v_1, v_2)$  è positiva (risp. negativa) se la più piccola rotazione che sovrappone  $v_1$  a  $v_2$  avviene in senso antiorario (risp. orario).

• Per  $n = 3$ , assumendo come orientazione positiva quella determinata dalla base canonica  $(e_1, e_2, e_3)$ , una base ordinata  $(v_1, v_2, v_3)$  è positiva (risp. negativa) se la più piccola rotazione nel piano  $v_1, v_2$  che sovrappone  $v_1$  a  $v_2$  è vista da un osservatore nel semispazio individuato da  $v_3$  in senso antiorario (risp. orario).

Per  $n = 3$ , il **prodotto vettoriale** di due vettori non paralleli  $v_1, v_2$  è il vettore, che indichiamo con  $v_1 \wedge v_2$ , che ha:

- direzione ortogonale a  $v_1$  e  $v_2$ ;
- modulo  $\|v_1 \wedge v_2\| = \|v_1\| \|v_2\| \sin(\widehat{v_1, v_2})$ ;
- verso tale che la terna  $(v_1, v_2, v_1 \wedge v_2)$  sia positiva.

Se  $v_1, v_2$  sono paralleli, come prodotto vettoriale  $v_1 \wedge v_2$  si assume il vettore nullo. In particolare,  $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$  e i vettori della base canonica  $(e_1, e_2, e_3)$  soddisfano (cf. Figura 7):

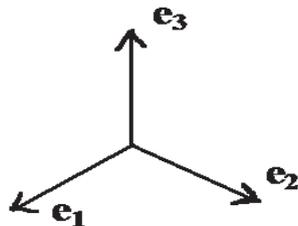


FIGURA 7

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad \text{e} \quad e_1 \wedge e_2 \cdot e_3 = 1.$$

In modo equivalente, il prodotto vettoriale si può definire nel modo seguente. Consideriamo la 3-forma  $\Omega$  su  $\mathbb{R}^3$  (i.e., un'applicazione 3-lineare alternante) definita da

$$\Omega(v_1, v_2, v_3) := \det(v_1, v_2, v_3) = \det(b_{ij})$$

per ogni  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  con  $v_j = \sum_{i=1}^3 b_{ij} e_i$ . In particolare,

$$\Omega(e_1, e_2, e_3) = +1.$$

Dalle proprietà del determinante segue  $\Omega$  è 3-lineare alternante. Il prodotto vettoriale  $v_1 \wedge v_2$  è il vettore definito da

$$v_1 \wedge v_2 \cdot w = \Omega(v_1, v_2, w) \quad \text{per ogni } w \in \mathbb{R}^3,$$

ovvero il prodotto misto

$$(1.8) \quad v_1 \wedge v_2 \cdot v_3 = \det(v_1, v_2, v_3).$$

Quindi,  $(v_1, v_2, v_3)$  è una base positiva se  $\Omega(v_1, v_2, v_3) > 0$  (ossia, il prodotto misto  $v_1 \wedge v_2 \cdot v_3 > 0$ ), mentre è una base negativa se  $\Omega(v_1, v_2, v_3) < 0$  (ossia, il prodotto misto  $v_1 \wedge v_2 \cdot v_3 < 0$ ). Di conseguenza  $\Omega$  determina l'orientazione di  $\mathbb{R}^3$ . Infine, osserviamo che il valore assoluto

$$|\Omega(v_1, v_2, v_3)| = \text{volume}(\mathcal{P}(v_1, v_2, v_3)),$$

dove  $\mathcal{P}(v_1, v_2, v_3)$  è il parallelepipedo (cf. Fig. 8) avente come spigoli concorrenti nello stesso vertice  $p$  i tre vettori applicati nello stesso punto  $p$ .

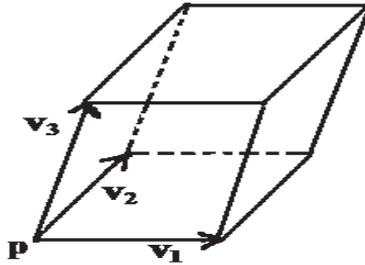


FIGURA 8

Pertanto, la 3-forma  $\Omega$  è anche detta *elemento di volume* di  $\mathbb{R}^3$ .

Siano ora  $v_p, w_p$  vettori di  $T_p \mathbb{R}^3$ , in tal caso si pone

$$v_p \wedge w_p := (v \wedge w)_p.$$

**Proposizione 1.68.** *Siano  $v_{1p}, v_{2p}, v_{3p} \in T_p \mathbb{R}^3$ , ed  $F$  un'isometria di  $\mathbb{R}^3$ . Allora*

$$(a) \quad F_{*p} v_{1p} \wedge F_{*p} v_{2p} \cdot F_{*p} v_{3p} = \text{sign}(F) v_{1p} \wedge v_{2p} \cdot v_{3p} = \text{sign}(F) v_1 \wedge v_2 \cdot v_3,$$

$$(b) F_{*p} v_p \wedge F_{*p} w_p = \text{sign}(F) F_{*p}(v \wedge w)_p.$$

DIMOSTRAZIONE. (a) Poniamo  $v_j = \sum_i b_{ij} e_i$ ,  $j = 1, 2, 3$ , e sia  $B = (b_{ij})$ . L'isometria  $F$  è del tipo  $F = A + a$ , con  $A$  matrice ortogonale, e soddisfa (per ogni  $j = 1, 2, 3$ )

$$F_{*p} v_{j_p} = (A v_j)_{F(p)} = \sum_i c_{kj} e_{kF(p)} \quad \text{dove la matrice } C = (c_{ij}) = A \cdot B.$$

Pertanto, usando la (1.8) e tenendo conto che  $\text{sign}(F) = \det A$ , si ottiene

$$F_{*p} v_{1_p} \wedge F_{*p} v_{2_p} \cdot F_{*p} v_{3_p} = \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \text{sign}(F) v_1 \wedge v_2 \cdot v_3.$$

(b) Siccome  $\{F_{*p} e_{i_p}\}$  è una base ortonormale di  $T_{F(p)} \mathbb{R}^3$ , usando la precedente proprietà (a) e il fatto che  $F_{*p}$  conserva il prodotto scalare, si ha

$$\begin{aligned} F_{*p} v_p \wedge F_{*p} w_p &= \sum_{i=1}^3 \left( F_{*p} v_p \wedge F_{*p} w_p \cdot F_{*p} e_{i_p} \right) F_{*p} e_{i_p} \\ &= \sum_{i=1}^3 \text{sign}(F) (v \wedge w \cdot e_i) F_{*p} e_{i_p} \\ &= \text{sign}(F) \sum_{i=1}^3 \left( F_{*p}(v \wedge w)_p \cdot F_{*p} e_{i_p} \right) F_{*p} e_{i_p} \\ &= \text{sign}(F) F_{*p}(v \wedge w)_p. \end{aligned}$$

□

**Esercizio 1.69.** Sia  $(\bar{e}_i)$  una base di  $\mathbb{R}^3$ ,  $\bar{e}_i = \sum_{j=1}^3 p_{ij} e_i$ ,  $P = (p_{ij})$  matrice di cambiamento di base. Sia  $\bar{\Omega}$  la 3-forma definita dalla base  $(\bar{e}_i)$ :

$$\bar{\Omega}(v_1, v_2, v_3) := \det(\bar{b}_{ij}), \quad \text{equivalentemente } \bar{\Omega}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 1,$$

per ogni  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  con  $v_j = \sum_{i=1}^3 \bar{b}_{ij} \bar{e}_i$ .

Trovare il legame tra  $\Omega$  (3-forma definita dalla base canonica) e  $\bar{\Omega}$ . Inoltre, osservare che il risultato vale anche per lo spazio  $\mathbb{R}^n$ .

*Soluzione:* Si trova che  $\bar{\Omega} = \lambda \Omega$ , dove  $\lambda = \det(P^{-1})$ . Di conseguenza,

$$\bar{\Omega} = \lambda \Omega, \quad \lambda > 0 \iff \text{la base } (\bar{e}_i) \text{ è equiversa alla base canonica.}$$

## 1.6. Campi vettoriali lungo curve

Sia  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Un *campo vettoriale lungo*  $\gamma$  è un'applicazione

$$X : I \rightarrow \bigcup_{t \in I} T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto X(t) \in T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^n.$$

I campi vettoriali definiti dalla base canonica  $(E_1, \dots, E_n)$  definiscono campi vettoriali lungo  $\gamma$ :

$$E_i(t) := E_{i\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^n \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Poiché  $X(t) \in T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^n$ , si può scrivere

$$X(t) = \sum_{i=1}^n X^i(t) E_i(t) \text{ per ogni } t \in I.$$

Le funzioni  $X^i(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$  si dicono *funzioni componenti* di  $X$  (rispetto alla base canonica). Se  $X, Y$  sono campi vettoriali lungo  $\gamma$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si definiscono in modo naturale i campi vettoriali  $X + Y$  e  $\lambda X$  lungo  $\gamma$ .

**Definizione 1.70.** *Un campo vettoriale  $X$  definito lungo  $\gamma$  si dice differenziabile se le sue funzioni componenti  $X^i(t)$  sono differenziabili.*

**Esempi 1.71.** Il campo di vettori velocità

$$\dot{\gamma}(t) = \left( \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^n x'_i(t) E_i(t)$$

e il campo di vettori accelerazione

$$\ddot{\gamma}(t) = \left( \frac{d^2x_1}{dt^2}, \dots, \frac{d^2x_n}{dt^2} \right)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^n x''_i(t) E_i(t),$$

sono campi vettoriali differenziabili lungo  $\gamma$ .

Se  $X, Y$  sono campi vettoriali lungo  $\gamma$ ,

$$X(t) = \sum_{i=1}^n X^i(t) E_i(t) \text{ e } Y(t) = \sum_{i=1}^n Y^i(t) E_i(t),$$

ed  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione, si possono definire i seguenti prodotti.

- Il prodotto  $fX$  è il campo vettoriale

$$(fX)(t) := f(t)X(t).$$

Quindi  $fX$  ha funzioni componenti  $(f(t)X^1(t), \dots, f(t)X^n(t))$ . In particolare, se  $X$  ed  $f$  sono differenziabili, allora anche  $fX$  è differenziabile.

- Il prodotto scalare di  $X(t)$  e  $Y(t)$  è la funzione

$$(X \cdot Y)(t) = X(t) \cdot Y(t) = \sum_{i=1}^n X^i(t) Y^i(t).$$

In particolare, se  $X(t), Y(t)$  sono differenziabili, la funzione  $(X \cdot Y)(t)$  è differenziabile.

• Assumiamo  $n = 3$ . In tal caso, il prodotto vettoriale di  $X(t)$  e  $Y(t)$  è il campo vettoriale

$$X \wedge Y : I \rightarrow \bigcup_{t \in I} T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (X \wedge Y)(t) := X(t) \wedge Y(t) \in T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^3.$$

Quindi

$$(X \wedge Y)(t) = \begin{vmatrix} E_1(t) & E_2(t) & E_3(t) \\ X^1(t) & X^2(t) & X^3(t) \\ Y^1(t) & Y^2(t) & Y^3(t) \end{vmatrix},$$

dove il determinante viene calcolato rispetto agli elementi della prima riga. In particolare, se  $X(t), Y(t)$  sono differenziabili, il campo vettoriale  $(X \wedge Y)(t)$  è differenziabile.

**Definizione 1.72.** Sia  $X(t) = (X^1(t), \dots, X^n(t))_{\gamma(t)}$  un campo vettoriale differenziabile definito lungo  $\gamma$ . Il **derivato** di  $X(t)$  è il campo vettoriale

$$\frac{dX}{dt}(t) = ((X^1)'(t), \dots, (X^n)'(t))_{\gamma(t)}$$

che indichiamo anche con  $X'(t)$ .

Si noti che se  $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ , allora  $Y(t) = Y(\gamma(t))$  è differenziabile lungo  $\gamma(t)$  e, usando la (1.5) e la (1.3), si ottiene

$$(1.9) \quad \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} Y = (\dot{\gamma}(t)(Y^1), \dots, \dot{\gamma}(t)(Y^n)) = \left( \frac{dY^1}{dt}, \dots, \frac{dY^n}{dt} \right) = Y'(t).$$

**Esempio 1.73.** L'accelerazione  $\ddot{\gamma}(t)$  è il campo vettoriale derivato di  $\dot{\gamma}(t)$ .

Denotiamo con  $\mathfrak{X}(\gamma)$  lo spazio vettoriale reale di tutti i campi vettoriali differenziabili definiti lungo  $\gamma$ . Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$  ed  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile, allora  $X \cdot Y, X \wedge Y, fX \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Rispetto alla somma  $X + Y$  e al prodotto  $fX$ ,  $\mathfrak{X}(\gamma)$  ha anche una struttura di  $\mathcal{F}(I)$ -modulo, dove  $\mathcal{F}(I) = C^\infty(I)$ . L'operatore

$$\frac{d}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma), X(t) \mapsto X'(t),$$

è un endomorfismo che soddisfa anche le seguenti proprietà:

- (1)  $(X \cdot Y)'(t) = X'(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot Y'(t)$ ;
- (2) per  $n = 3$ , il derivato  $(X \wedge Y)'(t) = (X' \wedge Y)(t) + (X \wedge Y')(t)$ ;
- (3)  $(fX)' = f'(t)X(t) + f(t)X'(t)$ .

Infine, se  $t = t(s)$  è un cambiamento (regolare) di parametro, allora il derivato di  $X(s) = X(t(s))$  soddisfa

$$X'(s) = t'(s)X'(t(s)).$$

Infatti, le funzioni componenti  $X^i(s) = X^i(t(s))$  soddisfano

$$(X^i)'(s) = t'(s)(X^i)'(t).$$

**Esercizio 1.74.** Determinare un campo vettoriale unitario  $X(t)$  definito lungo l'elica  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  sapendo che  $X(t)$  è ortogonale a  $\dot{\gamma}(t)$  e  $\ddot{\gamma}(t)$ .

*Soluzione:*  $X(t)$  è parallelo al prodotto vettoriale  $\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)$ , dove  $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)_{\gamma(t)}$  e  $\ddot{\gamma}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)_{\gamma(t)}$ . Siccome

$$\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = (\sin t, -\cos t, 1)_{\gamma(t)},$$

allora deve essere  $X(t) = f(t)(\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t))(t) = f(t)(\text{sen } t, -\text{cos } t, 1)_{\gamma(t)}$  per qualche funzione  $f(t)$ . D'altronde  $X(t)$  è unitario:  $\|X(t)\|^2 = 1$ , per cui deve essere  $f^2(t)(\text{cos}^2 t + \text{sen}^2 t + 1) = 1$ , e quindi  $f(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Pertanto  $X(t) = \pm(\sqrt{2}/2)(\text{sen } t, -\text{cos } t, 1)_{\gamma(t)}$ .

**Proposizione 1.75.** *Sia  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva differenziabile e sia  $X(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Allora,*

$$\|X(t)\| = \text{cost} \iff X(t) \perp X'(t).$$

*Dimostrazione.* Basta osservare che

$$X(t) \cdot X(t) = \text{cost} \iff 0 = (X(t) \cdot X(t))' = 2X(t) \cdot X'(t) \iff X(t) \perp X'(t).$$

**Corollario 1.76.** *Se  $\gamma(s)$  è una curva differenziabile parametrizzata a velocità scalare costante, allora  $\ddot{\gamma}(s) \perp \dot{\gamma}(s)$ .*

**Definizione 1.77.** *Un campo vettoriale  $X(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$  si dice **parallelo** lungo  $\gamma$  se il suo derivato  $X'(t) = 0$  (vettore nullo di  $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$ ) per ogni  $t \in I$ .*

Se  $X(t) = (X^1(t), \dots, X^n(t))_{\gamma(t)}$ , allora  $X(t)$  è parallelo se e solo se le sue funzioni componenti  $X^i(t)$  sono costanti.

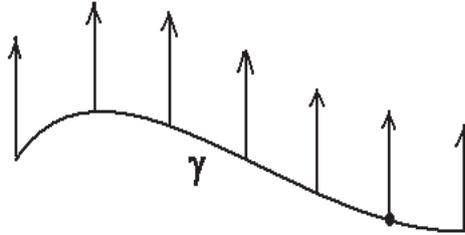


FIGURA 9. Campo vettoriale parallelo.

**Proposizione 1.78.** *Se  $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva differenziabile, allora*

- (1)  $\dot{\gamma}(t) = 0_{T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n} \iff \gamma(t)$  è una curva costante, cioè  $\gamma(t) = p_0$  per ogni  $t$ ;
- (2)  $\ddot{\gamma}(t) = 0_{T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n} \iff$  esiste  $v \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\gamma(t) = p_0 + tv$  per ogni  $t$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per esercizio. □

Dalla proprietà (2) segue che  $\ddot{\gamma}(t) = 0$  implica che  $\gamma(t)$  è una (parte di) retta (quando  $v \neq 0$ ). Tuttavia, in generale, non vale il viceversa. Infatti, la proprietà  $\ddot{\gamma}(t) = 0$  dipende anche dalla parametrizzazione di  $\gamma$ . Ad esempio, la curva  $\gamma$  parametrizzata da  $\gamma(t) = (t^3, t^3, 0, \dots, 0)$ ,  $t \in ]0, 1[$ , è un segmento di retta che ha accelerazione non nulla.

### Il campo vettoriale $(F_*X)(t)$

Sia  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione differenziabile e sia  $X(t)$  campo vettoriale differenziabile lungo una curva differenziabile parametrizzata  $\gamma(t)$ . Denotiamo con  $F_*X$  il campo vettoriale differenziabile lungo  $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$  definito da

$$(F_*X)(t) := F_{*\gamma(t)}X(t), \quad F_{*\gamma(t)} : T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{\tilde{\gamma}(t)}\mathbb{R}^n.$$

Se  $F = (F_1, \dots, F_n)$ , applicando il Teorema 1.49, risulta

$$(F_*X)(t) = \sum_{j=1}^n (X(t) \cdot (\nabla F_j)_{\gamma(t)}) E_{j\tilde{\gamma}(t)} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\gamma(t)) X^i(t) \right) E_{j\tilde{\gamma}(t)},$$

dove  $X^1(t), \dots, X^n(t)$  sono le funzioni componenti di  $X(t)$ . Tale formula implica che  $(F_*X)(t)$  è un campo vettoriale differenziabile. Quindi,

$$F_* : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\tilde{\gamma})$$

è un endomorfismo tra spazi vettoriali.

Se  $F$  è un'isometria di  $\mathbb{R}^n$  e  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , allora

$$(1) \quad F_*X \cdot F_*Y = X \cdot Y, \text{ cioè } F_{*\gamma(t)}X(t) \cdot F_{*\gamma(t)}Y(t) = X(t) \cdot Y(t) \quad \text{per ogni } t.$$

Se  $F$  è un'isometria di  $\mathbb{R}^3$ ,  $\gamma$  una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^3$  e  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , allora

$$(2) \quad F_*X \wedge F_*Y \cdot F_*Z = \text{sign}(F) X \wedge Y \cdot Z,$$

$$(3) \quad F_*(X \wedge Y) = \text{sign}(F) (F_*X \wedge F_*Y).$$

Tali proprietà seguono dalla Proposizione 1.68.

**Teorema 1.79.** *Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Se  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'applicazione affine, allora*

(1) *il differenziale  $F_*$  e l'operatore  $d/dt$  commutano:*

$$(F_*X)'(t) = F_*X'(t), \quad \text{ossia} \quad d/dt \circ F_* = F_* \circ d/dt;$$

(2) *posto  $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ , si ha*

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(t) = F_*\ddot{\gamma}(t) \quad \text{e} \quad \ddot{\tilde{\gamma}}(t) = F_*\ddot{\gamma}(t).$$

*Inoltre, se  $F$  è una trasformazione affine, allora*

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(t) = 0 \iff \ddot{\gamma}(t) = 0.$$

*In particolare, queste proprietà valgono per  $F$  isometria di  $\mathbb{R}^n$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $F$  un'applicazione affine di  $\mathbb{R}^n$ ,  $F = A + a$ ,  $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ .

(1) Se  $X(t) = \sum_{i=1}^n X^i(t)E_i(t)$ , allora  $X'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{dX^i}{dt}E_i(t)$ . Applicando la Proposizione 1.58, risulta

$$F_*X'(t) = (AX'(t))_{\tilde{\gamma}(t)} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{dX^j}{dt} \tilde{E}_i(t)$$

dove  $\tilde{E}_i(t) = E_{i_{\tilde{\gamma}(t)}}$ . Ne segue che  $F_*X'$  è un campo vettoriale differenziabile lungo  $\tilde{\gamma}(t)$ . Anche  $F_*X$  è un campo vettoriale differenziabile lungo  $\tilde{\gamma}(t)$  e

$$(F_*X)(t) = F_*X(t) = (AX(t))_{\tilde{\gamma}(t)} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} X^j(t) \tilde{E}_i(t).$$

Ciò implica

$$\begin{aligned} (F_*X)'(t) &= \sum_{ij} X^j \frac{dA_{ij}}{dt} \tilde{E}_i(t) + \sum_{ij} A_{ij} \frac{dX^j}{dt} \tilde{E}_i(t) \\ &= \sum_{ij} A_{ij} \frac{dX^j}{dt} \tilde{E}_i(t) = F_*X'(t). \end{aligned}$$

(2) Se  $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ , allora  $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = F_*\dot{\gamma}(t)$ . Pertanto, usando anche la proprietà (1), si ha

$$(1.10) \quad \ddot{\tilde{\gamma}}(t) = (\dot{\tilde{\gamma}})'(t) = (F_*\dot{\gamma}(t))' = F_*(\dot{\gamma}(t))' = F_*\ddot{\gamma}(t).$$

Inoltre, usando la (1.10) e la precedente proprietà (1), si ha

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(t) = (\ddot{\tilde{\gamma}}(t))' = (F_*\ddot{\gamma}(t))' = F_*(\ddot{\gamma}(t))' = F_*\ddot{\gamma}(t).$$

In particolare, se  $F$  è una trasformazione affine, quindi  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , allora

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(t) = 0 \iff F_*\ddot{\gamma}(t) = 0 \iff \ddot{\gamma}(t) = 0.$$

□

**Osservazione 1.80.** Se  $F$  è una trasformazione affine, allora  $F$  trasforma rette in rette. Infatti, se  $\gamma$  è una (parte di) retta,  $\gamma$  si può parametrizzare con  $\gamma(t) = p_0 + tv$ ,  $t \in I$ ,  $v \neq 0$ , allora  $\ddot{\gamma}(t) = 0$  e quindi  $\ddot{\tilde{\gamma}}(t) = F_*\ddot{\gamma}(t) = 0$  per ogni  $t$ . Pertanto  $\tilde{\gamma}(t)$  è una (parte di) di retta. Più precisamente, se  $F = A + a$  con  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , allora  $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{p}_0 + t\tilde{v}$ , dove  $\tilde{p}_0 = Ap_0 + a$  e  $\tilde{v} = Av \neq 0$ .

Siano  $F$  una trasformazione affine di  $\mathbb{R}^n$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . Se  $\gamma(t)$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^n$ , posto  $Y(t) = Y(\gamma(t))$ , dalla (1.9) si ha

$$(1.11) \quad \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} Y = Y'(t).$$

Determiniamo il campo vettoriale  $F_*\bar{\nabla}_X Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . Fissato  $q \in \mathbb{R}^n$  e quindi  $p = F^{-1}(q)$ , sia  $\gamma$  una curva differenziabile con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ . La curva  $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$  soddisfa  $\tilde{\gamma}(0) = F(p)$  e  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = F_*X_p$ . Applicando la (1) del Teorema 1.79 e la (1.11), otteniamo

$$\begin{aligned} (F_*\bar{\nabla}_X Y)_q &= F_{*p} (\bar{\nabla}_X Y)_p = F_{*p} \bar{\nabla}_{X_p} Y = F_{*p} \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(0)} Y \\ &= F_{*p} Y'(0) = (F_*Y)'(0) = \bar{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}(0)} F_*Y \\ &= \bar{\nabla}_{F_*\dot{\gamma}(0)} F_*Y = \bar{\nabla}_{F_*X_p} F_*Y \\ &= (\bar{\nabla}_{F_*X} F_*Y)_q. \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo provato il seguente teorema

**Teorema 1.81.** *Se  $F$  è una trasformazione affine, allora*

$$F_* \bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_{F_* X} F_* Y$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ .

**Esercizio 1.82.** Si verifichi (con un esempio) che in generale se  $F$  non è un'applicazione affine, la proprietà (1) del Teorema 1.79 non vale.

*Suggerimento:* si consideri la curva  $\gamma(t) = (t, t, 0)$ , il campo vettoriale  $X(t) = \dot{\gamma}(t)$  e l'applicazione  $F(x, y, z) = (e^x, y, z)$ .

**Esercizio 1.83.** Si verifichi (con un esempio) che se  $F$  è applicazione affine, ma non trasformazione affine, in generale  $F$  non trasforma rette in rette.

*Suggerimento:* si consideri la retta  $\gamma(t) = (t, t, -2t)$  e l'applicazione affine  $F = A + a$ , dove  $A$  è una matrice di ordine 3 avente solo la prima riga non nulla e definita da  $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$ .

**Esercizio 1.84.** Sia  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione differenziabile (risp. un diffeomorfismo) che soddisfi la proprietà (1) del Teorema 1.79 :

$$(F_* X)'(t) = F_* X'(t),$$

per ogni curva differenziabile  $\gamma(t)$  e per ogni  $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Si verifichi che  $F$  è una applicazione affine (risp. una trasformazione affine).

*Suggerimento:* Trovare le espressioni di  $(F_* X)'(t)$  e  $F_* X'(t)$ , quindi imporre che coincidano prendendo in particolare  $X(t) = E_1(t)$ ,  $X(t) = E_2(t)$ , ..., e  $X(t) = E_n(t)$ . In questo modo si riesce a provare che le funzioni della matrice jacobiana di  $F$  sono funzioni costanti.

**Esercizio 1.85.** Si consideri il campo di vettori  $X(t) = (t, 1 - t^2, 1 + t^2)_{\gamma(t)}$  definito lungo la curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ , e sia  $F$  l'isometria lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Determinare il campo di vettori  $\bar{X}(t) = (F_* X)(t)$  lungo la curva  $\bar{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$  e il suo derivato  $\bar{X}'(t)$ .

*Soluzione:* La curva  $\bar{\gamma}(t) = (-\cos t, (\sin t - 2t)/\sqrt{2}, (\sin t + 2t)/\sqrt{2})$ . Il campo vettoriale  $\bar{X}(t) = (AX)_{\bar{\gamma}(t)} = (-t, \sqrt{2}t^2, 2)_{\bar{\gamma}(t)}$  e il suo derivato  $\bar{X}'(t) = (-1, 2\sqrt{2}t, 0)_{\bar{\gamma}(t)} = (AX')_{\bar{\gamma}(t)} = (F_* X')(t)$ .

## CAPITOLO 2

### Geometria differenziale delle curve di $\mathbb{R}^3$

Scopo di questo capitolo è dare un'introduzione allo studio della geometria differenziale delle curve di  $\mathbb{R}^3$ . Un ruolo fondamentale per tale studio è svolto dall'apparato di Frenet. Un'attenzione particolare è rivolta poi a due speciali classi di curve di  $\mathbb{R}^3$ : eliche cilindriche e curve magnetiche.

#### 2.1. Apparato di Frenet

In questa sezione introduciamo il riferimento di Frenet  $(T(s), N(s), B(s))$  che è di fondamentale importanza per avere informazioni sulla geometria di una curva regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Il punto chiave per ottenere queste informazioni è esprimere i derivati  $T'(s), N'(s), B'(s)$  in termini dello stesso riferimento di Frenet.

**2. 1-1. La curvatura.** Sia  $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare parametrizzata a velocità unitaria ( $s$  ascissa curvilinea). Quindi, il *campo tangente* lungo  $\gamma$ , che indichiamo con  $T(s)$ , è unitario:

$$T(s) = \dot{\gamma}(s), \quad \|T(s)\| = \|\dot{\gamma}(s)\| = 1.$$

**Definizione 2.1.** *La funzione*

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \kappa(s) := \|T'(s)\| = \|\ddot{\gamma}(s)\| \geq 0,$$

*si chiama curvatura della curva  $\gamma(s)$ .*

Osserviamo subito che:

- *la curvatura  $\kappa(s)$  stima di quanto la curva si allontana dall'essere una (parte di) retta.* Infatti,

$$\kappa(s) = 0 \quad \forall s \iff \ddot{\gamma}(s) = 0 \quad \forall s \iff \gamma(s) = p + sv;$$

- *la curvatura è invariante per isometrie* (cf. Teorema 2.59).

Supponiamo ora che  $\gamma(s)$  abbia curvatura  $\kappa(s) > 0$  per ogni  $s \in I$  (d'altronde, se  $\kappa(s)$  non è identicamente nulla, esiste  $s_0$  tale che  $\kappa(s_0) \neq 0$  e quindi  $\kappa(s) \neq 0$  per ogni  $s$  in un intorno aperto di  $s_0$ ). Quindi  $T'(s) \neq 0$ . Inoltre, siccome  $\|T(s)\| = 1$ , allora  $T'(s) \perp T(s)$  e il campo vettoriale

$$N(s) = \frac{1}{\|T'(s)\|} T'(s),$$

detto *campo normale principale lungo  $\gamma$* , è un campo vettoriale unitario ortogonale a  $T(s)$ . Il campo vettoriale lungo  $\gamma(s)$  definito da

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

è detto *campo binormale* lungo  $\gamma$ . Tale definizione implica che  $B(s)$  è un campo vettoriale unitario ortogonale a  $T(s)$  e  $N(s)$ .

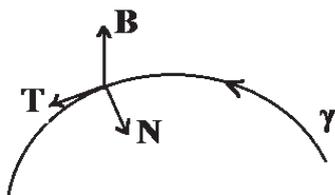


FIGURA 1. Riferimento di Frenet lungo  $\gamma$ .

Pertanto,

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

è una base ortonormale lungo  $\gamma(s)$ , quindi un riferimento mobile lungo  $\gamma$ , detto *riferimento di Frenet* (o *triedro di Frenet*) della curva  $\gamma(s)$ . Si noti che la base ordinata  $(T(s), N(s), B(s))$  è una base positiva per come costruita:

$$T(s) \wedge N(s) \cdot B(s) = B(s) \cdot B(s) = 1 > 0.$$

Una curva regolare  $\gamma(s)$  parametrizzata a velocità unitaria e con curvatura  $\kappa(s) > 0$ , la diremo **curva di Frenet**.

**Osservazione 2.2.** Si può dimostrare che il verso di  $N$  (al contrario di quello di  $T$  e di  $B$ ) non dipende dall'orientazione di  $\gamma$  ma solo dalla sua forma.  $N$  è sempre diretto dalla parte della concavità della curva. Ad esempio, ci possiamo rendere conto di ciò mediante considerazione grafica del vettore rapporto incrementale

$$\frac{T(s+h) - T(s)}{h},$$

sia per  $h > 0$  che per  $h < 0$ , rapporto di cui  $T'(s)$  è il limite per  $h \rightarrow 0$ .



FIGURA 2. Il verso del campo normale.

Un altro significato geometrico della curvatura è dato dal seguente esercizio.

**Esercizio 2.3.** Sia  $\Delta\vartheta$  l'angolo tra i versori tangenti a  $\gamma$  nei punti  $\gamma(s_0)$  e  $\gamma(s_0 + \Delta s)$ . Si verifichi che la curvatura di  $\gamma$  nel punto  $\gamma(s_0)$  è data da

$$\kappa(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

*Suggerimento:* Posto  $T = \dot{\gamma}(s_0)$  e  $T_1 = \dot{\gamma}(s_0 + \Delta s)$ , osservare che

$$\kappa(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|T_1 - T\|}{|\Delta s|} \quad \text{e} \quad \|T_1 - T\| = 2\text{sen} \frac{\Delta\vartheta}{2}.$$

**2. 1-2. Piano osculatore e cerchio osculatore.** Per una curva piana esiste un piano che la contiene. Tuttavia, per una curva sghemba, si può definire un piano che più si “avvicina” alla curva in un intorno di un fissato punto.

**Definizione 2.4.** Sia  $\gamma(t)$  un arco di curva regolare e sia  $p_0 = \gamma(t_0)$  un fissato punto. Siano  $r$  la tangente in  $p_0$  alla curva  $\gamma$ ,  $p_1 = \gamma(p_0 + \Delta t)$  un punto di  $\gamma$  “vicino” a  $p_0$ , e  $\pi_1$  il piano contenente  $r$  e  $p_1$ . Il piano osculatore alla curva  $\gamma$  nel punto  $p_0$  è la posizione limite (quando esiste) del piano  $\pi_1$  per  $p_1 \rightarrow p_0$  lungo  $\gamma$  (cioè per  $\Delta t \rightarrow 0$ ).

Si noti che se  $\gamma(t)$  è una retta,  $\pi_1$  è indeterminato e quindi il piano osculatore è indeterminato. Se  $\gamma(t)$  è una curva piana (che non sia una (parte di) retta), il piano osculatore è chiaramente il piano della curva.

**Proposizione 2.5.** Sia  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  un arco di curva regolare con vettori velocità e accelerazione  $\dot{\gamma}(t_0)$  e  $\ddot{\gamma}(t_0)$  linearmente indipendenti. Allora, il piano osculatore nel punto  $p_0 = \gamma(t_0)$  esiste ed è il piano per  $p_0$  e parallelo ai vettori  $\dot{\gamma}(t_0)$  e  $\ddot{\gamma}(t_0)$ , quindi è il piano di equazione cartesiana

$$(2.1) \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

In particolare, se  $\gamma(s)$  è una curva di Frenet, il piano osculatore alla curva nel punto  $\gamma(s)$  esiste ed è il piano per tale punto  $\gamma(s)$  e parallelo ai vettori  $T(s)$  e  $N(s)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Il piano  $\pi_1$  ha equazione cartesiana

$$(2.2) \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) & y(t_0 + \Delta t) - y(t_0) & z(t_0 + \Delta t) - z(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Applicando la formula di Taylor alle funzioni  $x(t_0 + \Delta t)$ ,  $y(t_0 + \Delta t)$  e  $z(t_0 + \Delta t)$ , si ha

$$(2.3) \quad x(t) = x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + x'(t_0)\Delta t + \frac{x''(t_0)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{\varepsilon_1(t)}{2!}(\Delta t)^2,$$

dove  $\varepsilon_1(t)$  è un infinitesimo per  $\Delta t \rightarrow 0$ . Analogamente per  $y(t_0 + \Delta t)$  e  $z(t_0 + \Delta t)$ . Sostituendo la (2.3) nella (2.2), dividendo la terza riga per  $((\Delta t)^2/2)$  e applicando qualche proprietà del determinante, si ha

$$(2.4) \quad \pi_1 : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) + \varepsilon_1(t) & y''(t_0) + \varepsilon_2(t) & z''(t_0) + \varepsilon_3(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Pertanto, per  $\Delta t \rightarrow 0$ , dall'equazione (2.4) si ottiene l'equazione (2.1).  $\square$

Si noti che la condizione “ $\dot{\gamma}(t_0)$  e  $\ddot{\gamma}(t_0)$  linearmente indipendenti” significa che la curva ha curvatura non nulla in  $\gamma(t_0)$  (cf. Proposizione 2.21).

**Osservazione 2.6.** Tornando al riferimento di Frenet  $(T(s), N(s), B(s))$  lungo la curva  $\gamma(s)$ , i tre versori costituiscono il triedro principale (o di Frenet) nel punto  $\gamma(s)$ , mentre le rette per tale punto individuate dai tre versori sono rispettivamente la retta tangente, la retta normale principale e la retta binormale nel punto  $\gamma(s)$ . Le facce del triedro sono:

- il piano *osculatore* in  $\gamma(s)$ , piano per  $\gamma(s)$  e parallelo ai vettori  $T(s), N(s)$ ;
- il piano *normale* in  $\gamma(s)$ , piano per  $\gamma(s)$  e parallelo ai vettori  $N(s), B(s)$ ;
- il piano *rettificante* in  $\gamma(s)$ , piano per  $\gamma(s)$  e parallelo ai vettori  $T(s), B(s)$ .

**Definizione 2.7.** Sia  $\gamma(s)$  un arco di curva regolare a velocità unitaria e sia  $\sigma_1$  la circonferenza tangente a  $\gamma$  in  $p_0 = \gamma(s_0)$  e passante per  $p_1 = \gamma(s_0 + \Delta s)$ . Il cerchio osculatore a  $\gamma$  nel punto  $p_0 = \gamma(s_0)$  è la circonferenza  $\sigma_0$  posizione limite (se esiste) della circonferenza  $\sigma_1$  per  $p_1 \rightarrow p_0$  lungo  $\gamma$  (cioè per  $\Delta s \rightarrow 0$ ).

Se  $\dot{\gamma}(s_0)$  e  $\ddot{\gamma}(s_0)$  sono linearmente indipendenti (quindi  $\kappa(s_0) > 0$ ), la circonferenza  $\sigma_0$  esiste ed è contenuta nel piano osculatore a  $\gamma$  in  $p_0 = \gamma(s_0)$ . Si può dimostrare che il centro  $C_0$  di  $\sigma_0$ , detto *centro di curvatura* di  $\gamma$  in  $p_0 = \gamma(s_0)$ , è dato da

$$C_0 = C(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0).$$

$C_0 = C(s_0)$  appartiene alla retta normale a  $\gamma$  nel punto  $\gamma(s_0)$ . Inoltre, il raggio  $R_0$  di  $\sigma_0$  è dato da

$$R_0 = R(s_0) = d(\gamma(s_0), C_0) = \|\gamma(s_0) - C_0\| = \frac{1}{\kappa(s_0)}.$$

$R_0$  è detto *raggio di curvatura* di  $\gamma$  in  $p_0 = \gamma(s_0)$ . Quindi,  $\sigma_0$  si ottiene come intersezione del piano osculatore con la sfera di centro  $C_0$  e raggio  $R_0$ . Si noti che il cerchio osculatore  $\sigma_0$  è la circonferenza che meglio approssima  $\gamma$  in un intorno di  $p_0$ .

**Esempio 2.8.** Sia  $\gamma$  una circonferenza di centro  $C$  e raggio  $R$ . Facciamo vedere che tale circonferenza ha curvatura costante  $\frac{1}{R}$ , centro di curvatura  $C$  e raggio di curvatura  $R$ . Siccome la curvatura è invariante per isometrie, possiamo assumere che  $\gamma$  sia contenuta nel piano  $\mathbb{R}^2(x, y)$ , per cui  $\gamma$  si può parametrizzare con

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)) = (x_0 + R \cos(s/R), y_0 + R \sin(s/R), 0).$$

Pertanto  $T(s) = \dot{\gamma}(s) = (-\sin(s/R), \cos(s/R), 0)$ , e il suo derivato

$$T'(s) = \ddot{\gamma}(s) = -\frac{1}{R}(\cos(s/R), \sin(s/R), 0).$$

Quindi  $\kappa(s) = \|T'(s)\| = 1/R$ . Il raggio di curvatura  $R_0$  di  $\gamma$  in un generico punto è  $R_0 = 1/\kappa(s) = R$ , e il centro di curvatura  $C_0$  è

$$\begin{aligned} C_0 &= \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) = \gamma(s) - R(\cos(s/R), \sin(s/R), 0) \\ &= (x_0, y_0, 0) = C. \end{aligned}$$

**Esercizio 2.9.** Sia  $\gamma$  una circonferenza di centro  $C$  e raggio  $R_0$  dello spazio. Costruire una isometria  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $\tilde{\gamma} = F(\gamma)$  sia la circonferenza di centro l'origine  $O$  e raggio  $R_0$  del piano  $\mathbb{R}^2(x, y)$ .

*Suggerimento:* sia  $(v_{1p}, v_{2p})$  una base ortonormale di vettori applicati in  $p = C$  del piano che contiene  $\gamma$ , e sia  $v_{3p}$  un vettore unitario tale che  $(v_1, v_2, v_3)$  sia una base ortonormale dello spazio tangente  $T_p\mathbb{R}^3$ . Quindi, si consideri l'isometria  $F$  definita da  $F(p) = O$  e  $F_*v_{ip} = e_{ip}$ ,  $i = 1, 2, 3$  (cf. Proposizione 1.61).

**2. 1-3. La torsione.** Abbiamo visto come la curvatura di una curva stimi di quanto la stessa curva si allontani dall'essere una (parte di) retta. Vogliamo ora introdurre un invariante che stimi di quanto la curva si allontani dall'essere piana. Siano  $\gamma(s)$  una curva di Frenet e  $(T(s), N(s), B(s))$  il corrispondente riferimento di Frenet. Intanto, osserviamo che se  $\gamma(s)$  è piana, il piano osculatore è il piano della curva in ogni punto della stessa curva, per cui  $B(s)$  è costante lungo la curva, ovvero  $B'(s) = 0$ . In generale, il derivato  $B'(s)$  è parallelo a  $N(s)$ , cioè è conseguenza di  $B'(s) \cdot B(s) = 0$  e  $B'(s) \cdot T(s) = 0$ . La condizione  $B'(s) \cdot B(s) = 0$  si ottiene in quanto  $B(s)$  è unitario. Per l'altra condizione, basta osservare che  $B(s) \cdot T(s) = 0$  implica

$$B'(s) \cdot T(s) = -B(s) \cdot T'(s) = -B(s) \cdot (\kappa(s)N(s)) = 0.$$

Quindi, possiamo dare la seguente

**Definizione 2.10.** La funzione torsione di una curva di Frenet  $\gamma(s)$  è la funzione

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \tau(s), \quad \text{tale che } B'(s) = -\tau(s)N(s),$$

equivalentemente

$$\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s) = B(s) \cdot N'(s).$$

In particolare  $\|B'(s)\| = |\tau(s)|$ . La torsione  $\tau(s)$ , a differenza della curvatura  $\kappa(s)$ , può essere nulla, maggiore o minore di 0.

Mostriamo ora come effettivamente la torsione rappresenti una stima di quanto una curva si allontani dall'essere piana.

**Teorema 2.11.** Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet. Allora,

$$\tau(s) = 0 \iff \gamma(s) \text{ è una curva piana.}$$

**DIMOSTRAZIONE.** “ $\Leftarrow$ ” Abbiamo già osservato che per una curva piana il derivato  $B'(s) = 0$  e quindi  $\tau(s) = 0$ . Un modo più dettagliato di procedere è il seguente. Per ipotesi  $\gamma(s)$  è piana, quindi esiste un piano  $\pi$  che la contiene. Pertanto, esiste un punto  $p \in \pi$  ed esiste un vettore  $v_p \in T_p \mathbb{R}^3$  tali che

$$(\gamma(s) - p)_p \cdot v_p = 0 \quad \text{per ogni } s,$$

e quindi si può scrivere  $(\gamma(s) - p)_{\gamma(s)} \cdot v_{\gamma(s)} = 0$ . Derivando si ottiene

$$\dot{\gamma}(s) \cdot v_{\gamma(s)} = 0,$$

e quindi  $T(s) = \dot{\gamma}(s)$  è contenuto nel piano  $\pi$ . Derivando ulteriormente, si ottiene

$$T'(s) \cdot v_{\gamma(s)} = 0, \quad \text{da cui } N(s) \cdot v_{\gamma(s)} = 0,$$

e quindi anche  $N(s)$  è contenuto nel piano  $\pi$ . Siccome  $T(s)$  ed  $N(s)$  sono entrambi contenuti nel piano  $\pi$ , il versore  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$  risulterà parallelo al vettore  $v_p$  per ogni  $s$ , e quindi  $B'(s) = 0$ . Di conseguenza

$$\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s) = 0.$$

“ $\Rightarrow$ ” Supponiamo  $\tau(s) = 0$  per ogni  $s$ . Dalla definizione di torsione segue che

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) = 0,$$

cioè  $B(s)$  è parallelo lungo  $\gamma(s)$ , e quindi  $B(s) = (b_1, b_2, b_3)_{\gamma(s)} = b_{\gamma(s)}$ , con  $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ . Proviamo ora che  $\gamma(s)$  è contenuta nel piano  $\pi$  passante per  $\gamma(0)$  e ortogonale al vettore  $b$ , cioè

$$(\gamma(s) - \gamma(0))_{\gamma(0)} \cdot b_{\gamma(0)} = 0 \quad \text{per ogni } s.$$

Consideriamo quindi la funzione

$$f(s) := (\gamma(s) - \gamma(0))_{\gamma(0)} \cdot b_{\gamma(0)} = (\gamma(s) - \gamma(0))_{\gamma(s)} \cdot b_{\gamma(s)}.$$

Derivando si ha

$$f'(s) = \dot{\gamma}(s) \cdot b_{\gamma(s)} = T(s) \cdot B(s) = 0,$$

e quindi  $f(s) = \text{cost} = f(0) = 0$ . Pertanto,  $(\gamma(s) - \gamma(0))_{\gamma(0)} \cdot b_{\gamma(0)} = 0$  per ogni  $s$ .  $\square$

In seguito vedremo che l'elica circolare è un esempio di curva con curvatura e torsione costanti non nulle.

Un altro significato geometrico della torsione è dato nel seguente esercizio.

**Esercizio 2.12.** Sia  $\Delta\vartheta$  l'angolo tra i versori binormali a  $\gamma$  nei punti  $\gamma(s_0)$  e  $\gamma(s_0 + \Delta s)$ . Si verifichi che la torsione di  $\gamma$  nel punto  $\gamma(s_0)$  è data (in valore assoluto) da

$$|\tau(s_0)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

*Suggerimento:* si proceda come nel caso della curvatura (cf. Esercizio 2.3).

**2. 1-4. Formule di Frenet.** Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet. L'insieme

$$\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$$

si chiama **apparato di Frenet** della curva  $\gamma(s)$ . Le *formule di Frenet* (in alcuni testi chiamate anche *formule di Frenet-Serret*) esprimono i derivati  $T'(s), N'(s), B'(s)$  in termini di  $T(s), N(s), B(s)$ . Più precisamente abbiamo:

$$\begin{cases} T'(s) &= & \kappa(s) N(s), \\ N'(s) &= & -\kappa(s) T(s) & +\tau(s) B(s), \\ B'(s) &= & -\tau(s) N(s), \end{cases}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La prima e la terza formula di Frenet seguono banalmente dalle definizioni di curvatura e torsione. Proviamo la seconda. Siccome  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  è una base ortonormale lungo  $\gamma$ , allora

$$N'(s) = (N'(s) \cdot T(s)) T(s) + (N'(s) \cdot N(s)) N(s) + (N'(s) \cdot B(s)) B(s).$$

Da  $\|N(s)\|^2 = 1$  segue che  $N'(s) \cdot N(s) = 0$ . Inoltre,  $N(s) \cdot T(s) = 0$  implica

$$N'(s) \cdot T(s) + N(s) \cdot T'(s) = 0, \text{ dove } T'(s) = \kappa(s)N(s).$$

Ne segue che  $N'(s) \cdot T(s) = -\kappa(s)$ . Infine,  $N(s) \cdot B(s) = 0$  implica

$$N'(s) \cdot B(s) = -N(s) \cdot B'(s) = \tau(s).$$

□

Mostriamo ora, usando le formule di Frenet, alcuni risultati sulle curve.

**Teorema 2.13.** *Sia  $\gamma(s)$  una curva regolare a velocità unitaria. Allora,  $\kappa(s) = \text{cost} > 0$  e  $\tau(s) = 0$  se e solo se  $\gamma(s)$  è una (parte di) circonferenza di raggio  $1/\kappa$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $\kappa(s) = \text{cost} > 0$  e  $\tau(s) = 0$ . Per il Teorema 2.11 si ha che  $\gamma(s)$  è piana. Per provare che  $\gamma(s)$  è una (parte di) circonferenza di raggio  $1/\kappa$ , basta provare che esiste un punto  $p_0$  tale che

$$\|\gamma(s) - p_0\| = 1/\kappa \quad \text{per ogni } s.$$

Consideriamo la curva  $\alpha(s)$  (luogo dei centri di curvatura di  $\gamma$ ):

$$\alpha(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N(s).$$

Derivando e applicando la seconda formula di Frenet, si ottiene

$$\dot{\alpha}(s) = \dot{\gamma}(s) + \frac{1}{\kappa}N'(s) = T(s) + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T(s) + \tau(s)B(s)) = 0.$$

Dunque  $\alpha(s)$  è una curva costante, e quindi esiste un punto  $p_0$  tale che  $\alpha(s) = p_0$  per ogni  $s$ , ossia

$$\gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N(s) = p_0.$$

Pertanto

$$\|\gamma(s) - p_0\| = \|(1/\kappa)N(s)\| = 1/\kappa.$$

Il viceversa segue dall'Esempio 2.8 e dal Teorema 2.11.  $\square$

**Corollario 2.14.** *Una curva piana regolare  $\gamma(s)$ ,  $s \in I$ , con curvatura costante è necessariamente una (parte di) retta oppure una (parte di) circonferenza.*

Il seguente teorema stima la curvatura di curve sulla sfera.

**Teorema 2.15.** *Sia  $\mathbb{S}^2$  una sfera di centro  $C$  e raggio  $R$ . Tra tutti gli archi di curve regolari  $\gamma(s)$  della sfera  $\mathbb{S}^2$  quelli di curvatura minima sono tutte e sole (parti di) circonferenze di raggio massimo. In altre parole, per ogni arco di curva regolare  $\gamma(s)$  di tale sfera:*

$$\kappa(s) \geq 1/R,$$

dove l'uguale vale se e solo se  $\gamma(s)$  è una (parte di) circonferenza di raggio  $R$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per ipotesi  $\gamma(s) \in \mathbb{S}^2$  per ogni  $s$ , quindi

$$(C - \gamma(s)) \cdot (C - \gamma(s)) = R^2.$$

Derivando, si ottiene

$$\dot{\gamma}(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = 0,$$

cioè  $T(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = 0$ . Derivando ulteriormente, risulta

$$T'(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)} + T(s) \cdot (-\dot{\gamma}(s)) = 0,$$

da cui  $T'(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = 1$ . Applicando la prima formula di Frenet, si ha

$$\kappa(s) N(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = 1$$

e quindi applicando la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$(2.5) \quad \kappa(s) = \frac{1}{N(s) \cdot (C - \gamma(s))_{\gamma(s)}} \geq \frac{1}{\|N(s)\| \cdot \|C - \gamma(s)\|} = \frac{1}{R}.$$

Proviamo ora la seconda parte del teorema. Se  $\gamma(s)$  è un arco di circonferenza di raggio  $R$ , per quanto visto in precedenza, si ha  $\kappa = 1/R$ . Viceversa, assumiamo che per ipotesi  $\kappa_{\gamma}(s) = 1/R$  e proviamo che  $\gamma(s)$  è una (parte di) circonferenza di raggio  $R$ . Se  $\kappa(s) = 1/R$ , allora nell'equazione (2.5) vale l'uguaglianza, e quindi  $(C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = \lambda(s)N(s)$  per qualche funzione  $\lambda(s)$ . Ne segue che

$$|\lambda(s)| \|N(s)\| = \|C - \gamma(s)\| = R,$$

cioè  $\lambda(s) = \text{cost} = \pm R$ . Inoltre, derivando  $(C - \gamma(s))_{\gamma(s)} = \lambda N(s)$ , si ottiene  $-\dot{\gamma}(s) = \lambda N'(s)$  e quindi, applicando la seconda formula di Frenet, risulta

$$-T(s) = \lambda(-\kappa T(s) + \tau(s)B(s))$$

da cui otteniamo  $\tau(s) = 0$ . Dunque,  $\gamma(s)$  è una curva piana. Essendo  $\gamma(s)$  una curva piana con curvatura costante  $\kappa = 1/R$ , applicando il Teorema 2.13, possiamo concludere che  $\gamma$  è una (parte di) circonferenza di raggio  $R$ .  $\square$

**Lemma 2.16.** *Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet con torsione non nulla. Se  $\gamma(s)$  è contenuta in una sfera di centro  $C$  e raggio  $R$ , allora*

$$\gamma(s) - C = -(1/\kappa(s))N(s) - (1/\kappa(s))'(1/\tau(s))B(s).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla dimostrazione del Teorema 2.15 segue che

$$T(s) \cdot (\gamma(s) - C) = 0, \quad \text{e quindi} \quad (\gamma(s) - C) = a(s)N(s) + b(s)B(s).$$

Sempre dalla dimostrazione del Teorema 2.15, si ha  $\kappa(s)N(s) \cdot (C - \gamma(s)) = 1$ , e quindi  $a(s) = -(1/\kappa(s))$ . Infine, derivando

$$N(s) \cdot (\gamma(s) - C) = -(1/\kappa(s)),$$

e applicando la seconda formula di Frenet, si ha

$$N(s) \cdot T(s) + (-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \cdot (\gamma(s) - C) = -(1/\kappa(s))',$$

e da questa segue che  $b(s) = (\gamma(s) - C) \cdot B(s) = -(1/\tau(s))(1/\kappa(s))'$ .  $\square$

**Proposizione 2.17.** *Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet contenuta in una sfera di centro  $C$  e raggio  $R$ . Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- a)  $\gamma(s)$  è una (parte di) circonferenza;
- b)  $\gamma$  ha curvatura costante;
- c)  $\gamma$  ha torsione nulla.

**DIMOSTRAZIONE.** a) implica b) è banale. Se  $\gamma(s)$  ha curvatura costante, allora la torsione è necessariamente nulla. Infatti, se la torsione non fosse

identicamente nulla, allora esisterebbe  $s_0$  tale che  $\tau(s_0) \neq 0$  e quindi  $\tau(s) \neq 0$  in un intorno di  $s_0$ . Applicando il Lemma 2.16, siccome  $\kappa$  è costante, si avrebbe

$$\gamma(s) = C - (1/\kappa)N(s) \quad \text{da cui}$$

$$T(s) = \dot{\gamma}(s) = -(1/\kappa)N'(s) = -(1/\kappa)(-\kappa T(s) + \tau(s)B(s)),$$

e quindi si avrebbe la contraddizione  $\tau(s) = 0$ . Infine, se  $\gamma(s)$  ha torsione nulla, allora  $\gamma$  è una curva piana e quindi (in quanto curva di una sfera) è una (parte di) circonferenza.  $\square$

**Proposizione 2.18.** (*forma canonica locale*) Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet. Allora, per  $s$  sufficientemente piccolo,  $\gamma(s)$  si può approssimare con la curva

$$\gamma_0(s) = \left( s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3, \frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3, \frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 \right),$$

dove  $\kappa_0 = \kappa(0)$ ,  $\kappa_0' = \kappa'(0)$  e  $\tau_0 = \tau(0)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Usando la formula di Taylor, abbiamo

$$(2.6) \quad \gamma(s) = \gamma(0) + s\dot{\gamma}(0) + s^2\frac{1}{2}\ddot{\gamma}(0) + s^3\frac{1}{6}\dddot{\gamma}(0) + R(s),$$

dove  $\lim_{s \rightarrow 0} R(s)/s^3 = 0$ . Usando il riferimento e le formule di Frenet, si ha

$$T(s) = \dot{\gamma}(s), \quad \ddot{\gamma}(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(s) &= (\kappa(s)N(s))' = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \\ &= -\kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s). \end{aligned}$$

Sostituendo nella (2.6), abbiamo

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \gamma(0) + sT(0) + \frac{s^2}{2}(\kappa(0)N(0)) \\ &\quad + \frac{s^3}{6}(-\kappa^2(0)T(0) + \kappa'(0)N(0) + \kappa(0)\tau(0)B(0)) + R(s) \\ &= \gamma(0) + \left( s - \frac{\kappa^2(0)}{6}s^3 \right) T(0) \\ &\quad + \left( \frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}s^3 \right) N(0) + \left( \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3 \right) B(0) + R(s). \end{aligned}$$

Infine, considerando un riferimento cartesiano avente l'origine coincidente con  $\gamma(0)$ ,  $e_1 = T(0)$ ,  $e_2 = N(0)$  e  $e_3 = B(0)$ , otteniamo la forma canonica enunciata.  $\square$

**Osservazione 2.19.** Dalla Proposizione precedente segue che le proiezioni di  $\gamma(s)$  sui piani del triedro di Frenet in  $\gamma(0)$ , localmente sono approssimate dalle curve:

- $\gamma_1(s) = \left( s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3, \frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3 \right) = \left( s, \frac{\kappa_0}{2}s^2 \right) + (-\kappa_0^2, \kappa_0') \frac{s^3}{6}$  (proiezione di  $\gamma(s)$  sul piano osculatore in  $\gamma(0)$ , piano determinato da  $T_0$  e  $N_0$ );
- $\gamma_2(s) = \left( s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3, \frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 \right)$  (proiezione di  $\gamma(s)$  sul piano rettificante in  $\gamma(0)$ , piano determinato da  $T_0$  e  $B_0$ );
- $\gamma_3(s) = \left( \frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3, \frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 \right)$  (proiezione di  $\gamma(s)$  sul piano normale in  $\gamma(0)$ , piano determinato da  $N_0$  e  $B_0$ ).

## 2.2. Apparato di Frenet per curve a velocità arbitraria

Sia  $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare parametrizzata a velocità arbitraria. Sia  $s = s(t)$  la funzione ascissa curvilinea di  $\gamma$  e sia  $t = t(s)$  la sua funzione inversa. Spesso si usa scrivere  $\gamma(s)$  per indicare la curva  $\gamma(t(s))$ , tuttavia adesso poniamo

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = (\gamma \circ t)(s), \quad \text{e quindi} \quad \gamma(t) = \bar{\gamma}(s(t)) = (\bar{\gamma} \circ s)(t).$$

La curva  $\bar{\gamma}(s)$  è parametrizzata a velocità unitaria. Assumiamo che  $\bar{\gamma}(s)$  sia di Frenet, ossia che  $\bar{\kappa}(s) > 0$  per ogni  $s$ , dove  $\bar{\kappa}$  è la curvatura di  $\bar{\gamma}(s)$ . Consideriamo quindi l'apparato di Frenet  $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s), \bar{\kappa}(s), \bar{\tau}(s)\}$  associato a  $\bar{\gamma}$ . Allora

$$T(t) = \bar{T}(s(t)) = (\bar{T} \circ s)(t) \text{ è il campo tangente unitario di } \gamma(t),$$

$$N(t) = \bar{N}(s(t)) = (\bar{N} \circ s)(t) \text{ è il campo normale unitario di } \gamma(t),$$

$$B(t) = \bar{B}(s(t)) = (\bar{B} \circ s)(t) \text{ è il campo binormale unitario di } \gamma(t).$$

Si noti che

$$B(t) = \bar{B}(s(t)) = (\bar{T} \wedge \bar{N})(s(t)) = T(t) \wedge N(t).$$

$\{T(t), N(t), B(t)\}$  è un riferimento ortonormale lungo  $\gamma(t)$ . Inoltre, curvatura e torsione di  $\gamma(t)$  sono date da

$$\kappa(t) = \bar{\kappa}(s(t)) \quad \text{e} \quad \tau(t) = \bar{\tau}(s(t)).$$

Di conseguenza,

$$\{T(t), N(t), B(t), \kappa(t), \tau(t)\} \text{ è l'apparato di Frenet di } \gamma(t).$$

Le corrispondenti formule di Frenet per  $\gamma(t)$  sono

$$\begin{cases} T'(t) &= & \|\dot{\gamma}(t)\| \kappa(t) N(t) \\ N'(t) &= & -\|\dot{\gamma}(t)\| \kappa(t) T(t) & + \|\dot{\gamma}(t)\| \tau(t) B(t) \\ B'(t) &= & -\|\dot{\gamma}(t)\| \tau(t) N(t). \end{cases}$$

Per dimostrare tali formule, osserviamo che da  $T(t) = \bar{T}(s(t))$ , derivando si ottiene  $T'(t) = s'(t) \bar{T}'(s(t))$ , dove  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ . Pertanto,

$$T'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \bar{T}'(s(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\| \bar{\kappa}(s(t)) \bar{N}(s(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\| \kappa(t) N(t).$$

Analogamente si procede per le altre due formule. Se  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ , ritroviamo le formule di Frenet per curve parametrizzate a velocità unitaria.

**Lemma 2.20.** *Sia  $\gamma(t)$  una curva regolare parametrizzata a velocità arbitraria e con  $\kappa(t) > 0$ . Allora*

$$(1) \dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| T(t)$$

$$(2) \ddot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|' T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \kappa(t) N(t).$$

DIMOSTRAZIONE. Derivando  $\gamma(t) = \bar{\gamma}(s(t))$  si ottiene

$$\dot{\gamma}(t) = s'(t) \dot{\bar{\gamma}}(s) = \|\dot{\gamma}(t)\| \bar{T}(s(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\| T(t).$$

Derivando quest'ultima, e applicando la prima formula di Frenet, si ottiene

$$\ddot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|' T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\| T'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|' T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \kappa(t) N(t).$$

□

Notiamo che, mentre per una curva a velocità unitaria il vettore  $\ddot{\gamma}(s)$  è parallelo al versore normale  $N(s)$ , nel caso di una curva  $\gamma(t)$  a velocità arbitraria, la (2) del Lemma 2.20 ci dice che il vettore accelerazione  $\ddot{\gamma}(t)$  è un vettore del piano osculatore ma non è detto che sia parallelo al versore normale  $N(t)$ .

**Proposizione 2.21.** *Se  $\gamma(t)$  è una curva regolare di Frenet parametrizzata a velocità arbitraria, allora l'apparato di Frenet di  $\gamma(t)$  è dato da*

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}, \quad B(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}, \quad N(t) = B(t) \wedge T(t),$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. La formula relativa a  $T(t)$  è dimostrata nella (1) del Lemma 2.20. Inoltre, utilizzando (1) e (2) del Lemma 2.20, risulta

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) &= \|\dot{\gamma}(t)\| T(t) \wedge (\|\dot{\gamma}(t)\|' T(t) + \kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\|^2 N(t)) \\ &= \|\dot{\gamma}(t)\|^3 \kappa(t) T(t) \wedge N(t), \end{aligned}$$

e quindi

$$(2.7) \quad \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) = \kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\|^3 B(t).$$

Dalla (2.7) si ottiene la formula per  $\kappa(t)$ . Inoltre, sempre dalla (2.7), si ha

$$B(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{\kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}.$$

Per definizione  $N = B \wedge T$ . Infine, usando ancora la (2.7), la (2) del Lemma 2.20 e le prime due formule di Frenet di  $\gamma(t)$ , si ha

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} &= \kappa \|\dot{\gamma}\|^3 B \cdot (\|\dot{\gamma}\|' T + \kappa \|\dot{\gamma}\|^2 N)' \\
&= \kappa \|\dot{\gamma}\|^3 B \cdot (\|\dot{\gamma}\|'' T + \|\dot{\gamma}\|' T' + (\kappa \|\dot{\gamma}\|^2)' N + \kappa \|\dot{\gamma}\|^2 N') \\
&= \kappa \|\dot{\gamma}\|^3 B \cdot \kappa \|\dot{\gamma}\|^2 (-\|\dot{\gamma}\| \kappa T + \|\dot{\gamma}\| \tau B) \\
&= (\kappa \|\dot{\gamma}\|^3)^2 \tau = \|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}\|^2 \tau.
\end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**Corollario 2.22.** *Sia  $\gamma(s)$  una curva regolare di Frenet a velocità unitaria. Allora, curvatura e torsione sono date da*

$$\kappa(s) = \|\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s)\| = \|\ddot{\gamma}(s)\| \quad e \quad \tau(s) = \frac{\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) \cdot \ddot{\gamma}(s)}{\kappa^2(s)}.$$

### 2.3. Curvatura (con segno) di curve piane

Le curve piane sono un caso particolare delle curve dello spazio e quindi anche per esse vale quanto detto per le curve dello spazio. Tuttavia, come conseguenza del fatto che il piano ha una struttura complessa, per le curve piane è possibile definire una curvatura con segno.

Sia  $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva di Frenet del piano  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  il riferimento di Frenet di  $\gamma$  come curva di  $\mathbb{R}^3$  e quindi con  $B(s) = (E_3)_{\gamma(s)}$ ,  $E_3 = (0, 0, 1)$ . Su  $\mathbb{R}^2$  consideriamo l'orientazione indotta dalla base canonica  $\{E_1, E_2\}$ . Sia  $J$  la rotazione antioraria di  $90^\circ$ :

$$JE_1 = E_2 \quad e \quad JE_2 = -E_1.$$

Quindi,

$$J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v = (v_1, v_2) \mapsto Jv = (-v_2, v_1).$$

$J$  è una struttura complessa su  $\mathbb{R}^2$  in quanto è un endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  con la proprietà  $J^2 = -I$ . Inoltre, per  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v \neq 0$ , è facile vedere che  $(v, Jv)$  è una base ortogonale positiva di  $\mathbb{R}^2$ .

I versori  $T(s), N(s)$  del riferimento di Frenet sono ovviamente contenuti nel piano di  $\gamma$  (cf., ad esempio, la dimostrazione del Teorema 2.11). Ora indichiamo con  $N^*(s)$  il versore normale definito in modo tale che la base  $(T(s), N^*(s))$  sia equiversa alla base canonica  $(E_1, E_2)$ . Quindi

$$N^*(s) = JT(s) = \pm N(s).$$

Se  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ , allora

$$T(s) = \dot{\gamma}(s) = (x'(s), y'(s))_{\gamma(s)} \quad e \quad N^*(s) = (-y'(s), x'(s))_{\gamma(s)}$$

Osserviamo che  $\|T(s)\| = 1$  implica che  $T'(s)$  è parallelo a  $N^*(s)$ .

**Definizione 2.23.** *La curvatura con segno di  $\gamma(s)$  è la funzione  $\kappa^* : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $T'(s) = \kappa^*(s) N^*(s)$ , cioè*

$$\kappa^*(s) = T'(s) \cdot N^*(s).$$

Siccome  $T'(s) = \kappa(s)N(s)$  e  $N^*(s) = \pm N(s)$ , allora

$$\kappa^*(s) = T'(s) \cdot N^*(s) = \kappa(s)N(s) \cdot N^*(s) = \pm\kappa(s).$$

Si noti che il segno di  $\kappa^*$  dipende, oltre che dall'orientazione del piano, anche dal verso di percorrenza della curva (cf. Figura 3).

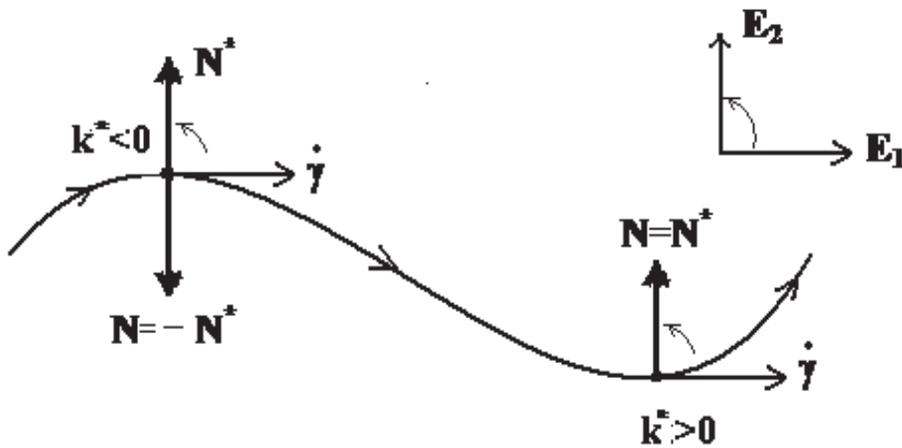


FIGURA 3. Curvatura con segno.

Un significato geometrico di  $\kappa^*$  è messo in evidenza anche da quanto segue. Sia  $\vartheta(s)$  l'angolo di inclinazione della curva  $\gamma(s)$  rispetto all'asse delle  $x$ , ossia l'angolo orientato da  $E_1$  a  $T(s)$ . Allora, abbiamo

$$T(s) = \cos \vartheta(s)E_1 + \sin \vartheta(s)E_2 = (\cos \vartheta(s), \sin \vartheta(s)),$$

$$T'(s) = \vartheta'(s)(-\sin \vartheta(s), \cos \vartheta(s)),$$

$$N^*(s) = JT(s) = (-\sin \vartheta(s), \cos \vartheta(s)),$$

e quindi

$$T'(s) = \vartheta'(s)N^*(s) \quad \text{e} \quad \kappa^*(s) = \vartheta'(s).$$

Pertanto, la curvatura con segno misura la variazione dell'angolo orientato  $\vartheta(s)$  che la tangente forma con l'asse  $x$ :

- negli intervalli in cui  $\vartheta(s)$  è crescente si ha  $\kappa^*(s) > 0$ ;
- negli intervalli in cui  $\vartheta(s)$  è decrescente si ha  $\kappa^*(s) < 0$ .

Infine, la curvatura con segno di una curva parametrizzata a velocità arbitraria è data dalla seguente proposizione.

**Proposizione 2.24.** Sia  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  una curva piana regolare parametrizzata a velocità arbitraria. Allora, la curvatura con segno  $\kappa^*(t) = \kappa^*(s(t))$  è data da

$$\kappa^*(t) = \frac{J\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot E_{3\gamma(t)}}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Il versore tangente  $T(t) = T(s(t)) = \dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|$ , per cui

$$N^*(t) = N^*(s(t)) = JT(s(t)) = JT(t)$$

e

$$T'(t) = s'(t)T'(s) = \|\dot{\gamma}(t)\| \kappa^*(s(t))N^*(s(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\| \kappa^*(t)N^*(t).$$

Inoltre,  $\dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|T(t)$  e la precedente formula per  $T'(t)$  implicano

$$\ddot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|'T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|T'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|'T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \kappa^*(t)N^*(t),$$

e quindi

$$\ddot{\gamma}(t) \cdot J\dot{\gamma}(t) = (\|\dot{\gamma}(t)\|'T(t) + \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \kappa^*(t)N^*(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|N^*(t),$$

ossia

$$J\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) = \kappa^*(t) \|\dot{\gamma}(t)\|^3.$$

Le altre due uguaglianze seguono facilmente.  $\square$

**Esempio 2.25.** La parabola  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , si può parametrizzare con  $(x = t, y = at^2 + bt + c)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e quindi  $(x' = 1, y' = 2at + b)$ ,  $(x'' = 0, y'' = 2a)$ . La curvatura con segno

$$\kappa^*(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}} = \frac{2a}{(1 + (2at + b)^2)^{3/2}}.$$

Dunque,  $\kappa^*(t) > 0$  se  $a > 0$  e  $\kappa^*(t) < 0$  se  $a < 0$ . Inoltre, si vede facilmente che per  $t = t_0 = -b/2a$ ,  $\kappa^*(t_0) = 2a$  è un valore di massimo se  $a > 0$ , e  $\kappa^*(t_0)$  è un valore di minimo se  $a < 0$ . Il punto corrispondente a  $t_0$  è il vertice della parabola. Naturalmente, la curvatura (senza segno)

$$\kappa(t) = \frac{2|a|}{(1 + (2at + b)^2)^{3/2}}$$

ha sempre un massimo per  $t = t_0 = -b/2a$ , e  $\kappa(t_0) = 2|a|$ .

**Esempio 2.26.** La **catenaria**  $y = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$  si può parametrizzare con  $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e quindi

$$(x' = 1, y' = \sinh t), (x'' = 0, y'' = \cosh t).$$

Con tale parametrizzazione, la curvatura con segno

$$\kappa^*(t) = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t} > 0.$$

Dunque,  $\kappa(t) = \kappa^*(t) > 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Per  $t = 0$  si ottiene il punto  $A(0, 1)$  ed è facile vedere che  $A$  è il punto di massimo per la curvatura.

**Esempio 2.27.** L'ellisse  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ,  $a > 0, b > 0$ , si può parametrizzare con  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), t \in \mathbb{R}$ , e quindi

$$(x' = -a \sin t, y' = b \cos t), (x'' = -a \cos t, y'' = -b \sin t).$$

Con tale parametrizzazione, la curvatura con segno

$$\kappa^*(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} > 0.$$

Dunque,  $\kappa(t) = \kappa^*(t) > 0$  per ogni  $t \in [0, 2\pi]$  ( $\kappa(t)$  è una funzione periodica). Per  $t = 0, 2\pi$  si ottiene  $A_1(a, 0)$  e per  $t = \pi$  si ottiene  $A_2(-a, 0)$ . Per  $t = \pi/2$  si ottiene  $B_1(0, b)$  e  $t = 3\pi/2$  si ottiene  $B_2(0, -b)$ . Assumiamo  $a > b$ , allora è facile vedere che i vertici  $A_1, A_2$  sono punti di massimo per la curvatura, mentre i vertici  $B_1, B_2$  sono di minimo per la curvatura (cf. Figura 4).

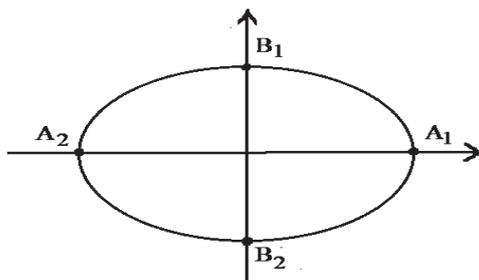


FIGURA 4.  $A_1, A_2$  punti di massimo e  $B_1, B_2$  punti di minimo per la curvatura dell'ellisse.

**Esempio 2.28.** Il ramo di iperbole  $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ ,  $a > 0, b > 0$ , con  $x > 0$ , si può parametrizzare con  $\gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t), t \in \mathbb{R}$ , e quindi

$$(x' = a \sinh t, y' = b \cosh t), (x'' = a \cosh t, y'' = b \sinh t).$$

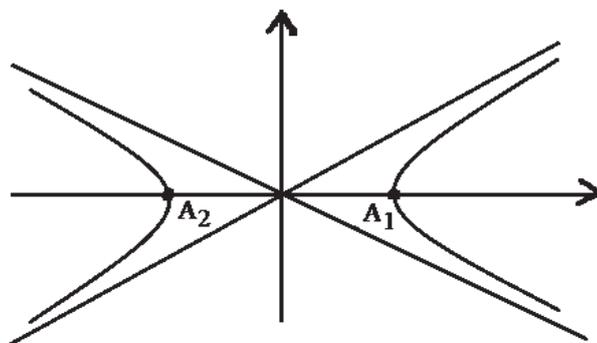
Con tale parametrizzazione, la curvatura con segno

$$\kappa^*(t) = \frac{-ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}} < 0.$$

Dunque,  $\kappa(t) = -\kappa^*(t) > 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Si vede facilmente che

$$\kappa'(t) = -3ab (a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{-5/2} (a^2 + b^2) \sinh t \cosh t.$$

Il valore di massimo per la curvatura  $\kappa(t)$  si ha per  $t = 0$ :  $\kappa(0) = a/b^2$ , il punto corrispondente è il vertice  $A_1(a, 0)$ . L'altro ramo dell'iperbole è parametrizzato da  $\gamma(t) = (-a \cosh t, b \sinh t), t \in \mathbb{R}$ . In questo caso, il valore di massimo per la curvatura  $\kappa(t)$  si ha nel vertice  $A_2(-a, 0) = \gamma(0)$  (cf. Figura 5).

FIGURA 5.  $A_1, A_2$  punti di massimo per la curvatura dell'iperbole.

Sia  $\gamma(t)$  una curva regolare di Frenet di  $\mathbb{R}^3$  parametrizzata a velocità arbitraria, e sia  $N(t)$  il versore normale a  $\gamma(t)$ . La curva  $\tilde{\gamma}$  luogo dei centri di curvatura di  $\gamma$ , è definita da

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t),$$

e viene detta **curva centrale** di  $\gamma$  (cf. [20], p.75).

**Definizione 2.29.** Sia  $\gamma(t)$  una curva regolare piana con  $\kappa(t) > 0$ . La curva centrale  $\tilde{\gamma}(t)$  è detta **evoluta** di  $\gamma$ .

Si noti che se  $\gamma(t)$  è regolare, non è detto che lo sia anche  $\tilde{\gamma}(t)$ .

**Esempio 2.30.** Se  $\gamma(s)$  è una circonferenza di centro  $C_0$  e raggio  $R$  parametrizzata a velocità unitaria, allora la curvatura  $\kappa(s) = \text{cost.} = 1/R$  per cui

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + R N(s) = C_0.$$

Dunque,  $\tilde{\gamma}(t)$  è costante e quindi  $\tilde{\gamma}(t)$  non è regolare.

**Esempio 2.31.** Sia  $\mathcal{C}$  la circonferenza, di centro  $C(0, 1)$  e raggio unitario, del piano  $\mathbb{R}^2(x, y)$ . La curva  $\gamma$  descritta da un punto  $p$  di  $\mathcal{C}$  mentre  $\mathcal{C}$  rotola (senza strisciare) sull'asse delle  $x$  nel verso positivo, è detta **cicloide**. La cicloide  $\gamma$  si può parametrizzare (cf. ad esempio [23] p.35) con

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0), \quad t \in ]0, 2\pi[.$$

Vogliamo trovare l'evoluta di  $\gamma$ . Siccome

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (1 - \cos t, \sin t, 0)_{\gamma(t)}, & \ddot{\gamma}(t) &= (\sin t, \cos t, 0)_{\gamma(t)}, \\ \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) &= (0, 0, \cos t - 1)_{\gamma(t)}, & B(t) &= (0, 0, -1)_{\gamma(t)}, \end{aligned}$$

si trova

$$N(t) = B(t) \wedge T(t) = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos t)}} (\sin t, \cos t - 1, 0)_{\gamma(t)},$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{1}{2\sqrt{2(1 - \cos t)}}$$

e quindi

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) = (t + \sin t, \cos t - 1, 0).$$

Osserviamo che  $\tilde{\gamma}(t)$  si può ottenere da  $\gamma(t)$  applicando una traslazione dopo una opportuna riparametrizzazione ( $t = \bar{t} + \pi$ ):

$$\tilde{\gamma}(\bar{t}) = \tilde{\gamma}(t(\bar{t})) = \tilde{\gamma}(\bar{t} + \pi) = (\bar{t} + \pi - \sin \bar{t}, -1 - \cos \bar{t}, 0) = \gamma(\bar{t}) + (\pi, -2, 0).$$

**Esercizio 2.32.** Sia  $\gamma$  un arco di curva regolare (piana) definito, in coordinate polari, da un'equazione del tipo  $\varrho = \varrho(\vartheta)$ ,  $a \leq \vartheta \leq b$ . Si verifichi che

- la lunghezza  $\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\varrho^2(\vartheta) + (\varrho'(\vartheta))^2} d\vartheta$ ;
- la curvatura  $\kappa(\vartheta) = \frac{|2(\varrho'(\vartheta))^2 - \varrho(\vartheta)\varrho''(\vartheta) + \varrho^2(\vartheta)|}{(\varrho^2(\vartheta) + (\varrho'(\vartheta))^2)^{3/2}}$ .

*Suggerimento:* considerare la parametrizzazione (cartesiana) di  $\gamma$  data da  $(x(\vartheta) = \varrho(\vartheta)\cos \vartheta, y(\vartheta) = \varrho(\vartheta)\sin \vartheta)$ .

**Esercizio 2.33.** Si verifichi che:

- l'evoluta della parabola  $\gamma(t) = (t, t^2)$  è la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = (-4t^3, (6t^2 + 1)/2);$$

- l'evoluta della catenaria  $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  è la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = (t - \sinh t \cosh t, 2 \cosh t);$$

- l'evoluta dell'ellisse  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $a, b > 0$ , è la curva (detta *asteroide*, o anche *astroide*)

$$\tilde{\gamma}(t) = \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{a} \sin^3 t \right);$$

- l'evoluta del ramo di iperbole  $\gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$ ,  $a, b > 0$ , è la curva (detta *curva di Lamé*)

$$\tilde{\gamma}(t) = \left( \frac{a^2 + b^2}{a} \cosh^3 t, -\frac{a^2 + b^2}{a} \sinh^3 t \right).$$

**Esercizio 2.34.** Si consideri la curva  $\gamma(t) = (\ln \tan t/2 + \cos t, \sin t)$ ,  $t \in ]0, \pi[$ , detta **trattrice** (cf. Sezione 4.9, formula (4.24) con  $R = 1$ ). Si noti che  $\gamma(t)$  è una curva regolare tranne che per  $t = \pi/2$ . Verificare che l'evoluta di  $\gamma(t)$  è la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = \left( \ln \tan t/2, \frac{1}{\sin t} \right).$$

Si noti che se consideriamo il parametro  $\bar{t}$  definito da  $\tan(t/2) = e^{\bar{t}}$ , si ha  $\ln \tan t/2 = \bar{t}$  e

$$\frac{1}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{2\operatorname{sen}(t/2)\cos(t/2)} = \frac{1}{2}(\tan(t/2) + \cot(t/2)) = \frac{1}{2}(e^{\bar{t}} + e^{-\bar{t}}) = \cosh \bar{t}.$$

Quindi,  $\tilde{\gamma}$  è la catenaria dell'Esempio 2.26.

## 2.4. Eliche circolari

Configurazioni elicoidali sono strutture che si trovano molto spesso in natura. Esse appaiono sia in sistemi microscopici (ad esempio fibre batteriche, catene proteiche in particolare del DNA, ecc.) che in fenomeni macroscopici (ad esempio: corde, funi, piante rampicanti, molle a spirale, ecc.). Per maggiori informazioni sulle configurazioni elicoidali in natura si rinvia all'articolo [3] e alla bibliografia riportata nello stesso articolo.

Nell'Esempio 1.10, una curva differenziabile  $\gamma$  parametrizzata da  $\gamma(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , dove  $a = \operatorname{cost.} > 0$  e  $b = \operatorname{cost.} \neq 0$ , è stata chiamata *elica circolare*. Inoltre, abbiamo osservato che

- 1)  $\gamma(t)$  appartiene a un cilindro circolare retto,
- 2)  $\cos \vartheta = b/\sqrt{a^2 + b^2} = \operatorname{cost.} \neq 0$ , dove  $\vartheta$  è l'angolo tra  $\dot{\gamma}(t)$  e  $E_{3\gamma(t)}$ .

Nell'Esempio 1.9 si assume la costante  $a > 0$  in modo che tale costante rappresenti il raggio della circonferenza del cilindro che contiene l'elica. D'altronde la trasformazione ortogonale  $F$ , definita rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$  da  $F(e_1) = -e_1$ ,  $F(e_2) = -e_2$  e  $F(e_3) = e_3$ , trasforma l'elica circolare  $\gamma(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$  nell'elica circolare  $\gamma(t) = (-a \cos t, -a \operatorname{sen} t, bt)$ . Quindi, in un opportuno riferimento un'elica circolare si può esprimere con la costante  $a > 0$ .

Le proprietà 1) e 2) permettono di formalizzare la seguente definizione geometrica.

**Definizione 2.35.** *Una curva differenziabile regolare (non piana)  $\gamma(t)$  si dice elica circolare, o arco di elica circolare, se è contenuta in un cilindro circolare retto  $\Gamma$  e forma un angolo costante con l'asse del cilindro, ossia*

$$T(t) \cdot V_{\gamma(t)} = \operatorname{cost.},$$

dove  $T(t)$  è il versore tangente di  $\gamma(t)$  e  $V$  è un versore parallelo all'asse di  $\Gamma$ .

Abbiamo quindi la seguente

**Proposizione 2.36.** *Un'elica circolare, in un opportuno riferimento, si può parametrizzare con l'equazione  $\gamma(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ , dove  $a = \operatorname{cost.} > 0$ ,  $b = \operatorname{cost.} \neq 0$ . Tale parametrizzazione la diremo parametrizzazione canonica dell'elica circolare.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma$  un'elica circolare e sia  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$  una sua parametrizzazione a velocità unitaria. Consideriamo un riferimento cartesiano  $RC(O, x, y, z)$  con asse  $z$  coincidente con l'asse del cilindro  $\Gamma$  che contiene

$\gamma$  e tale che  $\gamma(0)$  appartenga al semiasse positivo delle  $x$ . Dalla definizione di elica circolare segue che

$$\dot{\gamma}(s) \cdot E_{3\gamma(s)} = \bar{b} = \text{cost}, \text{ e quindi } z'(s) = \bar{b} \text{ da cui } z(s) = \bar{b}s + c.$$

Siccome  $\gamma(0)$  si trova sull'asse  $x$ , si ha  $z(0) = 0$  ossia  $c = 0$  e quindi  $z(s) = \bar{b}s$ , con  $\bar{b} \neq 0$  (perchè  $\gamma$  non è piana). Rispetto al fissato riferimento cartesiano, il cilindro  $\Gamma$  ha equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ dove } a \text{ è l'ascissa di } \gamma(0), \text{ cioè } \gamma(0) = (a, 0, 0).$$

$\gamma(s) \in \Gamma$  implica  $x(s)^2 + y(s)^2 = a^2$ , e quindi abbiamo

$$x(s) = a \cos \bar{a}s, \quad y(s) = a \sin \bar{a}s, \quad z(s) = \bar{b}s,$$

dove  $\bar{a}$  (che è  $\neq 0$ , altrimenti  $\gamma$  sarebbe una retta e quindi curva piana) è determinata dalla condizione  $\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 1$ , ossia  $a^2\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 1$ . Posto  $b = \bar{b}/\bar{a}$ , si ha  $\bar{a} = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$ . Pertanto, otteniamo

$$\gamma(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

e quindi per  $t = s/\sqrt{a^2 + b^2}$ , si ottiene la rappresentazione canonica.  $\square$

**Osservazione 2.37.** Dal punto di vista della Fisica, un'elica circolare è la traiettoria  $\gamma$  di un punto che descrive una circonferenza  $\sigma$  con moto circolare uniforme, mentre il piano  $\pi$  che contiene  $\sigma$  si muove di moto rettilineo uniforme nella direzione ortogonale a  $\pi$ . In tal caso, se  $a$  è il raggio di  $\sigma$ ,  $\omega$  è la velocità angolare del moto rotatorio e  $v$  è la velocità del moto traslatorio, allora la curva  $\gamma$  si rappresenta con

$$\gamma(\vartheta) : x = a \cos(\omega\vartheta), \quad y = a \sin(\omega\vartheta), \quad z = v\vartheta, \quad \vartheta \in \mathbb{R} \text{ parametro.}$$

Posto  $t = \vartheta\omega$  e  $b = v/\omega \neq 0$ , si ottiene l'elica con equazioni parametriche  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ .

Per un'elica circolare  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $a > 0, b \neq 0$ , l'arco  $\gamma_0 = \gamma|_{[t_0, t_0+2\pi]}$  si chiama *spira* dell'elica. Ogni spira ha lunghezza costante. Infatti

$$L(\gamma_0) = \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si chiama *passo* dell'elica circolare  $\gamma(t)$  la distanza tra gli estremi di una spira:

$$d(\gamma(t_0), \gamma(t_0 + 2\pi)) = 2\pi|b|,$$

per cui  $b$  viene detta *costante di passo dell'elica circolare*.

### Esempio 2.38. Curvatura e torsione di un'elica circolare

Sia  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $a > 0, b \neq 0, t \in \mathbb{R}$ , un'elica circolare. La riparametrizzazione a velocità unitaria dell'elica circolare è data da (cf. Esempio 1.22 e anche dimostrazione della Proposizione 2.36)

$$\gamma(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Quindi,

$$T(s) = \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)_{\gamma(s)}$$

e

$$T'(s) = \ddot{\gamma}(s) = \left( -\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)_{\gamma(s)}$$

Pertanto la curvatura di  $\gamma(s)$  è

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2} = \operatorname{cost} > 0.$$

Consideriamo ora il campo normale lungo  $\gamma$ , ovvero

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) = - \left( \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)_{\gamma(s)}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} B(s) &= T(s) \wedge N(s) \\ &= \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)_{\gamma(s)}, \\ B'(s) &= \left( \frac{b}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)_{\gamma(s)}, \end{aligned}$$

e quindi la torsione di  $\gamma(s)$  è

$$\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s) = \frac{b}{a^2 + b^2} = \operatorname{cost} \neq 0.$$

Dunque, l'elica circolare è una curva con curvatura e torsione costanti non nulle. In particolare, se  $b = 0$  si ha che  $\gamma$  è una circonferenza di raggio  $a$ , e le formule ottenute danno  $\tau = 0$  e  $\kappa = 1/a$ .

## 2.5. Eliche cilindriche

**Definizione 2.39.** Una curva regolare  $\gamma(t)$  di  $\mathbb{R}^3$  si dice che è un'elica cilindrica, o un arco di elica cilindrica, se esiste un campo vettoriale unitario differenziabile  $V(t)$  definito lungo  $\gamma(t)$  tale che

- (1)  $V(t)$  sia parallelo lungo  $\gamma$  (i.e.,  $V'(t) = 0$ , e quindi  $V(t) = (V_0)_{\gamma(t)}$ );
- (2)  $V(t)$  formi un angolo costante  $\vartheta$  con  $T(t)$ :  $V(t) \cdot T(t) = \cos \vartheta (\neq \pm 1)$ .

Un'elica cilindrica, a volte, è anche detta *elica generalizzata*. Il campo vettoriale  $V(t)$ , a volte indicato con  $V_0$  in quanto costante, è detto *asse* dell'elica cilindrica, e l'angolo costante  $\vartheta$  è detto *pendenza* dell'elica (rispetto a  $V$ ). Se  $V(t)$  è asse, anche  $W(t) = -V(t)$  è asse con pendenza  $\tilde{\vartheta} = \pi - \vartheta$ . Un'elica circolare, per quanto detto precedentemente, è chiaramente un esempio di elica cilindrica. Si noti che anche le curve piane si possono considerare come eliche cilindriche (banali). Se  $\gamma(t)$  è una curva piana, basta prendere  $V(t)$  vettore unitario ortogonale al piano della curva (in tal caso  $\vartheta = \pi/2$ ). Se  $\gamma(t)$  fosse una

(parte di) retta, prendendo  $V(t)$  vettore unitario parallelo con  $\dot{\gamma}(t)$ , si avrebbe  $\cos \vartheta = \pm 1$ .

Nel seguito considereremo, salvo diversa indicazione, eliche cilindriche che non sono rette, quindi in particolare con curvatura  $\kappa(t)$  non nulla.

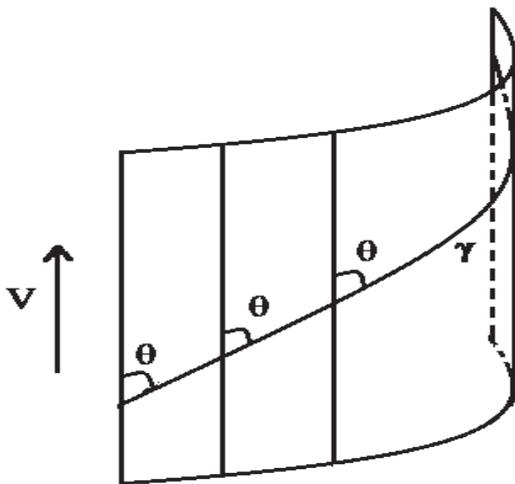


FIGURA 6. Elica cilindrica.

**Osservazione 2.40.** La Definizione 2.39 non dipende dalla parametrizzazione regolare scelta. Infatti se  $\bar{t} = \bar{t}(t)$  è un cambiamento regolare di parametro, il campo vettoriale  $V(t) = V(\bar{t}(t))$  è unitario e soddisfa

$$V'(t) = \bar{t}'(t) V'(\bar{t}), \quad \bar{t}'(t) \neq 0, \quad \text{e quindi} \quad V'(t) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad V'(\bar{t}) = 0.$$

Tracciando per ogni punto di un'elica cilindrica  $\gamma(t)$  una retta con la direzione di  $V$  si ottiene un cilindro generalizzato che contiene  $\gamma$  (cf. Figura 6).

**Proposizione 2.41.** Sia  $\gamma(t)$  un'elica cilindrica con pendenza  $\vartheta$  rispetto all'asse  $V(t)$ . Allora,

$$(2.8) \quad V(t) = \cos \vartheta T(t) + \sin \vartheta B(t).$$

In particolare,  $V$  è ortogonale a  $N$  e  $V \cdot B = \sin \vartheta > 0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(T(t), N(t), B(t))$  il riferimento di Frenet associato a  $\gamma(t)$ . L'asse  $V(t)$  si può esprimere con

$$V(t) = (V \cdot T)T + (V \cdot N)N + (V \cdot B)B.$$

Per ipotesi  $V \cdot T = \cos t = \cos \vartheta$ . Derivando si ottiene  $V' \cdot T + V \cdot T' = 0$ . Ma  $V'(t) = 0$  per ipotesi e quindi  $T'(t) \cdot V(t) = 0$ . Applicando poi la prima formula di Frenet, risulta  $V(t) \cdot \kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\| N(t) = 0$  dove  $\kappa(t) \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$ , per cui necessariamente  $V(t) \cdot N(t) = 0$ . Di conseguenza, l'equazione precedente diventa

$$V(t) = \cos \vartheta T(t) + (V(t) \cdot B(t))B(t).$$

Pertanto, essendo  $V(t)$  unitario, scambiando  $V(t)$  con  $-V(t)$  se necessario, l'asse si può esprimere con la (2.8). In particolare, si ha  $V(t) \cdot B(t) = \sin \vartheta > 0$ . Infatti, se fosse  $\sin \vartheta = 0$ , dalla (2.8) si avrebbe  $T'(t) = 0$  e quindi  $\kappa(t)\|\dot{\gamma}(t)\|N(t) = 0$ , per cui essendo la curva regolare si avrebbe  $\kappa(t) = 0$ , ma le eliche che consideriamo non sono segmenti di retta, pertanto  $\sin \vartheta > 0$ .  $\square$

Una caratterizzazione delle eliche è data dal seguente Teorema stabilito da M.A. Lancret (1802), ma la prima dimostrazione è stata data da B. de Saint Venant nel 1845 (cf. anche [26], p.34).

**Teorema 2.42. (di Lancret)** *Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet. Allora,*

$$\gamma(s) \text{ è un'elica cilindrica} \iff \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \text{cost.}$$

In tal caso,

$$\tau(s)/\kappa(s) = \cotg \vartheta, \quad \text{dove } \vartheta \text{ è la pendenza dell'elica.}$$

**DIMOSTRAZIONE.** “ $\implies$ ” Assumiamo che  $\gamma(s)$  sia un'elica cilindrica. Dalla Proposizione 2.41 segue che l'asse  $V$  è dato da

$$V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s).$$

Derivando, ricordando che  $V'(s) = 0$  e applicando le formule di Frenet, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \cos \vartheta T'(s) + \sin \vartheta B'(s) = \cos \vartheta \kappa(s)N(s) - \sin \vartheta \tau(s)N(s) \\ &= (\kappa(s)\cos \vartheta - \tau(s)\sin \vartheta)N(s), \end{aligned}$$

e quindi

$$\kappa(s) \cdot \cos \vartheta - \tau(s) \sin \vartheta = 0, \quad \text{ossia } \tau(s)/\kappa(s) = \cos \vartheta / \sin \vartheta = \cotg \vartheta = \text{cost.}$$

“ $\impliedby$ ” Per ipotesi  $\tau(s)/\kappa(s) = \text{cost} \in \mathbb{R} = \cotg([0, \pi[)$ . Pertanto, esiste un unico  $\vartheta \in ]0, \pi[$  tale che  $\cotg \vartheta = \tau(s)/\kappa(s)$ . Ora consideriamo il campo vettoriale lungo  $\gamma(s)$  definito da  $V(s) := \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s)$ . Ovviamente  $V(s)$  è differenziabile,  $\|V\| = 1$  e  $V(s) \cdot T(s) = \cos \vartheta = \text{cost}$ . Inoltre, usando le formule di Frenet, risulta

$$\begin{aligned} V'(s) &= \cos \vartheta T'(s) + \sin \vartheta B'(s) = \cos \vartheta \kappa(s)N(s) - \sin \vartheta \tau(s)N(s) \\ &= (\kappa(s)\cos \vartheta - \tau(s)\sin \vartheta)N(s) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, per definizione,  $\gamma(s)$  è un'elica cilindrica.  $\square$

Alla luce del teorema precedente, le eliche cilindriche sono anche dette *curve di Lancret*.

**Osservazione 2.43.** Si noti che le curve di Lancret (non escludendo le rette) si possono caratterizzare anche come le curve geodetiche di un cilindro generalizzato retto (cf. Esempio 5.74).

**Teorema 2.44.** *Sia  $\gamma(s)$  una (parte di) elica cilindrica e sia  $E^2$  un piano ortogonale all'asse  $V$ . Allora, la curva  $\gamma_1(s)$  proiezione ortogonale di  $\gamma(s)$  su  $E^2$ , che in generale non è una (parte di) circonferenza, ha curvatura*

$$\kappa_1(s) = \kappa(s)/\text{sen}^2\vartheta,$$

dove  $\vartheta$  è la pendenza dell'elica. Inoltre,  $\tau(s) = \kappa_1(s)\text{sen}\vartheta\cos\vartheta$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $E^2$  un piano che, senza perdere in generalità possiamo considerare per l'origine, ortogonale all'asse  $V$ . Dalla decomposizione

$$\mathbb{R}^3 = E^2 \oplus \text{span}(V),$$

ne segue che la curva  $\gamma_1(s)$  è data da

$$(2.9) \quad \gamma_1(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot V(s))V(s).$$

Il parametro  $s$  in generale non è ascissa curvilinea per  $\gamma_1$ , quindi per trovare la curvatura  $\kappa_1(s)$  di  $\gamma_1(s)$  usiamo la formula

$$\kappa_1(s) = \|\dot{\gamma}_1(s) \wedge \ddot{\gamma}_1(s)\|/\|\dot{\gamma}_1(s)\|^3.$$

Derivando la (2.9), si ottiene

$$\dot{\gamma}_1(s) = \dot{\gamma}(s) - (\dot{\gamma}(s) \cdot V(s))V(s) = T(s) - (T(s) \cdot V(s))V(s),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}_1\|^2 &= (T - (T \cdot V)V) \cdot (T - (T \cdot V)V) = 1 - 2(T \cdot V)^2 + (T \cdot V)^2 \\ &= 1 - \cos^2\vartheta, \quad \text{ossia} \end{aligned}$$

$$\|\dot{\gamma}_1(s)\| = \text{sen}\vartheta.$$

Inoltre,

$$\ddot{\gamma}_1(s) = T'(s) - (T'(s) \cdot V(s))V(s),$$

dove

$$T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad \text{e quindi} \quad T'(s) \cdot V(s) = 0.$$

Pertanto,

$$\ddot{\gamma}_1(s) = T'(s).$$

Allora, usando anche la (2.8), si ha

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1(s) \wedge \ddot{\gamma}_1(s) &= (T - (T \cdot V)V) \wedge T' = \kappa(s)(T - (\cos\vartheta)V) \wedge N \\ &= \kappa(s)T \wedge N - \kappa(s)\cos\vartheta(\cos\vartheta T + \text{sen}\vartheta B) \wedge N \\ &= \kappa(s)B - \kappa(s)\cos^2\vartheta B + (\kappa(s)\text{sen}\vartheta\cos\vartheta)T \\ &= (\kappa(s)\text{sen}^2\vartheta)B + (\kappa(s)\text{sen}\vartheta\cos\vartheta)T, \end{aligned}$$

e quindi

$$\|\dot{\gamma}_1(s) \wedge \ddot{\gamma}_1(s)\|^2 = \kappa^2(s)\text{sen}^2\vartheta.$$

Dunque,

$$\kappa_1(s) = \|\dot{\gamma}_1(s) \wedge \ddot{\gamma}_1(s)\|/\|\dot{\gamma}_1(s)\|^3 = (\kappa(s)\text{sen}\vartheta)/\text{sen}^3\vartheta = \kappa(s)/\text{sen}^2\vartheta.$$

Infine, dal Teorema di Lancret,  $\tau(s)/\kappa(s) = \cos\vartheta/\text{sen}\vartheta$  e quindi  $\tau(s) = \kappa_1(s)\text{sen}\vartheta\cos\vartheta$ .  $\square$

**Osservazione 2.45.** Si noti che i Teoremi 2.42 e 2.44 valgono anche per curve regolari  $\gamma(t)$  parametrizzate a velocità arbitraria e con  $\kappa(t) > 0$ . Basta osservare che  $\kappa(s) = \kappa(t(s))$  e  $\tau(s) = \tau(t(s))$ . In tal caso, la curva  $\gamma_1(t)$  proiezione ortogonale di  $\gamma(t)$  su un piano ortogonale all'asse  $V(t)$  ha curvatura

$$(2.10) \quad \kappa_1(t) = \kappa(t)/\sin^2 \vartheta$$

**Esercizio 2.46.** Sia data un'elica circolare  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $a > 0, b \neq 0, t \in \mathbb{R}$ , e sia  $E^2$  un piano ortogonale all'asse di  $\gamma$ . Sia  $\gamma_1(t)$  la circonferenza proiezione ortogonale di  $\gamma(t)$  su  $E^2$ . Si verifichi, applicando il Teorema 2.44, che  $\gamma_1(t)$  ha curvatura  $\kappa_1(t) = 1/a$ , ossia  $\kappa(t)/\sin^2 \vartheta = 1/a$ .

**Esercizio 2.47.** Sia data la curva regolare  $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

a) Determinare curvatura e torsione di  $\gamma$ , quindi riconoscere che  $\gamma$  è un'elica cilindrica ed esplicitare l'asse  $V$  di  $\gamma$ .

b) Determinare la curva  $\gamma_1(t)$  proiezione ortogonale di  $\gamma$  su un piano ortogonale all'asse  $V$  di  $\gamma$ , inoltre determinare la curvatura di  $\gamma_1$ .

*Soluzione:* a) Calcolando i vettori  $\dot{\gamma}(t)$ ,  $\ddot{\gamma}(t)$ ,  $\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)$  e  $\ddot{\gamma}(t)$ , si ha

$$\dot{\gamma}(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})_{\gamma(t)}, \quad \ddot{\gamma}(t) = (e^t, e^{-t}, 0)_{\gamma(t)}, \quad \ddot{\gamma}(t) = (e^t, -e^{-t}, 0)_{\gamma(t)},$$

$$\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2)_{\gamma(t)},$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2 = (e^t + e^{-t})^2, \quad \|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2 = 2(e^t + e^{-t})^2.$$

Quindi, curvatura e torsione sono date da

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2},$$

$$\tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2} = -\frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Pertanto,  $\tau(t)/\kappa(t) = -1$  e quindi la curva  $\gamma(t)$  è un'elica cilindrica con angolo di pendenza  $\vartheta = 3\pi/4$ . Ora determiniamo l'asse  $V(t)$  dell'elica. Dalla Proposizione 2.41, l'asse  $V(t)$  è il campo vettoriale

$$V(t) = (\cos \vartheta)T(t) + (\sin \vartheta)B(t) = (\sqrt{2}/2)(B(t) - T(t)),$$

dove

$$T(t) = \frac{1}{e^t + e^{-t}}(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})_{\gamma(t)}, \quad B(t) = \frac{1}{e^t + e^{-t}}(-e^{-t}, e^t, \sqrt{2})_{\gamma(t)}.$$

Pertanto, otteniamo

$$V(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0)_{\gamma(t)}.$$

b) Siccome  $V(t) \cdot \gamma(t) = (\sqrt{2}/2)(e^{-t} - e^t)$ , la curva proiezione ortogonale di  $\gamma$  su un piano ortogonale all'asse  $V$  è data da

$$\gamma_1(t) = \gamma(t) - (V(t) \cdot \gamma(t))V(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t, e^{-t} + e^t, 2\sqrt{2}t).$$

Applicando la (2.10), la curva  $\gamma_1$  ha curvatura

$$\kappa_1(t) = \frac{\kappa(t)}{\sin^2 \vartheta} = \frac{2\sqrt{2}}{(e^{-t} + e^t)^2}.$$

**Esercizio 2.48.** Sia data la curva  $\gamma(t) = (2t, (2/3)t^3, (1/5)t^5)$ ,  $t > 0$ .

a) Determinare curvatura e torsione di  $\gamma$ , quindi riconoscere che  $\gamma$  è un'elica cilindrica ed esplicitare l'asse  $V$  di  $\gamma$ .

b) Determinare la curva  $\gamma_1(t)$  proiezione ortogonale di  $\gamma$  su un piano ortogonale all'asse  $V$  di  $\gamma$ , inoltre determinare la curvatura di  $\gamma_1$ .

*Suggerimento:* a) Usando le formule della Proposizione 2.21 si trova che  $\tau(t) = \kappa(t) = 4t/(2+t^4)^2$ . Quindi, per il Teorema di Lancret  $\gamma$  è un'elica cilindrica,  $\tau/\kappa = \cotg(\pi/4)$  e  $V(t) = (\sqrt{2}/2)T(t) + (\sqrt{2}/2)B(t) = (\sqrt{2}/2)(1, 0, 1)_{\gamma(t)}$  è l'asse dell'elica.

b) Usando la (2.9) si trova  $\gamma_1(t) = (t - t^5/10, 2t^3/3, -t + t^5/10)$ , e quindi dalla formula del Teorema 2.44 si ottiene  $\kappa_1(t) = 8t/(2+t^4)^2$ .

**Esercizio 2.49.** Sia  $\gamma(t)$  una curva di Frenet parametrizzata con velocità scalare  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 3\sqrt{2}(1+t^2)$ . Determinare curvatura e torsione di  $\gamma(t)$  sapendo che il suo riferimento di Frenet è dato da

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} (1-t^2, 2t, 1+t^2)_{\gamma(t)}, \quad N(t) = \frac{1}{1+t^2} (-2t, 1-t^2, 0)_{\gamma(t)},$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} (t^2-1, -2t, 1+t^2)_{\gamma(t)}.$$

Quindi, riconoscere la curva  $\gamma(t)$ .

*Suggerimento:* calcolare i campi derivati  $T'(t)$  e  $B'(t)$ . Applicando le formule di Frenet per curve parametrizzate a velocità arbitraria, si trova

$$\kappa(t) = \frac{T'(t) \cdot N(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \dots = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

e

$$\tau(t) = -\frac{B'(t) \cdot N(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \dots = \frac{1}{3(1+t^2)^2}.$$

Dunque,  $\gamma(t)$  è un'elica cilindrica.

Vogliamo dare ora una caratterizzazione dell'elica cilindrica in termini della curva immagine sferica che adesso introduciamo. Sia  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ,  $s \in I$ , una curva di Frenet. Siccome  $s$  è ascissa curvilinea, si ha  $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ . La curva

$$\beta : I \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, s \mapsto \beta(s) = \dot{\gamma}(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)),$$

è detta **immagine sferica** di  $\gamma$ . La curva  $\beta$  è regolare in quanto

$$\dot{\beta}(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s) \neq 0, \text{ quindi } \|\dot{\beta}(s)\| = \kappa(s) > 0,$$

dove  $\kappa(s)$  è la curvatura di  $\gamma(s)$ . In generale  $\beta(s)$  non è parametrizzata a velocità unitaria, per cui per calcolare curvatura e torsione di  $\beta$  usiamo le formule della Proposizione 2.21. Derivando

$$\dot{\beta}(s) = \kappa(s)N(s),$$

e applicando le formule di Frenet, si ha

$$\ddot{\beta} = \kappa'N + \kappa N' = \kappa'N + \kappa(-\kappa T + \tau B) = -\kappa^2 T + \kappa'N + \kappa\tau B$$

e

$$\ddot{\beta} = (-3\kappa\kappa')T + (\kappa'' - \kappa^3 - \tau^2\kappa)N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B.$$

Quindi,

$$(\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta})(s) = \kappa^2(s)\tau(s)T(s) + \kappa^3(s)B(s)$$

e

$$\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta} \cdot \ddot{\beta} = \dots = \kappa^5(\tau/\kappa)',$$

per cui si ottiene

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\|\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta}\|}{\|\dot{\beta}\|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^6 + \tau^2\kappa^4}}{\kappa^3} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}$$

e

$$\tau_\beta = \frac{\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta} \cdot \ddot{\beta}}{\|\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta}\|^2} = \frac{(\tau/\kappa)'}{\kappa(1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2})}.$$

Pertanto, come conseguenza del Teorema 2.13 e del Teorema 2.42 (di Lancret), otteniamo la seguente

**Proposizione 2.50.** *Una curva di Frenet (non piana)  $\gamma(s)$  è una (parte di) elica cilindrica se, e solo se, la sua immagine sferica  $\beta(s)$  è una (parte di) circonferenza di curvatura  $\kappa_\beta = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2} > 1$ .*

Per le eliche circolari abbiamo la seguente caratterizzazione.

**Teorema 2.51.** *Sia  $\gamma(t)$  una curva di Frenet (non piana). Allora,  $\gamma(t)$  è una (parte di) elica circolare  $\iff \tau(t) = \text{cost.}$  e  $\kappa(t) = \text{cost.}$*

**DIMOSTRAZIONE.** L'implicazione " $\implies$ " è stata vista nell'Esempio 2.38. Proviamo l'implicazione inversa. Dal Teorema di Lancret sappiamo che  $\gamma(t)$  è una (parte di) elica cilindrica. Inoltre, siccome  $\kappa(t)$  è costante per ipotesi, dal Teorema 2.44 segue che la curva  $\gamma_1$ , proiezione ortogonale di  $\gamma$  su un piano ortogonale all'asse  $V$ , ha curvatura

$$\kappa_1(t) = \kappa(t)/\text{sen}^2\vartheta = \text{cost.}$$

Dunque, applicando il Teorema 2.13,  $\gamma_1$  è una (parte di) circonferenza e quindi  $\gamma$  è una (parte di) elica circolare.  $\square$

**Osservazione 2.52.** Sia  $\gamma(s)$  un'elica circolare e sia  $(T(s), N(s), B(s), \kappa, \tau)$  il suo apparato di Frenet. Dalla (2.8) segue che l'asse  $V(s)$  di  $\gamma$  è dato da

$$V(s) = \cos\vartheta T(s) + \text{sen}\vartheta B(s),$$

dove  $\cot \vartheta = \tau/\kappa$  (cf. Teorema 2.42) e  $\vartheta$  è l'angolo convesso tra  $T$  e  $V$ . Allora, i vettori  $V_1(s) = \sin \vartheta T(s) - \cos \vartheta B(s)$  ed  $N(s)$  sono ortonormali e il piano  $E^2(s) = \text{span}(V_1(s), N(s))$  è ortogonale a  $V(s)$  lungo  $\gamma$ . Derivando, e applicando le formule di Frenet, otteniamo

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= \sin \vartheta T'(s) - \cos \vartheta B'(s) = \kappa \sin \vartheta N(s) + \tau \cos \vartheta N(s) \\ &= (\kappa \sin \vartheta + \tau \cos \vartheta)N(s) = \left( \kappa \sin \vartheta + \kappa \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta} \right) N(s) \\ &= \frac{\kappa}{\sin \vartheta} N(s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N'(s) &= -\kappa T(s) + \tau B(s) = -\kappa T(s) + \kappa \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} B(s) \\ &= \frac{\kappa}{\sin \vartheta} (-\sin \vartheta T(s) + \cos \vartheta B(s)) \\ &= -\frac{\kappa}{\sin \vartheta} V_1(s). \end{aligned}$$

Quindi,

$$V_1'(s) = \varrho N(s) \quad \text{e} \quad N'(s) = -\varrho V_1(s),$$

dove

$$\varrho = \frac{\kappa}{\sin \vartheta} = \dots = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Pertanto, derivando il riferimento ortonormale  $(V(s), V_1(s), N(s))$  lungo  $\gamma$ , si ha  $V'(s) = 0$  mentre il piano  $E^2(s)$ , ortogonale all'asse  $V$ , è trasformato in se mediante una rotazione di  $90^\circ$  seguita da una omotetia di coefficiente  $\varrho$ . Inoltre, si noti che  $\varrho$  è la lunghezza del campo vettoriale di Darboux (cf. Sezione 2.6).

Diamo ora un metodo per la **costruzione di eliche cilindriche**.

**Teorema 2.53.** *Sia  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$ , una curva regolare piana parametrizzata a velocità costante  $\|\dot{\alpha}(t)\| = a > 0$  e sia  $V_0$  un vettore unitario ortogonale al piano di  $\alpha$ . Allora, la curva*

$$(*) \quad \gamma(t) = \alpha(t) + t b V_0 + c V_0, \quad b, c \in \mathbb{R},$$

*è un'elica cilindrica con asse il campo vettoriale costante e unitario  $V_0$ . Viceversa, se  $\gamma(t)$  è un'elica cilindrica con asse un vettore unitario  $V_0$ , allora  $\gamma(t)$  è del tipo  $(*)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\alpha(t)$ ,  $V_0$  e  $\gamma(t)$  come nell'enunciato. Intanto osserviamo che  $\gamma(t)$  è regolare in quanto

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\alpha}(t) + b(V_0)_{\gamma(t)} \quad \text{e} \quad \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = a^2 + b^2 = \text{cost.} > 0.$$

Inoltre, il campo vettoriale  $V(t) = (V_0)_{\gamma(t)}$  soddisfa:  $\|V(t)\| = 1$ ,  $V'(t) = 0$ . Sia  $\vartheta(t)$  l'angolo convesso individuato da  $\gamma$  e  $V$ . Allora

$$\dot{\gamma}(t) \cdot V(t) = (\dot{\alpha}(t) + b(V_0)_{\gamma(t)}) \cdot V(t) = b$$

e

$$\dot{\gamma}(t) \cdot V(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \cos \vartheta(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \vartheta(t)$$

implicano che l'angolo  $\vartheta(t)$  è costante. Pertanto, la curva  $\gamma(t)$  è un'elica cilindrica parametrizzata con velocità scalare costante e con asse il campo vettoriale unitario  $V(t) = (V_0)_{\gamma(t)}$ . Se le costanti  $a, b$  soddisfano la condizione  $a^2 + b^2 = 1$ , allora  $t$  è ascissa curvilinea per  $\gamma$ .

Viceversa, sia  $\gamma(t)$  un'elica cilindrica parametrizzata con velocità scalare costante,  $\|\dot{\gamma}(t)\| = d > 0$ , e con asse il campo vettoriale unitario  $V(t)$  che in quanto parallelo si può esprimere nella forma  $V(t) = (V_0)_{\gamma(t)}$ . Consideriamo la curva

$$\alpha(t) = \gamma(t) - (\gamma(t) \cdot V_0) V_0.$$

$\alpha$  è una curva piana contenuta in un piano ortogonale all'asse  $V_0$ . Dalla definizione di elica cilindrica segue che

$$(V_0 \cdot \gamma(t))' = V_0 \cdot \dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \cos \vartheta = d \cos \vartheta \text{ (costante),}$$

e quindi

$$V_0 \cdot \gamma(t) = (d \cos \vartheta) t + c, \quad c \text{ costante.}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \alpha(t) + (\gamma(t) \cdot V_0) V_0 \\ &= \alpha(t) + (d \cos \vartheta) t V_0 + c V_0 \\ &= \alpha(t) + b t V_0 + c V_0, \end{aligned}$$

dove si è posto  $b = d \cos \vartheta$ . □

**Esercizio 2.54.** Siano  $\alpha(s)$  una curva regolare piana parametrizzata a velocità unitaria,  $V_0$  un vettore unitario ortogonale al piano di  $\alpha$ , e  $\vartheta \in ]0, \pi[$ ,  $\vartheta \neq \pi/2$ . Verificare che la curva

$$\gamma(s) = (\sin \vartheta) \alpha(s) + s (\cos \vartheta) V_0$$

è una (parte di) elica cilindrica con

$$\kappa_\gamma(s) = (\sin \vartheta) \kappa_\alpha(s) \quad \text{e} \quad \tau_\gamma(s) = (\cos \vartheta) \kappa_\alpha(s).$$

In particolare,  $\gamma(s)$  è una (parte di) elica circolare se e solo se  $\alpha(s)$  è una (parte di) circonferenza.

*Suggerimento:* applicare la definizione di curvatura per trovare  $\kappa_\gamma$ , e il Teorema di Lancret per trovare la torsione  $\tau_\gamma$ .

**Esempio 2.55. (Elica cilindrica su un cono rotondo)**

Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t \cos \ln t, t \sin \ln t, \sqrt{2} t), \quad t > 0.$$

Si vede facilmente che  $\gamma$  è una curva del cono rotondo

$$S : 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0, \quad z > 0,$$

ottenuto ruotando la retta  $x = 0, z = \sqrt{2}y$  intorno all'asse  $z$ . Siccome

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t) &= (\cos \ln t - \operatorname{sen} \ln t, \cos \ln t + \operatorname{sen} \ln t, \sqrt{2})_{\gamma(t)}, & \|\dot{\gamma}(t)\| &= 2, \\ \ddot{\gamma}(t) &= -(1/t)(\cos \ln t + \operatorname{sen} \ln t, \operatorname{sen} \ln t - \cos \ln t, 0)_{\gamma(t)}, \\ \ddot{\gamma}(t) &= (2/t^2)(\operatorname{sen} \ln t, -\cos \ln t, 0)_{\gamma(t)}, \\ \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) &= (\sqrt{2}/t)(\operatorname{sen} \ln t - \cos \ln t, -\operatorname{sen} \ln t - \cos \ln t, \sqrt{2})_{\gamma(t)}, \\ \|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2 &= 8/t^2, & \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) &= \frac{2\sqrt{2}}{t^3},\end{aligned}$$

si ottiene

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{4t} \quad \text{e} \quad \tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2} = \frac{\sqrt{2}}{4t}.$$

Pertanto,  $\tau/\kappa$  è costante e quindi  $\gamma$  è un'elica cilindrica. Inoltre, è facile vedere che l'asse di  $\gamma$  è il campo vettoriale costante definito dall'asse delle  $z$ . Quindi, l'asse di  $\gamma$  coincide con l'asse del cono di rotazione  $S$ . Nell'articolo di Caddeo-Piu [8] c'è una bella presentazione delle eliche cilindriche su superfici di rotazione che hanno asse coincidente con l'asse della stessa superficie.

## 2.6. Il campo vettoriale di Darboux

Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet a velocità unitaria. Il campo di vettori

$$D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

è il **campo vettoriale di Darboux** (cf., ad esempio, [14] Section 5.2) anche detto vettore velocità angolare di un corpo rigido che si muove lungo la curva  $\gamma(s)$  (cf. Esempio 2.57). Osserviamo che il campo vettoriale di Darboux è il campo vettoriale assiale della matrice antisimmetrica

$$\mathcal{A}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti, se  $X(s)$  è un campo vettoriale lungo  $\gamma(s)$  espresso con componenti  $(X^1(s), X^2(s), X^3(s))$  rispetto al riferimento di Frenet, si ha

$$\mathcal{A}(s)X(s) = \begin{pmatrix} T & N & B \\ \tau & 0 & \kappa \\ X^1 & X^2 & X^3 \end{pmatrix} (s) = D(s) \wedge X(s).$$

Si noti che, per ogni  $s$ , il vettore  $D(s)$  è un autovettore di  $\mathcal{A}(s)$  corrispondente all'autovalore nullo della stessa matrice  $\mathcal{A}(s)$ . Inoltre, si può facilmente verificare che il vettore  $D(s)$  soddisfa

$$T'(s) = (D \wedge T)(s), \quad N'(s) = (D \wedge N)(s), \quad B'(s) = (D \wedge B)(s).$$

Tali equazioni, dette *equazioni di Darboux*, non sono altro che una variante delle formule di Frenet:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} (s) = \mathcal{A}^T \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} (s).$$

Il seguente Teorema caratterizza le eliche mediante il campo vettoriale di Darboux.

**Teorema 2.56.** *Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet. Allora,*

- $\gamma(s)$  è una (parte di) elica cilindrica se e solo se il normalizzato del campo vettoriale di Darboux  $D(s)$  è parallelo lungo  $\gamma(s)$ ;
- $\gamma(s)$  è una (parte di) elica circolare se e solo se il campo vettoriale di Darboux  $D(s)$  è parallelo lungo  $\gamma(s)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma(s)$  un'elica cilindrica. L'asse  $V$  di  $\gamma(s)$  è dato da

$$V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s),$$

e dal Teorema di Lancret, abbiamo  $\tau(s)/\kappa(s) = \cos \vartheta / \sin \vartheta$ . Allora,

$$V(s) = \frac{\sin \vartheta}{\kappa(s)} (\tau(s) T(s) + \kappa(s) B(s)) = \frac{\sin \vartheta}{\kappa(s)} D(s).$$

Pertanto, il campo vettoriale di Darboux soddisfa:

$$D(s) = f(s)V(s), \quad \text{dove} \quad f(s) = \frac{\kappa(s)}{\sin \vartheta},$$

e quindi il suo normalizzato  $(1/f(s))D(s) = V(s)$  è parallelo.

Viceversa, sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet e quindi il campo vettoriale di Darboux  $\|D(s)\| \neq 0$  per ogni  $s$ . Assumiamo che il normalizzato di  $D(s)$  sia parallelo lungo  $\gamma(s)$ , ossia il campo vettoriale unitario  $V(s) = (1/a(s))D(s)$ , dove  $a(s)^2 = \|D(s)\|^2 = \tau^2(s) + \kappa^2(s)$ , soddisfi  $V'(s) = 0$ . Allora, derivando l'equazione

$$a(s)V(s) = D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s),$$

abbiamo

$$\begin{aligned} a'(s)V(s) &= \tau'(s)T(s) + \tau(s)T'(s) + \kappa'(s)B(s) + \kappa(s)B'(s) \\ &= \tau'(s)T(s) + \kappa'(s)B(s). \end{aligned}$$

Sostituendo  $V(s)$  con  $(1/a(s))D(s)$ , si ottiene

$$\frac{a'(s)}{a(s)} (\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)) = \tau'(s)T(s) + \kappa'(s)B(s),$$

che implica

$$\tau'(s) = \frac{a'(s)}{a(s)} \tau(s) \quad \text{e} \quad \kappa'(s) = \frac{a'(s)}{a(s)} \kappa(s),$$

e quindi

$$\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s) = 0.$$

Di conseguenza,

$$\left( \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)' = \frac{\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)}{\kappa^2(s)} = 0,$$

e quindi  $\tau(s)/\kappa(s)$  è una costante, ovvero  $\gamma(s)$  è una (parte di) elica cilindrica.

Per la seconda parte, basta notare che

$$D'(s) = \dots = \tau'(s)T(s) + \kappa'(s)B(s),$$

e quindi  $D(s)$  è parallelo se e solo se  $\tau$  e  $\kappa$  sono costanti (ovvero,  $\gamma(s)$  è un'elica circolare).  $\square$

**Esempio 2.57.** Come già osservato, un'elica circolare è la traiettoria  $\gamma$  di un punto che descrive una circonferenza  $\sigma$  con moto circolare uniforme, mentre il piano  $\pi$  che contiene  $\sigma$  si muove di moto rettilineo uniforme nella direzione ortogonale a  $\pi$ . In tal caso, se  $a$  è il raggio di  $\sigma$ ,  $\omega$  è la velocità angolare del moto rotatorio e  $v$  è la velocità del moto traslatorio, la curva  $\gamma$  si parametrizza con

$$\gamma(t) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t), vt), \quad t \text{ parametro.}$$

Il suo vettore velocità

$$\dot{\gamma}(t) = (-a\omega \sin(\omega t), a\omega \cos(\omega t), v)_{\gamma(t)}, \quad \text{e quindi } \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = a^2\omega^2 + v^2.$$

Assumiamo che la curva sia parametrizzata a velocità scalare unitaria, ossia che le velocità  $\omega$  e  $v$  soddisfino la condizione

$$a^2\omega^2 + v^2 = 1.$$

Siccome

$$\ddot{\gamma}(t) = (-a\omega^2 \cos(\omega t), -a\omega^2 \sin(\omega t), 0)_{\gamma(t)}$$

e

$$\ddot{\gamma}(t) = (a\omega^3 \sin(\omega t), -a\omega^3 \cos(\omega t), 0)_{\gamma(t)},$$

applicando, ad esempio, le formule del Corollario 2.22, si trova

$$\kappa(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\| = a\omega^2,$$

e

$$\tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\kappa^2(t)} = \frac{a^2 v \omega^5}{a^2 \omega^4} = v \omega,$$

e

$$B(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|} = (v \sin(\omega t), -v \cos(\omega t), a\omega)_{\gamma(t)}.$$

Inoltre,

$$\tau(t)T(t) = v\omega T(t) = (-av\omega^2 \sin(\omega t), av\omega^2 \cos(\omega t), v^2\omega)_{\gamma(t)}$$

e

$$\kappa(t)B(t) = a\omega^2 B(t) = (av\omega^2 \sin(\omega t), -av\omega^2 \cos(\omega t), a^2\omega^3)_{\gamma(t)}.$$

Pertanto, il campo vettoriale di Darboux

$$D(t) = \tau(t)T(t) + \kappa(t)B(t) = (0, 0, \omega(v^2 + a^2\omega^2))_{\gamma(t)} = (0, 0, \omega)_{\gamma(t)},$$

e la sua lunghezza è la velocità angolare  $\omega$ .

## 2.7. Il teorema fondamentale sulle curve

Iniziamo con la seguente

**Definizione 2.58.** *Due curve parametrizzate  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dicono congruenti (o isometriche) se esiste un'isometria dello spazio euclideo  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\beta(t) = F(\alpha(t))$  per ogni  $t \in I$ .*

Siano  $\alpha(s), \beta(s)$ ,  $s \in I$ , due curve regolari parametrizzate a velocità unitaria. Se  $\kappa_\alpha(s) = 0$  per ogni  $s$ , ossia  $\alpha(s)$  è un segmento di retta, e  $\beta(s)$  è congruente ad  $\alpha(s)$ , allora anche  $\beta(s)$  è un segmento di retta. Viceversa, se  $\alpha(s), \beta(s)$  sono due segmenti di retta, allora è facile costruire una isometria  $F$  tale che  $\beta(s) = F(\alpha(s))$ . Se  $\kappa_\alpha(s)$  non è nulla, abbiamo il seguente teorema.

**Teorema 2.59. (Teorema fondamentale sulle curve, prima parte)** *Siano  $\alpha(s), \beta(s)$ ,  $s \in I$ , due curve regolari parametrizzate a velocità unitaria e con  $\kappa_\alpha(s) > 0$ . Allora,*

$$\alpha \text{ e } \beta \text{ sono congruenti} \iff \kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s) \text{ e } \tau_\beta(s) = \pm \tau_\alpha(s) \text{ per ogni } s.$$

**DIMOSTRAZIONE.** “ $\implies$ ” Sia  $\beta(s)$  congruente ad  $\alpha(s)$  e sia  $F$  un'isometria di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $\beta(s) = F(\alpha(s))$  per ogni  $s$ . Dalla definizione di  $F_*$  si ha

$$T_\beta(s) = \dot{\beta}(s) = F_*(\dot{\alpha}(s)) = F_*T_\alpha(s).$$

Applicando la (2) del Teorema 1.79, si ha

$$T'_\beta(s) = \ddot{\beta}(s) = F_*(\ddot{\alpha}(s)) = F_*T'_\alpha(s).$$

Quindi,

$$\kappa_\beta(s) = \|T'_\beta(s)\| = \|F_*T'_\alpha(s)\| = \|T'_\alpha(s)\| = \kappa_\alpha(s) > 0.$$

Di conseguenza, anche  $\beta(s)$  è una curva di Frenet con

$$N_\beta(s) = \frac{\ddot{\beta}(s)}{\kappa_\beta(s)} = \frac{F_*(\ddot{\alpha}(s))}{\kappa_\alpha(s)} = F_*\left(\frac{\ddot{\alpha}(s)}{\kappa_\alpha(s)}\right) = F_*N_\alpha(s)$$

e

$$\begin{aligned} B_\beta(s) &= T_\beta(s) \wedge N_\beta(s) = (F_*T_\alpha(s)) \wedge (F_*N_\alpha(s)) \\ &= \text{sign}(F) F_*(T_\alpha(s) \wedge N_\alpha(s)) = \text{sign}(F) F_*B_\alpha(s). \end{aligned}$$

Pertanto, applicando la (1) del Teorema 1.79, otteniamo

$$\begin{aligned} \tau_\beta(s) &= -B'_\beta(s) \cdot N_\beta(s) = B_\beta(s) \cdot N'_\beta(s) = B_\beta(s) \cdot (F_*N_\alpha(s))' \\ &= B_\beta(s) \cdot F_*N'_\alpha(s) = \text{sign}(F) F_*B_\alpha(s) \cdot F_*N'_\alpha(s) = \pm B_\alpha(s) \cdot N'_\alpha(s) \\ &= \pm \tau_\alpha(s). \end{aligned}$$

“ $\impliedby$ ” Per ipotesi  $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$  e  $\tau_\beta(s) = \pm \tau_\alpha(s)$ . Distinguiamo due casi.

• **I caso:**  $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$  e  $\tau_\beta = \tau_\alpha$ .

Fissato  $s_0 \in I$ , sia  $(T_\alpha(s_0), N_\alpha(s_0), B_\alpha(s_0))$  il riferimento di Frenet di  $\alpha$  in  $\alpha(s_0)$  e sia  $(T_\beta(s_0), N_\beta(s_0), B_\beta(s_0))$  il riferimento di Frenet di  $\beta$  in  $\beta(s_0)$ .

Applicando la Proposizione 1.61, consideriamo l'isometria  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$  e

$$(2.11) \quad F_*T_\alpha(s_0) = T_\beta(s_0), \quad F_*N_\alpha(s_0) = N_\beta(s_0), \quad F_*B_\alpha(s_0) = B_\beta(s_0).$$

Tale  $F$  ha  $\text{sign}(F) = +1$  in quanto i riferimenti di Frenet sono positivi. Ora poniamo  $\tilde{\alpha}(s) = F(\alpha(s))$  e proviamo che  $\tilde{\alpha}(s) = \beta(s)$ . Poichè  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  sono congruenti, dalla dimostrazione dell'implicazione " $\implies$ " segue che  $\kappa_{\tilde{\alpha}}(s) = \kappa_\alpha(s)$  e  $\tau_{\tilde{\alpha}}(s) = \tau_\alpha(s)$ , inoltre

$$(A) \quad \begin{cases} T_{\tilde{\alpha}}(s_0) = F_*T_\alpha(s_0) = T_\beta(s_0), \\ N_{\tilde{\alpha}}(s_0) = F_*N_\alpha(s_0) = N_\beta(s_0), \\ B_{\tilde{\alpha}}(s_0) = F_*B_\alpha(s_0) = B_\beta(s_0). \end{cases}$$

Scriviamo le formule di Frenet per  $\tilde{\alpha}$  e  $\beta$ . Tenendo conto che  $\kappa_{\tilde{\alpha}}(s) = \kappa_\alpha(s)$ ,  $\tau_{\tilde{\alpha}}(s) = \tau_\alpha(s)$ ,  $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$  e  $\tau_\beta(s) = \tau_\alpha(s)$ , si ha:

$$(B) \quad \begin{cases} T'_{\tilde{\alpha}}(s) = \kappa_{\tilde{\alpha}}(s)N_{\tilde{\alpha}}(s) & = \kappa_\alpha(s)N_{\tilde{\alpha}}(s). \\ N'_{\tilde{\alpha}}(s) = -\kappa_{\tilde{\alpha}}(s)T_{\tilde{\alpha}}(s) + \tau_{\tilde{\alpha}}(s)B_{\tilde{\alpha}}(s) & = -\kappa_\alpha(s)T_{\tilde{\alpha}}(s) + \tau_\alpha(s)B_{\tilde{\alpha}}(s). \\ B'_{\tilde{\alpha}}(s) = -\tau_{\tilde{\alpha}}(s)N_{\tilde{\alpha}}(s) & = -\tau_\alpha(s)N_{\tilde{\alpha}}(s) \end{cases}$$

e

$$(C) \quad \begin{cases} T'_\beta(s) = \kappa_\beta(s)N_\beta(s) & = \kappa_\alpha(s)N_\beta(s), \\ N'_\beta(s) = -\kappa_\beta(s)T_\beta(s) + \tau_\beta(s)B_\beta(s) & = -\kappa_\alpha(s)T_\beta(s) + \tau_\alpha(s)B_\beta(s), \\ B'_\beta(s) = -\tau_\beta(s)N_\beta(s) & = -\tau_\alpha(s)N_\beta(s). \end{cases}$$

Consideriamo ora la funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(s) = \|T_{\tilde{\alpha}}(s) - T_\beta(s)\|^2 + \|N_{\tilde{\alpha}}(s) - N_\beta(s)\|^2 + \|B_{\tilde{\alpha}}(s) - B_\beta(s)\|^2.$$

Derivando tale funzione, tenendo conto delle formule di Frenet trovate in (B) e (C), si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f'(s) &= (T'_{\tilde{\alpha}} - T'_\beta)(s) \cdot (T_{\tilde{\alpha}} - T_\beta)(s) + (N'_{\tilde{\alpha}} - N'_\beta)(s) \cdot (N_{\tilde{\alpha}} - N_\beta)(s) \\ &\quad + (B'_{\tilde{\alpha}} - B'_\beta)(s) \cdot (B_{\tilde{\alpha}} - B_\beta)(s) \\ &= \kappa_\alpha(s)(N_{\tilde{\alpha}} - N_\beta)(s) \cdot (T_{\tilde{\alpha}} - T_\beta)(s) \\ &\quad - \kappa_\alpha(s)(T_{\tilde{\alpha}} - T_\beta)(s) \cdot (N_{\tilde{\alpha}} - N_\beta)(s) \\ &\quad + \tau_\alpha(s)(B_{\tilde{\alpha}} - B_\beta)(s) \cdot (N_{\tilde{\alpha}} - N_\beta)(s) \\ &\quad - \tau_\alpha(s)(N_{\tilde{\alpha}} - N_\beta)(s) \cdot (B_{\tilde{\alpha}} - B_\beta)(s) = 0. \end{aligned}$$

Ciò implica che  $f(s) = \text{cost} = f(s_0) = 0$ , dove nell'ultima uguaglianza si è usata la (A). Quindi, in particolare, si ha

$$\|T_{\tilde{\alpha}}(s) - T_\beta(s)\|^2 = 0, \quad \text{cioè } T_{\tilde{\alpha}}(s) = T_\beta(s) \quad (\text{come parti vettoriali}).$$

Pertanto, se

$$\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{\alpha}_1(s), \tilde{\alpha}_2(s), \tilde{\alpha}_3(s)) \quad \text{e} \quad \beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s)),$$

abbiamo

$$\tilde{\alpha}(s) = \dot{\beta}(s), \quad \text{cioè} \quad \frac{d\tilde{\alpha}_i}{ds} = \frac{d\beta_i}{ds} \quad \text{per ogni } i = 1, 2, 3.$$

Di conseguenza,

$$\beta(s) = \tilde{\alpha}(s) + a, \quad \text{con } a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Ma  $\beta(s_0) = \tilde{\alpha}(s_0)$  e quindi  $a = 0$ . Dunque,

$$\beta(s) = \tilde{\alpha}(s) = F(\alpha(s)), \quad \text{cioè } \alpha(s) \text{ e } \beta(s) \text{ sono congruenti.}$$

• **II caso:**  $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$  e  $\tau_\beta = -\tau_\alpha$ .

Fissato  $s_0 \in I$ , consideriamo l'isometria  $F$  che soddisfa  $F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$  e che trasforma il riferimento di Frenet  $(T_\alpha(s_0), N_\alpha(s_0), B_\alpha(s_0))$  (base ortonormale positiva) nella base ortonormale negativa  $(T_\beta(s_0), N_\beta(s_0), -B_\beta(s_0))$ . Tale isometria ha  $\text{sign}(F) = -1$  e per la curva  $\tilde{\alpha}(s) = F(\alpha(s))$  si ha

$$\kappa_{\tilde{\alpha}}(s) = \kappa_\alpha(s) \quad \text{e} \quad \tau_{\tilde{\alpha}}(s) = -\tau_\alpha(s).$$

Inoltre vale il sistema (A), ad esempio la terza equazione segue da:

$$B_{\tilde{\alpha}}(s_0) = \text{sign}(F) F_* B_\alpha(s_0) = -F_* B_\alpha(s_0) = -(-B_\beta(s_0)) = B_\beta(s_0).$$

Poi, siccome  $\tau_\beta(s) = -\tau_\alpha(s)$  e  $\tau_{\tilde{\alpha}}(s) = -\tau_\alpha(s)$ , nelle formule (A) e (B) si deve solo sostituire  $\tau_\alpha(s)$  con  $-\tau_\alpha(s)$ . A questo punto, procedendo come nel primo caso, si ottiene che  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  sono congruenti.  $\square$

**Corollario 2.60.** *Siano  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  curve regolari parametrizzate a velocità arbitraria. Allora,  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  sono congruenti se, e solo se,*

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\beta}(t)\|, \quad \kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(t) > 0 \quad \text{e} \quad \tau_\beta(t) = \pm\tau_\alpha(t).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  siano congruenti, ovvero esiste  $F$  isometria di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $\beta(t) = F(\alpha(t))$ . Allora,

$$\dot{\beta}(t) = F_* \dot{\alpha}(t) \quad \text{e quindi} \quad \|\dot{\beta}(t)\| = \|F_* \dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\alpha}(t)\|.$$

Inoltre, applicando il Teorema 1.79, si ha

$$\ddot{\beta}(t) = F_* \ddot{\alpha}(t) \quad \text{e} \quad \ddot{\beta}(t) = F_* \ddot{\alpha}(t).$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(t) &= \frac{\|(\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta})(t)\|}{\|\dot{\beta}(t)\|^3} = \frac{\|(F_* \dot{\alpha} \wedge F_* \ddot{\alpha})(t)\|}{\|F_* \dot{\alpha}(t)\|^3} \\ &= \frac{\|\text{sign}(F) F_*(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha})(t)\|}{\|F_* \dot{\alpha}(t)\|^3} = \frac{\|(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha})(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} \\ &= \kappa_\alpha(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tau_\beta(t) &= \frac{(\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta} \cdot \ddot{\beta})(t)}{\|(\dot{\beta} \wedge \ddot{\beta})(t)\|^2} = \frac{(F_*\dot{\alpha} \wedge F_*\ddot{\alpha} \cdot F_*\ddot{\alpha})(t)}{\|(F_*\dot{\alpha} \wedge F_*\ddot{\alpha})(t)\|^2} \\ &= \text{sign}(F) \frac{(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha})(t)}{\|(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha})(t)\|^2} = \pm\tau_\alpha(t).\end{aligned}$$

Proviamo ora il viceversa. Consideriamo  $\bar{\alpha}(s) = \alpha(t(s)) = (\alpha \circ t)(s)$  e  $\bar{\beta}(s) = \beta(t(s)) = (\beta \circ t)(s)$ , con  $s$  ascissa curvilinea. Per ipotesi  $\|\dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\beta}(t)\|$ . Ciò implica che  $\alpha$  e  $\beta$  hanno la stessa funzione ascissa curvilinea  $s = s(t)$  e quindi la stessa funzione inversa  $t = t(s)$ . Allora, si ha

$$\begin{aligned}\kappa_{\bar{\alpha}}(s) &= \kappa_\alpha(t(s)) = \kappa_\beta(t(s)) = \kappa_{\bar{\beta}}(s) \\ \tau_{\bar{\alpha}}(s) &= \tau_\alpha(t(s)) = \pm\tau_\beta(t(s)) = \pm\tau_{\bar{\beta}}(s).\end{aligned}$$

Pertanto, applicando il Teorema 2.59, esiste una isometria  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $F(\bar{\alpha}(s)) = \bar{\beta}(s)$ , e quindi

$$F(\alpha(t)) = F(\alpha(t(s))) = F(\bar{\alpha}(s)) = \bar{\beta}(s) = \beta(t(s)) = \beta(t). \quad \square$$

**Osservazione 2.61.** Dalla dimostrazione del teorema fondamentale sulle curve segue che se la torsione  $\tau \neq 0$ , allora l'isometria  $F$  tale che  $F(\alpha) = \beta$  è unica. Se la torsione  $\tau = 0$ , ovvero le curve sono piane, allora in tal caso esistono esattamente due isometrie con la suddetta proprietà.

**Esercizio 2.62.** Siano  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$ ,  $t \in I$ , curve regolari parametrizzate a velocità arbitraria, con

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = \|\dot{\beta}(t)\|, \quad \kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(t) > 0 \quad \text{e} \quad \tau_\beta(t) = \pm\tau_\alpha(t).$$

Assumiamo che  $\tau_\beta(t) = +\tau_\alpha(t)$ . Siano  $A_1$  la matrice ortogonale che rappresenta il riferimento di Frenet di  $\alpha$  in  $t_0$ , e  $A_2$  la matrice ortogonale che rappresenta il riferimento di Frenet di  $\beta$  in  $t_0$ . Verificare che l'isometria  $F = A + a$  tale che  $F(\alpha(t)) = \beta(t)$  è definita da

$$A = A_2 A_1^T \quad \text{e} \quad a = \beta(t_0) - A\alpha(t_0).$$

Se si assume  $\tau_\beta(t) = -\tau_\alpha(t)$ , si può ripetere il discorso prendendo come  $A_2$  la matrice ortogonale che rappresenta  $(T_\beta(t_0), N_\beta(t_0), -B_\beta(t_0))$  che è una base ortonormale negativa.

**Osservazione 2.63.** Un'elica circolare  $\gamma(s)$  con curvatura  $\kappa_0$  e torsione  $\tau_0$  è congruente all'elica circolare

$$\gamma_{a,b}(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

dove

$$a = \frac{\kappa_0}{\kappa_0^2 + \tau_0^2} > 0 \quad \text{e} \quad b = \frac{\tau_0}{\kappa_0^2 + \tau_0^2} \neq 0.$$

Infatti,  $\gamma_{a,b}(s)$  è parametrizzata con l'ascissa curvilinea, e quindi

$$\kappa_{\gamma_{a,b}} = \frac{a}{a^2 + b^2} = \dots = \kappa_0 \quad \text{e} \quad \tau_{\gamma_{a,b}} = \frac{b}{a^2 + b^2} = \dots = \tau_0.$$

**Esercizio 2.64.** Dati  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ , si consideri la curva

$$\gamma(t) = (a \cos t, b(\sqrt{2}/2)\sin t, -b(\sqrt{2}/2)\sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinare curvatura e torsione di  $\gamma$  e riconoscere la stessa curva  $\gamma$ .

*Suggerimento:* Usando le formule della Proposizione 2.21 si trova che la torsione  $\tau(t) = 0$  (quindi la curva è piana) e la curvatura

$$\kappa(t) = ab/(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}.$$

Quindi, tenendo conto del risultato dell'Esempio 2.27 e del Corollario 2.60, possiamo concludere che  $\gamma$  è una ellisse (del piano  $y + z = 0$ ).

Il Teorema 2.59 è un teorema di unicità per curve regolari con assegnate curvatura e torsione. In effetti vale anche un teorema di esistenza che si può considerare come la seconda parte del Teorema fondamentale.

**Teorema 2.65. (Teorema fondamentale sulle curve, seconda parte)** Siano date due funzioni differenziabili  $\kappa(s), \tau(s) : I = ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , con la funzione  $\kappa(s) > 0$  per ogni  $s \in I$ . Allora, esiste una curva regolare  $\gamma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzata con l'ascissa curvilinea che ha la funzione  $\kappa(s)$  come curvatura e la funzione  $\tau(s)$  come torsione. Tale curva è unica a meno di congruenze.

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione consiste di tre parti.

- Consideriamo le formule di Frenet in forma matriciale:

$$(2.12) \quad \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix},$$

dove  $T(s), N(s), B(s)$  sono vettori riga. In forma compatta l'equazione matriciale (2.12) diventa

$$(2.13) \quad X'(s) = A(s)X(s),$$

dove

$$X(s) = \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione (2.12), equivalentemente (2.13), rappresenta un sistema di nove equazioni differenziali del primo ordine in nove incognite (le componenti della matrice  $X(s)$ ). Fissata una base ortonormale positiva

$$X_0 = (T_0, N_0, B_0) \quad (\text{quindi: } X_0^T X_0 = I \text{ e } \det X_0 = +1)$$

come condizione iniziale, dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie segue che esiste una ed una sola soluzione  $X(s) = (T(s), N(s), B(s))$  del sistema (2.13), definita per  $s \in I$ , tale che

$$X(s_0) = X_0, \quad \text{ossia } T(s_0) = T_0, \quad N(s_0) = N_0, \quad B(s_0) = B_0.$$

• Proviamo ora che la soluzione  $X(s) = (T(s), N(s), B(s))$  rappresenta una base ortonormale positiva per ogni  $s$ . Derivando  $X(s)^T X(s)$ , tenendo conto dell'equazione (2.13), si ottiene

$$\begin{aligned} (X(s)^T X(s))' &= X'^T X + X^T X' = (AX)^T X + X^T AX \\ &= X^T A^T X + X^T AX = X^T (A^T + A)X = 0 \end{aligned}$$

in quanto  $A$  è antisimmetrica. Pertanto,

$$X^T(s)X(s) = \text{cost} \quad \text{per ogni } s \in I,$$

e quindi

$$X^T(s)X(s) = X^T(s_0)X(s_0) = X_0^T X_0 = I.$$

Dunque  $X(s)$  è una matrice ortogonale, ossia  $(T(s), N(s), B(s))$  è una base ortonormale. Di conseguenza, abbiamo  $\det X(s) = \pm 1$ . D'altronde, il determinante  $\det X(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua con  $\det X(s_0) = +1$ , per cui necessariamente  $\det X(s) = +1$  per ogni  $s$ .

• Infine, proviamo che la curva

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto \gamma(s) = \int_{s_0}^s T(s) ds,$$

è regolare, è parametrizzata con l'ascissa curvilinea e ha le funzioni  $\kappa(s)$  e  $\tau(s)$  come curvatura e torsione. Intanto tale curva è regolare in quanto

$$\dot{\gamma}(s) = T(s) \neq 0 \quad \text{per ogni } s.$$

Il parametro  $s$  è ascissa curvilinea per  $\gamma$  in quanto

$$\|\dot{\gamma}(s)\| = \|T(s)\| = 1.$$

Poi  $\ddot{\gamma}(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s)$ , con  $\kappa(s) > 0$ , implica che

$$\kappa(s) \text{ è la curvatura di } \gamma \text{ e } N(s) \text{ è il versore normale.}$$

Siccome  $(T(s), N(s), B(s))$  è una base ortonormale positiva, si ha

$$T(s) \wedge N(s) \cdot B(s) = \det X(s) = +1,$$

per cui  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$  è il versore binormale. Infine, siccome  $B'(s)$  soddisfa (2.12), la torsione è la funzione

$$-B'(s) \cdot N(s) = \tau(s)N(s) \cdot N(s) = \tau(s).$$

L'unicità di  $\gamma(s)$ , a meno di congruenze, segue dal Teorema 2.59.  $\square$

**Osservazione 2.66.** Riassumendo, per le curve regolari a velocità unitaria  $\gamma(s)$  valgono le seguenti caratterizzazioni:

- $\kappa(s) = 0 \iff \gamma(s)$  è una (parte di) retta;
- $\tau(s) = 0 \iff \gamma(s)$  è una curva piana;
- $\kappa(s) = \text{cost} > 0$  e  $\tau(s) = 0 \iff \gamma(s)$  è una (parte di) circonferenza di raggio  $R = 1/\kappa$ ;
- $\kappa(s) = \text{cost} > 0$  e  $\tau(s) = \text{cost} \neq 0 \iff \gamma(s)$  è una (parte di) elica circolare;
- $\tau(s)/\kappa(s) = \text{cost} \iff \gamma(s)$  è una (parte di) elica cilindrica.

**Osservazione 2.67.** Si noti che esistono curve con curvatura  $\kappa = \text{cost}$  e torsione  $\tau$  non costante, e curve con curvatura  $\kappa$  non costante e torsione  $\tau = \text{cost}$ . Tali curve sono note col nome di *curve di Salkowski* (cf. E. Salkowski, Math. Ann., 1909, (66) 4, 517-557).

**Osservazione 2.68.** Consideriamo una dilatazione (detta anche omotetia)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (ax, ay, az), \quad a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Sia  $\gamma(t)$  una curva di Frenet con curvatura  $\kappa(t)$  e torsione  $\tau(t)$ . Allora, la curva  $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$  è di Frenet con curvatura e torsione date da

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{1}{a}\kappa(t), \quad \tilde{\tau}(t) = \frac{1}{a}\tau(t).$$

Infatti, basta osservare che

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = a\|\dot{\gamma}(t)\|, \quad \|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \wedge \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\| = a^2\|\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)\|$$

e

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) \wedge \ddot{\tilde{\gamma}}(t) \cdot \ddot{\tilde{\gamma}}(t) = a^3 \dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t).$$

In particolare, i tipi di curve classificate nella Osservazione 2.66 sono invarianti per dilatazioni. Ad esempio, se  $\gamma(t)$  è una circonferenza di raggio  $R$  (ossia, di curvatura  $\kappa = 1/R$ ), la curva  $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$  è una circonferenza di raggio  $\tilde{R} = aR$  (ossia, di curvatura  $\tilde{\kappa} = 1/aR$ ).

### Esercizi proposti

**1.** Esprimere con equazioni cartesiane il cerchio osculatore alla curva

$$\gamma(t) = (1/t, t - 1, t - (1/t)), \quad t > 0,$$

nel punto  $p_0 = \gamma(1)$ . Inoltre, dire se la curva è piana.

**2.** Determinare l'apparato di Frenet della curva

$$\gamma(t) = (4t, (4/3)t^3, (2/5)t^5), \quad t > 0.$$

Inoltre, determinare (se esiste) un campo vettoriale unitario parallelo che forma un angolo costante con la curva.

**3.** Per ogni  $\kappa_0, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa_0 > 0$ , costruire una curva regolare  $\gamma(t)$  avente curvatura costante  $\kappa_0$  e torsione costante  $\tau_0$ .

4. Verificare che la curva

$$\gamma(t) = (t + \sqrt{3} \operatorname{sen} t, 2 \cos t, \sqrt{3} t - \operatorname{sen} t), t \in \mathbb{R},$$

è un'elica circolare. Inoltre, trovare una un'elica circolare del tipo  $\gamma_{ab}(t) = (a \operatorname{sen} t, a \cos t, bt)$ ,  $a > 0, b \neq 0$ , e un'isometria  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $F(\gamma_{ab}(t)) = \gamma(t)$ .

5. Sia data la curva

$$\gamma(t) = (1 + \cos t + 2 \operatorname{sen} t, 2 - 2 \cos t - \operatorname{sen} t, 3 + 2 \cos t - 2 \operatorname{sen} t), t \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcolare la lunghezza dell'arco  $\gamma|_{[0, 2\pi]}$ .

(b) Determinare curvatura e torsione di  $\gamma(t)$  e riconoscere la stessa curva  $\gamma(t)$ .

6. Sia data la curva  $\gamma_a(t) = (3t^2, 1 + 3t, 2at^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Stabilire per quali valori del parametro  $a$  la curva  $\gamma_a$  è: (i) piana; (ii) un'elica circolare. Inoltre, posto  $a = 1$ , trovare l'apparato di Frenet per la curva  $\gamma_1$ .

7. Sia data la curva  $\sigma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . (i) Determinare il riferimento di Frenet di  $\sigma$  nel generico punto  $\sigma(t)$ . (ii) Determinare curvatura e torsione della curva  $\gamma(t) = F(\sigma(t))$ , sapendo che  $F$  è una trasformazione ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  con  $\det(F) = -1$ .

8. Siano date le curve

$$\sigma_1(t) = (2 \operatorname{sen} t, 1, 3 + 2 \cos t) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (1 + 2 \cos t, 1 + 2 \operatorname{sen} t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dopo aver verificato che  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono circonferenze di raggio uguale, trovare una isometria  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $F(\sigma_1(t)) = \sigma_2(t)$ .

9. Siano date le curve

$$\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \operatorname{sen} t - \sqrt{2} t, -\operatorname{sen} t - \sqrt{2} t) \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}(t) = \sqrt{2}(\cos t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2} t),$$

$t \in \mathbb{R}$ .

a) Determinare curvatura e torsione delle due curve  $\gamma(t)$ ,  $\tilde{\gamma}(t)$ , e dire (giustificando la risposta) se le stesse curve sono congruenti.

b) Determinare i riferimenti di Frenet di  $\gamma(t)$  e  $\tilde{\gamma}(t)$  nei punti  $\gamma(0)$  e  $\tilde{\gamma}(0)$  rispettivamente.

c) Se la risposta in a) è positiva, indicare un metodo per costruire un'isometria  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $F(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ .

10. Sia data la curva  $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, t + \operatorname{sen} t, -t + \operatorname{sen} t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

a) Determinare curvatura e torsione di  $\gamma(t)$ , e quindi riconoscere la stessa curva  $\gamma(t)$ .

b) Trovare, se esiste, un campo vettoriale  $V$  unitario e parallelo, definito lungo  $\gamma$ , e che forma un angolo costante con la stessa curva  $\gamma$ .

c) Determinare, e riconoscere, la curva  $\tilde{\gamma}(t)$  proiezione ortogonale di  $\gamma(t)$  sul piano  $\pi : y = z$ .

11. Sia data la curva  $\gamma(t) = (3t^2, 3t + t^3, 3t - t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Determinare curvatura e torsione di  $\gamma(t)$  e il riferimento di Frenet nel punto  $P_0(3, 4, 2)$ . Riconoscere la stessa curva  $\gamma(t)$ .

**12.** (continuazione di **11.**) Sia  $F$  l'isometria di  $\mathbb{R}^3$  che manda l'origine  $O(0, 0, 0)$  nel punto  $P_0(1, 1, 1)$ , e il cui differenziale  $F_*$  trasforma ordinatamente la base canonica  $e_1, e_2, e_3$  nella base ortonormale  $v_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $v_2 = (1, 0, 0)$ ,  $v_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Esplicitare l'isometria  $F$  e calcolare curvatura e torsione di  $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$  (senza esplicitare la  $\tilde{\gamma}(t)$ ).

**13.** Determinare la curva luogo dei centri di curvatura dell'elica circolare

$$\gamma(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

e individuare il tipo di curva che si ottiene.

**14.** Sia  $X(t) = (t, 1 - t^2, 1 + t^2)$  il campo vettoriale definito lungo l'elica

$$\gamma(t) = (\sin t, \cos t, 2t),$$

e sia  $F$  la trasformazione lineare di  $\mathbb{R}^3$  definita da

$$F(e_1) = -e_1, F(e_2) = (1/\sqrt{2})e_2 + (1/\sqrt{2})e_3, F(e_3) = -(1/\sqrt{2})e_2 + (1/\sqrt{2})e_3.$$

Osservato che  $F$  è una trasformazione ortogonale, determinare  $\tilde{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ ,  $\tilde{X}(t) = F_*X(t)$ , e verificare che

$$F_*X' = \tilde{X}', \quad F_*\ddot{\gamma} = \ddot{\tilde{\gamma}}, \quad X' \cdot \ddot{\gamma} = \tilde{X}' \cdot \ddot{\tilde{\gamma}}.$$

**15.** Data una curva differenziabile  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  di  $\mathbb{R}^3$ , provare che una curva  $\tilde{\gamma}(t)$  è congruente a  $\gamma(t)$  se e solo se  $\tilde{\gamma}(t)$  si può scrivere nella forma

$$\tilde{\gamma}(t) = p_0 + x_1(t)v_1 + x_2(t)v_2 + x_3(t)v_3,$$

dove  $(v_1, v_2, v_3)$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ .

**16.** Verificare che  $\gamma_1(t) = (\sqrt{2}t, t^2, 0)$  e  $\gamma_2(t) = (-t, t, t^2)$  sono parabole congruenti. Quindi, determinare le (due) isometrie che trasformano la parabola  $\gamma_1(t) = (\sqrt{2}t, t^2, 0)$  nella parabola  $\gamma_2(t) = (-t, t, t^2)$ .

**17.** Sia  $\alpha(t)$  una curva regolare del piano  $\pi : x + y - z = 0$  e parametrizzata con velocità scalare  $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1/3$ . Determinare un'elica cilindrica  $\gamma(t)$  parametrizzata a velocità unitaria tale che la curva  $\gamma_1(t)$  proiezione ortogonale di  $\gamma$  sul piano per l'origine e ortogonale all'asse di  $\gamma$  sia proprio la curva  $\alpha(t)$ .

**18.** Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet parametrizzata a velocità scalare unitaria. Verificare che la curva  $\alpha$  proiezione ortogonale di  $\gamma$  sul piano osculatore in un fissato punto  $p_0 = \gamma(s_0)$ , ha curvatura  $\kappa_\alpha(s_0) = \kappa_\gamma(s_0)$ .

**19.** Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet parametrizzata a velocità scalare unitaria e con torsione  $\tau \neq 0$ . Verificare che se la curva  $\gamma(s)$  è contenuta in una sfera  $\mathbb{S}^2$ , allora curvatura e torsione di  $\gamma$  soddisfano l'equazione

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left( \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \left( \frac{1}{\tau} \right)' \right)' = 0.$$

**20.** Determinare una curva regolare  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{R}^3$ , parametrizzata a velocità unitaria, avente curvatura  $\kappa(s) = \text{cost.} = +2$  e torsione  $\tau = \text{cost.} = -2$ .

**21.** Sia  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  una curva regolare di  $\mathbb{R}^2$  parametrizzata a velocità scalare costante. Verificare che la curva  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{R}^3$  parametrizzata da

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = s \cos \vartheta,$$

è un'elica cilindrica.

**22.** Sia  $\mathcal{C}$  una curva algebrica piana di equazione  $f(x, y) = 0$  e sia  $p_0(x_0, y_0)$  un punto semplice di  $\mathcal{C}$ , ovvero  $(f'_x = f_x(x_0, y_0), f'_y = f_y(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$ . Si assuma, ad esempio, che sia  $f'_y \neq 0$ . Si determini:

a) una formula che esprima la curvatura di  $\mathcal{C}$  in  $p_0$  in termini di derivate parziali di  $f$  in  $p_0$ ;

b) la curvatura dell'ellisse  $4x^2 + 9y^2 = 1$  nel punto  $p_0(0, 1/3)$  applicando a) e la formula ottenuta nell'Esempio 2.27.

**23.** Si verifichi che se  $\alpha(t)$  è un'elica cilindrica ed  $F$  un'isometria di  $\mathbb{R}^3$ , allora anche  $\beta(t) = F(\alpha(t))$  è un'elica cilindrica. Inoltre, si verifichi che se  $V(t)$  è asse per  $\alpha(t)$  con pendenza  $\vartheta$ , allora  $W(t) = F_*V(t)$  è asse per  $\beta(t)$  con pendenza  $\tilde{\vartheta} = \vartheta$ .

**24.** Sia  $\gamma(s)$ ,  $s$  ascissa curvilinea, un'elica circolare con curvatura  $\kappa > 0$  e torsione  $\tau \neq 0$ . Si verifichi che la curva  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + (1/\kappa)N(s)$ , dove  $N(s)$  è il campo normale principale di  $\gamma(s)$ , è un'elica circolare con curvatura  $\tilde{\kappa} = \kappa$  e torsione  $\tilde{\tau} = \kappa^2/\tau$ . Inoltre, esprimere le costanti  $\tilde{a}, \tilde{b}$  dell'elica  $\tilde{\gamma}$  in funzione delle costanti  $a, b$  dell'elica  $\gamma$ .

**25.** Sia  $\gamma(t)$  una curva regolare parametrizzata con velocità scalare costante. Si verifichi che:  $\kappa(t) = \|\ddot{\gamma}(t)\|/\|\dot{\gamma}(t)\|^2$ .

## 2.8. Curve magnetiche

Scopo di questa sezione è dare una breve introduzione allo studio delle curve magnetiche di  $\mathbb{R}^3$  associate a un campo magnetico, curve che sono in stretta relazione con le eliche cilindriche. Un ruolo fondamentale per la determinazione delle curve magnetiche è svolto dalle formule di Frenet. Per una più approfondita e motivata presentazione dell'argomento, anche dal punto di vista della Fisica, si possono vedere, ad esempio, gli articoli [2],[3], [4], [6], [10] i quali contengono anche i principali risultati esposti in questa e nella successiva sezione.

Iniziamo introducendo velocemente i concetti di *r-forma* (differenziale) e di *differenziale esterno* su  $\mathbb{R}^n$ . Una *r-forma* (differenziale)  $\omega$  è una applicazione  $r$ -lineare antisimmetrica, ovvero

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)}_{r\text{-volte}} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$$

è  $r$ -lineare rispetto alla somma e al prodotto per funzioni differenziabili, e inoltre

$$\alpha(X_1, \dots, X_i \dots X_j \dots, X_r) = -\alpha(X_1, \dots, X_j \dots X_i \dots, X_r)$$

per ogni  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  e per ogni  $i \neq j$ . In particolare, una  $r$ -forma (differenziale) su  $\mathbb{R}^n$ , con  $r > n$ , è necessariamente nulla. L'insieme  $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$  di tutte le  $r$ -forme differenziali ha una struttura naturale di  $\mathcal{F}$ -modulo rispetto alle operazioni di somma  $\alpha_1 + \alpha_2$  di  $r$ -forme, di prodotto  $\lambda\omega$  per un numero reale  $\lambda$ , e di prodotto  $f\omega$  per un elemento  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Le componenti di una  $r$ -forma  $\alpha \in \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ , rispetto alla base canonica  $(E_i)$ , sono  $\binom{n}{r}$  e sono definite da

$$\alpha_{i_1 \dots i_r} = \alpha(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}).$$

In particolare, una  $n$ -forma  $\omega$  ha una sola componente

$$\omega_{1 \dots n} = \omega(E_1, \dots, E_n).$$

Notiamo che  $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{X}^*(M)$ , e quindi il differenziale  $df \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  (cf. Osservazione 1.51). In particolare, il differenziale sulle funzioni è l'operatore

$$d : \Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto df.$$

Il differenziale sulle funzioni si estende a un operatore sulle  $r$ -forme, detto *differenziale esterno*,

$$d : \Lambda^r(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{r+1}(\mathbb{R}^n),$$

definito per ogni  $\alpha \in \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$  dalla formula

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq r+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}). \end{aligned}$$

In particolare, se  $\beta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$  e  $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ , abbiamo

$$(d\beta)(X, Y) = X\beta(Y) - Y\beta(X) - \beta([X, Y]),$$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} (d\beta)(X, Y, Z) &= X\beta(Y, Z) - \beta([X, Y], Z) + Y\beta(Z, X) - \beta([Y, Z], X) \\ &+ Z\beta(X, Y) - \beta([Z, X], Y). \end{aligned}$$

Una delle proprietà del differenziale esterno è che  $d^2 := d \circ d = 0$ . Una  $r$ -forma (differenziale)  $\alpha$  si dice *chiusa* se il suo differenziale esterno  $d\alpha = 0$ . In particolare, ogni  $n$ -forma  $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$  è chiusa.

Ora consideriamo il caso di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $F$  una 2-forma differenziale su  $\mathbb{R}^3$ . Le componenti di  $F$  rispetto alla base canonica  $(E_1, E_2, E_3)$  sono le funzioni

$$\begin{aligned} F_{12} &= F(E_1, E_2) = -F(E_2, E_1), & F_{13} &= F(E_1, E_3) = -F(E_3, E_1), \\ F_{23} &= F(E_2, E_3) = -F(E_3, E_2). \end{aligned}$$

Applicando la (2.14), e tenendo conto che  $[E_i, E_j] = 0$ , la componente del differenziale  $dF$ , che è una 3-forma, è data

$$(dF)(E_1, E_2, E_3) = E_1(F_{23}) - E_2(F_{13}) + E_3(F_{12}).$$

Quindi, la 2-forma  $F$  è chiusa se e solo se

$$(2.15) \quad E_1(F_{23}) - E_2(F_{13}) + E_3(F_{12}) = 0.$$

Dato un campo vettoriale  $V = (V^1, V^2, V^3) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ , ricordiamo che la sua divergenza è definita dalla (1.6), e quindi

$$\operatorname{div}V = E_1(V^1) + E_2(V^2) + E_3(V^3).$$

Pertanto,  $V$  ha divergenza nulla se e solo se

$$(2.16) \quad E_1(V^1) + E_2(V^2) + E_3(V^3) = 0.$$

A un fissato campo vettoriale  $V = (V^1, V^2, V^3) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$  si può associare la 2-forma  $F \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  definita da

$$F(X, Y) := V \wedge X \cdot Y = \operatorname{vol}(V, X, Y).$$

Dalla definizione di  $F$  si ha

$$F_{12} = V^3, \quad F_{13} = -V^2, \quad F_{23} = V^1.$$

Se  $V$  ha  $\operatorname{div}V = 0$ , le componenti  $F_{ij}$  soddisfano la (2.15) e quindi  $F$  è una 2-forma chiusa. Viceversa, data una 2-forma chiusa  $F$ , il campo vettoriale  $V$  di componenti

$$V^1 = F_{23}, \quad V^2 = -F_{13}, \quad V^3 = F_{12},$$

soddisfa la (2.16) e quindi ha divergenza nulla. Pertanto, vale la seguente

**Proposizione 2.69.** *Su  $\mathbb{R}^3$  assegnare un campo vettoriale  $V$  con divergenza nulla è equivalente ad assegnare una 2-forma chiusa  $F$ .*

**Definizione 2.70.** *Un campo vettoriale differenziabile  $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$  si dice che è un **campo magnetico** se la sua divergenza  $\operatorname{div}V = 0$ . Equivalentemente, un campo magnetico è definito da una 2-forma chiusa  $F \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  (ossia,  $dF = 0$ ).*

A un campo magnetico  $V$ , equivalentemente a una 2-forma chiusa  $F$ , si può associare l'endomorfismo antisimmetrico

$$\Phi(X) := V \wedge X$$

detto **forza di Lorentz**, equivalentemente  $\Phi$  è definito da

$$\Phi(X) \cdot Y = F(X, Y) \quad (= V \wedge X \cdot Y = \operatorname{vol}(V, X, Y)).$$

Si noti che  $\Phi$  è metricamente equivalente alla 2-forma  $F$ .

**Definizione 2.71.** *Una curva differenziabile regolare  $\gamma(t)$  si dice **curva magnetica**, associata a un campo magnetico  $V$ , se soddisfa l'**equazione di Lorentz***

$$(2.17) \quad \ddot{\gamma}(t) = V(t) \wedge \dot{\gamma}(t).$$

Quindi, un campo magnetico  $V$  genera un flusso magnetico le cui traiettorie sono curve magnetiche. Usando l'endomorfismo antisimmetrico associato a una fissata 2-forma chiusa  $F$ , l'equazione di Lorentz (2.17) si può esprimere nella forma

$$\ddot{\gamma}(t) = \Phi(\dot{\gamma}(t)).$$

Con questo approccio l'equazione di Lorentz si può considerare in una situazione geometrica più generale in cui lo spazio ambiente è una varietà riemanniana (cf., ad esempio, [2], [4], [6], [10]). In particolare, su una varietà riemanniana orientabile 3-dimensionale con una fissata forma di volume  $\Omega$ , c'è una corrispondenza biunivoca (così come osservato per  $\mathbb{R}^3$ ) tra campi vettoriali con divergenza nulla e 2-forme chiuse. Inoltre, per una varietà riemanniana orientabile 3-dimensionale con una fissata forma di volume  $\Omega$ , è possibile definire un prodotto vettoriale.

La seguente osservazione giustifica, dal punto di vista della Fisica, la definizione data di curva magnetica.

**Osservazione 2.72.** Il classico problema di Landau-Hall studia il moto di una particella carica in presenza di un campo magnetico statico  $W$ . Una particella di carica  $e$ , massa  $m$  e velocità  $v(t)$ , in presenza di un campo magnetico  $W$ , assumendo il campo elettrico nullo, soddisfa la legge di Lorentz

$$(2.18) \quad P' = \frac{e}{c} v \wedge W,$$

dove  $c$  denota la velocità della luce,  $P'(t)$  è la forza magnetica sulla particella,  $P(t) = (\varepsilon/c^2)v(t)$  indica il momento della particella, ed

$$\varepsilon = mc^2(1 - (\|v\|^2/c^2))^{-1/2}$$

è la sua energia (cf. [2]). Dalla (2.18) segue che

$$(1/2)(P \cdot P)' = P' \cdot P = \frac{e}{c} v \wedge W \cdot P = \frac{e}{c} v \wedge W \cdot (\varepsilon/c^2)v = 0,$$

da cui si ha che  $\|P\|$  è costante, e quindi anche  $\varepsilon$  e  $\|v\|$  sono costanti. In particolare, siccome  $P(t) = (\varepsilon/c^2)v(t)$  con  $\varepsilon$  costante, l'equazione di Lorentz (2.18) diventa

$$(2.19) \quad v' = qW \wedge v,$$

dove  $q := -(ec)/\varepsilon$  è una costante. Se il moto della particella è descritto dalla curva  $\gamma(t)$ , posto  $V(t) = qW(\gamma(t))$ , l'equazione (2.19) si può scrivere nella forma

$$\ddot{\gamma}(t) = V(t) \wedge \dot{\gamma}(t).$$

Dalla (2.17) segue che il concetto di curva magnetica generalizza quello di retta, o più in generale quello di curva geodetica (nel caso delle varietà riemanniane), traiettoria descritta da una particella in assenza di campo magnetico. Facciamo ora alcune considerazioni su analogie e differenze tra rette (pensate come curve che soddisfano  $\ddot{\gamma} = 0$ ) e curve magnetiche.

• La forza di Lorentz è un endomorfismo antisimmetrico, e ciò implica che una curva magnetica ha (come per le rette) velocità scalare costante. Infatti,  $\Phi$  antisimmetrico implica  $\Phi(\dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$ , ovvero  $\ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$ , e quindi

$$(\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t))' = 2\ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$$

implica che  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  è una costante. Curve magnetiche parametrizzate a velocità unitaria si dicono **curve magnetiche normali**.

• Fissato  $p \in \mathbb{R}^3$  e  $v_p \in T_p\mathbb{R}^3$ , la retta  $\gamma(t) = tv + p$  è l'unica retta che soddisfa le condizioni  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v_p$ . Anche per le curve magnetiche vale un analogo risultato di esistenza e unicità. Infatti, posto  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  e  $V(t) = (V^1(t), V^2(t), V^3(t))$ , l'equazione di Lorentz (2.17) corrisponde al sistema di equazioni differenziali

$$(2.20) \quad x'' = z'V^2 - y'V^3, \quad y'' = x'V^3 - z'V^1, \quad z'' = y'V^1 - x'V^2.$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali, si ha l'esistenza e l'unicità della curva magnetica con le fissate condizioni iniziali  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v_p$ .

• A differenza delle rette, assegnato un campo magnetico  $V$ , una curva magnetica  $\gamma(t)$  associata a  $V$  non si può riscalarare, essa dipende dalla velocità scalare  $\|\dot{\gamma}(t)\|$ , e quindi dalla sua energia  $E(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$ . Infatti, posto  $t = cs$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ , e  $\beta(s) = \gamma(t(s)) = \gamma(cs)$ , si ha  $\dot{\beta}(s) = c\dot{\gamma}(t) = c\dot{\gamma}(t(s))$  e

$$\ddot{\beta}(s) = c^2\ddot{\gamma}(t) = c^2\Phi(\dot{\gamma}(t)) = c\Phi(\dot{\beta}(s)).$$

In questa Sezione studiamo curve magnetiche normali dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet (quindi parametrizzata a velocità unitaria e con curvatura  $\kappa(s) > 0$ ) e sia  $V$  un campo magnetico. Indichiamo con  $\{T, N, B\}$  il riferimento di Frenet lungo  $\gamma$ . Il seguente teorema ci dice quando una curva di Frenet appartiene al flusso magnetico di  $V$ .

**Teorema 2.73.** *Una curva di Frenet  $\gamma(s)$  è una curva magnetica associata al campo magnetico  $V$  se, e solo se, il campo magnetico  $V$  si può esprimere lungo  $\gamma$  nel modo seguente*

$$(2.21) \quad V(s) = \omega(s)T(s) + \kappa(s)B(s), \quad \forall s \in I,$$

dove la funzione  $\omega(s) := V(s) \cdot \dot{\gamma}(s)$  è nota in letteratura col nome di **quasi-slope** (cf.[4]). Quindi,  $V(s)$  si trova nel piano rettificante di ogni curva magnetica  $\gamma(s)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $V$  un campo magnetico e sia  $\gamma(s)$  una curva magnetica associata a  $V$ . Posto  $V(s) = V(\gamma(s))$ , si può scrivere

$$V(s) = \omega(s)T(s) + (V(s) \cdot N(s))N(s) + (V(s) \cdot B(s))B(s).$$

Dall'equazione di Lorentz  $T'(s) = V(s) \wedge T(s)$ , usando la prima formula di Frenet, si ottiene

$$\kappa(s)N(s) = V(s) \wedge T(s),$$

e quindi

$$0 = V(s) \wedge T(s) \cdot V(s) = \kappa(s)N(s) \cdot V(s), \quad \kappa(s) > 0,$$

implica  $N(s) \cdot V(s) = 0$ . Inoltre,

$$\kappa(s)N(s) \cdot N(s) = V(s) \wedge T(s) \cdot N(s) = T(s) \wedge N(s) \cdot V(s) = B(s) \cdot V(s).$$

Pertanto, vale la (2.21).

Viceversa, supponiamo che il campo magnetico  $V$  soddisfi la (2.21). Allora, usando la prima formula di Frenet, si ottiene

$$\begin{aligned} V(s) \wedge \dot{\gamma}(s) &= V(s) \wedge T(s) = (\omega(s)T(s) + \kappa(s)B(s)) \wedge T(s) \\ &= \kappa(s)B(s) \wedge T(s) = \kappa(s)N(s) \\ &= T'(s) = \ddot{\gamma}(s), \end{aligned}$$

ossia l'equazione di Lorentz. Pertanto,  $\gamma(s)$  è una curva magnetica (normale).  $\square$

**Esercizio 2.74.** Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet magnetica rispetto a  $V$ , e sia  $\Phi$  la forza di Lorentz definita da  $V$ . Si verifichi che il riferimento di Frenet  $(T, N, B)$  soddisfa

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \kappa(s)N(s) \\ \Phi(N) &= -\kappa(s)T(s) + \omega(s)B(s) \\ \Phi(B) &= -\omega(s)N(s). \end{aligned}$$

*Suggerimento:* usare la (2.21), la prima formula di Frenet e tenere conto che  $T \wedge N = B$ ,  $B \wedge N = -T$ ,  $T \wedge B = -N$ .

**Corollario 2.75.** *Una curva di Frenet  $\gamma(s)$  è un'elica circolare se, e solo se,  $\gamma(s)$  è una curva magnetica rispetto a un campo vettoriale  $V$  parallelo (ovvero, le componenti di  $V$  sono costanti).*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma(s)$  un'elica circolare di asse  $V_0$ . Sia  $\vartheta$  la pendenza di  $\gamma(s)$  e sia  $\kappa_1$  la curvatura della circonferenza  $\gamma_1(s)$  proiezione ortogonale di  $\gamma(s)$  su un piano ortogonale a  $V_0$ . Per il Teorema 2.44, l'elica circolare  $\gamma$  ha curvatura  $\kappa = \kappa_1 \sin^2 \vartheta$  e torsione  $\tau = \kappa_1 \sin \vartheta \cos \vartheta$ . Allora,  $V = \kappa_1 \sin \vartheta V_0$  ha componenti costanti, e applicando la Proposizione 2.41 si ottiene

$$\begin{aligned} V(s) &= \kappa_1 \sin \vartheta V_0(s) = \kappa_1 \sin \vartheta (\cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s)), \\ &= (\kappa_1 \sin \vartheta \cos \vartheta) T(s) + \kappa B(s) \\ &= \tau T(s) + \kappa B(s). \end{aligned}$$

Quindi  $V(s)$  è il campo vettoriale di Darboux  $D(s)$  (cf. Sezione 2.6). Dal Teorema 2.73 segue che  $\gamma(s)$  è una curva magnetica rispetto a  $V$ . Viceversa, se  $\gamma(s)$  è una curva (di Frenet) magnetica rispetto a un campo vettoriale  $V$  parallelo, allora come conseguenza del Teorema 2.59, e delle formule di Frenet, si ha che  $\gamma(s)$  è un'elica circolare. Infatti, derivando la (2.21) si ha

$$0 = V' = \omega' T + \kappa' B + \omega T' + \kappa B' = \omega' T + \kappa' B + (\omega \kappa - \kappa \tau) N$$

e quindi  $\kappa' = \omega' = 0$  e  $\omega \kappa - \kappa \tau = 0$ . Pertanto  $\kappa$  e  $\tau$  sono delle costanti, e quindi  $\gamma(s)$  è un'elica circolare.  $\square$

Più in generale, per le eliche cilindriche abbiamo il seguente risultato.

**Proposizione 2.76.** *Una curva di Lancret  $\gamma(s)$  ha la proprietà di essere una curva magnetica rispetto a un campo magnetico  $V$  parallelo all'asse  $V_0$  di  $\gamma$  mediante un potenziale che dipende dalla curvatura  $\kappa_1(s)$  della curva  $\gamma_1(s)$  proiezione ortogonale di  $\gamma$  su un piano ortogonale all'asse:*

$$V(s) = \kappa_1(s)\text{sen } \vartheta V_0 = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s).$$

Quindi,  $V(s)$  coincide con il campo vettoriale di Darboux  $D(s)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma(s)$  un'elica cilindrica con asse  $V_0$ . Senza perdere in generalità, possiamo assumere  $V_0 = E_3$  (basta applicare una opportuna isometria). Consideriamo il campo vettoriale

$$V = f(x, y)V_0 = f(x, y)E_3 = (0, 0, f(x, y)),$$

dove  $f(x, y)$  è una funzione differenziabile in  $x, y$ . Il campo vettoriale  $V$  è un campo magnetico in quanto

$$\text{div}V = \sum_{i=1}^3 E_i(V^i) = \partial_z f = 0.$$

Siccome  $\gamma(s)$  è un'elica cilindrica vale la (2.8), ossia

$$V_0(s) = \cos \vartheta T(s) + \text{sen } \vartheta B(s).$$

Allora,  $V(s) = f(x(s), y(s))V_0 = f(\gamma_1(s))V_0$  dove  $\gamma_1(s) = (x(s), y(s), 0)$  è la proiezione ortogonale di  $\gamma(s)$  sul piano  $z = 0$  ortogonale a  $E_3 = V_0$ . Quindi,

$$V(s) = f(\gamma_1(s))\cos \vartheta T(s) + f(\gamma_1(s))\text{sen } \vartheta B(s).$$

Applicando il Teorema 2.73, la curva  $\gamma(s)$  è una curva magnetica per  $V$  se e solo se  $f(\gamma_1(s))\text{sen } \vartheta = \kappa(s)$ . D'altronde, per il Teorema 2.44,  $(\text{sen } \vartheta)\kappa_1(s) = \kappa(s)$ . Pertanto,  $\gamma(s)$  è una curva magnetica per  $V$  se e solo se è soddisfatta la condizione

$$f(\gamma_1(s)) = (\text{sen } \vartheta)\kappa_1(s).$$

Per cui, prendendo  $f(x, y)$  in modo tale che sia  $f(\gamma_1(s)) = (\text{sen } \vartheta)\kappa_1(s)$ , si ha che  $\gamma(s)$  è una curva magnetica. Ad esempio, si può prendere una funzione  $f(x, y)$  in modo tale che  $z = f(x, y)$  definisca una superficie regolare contenente la curva regolare  $(x(s), y(s), \text{sen } \vartheta\kappa_1(s))$ . In tal caso,  $V(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$  e quindi  $V(s)$  è il campo vettoriale di Darboux  $D(s)$ .  $\square$

### 2.9. Curve magnetiche di Killing

I campi vettoriali di Killing sono i piú importanti campi vettoriali in geometria euclidea (e piú in generale in geometria riemanniana). Essi generano gruppi a un parametro di isometrie, e giocano un ruolo fondamentale in diversi contesti geometrici.

Nel caso dello spazio Euclideo, un campo vettoriale  $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$  è di **Killing** se soddisfa l'equazione di Killing

$$(\bar{\nabla}_X V) \cdot Y + (\bar{\nabla}_Y V) \cdot X = 0$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ , dove  $\bar{\nabla}$  è la derivata covariante euclidea definita dalla (1.4). Equivalentemente,  $V$  è di Killing se e solo se

$$(2.22) \quad (\bar{\nabla}_{E_i} V) \cdot E_j + (\bar{\nabla}_{E_j} V) \cdot E_i = 0, \quad \text{ossia } E_i(V^j) + E_j(V^i) = 0,$$

per ogni  $i, j = 1, 2, 3$ . Si noti che un campo vettoriale parallelo (cf. Esercizio 1.43) è di Killing. Inoltre, ogni campo vettoriale di Killing ha divergenza nulla e quindi definisce un campo magnetico.

Sia quindi  $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$  di Killing e sia  $\gamma(s)$  è una curva magnetica associata a  $V$ . In questo caso, la funzione  $\omega(s) = T(s) \cdot V(s)$  della formula (2.21) è costante. Infatti, siccome  $V$  è di Killing si ha  $(\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(s)} V) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0$ , cioè  $V'(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0$ . Inoltre, dall'equazione di Lorentz segue

$$V(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) = V(s) \cdot \Phi(\dot{\gamma}(s)) = V \cdot (V \wedge \dot{\gamma}) = 0,$$

e quindi

$$\omega'(s) = V'(s) \cdot \dot{\gamma}(s) + V(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) = 0.$$

I campi vettoriali di Killing su  $\mathbb{R}^3$  sono campi vettoriali del tipo (cf., ad esempio, [21] p.270)

$$X = V + v, \quad \text{ossia } X_p = V_p + v_p,$$

dove  $v$  varia in  $\mathbb{R}^3$  e  $V$  è del tipo

$$V = \left( \sum_{j=1}^3 a_{1j} x_j \right) E_1 + \left( \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j \right) E_2 + \left( \sum_{j=1}^3 a_{3j} x_j \right) E_3$$

e  $A = (a_{ij})$  è una matrice antisimmetrica di ordine 3. Siccome  $\mathbb{R}^3$  e lo spazio delle matrici antisimmetriche hanno entrambi dimensione 3, lo spazio  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$  dei campi vettoriali di Killing su  $\mathbb{R}^3$  avrà dimensione 6. Chiaramente una base per  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$  è data da

$$E_1 = \partial_x, \quad E_2 = \partial_y, \quad E_3 = \partial_z,$$

$$V_1 = z\partial_y - y\partial_z, \quad V_2 = z\partial_x - x\partial_z, \quad V_3 = -y\partial_x + x\partial_y,$$

dove  $V_1, V_2, V_3$  sono rappresentati rispettivamente dalle matrici antisimmetriche

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo a un parametro di isometrie generato da  $E_1 = \partial_x$  è costituito da trasformazioni di  $\mathbb{R}^3$  del tipo  $\Phi_t : p = (x, y, z) \mapsto (x + t, y, z)$  (traslazioni parallele all'asse  $x$ ). Il gruppo a un parametro di isometrie generato da  $V_1 = z\partial_y - y\partial_z$ , è costituito da trasformazioni di  $\mathbb{R}^3$  del tipo  $\Phi_t : p = (x, y, z) \mapsto (x, y \cos t + z \sin t, -y \sin t + z \cos t)$  (rotazioni intorno all'asse  $x$ ).

**Esempio 2.77.** Consideriamo il campo vettoriale di Killing

$$V = aE_3 = a\partial_z, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

La forza di Lorentz determinata da  $V$  soddisfa

$$\Phi E_1 = aE_3 \wedge E_1 = aE_2, \quad \Phi E_2 = aE_3 \wedge E_2 = -aE_1, \quad \Phi E_3 = aE_3 \wedge E_3 = 0.$$

Quindi, per  $X = (X^1, X^2, X^3)$  si ha  $\Phi X = (-aX^2, aX^1, 0)$ . In particolare, per una curva regolare  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$  a velocità unitaria, si ha

$$\Phi \dot{\gamma}(s) = (-ay'(s), ax'(s), 0).$$

Pertanto, in questo caso il sistema di equazioni differenziali (2.20), che traduce l'equazione di Lorentz  $\ddot{\gamma}(s) = \Phi \dot{\gamma}(s)$ , diventa

$$(2.23) \quad x''(s) = -ay'(s), \quad y''(s) = ax'(s), \quad z''(s) = 0.$$

Risolvendo il sistema (2.23), con le condizioni iniziali date da

$$\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0) \text{ e } \dot{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0),$$

si trova

$$\begin{cases} x(s) &= (u_0/a)\text{sen}(as) + (v_0/a)\text{cos}(as) + x_0 - (v_0/a), \\ y(s) &= -(u_0/a)\text{cos}(as) + (v_0/a)\text{sen}(as) + y_0 + (u_0/a), \\ z(s) &= w_0s + z_0. \end{cases}$$

Siccome,  $\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 1$ , dalla (2.23) si ha

$$\|\ddot{\gamma}(s)\|^2 = a^2((y')^2 + (x')^2)(s) = a^2(\|\dot{\gamma}(s)\|^2 - z'^2(s)) = a^2(1 - w_0^2),$$

e quindi la curvatura

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = |a|\sqrt{1 - w_0^2} \text{ (costante)}.$$

Ora assumiamo che  $w_0 \neq \pm 1$ , ossia la curvatura  $\kappa > 0$ . In questo caso la curva è di Frenet, e siccome

$$\dot{\gamma}(s) = (x'(s), y'(s), z'(s) = w_0) \text{ e } \ddot{\gamma}(s) = a(-y'(s), x'(s), 0),$$

si ha

$$\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) = a(-w_0x', -w_0y', 1 - w_0^2) \text{ e } \|\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s)\|^2 = a^2(1 - w_0^2) = \kappa^2.$$

Quindi,

$$B(s) = (1/\kappa)\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) = (a/\kappa)(-w_0x', -w_0y', 1 - w_0^2)$$

e

$$\begin{aligned} B'(s) &= (a/\kappa)(-w_0x'', -w_0y'', 0) = -(aw_0/\kappa)(x'', y'', 0) \\ &= -(aw_0/\kappa)\ddot{\gamma}(s) = -aw_0N(s), \end{aligned}$$

da cui segue che la torsione è data da

$$\tau(s) = aw_0 \text{ (costante)}.$$

Pertanto, si hanno i seguenti casi determinati dalla condizione iniziale  $z'(0) = w_0$ .

- $w_0 = \pm 1$ , ossia la curvatura è identicamente nulla. In questo caso, la curva magnetica è una (parte di) retta.
- $w_0 = 0$ . In questo caso la curva magnetica è piana con curvatura costante  $\kappa(s) = |a| > 0$ , e quindi  $\gamma(s)$  è una (parte di) circonferenza.
- $w_0 \neq 0, \pm 1$ . In questo caso curvatura e torsione sono costanti non nulle, per cui la curva magnetica è un'elica circolare di asse  $E_3$ .

Analogo discorso vale prendendo  $V = aE_1$  e  $V = aE_2$ . Per esempi di curve magnetiche relative ad altri campi vettoriali di Killing su  $\mathbb{R}^3$  si può vedere [10].

**Esempio 2.78.** Consideriamo un campo vettoriale  $V$  parallelo a una fissata direzione  $V_0$  (campo vettoriale costante). Senza perdere in generalità, possiamo assumere  $V_0 = E_3$  e quindi  $V = fE_3 = f\partial_z$ , con  $f(x, y, z)$  funzione differenziabile. Dalla (2.22) segue che il campo vettoriale  $V$  è di Killing se e solo se

$$\begin{aligned} E_1(V^3) &= -E_3(V^1) = 0, \quad i.e., \quad \partial_x f = 0; \\ E_2(V^3) &= -E_3(V^2) = 0, \quad i.e., \quad \partial_y f = 0; \\ E_3(V^3) &= 0, \quad i.e., \quad \partial_z f = 0. \end{aligned}$$

Dunque,  $V$  è di Killing se e solo se la funzione  $f$  è costante. Dalla definizione di divergenza segue che il campo vettoriale  $V$  è un campo magnetico se e solo se  $\partial_z f = 0$ . Consideriamo quindi il campo vettoriale magnetico  $V = f(x, y)\partial_z$ ,  $f(x, y) \neq 0$  per ogni  $(x, y)$ . Procedendo come nell'esempio precedente, la forza di Lorentz determinata da  $V$  soddisfa

$$\Phi E_1 = fE_3 \wedge E_1 = fE_2, \quad \Phi E_2 = fE_3 \wedge E_2 = -fE_1, \quad \Phi E_3 = fE_3 \wedge E_3 = 0.$$

Quindi, per una curva regolare  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$  a velocità unitaria si ha

$$\Phi \dot{\gamma}(s) = f(s)(-y'(s), x'(s), 0),$$

dove si è posto  $f(s) = f(x(s), y(s))$ . Pertanto, l'equazione di Lorentz

$$\ddot{\gamma}(s) = \Phi \dot{\gamma}(s)$$

è equivalente al sistema di equazioni differenziali

$$(2.24) \quad x''(s) = -f(s)y'(s), \quad y''(s) = f(s)x'(s), \quad z''(s) = 0.$$

Sia  $\gamma(s)$  la curva magnetica definita dalle condizioni iniziali  $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$  e  $\dot{\gamma}(0) = (u_0, v_0, w_0)$ . Procedendo come nel caso dell'Esempio precedente, dalla (2.24) si trova

$$\|\ddot{\gamma}(s)\|^2 = f(s)^2 ((y')^2 + (x')^2)(s) = f(s)^2(1 - w_0^2),$$

e quindi la curvatura

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = |f(s)|\sqrt{1 - w_0^2}.$$

La funzione

$$\omega(s) = T(s) \cdot V(s) = \dot{\gamma}(s) \cdot f(s)E_3 = f(s)z'(s) = f(s)w_0.$$

Inoltre,

$$\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) = f(s)(-w_0x', -w_0y', 1 - w_0^2)$$

e

$$\|\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s)\|^2 = f^2(s)(1 - w_0^2) = \kappa^2(s).$$

Assumiamo che  $w_0 \neq \pm 1$ , ossia la curvatura  $\kappa > 0$ . In questo caso la curva è di Frenet e

$$B(s) = (1/\kappa)\dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) = (f(s)/\kappa)(-w_0x', -w_0y', 1 - w_0^2).$$

Siccome  $f(s)/\kappa(s) = \pm 1/\sqrt{(1 - w_0^2)}$  è costante,

$$\begin{aligned} B'(s) &= (f/\kappa)(-w_0x'', -w_0y'', 0) = -(fw_0/\kappa)(x'', y'', 0) \\ &= -(fw_0/\kappa)\ddot{\gamma}(s) = -fw_0N(s) \end{aligned}$$

da cui segue che la torsione è data da

$$\tau(s) = f(s)w_0 = \omega(s).$$

Pertanto, abbiamo

$$V(s) = \omega(s)T(s) + \kappa(s)B(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

e  $V(s)$  è il campo vettoriale di Darboux.

Si hanno quindi i seguenti casi:

- $w_0 = \pm 1$ . In questo caso la curvatura è identicamente nulla per cui la curva magnetica è una (parte di) retta indipendentemente dalla funzione  $f$ .
- $w_0 = 0$ . In questo caso la curva magnetica è una curva piana con curvatura  $\kappa(s) = |f(s)|$  (intensità del campo magnetico).
- $w_0 \neq \pm 1, 0$ . In questo caso, curvatura e torsione sono funzioni non nulle

e

$$\frac{\tau}{\kappa} = \pm \frac{w_0}{\sqrt{(1 - w_0^2)}} = \text{cost} \neq 0.$$

Pertanto, la curva magnetica è un'elica cilindrica. In particolare, la curva magnetica è un'elica circolare se la curvatura (equivalentemente, la torsione) è costante. In questo caso, la curva magnetica è in generale un'elica cilindrica, e dalle espressioni di  $\tau$  e  $\kappa$  segue che: *il campo magnetico  $V = f(x, y)E_3$  è di Killing se e solo se il flusso magnetico è costituito da eliche circolari di curvatura  $\kappa_0$  e torsione  $\tau_0$* . Infatti, se  $V$  è di Killing allora  $V = aE_3$  e per quanto visto nell'esempio precedente la curva magnetica è un'elica circolare. Viceversa, se il flusso magnetico è costituito da eliche circolari di curvatura  $\kappa_0$  e torsione  $\tau_0$ , dalle formule di prima segue che la funzione  $f(s) = \tau/w_0$  è costante lungo ogni traiettoria del flusso magnetico, per cui  $f$  è costante e  $V$  è di Killing.

## CAPITOLO 3

### Superfici regolari di $\mathbb{R}^3$

In questo Capitolo iniziamo lo studio delle superfici regolari introducendo gli strumenti e i concetti di base, tra questi spicca sicuramente per importanza la prima forma fondamentale che gioca un ruolo fondamentale per la geometria intrinseca delle superfici.

#### 3.1. Definizione, osservazioni ed esempi

Al fine di studiare le superfici di  $\mathbb{R}^3$  dal punto di vista della geometria differenziale introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 3.1.** *Sia  $M$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  che assumiamo connesso.  $M$  si dice **superficie regolare** di  $\mathbb{R}^3$  se per ogni  $p_0 \in M$  esiste un aperto (connesso)  $D$  di  $\mathbb{R}^2$  e un'applicazione*

$$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni.

- (a)  $\varphi$  è differenziabile, cioè  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  sono differenziabili.
- (b)  $\varphi(D)$  è un aperto di  $M$  (nella topologia indotta), cioè  $\varphi(D) = M \cap V$  dove  $V$  è un aperto di  $\mathbb{R}^3$  contenente  $p_0$ . Inoltre,  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  è un omeomorfismo. Siccome la condizione a) implica che  $\varphi$  è continua, in questo caso  $\varphi$  omeomorfismo significa che  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  è bigettiva e  $\varphi^{-1} : \varphi(D) \rightarrow D$  è continua, ossia  $\varphi^{-1}$  è la restrizione a  $\varphi(D)$  di un'applicazione continua  $W \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dove  $W$  è un aperto di  $\mathbb{R}^3$  che contiene  $\varphi(D)$ .
- (c) Per ogni  $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  la matrice jacobiana

$$J(\varphi)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(u,v)} \quad \text{ha rango } 2,$$

dove  $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$ , e analogamente per  $y_u, y_v, z_u, z_v$ .

La coppia  $(D, \varphi)$  si dice *parametrizzazione locale*, o *sistema coordinato*, o *carta locale* (cf. Figura 1). L'aperto  $D$  si dice dominio dei parametri e l'applicazione  $\varphi$  applicazione coordinata. Se  $p \in \varphi(D) \subseteq M$ ,  $p = \varphi(u, v)$ , allora  $(u, v)$  si dicono *coordinate* (o *parametri*) del punto  $p$  rispetto al fissato sistema coordinato  $(D, \varphi)$ . In breve, un sottoinsieme  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  è una superficie regolare se esiste una famiglia di parametrizzazioni locali (regolari)  $\{(D_i, \varphi_i)\}$  i cui codomini

$\varphi_i(D_i)$  ricoprono  $M$ . Si può facilmente vedere che, se  $M_1$  è un aperto di una superficie regolare  $M$ , ossia  $M_1 = M \cap V$  con  $V$  aperto di  $\mathbb{R}^3$ , allora anche  $M_1$  è una superficie regolare. In particolare, se  $(D, \varphi)$  è una parametrizzazione regolare di  $M$ , allora  $\varphi(D)$  è una superficie regolare.

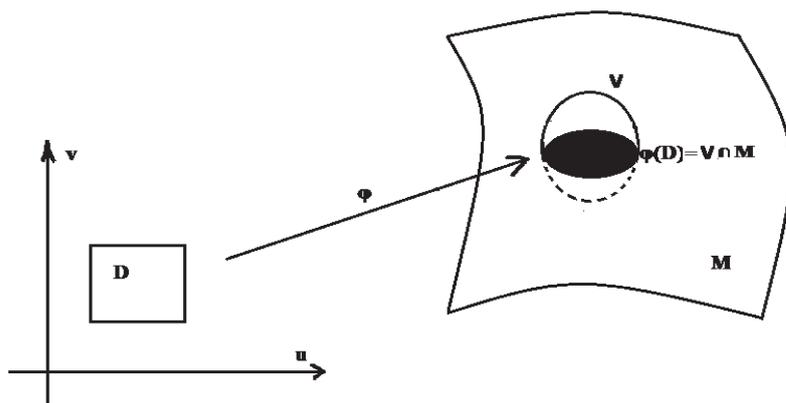


FIGURA 1. Una parametrizzazione.

Riguardo alla definizione di superficie regolare, osserviamo che la condizione (a) è naturale se uno vuole fare geometria differenziale, la condizione (b) ci dice che la superficie non ha autointersezioni ed è un oggetto 2-dimensionale; infine la condizione (c), come vedremo, garantisce l'esistenza del piano tangente in ogni punto della superficie.

**Osservazione 3.2.** Sia  $M$  una superficie regolare e sia  $D$  un aperto (connesso) di  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'applicazione iniettiva, con  $\varphi(D) \subset M$ , che verifica (a) e (c) della Definizione 3.1, allora  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  è un omeomorfismo e quindi  $(D, \varphi)$  è una parametrizzazione locale di  $M$  (cf. [9], p.64).

**Osservazione 3.3.** Se  $(D, \varphi)$  è una parametrizzazione locale di una superficie regolare  $M$ , ed  $f : D_1 \rightarrow D$  è un diffeomorfismo tra aperti di  $\mathbb{R}^2$ , allora è facile vedere che anche  $(D_1, \varphi_1 = \varphi \circ f)$  è una parametrizzazione locale di  $M$ .

**Definizione 3.4.** Sia  $D$  un aperto (connesso) di  $\mathbb{R}^2$ . Un'applicazione differenziabile  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice che è un'immersione se la matrice jacobiana  $J(\varphi)$  ha rango 2 in ogni punto di  $D$ , ovvero è soddisfatta la (c) della Definizione 3.1. In tal caso, si dice che  $\varphi$  definisce una **superficie immersa** e la sua immagine  $\varphi(D)$  è il sostegno della superficie immersa. Se  $\varphi$  è anche iniettiva, allora  $\varphi$  definisce una superficie immersa iniettiva.

In generale, se  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'immersione (anche iniettiva), non è detto che  $M = \varphi(D)$  sia una superficie regolare, cioè non è detto che  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  sia un omeomorfismo come risulta dal seguente esempio.

**Esempio 3.5.** Consideriamo l'applicazione

$$f : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, u \mapsto f(u) = (2\cos(u - \frac{\pi}{2}), \sin 2(u - \frac{\pi}{2})),$$

è un'immersione iniettiva, la sua immagine è una "figura a otto" (cf. Figura 2).



FIGURA 2

L'applicazione

$$\varphi : D = ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (f(u), v),$$

è un'immersione iniettiva, ma  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  non è un omeomorfismo. Infatti  $\varphi(]0, 2\pi[ \times ]0, 1[)$  non è un aperto in  $\varphi(D)$ .

Tuttavia, abbiamo la seguente

**Proposizione 3.6.** *Se  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'immersione, allora per ogni fissato  $p_0 = (u_0, v_0) \in D$  esiste un intorno  $D_0 \subset D$  di  $p_0$  tale che  $\varphi : D_0 \rightarrow \varphi(D_0)$  sia un omeomorfismo, e quindi  $M = \varphi(D_0)$  sia una superficie regolare. In altre parole, una superficie immersa è localmente una superficie regolare.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome la matrice jacobiana  $J(\varphi)$  ha rango 2 in ogni punto di  $D$ , possiamo assumere ad esempio che sia  $\det \begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \neq 0$  nel punto  $p_0 = (u_0, v_0)$ . Consideriamo la funzione  $F : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$(u, v, t) \mapsto F(u, v, t) = \varphi(u, v) + (t, 0, 0) = (x(u, v) + t, y(u, v), z(u, v)).$$

Allora  $F$  è differenziabile e  $\det J(F) = \det \begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \neq 0$  nel punto  $(p_0, 0)$ , e quindi dal Teorema della funzione inversa segue che esiste un intorno  $U$  di  $(p_0, 0)$  in  $D \times \mathbb{R}$  e un intorno  $V$  di  $F(p_0, 0) = \varphi(p_0)$  in  $\mathbb{R}^3$  tali che  $F : U \rightarrow V$  sia un diffeomorfismo. Posto  $D_0 = U \cap D$ , siccome  $\varphi|_{D_0} = F|_{D_0 \times \{0\}}$ , abbiamo che  $\varphi : D_0 \rightarrow \varphi(D_0)$  è un omeomorfismo.  $\square$

**Osservazione 3.7.** Dalla Proposizione 3.6 segue che una superficie immersa localmente è una superficie regolare. Però non è detto che una superficie immersa (iniettiva) sia una superficie regolare. Tuttavia, tutti gli oggetti geometrici che permettono di studiare la geometria locale di una superficie regolare si possono considerare anche per superfici immerse. D'altronde, in alcuni testi, come ad esempio in [16], col termine di superficie regolare si intende una superficie immersa.

**Esempio 3.8. Superfici semplici**

Sia  $D$  un aperto (connesso) di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile. Consideriamo il sottoinsieme  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  definito dal grafico di  $f$ :

$$M := G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

L'applicazione

$$\varphi : D \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)),$$

è chiaramente differenziabile. L'applicazione  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D) = M$  è bigettiva, inoltre l'inversa  $\varphi^{-1} : M = \varphi(D) \rightarrow D$  è continua in quanto restrizione a  $\varphi(D) = M$  della proiezione  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$  che è continua. Infine, la matrice jacobiana  $J(\varphi)$  ha chiaramente rango 2. Quindi,  $M$  è una superficie regolare che si ricopre con una sola carta (parametrizzazione)  $(D, \varphi)$ . Per tale motivo  $M$  si dice *superficie semplice*. Gli esempi di superfici semplici sono numerosi. I piani sono i primi esempi. Si vede facilmente che *ogni piano*  $\pi : ax + by + cz + d = 0$  con  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  è una *superficie semplice*. Infatti, supposto  $c \neq 0$ ,  $\pi$  è il grafico della funzione

$$f : D = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = -(a/c)x - (b/c)y - d/c.$$

**Osservazione 3.9.** Si può provare che ogni superficie regolare  $M$  è localmente il grafico di una funzione, ossia per ogni  $p_0 \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $p_0$  in  $M$  che si rappresenta con una delle seguenti forme (cf. [9], p.63):

$$(*) \quad z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z),$$

dove  $f, g, h$  sono funzioni differenziabili definite in qualche aperto di  $\mathbb{R}^2$ .

**Esempio 3.10.** Un esempio significativo di superficie non regolare è dato dal *cono rotondo*  $M$  di equazione cartesiana  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Se  $M$  fosse regolare, applicando l'Osservazione 3.9, un intorno dell'origine in  $M$  si dovrebbe poter esprimere in una delle forme (\*). La sola possibile potrebbe essere  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , ma tale funzione non è differenziabile in  $(0, 0)$ . Tuttavia, la superficie  $M_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0$ , è una superficie regolare. Infatti,  $M_0$  è una superficie semplice di equazione cartesiana  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$ . Analogamente per l'altro semicono  $\bar{M}_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z < 0$ .

**Esempio 3.11. La sfera**

Consideriamo la sfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  di centro l'origine  $O$  e raggio 1, per sfere di centro  $C$  e raggio  $r$  si procede in modo analogo. Poniamo

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x > 0\}, & U_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x < 0\}, \\ U_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : y > 0\}, & U_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : y < 0\}, \\ U_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}, & U_6 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < 0\}. \end{aligned}$$

Consideriamo l'aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^2$  definito da

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\},$$

e sia  $\varphi_1$  l'applicazione

$$\varphi_1 : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \longmapsto \left( \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v \right)$$

Osserviamo che

- (a)  $\varphi_1$  è differenziabile;
- (b)  $\varphi_1 : D \rightarrow U_1 = \varphi_1(D)$  è un omeomorfismo. Infatti  $\varphi_1$  è bigettiva e  $\varphi_1^{-1} : U_1 \rightarrow D$  è continua (in quanto restrizione a  $U_1$  della proiezione ortogonale  $(x, y, z) \mapsto (y, z)$  che è continua);
- (c)  $J(\varphi_1) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ha rango 2.

Quindi  $(D, \varphi_1)$  è una parametrizzazione locale di  $\mathbb{S}^2$ . In modo analogo si vede che  $(D, \varphi_i)_{i=2, \dots, 6}$  sono parametrizzazioni locali di  $\mathbb{S}^2$ , dove

- $\varphi_2 : D \rightarrow U_2 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \left( -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v \right),$
- $\varphi_3 : D \rightarrow U_3 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \left( u, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v \right),$
- $\varphi_4 : D \rightarrow U_4 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \left( u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v \right),$
- $\varphi_5 : D \rightarrow U_5 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \left( u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right),$
- $\varphi_6 : D \rightarrow U_6 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \left( u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right).$

Siccome gli aperti  $U_i$  ricoprono  $\mathbb{S}^2$ , possiamo concludere che  $\mathbb{S}^2$  è una superficie regolare.

**Esercizio 3.12.** Parametrizzare la sfera  $\mathbb{S}^2$  in termini di **coordinate geografiche**  $(u, v)$ .

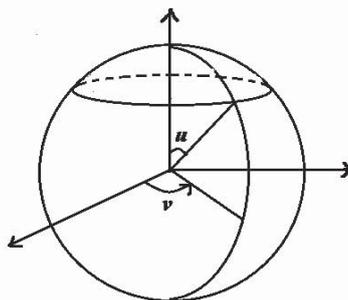


FIGURA 3. Coordinate geografiche.

*Soluzione.* Consideriamo l'aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^2$  definito dall'insieme

$$D = \{(u, v) : 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\} = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[,$$

e l'applicazione

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = ((\sin u)\cos v, (\sin u)\sin v, \cos u).$$

Il parametro  $u$  è la *colatitudine* (la *latitudine* è  $\frac{\pi}{2} - u$ ) e il parametro  $v$  è la *longitudine* del punto  $p = \varphi(u, v)$  della sfera. Le curve di colatitudine  $u = \text{cost.} = u_0$  sono circonferenze di raggio minore o uguale al raggio della sfera, mentre le curve di longitudine  $v = \text{cost.} = v_0$  sono semicirconferenze di raggio massimo. Osserviamo che sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(a)  $\varphi$  è differenziabile poiché le sue componenti lo sono.

(c) La matrice  $(J(\varphi))^t = \begin{pmatrix} (\cos u)\cos v & (\cos u)\sin v & -\sin u \\ -(\sin u)\sin v & (\sin u)\cos v & 0 \end{pmatrix}$  ha rango 2.

Infatti, se il rango fosse 1 si avrebbe

$$(\sin u \cos u (\cos^2 v + \sin^2 v), \sin^2 u \sin v, \sin^2 u \cos v) = (0, 0, 0),$$

cioè  $(\sin u \cos u, \sin^2 u \sin v, \sin^2 u \cos v) = (0, 0, 0)$ , e quindi risulterebbe

$$0 = \sin^2 u \cos^2 u + \sin^4 u \sin^2 v + \sin^4 u \cos^2 v = \sin^2 u,$$

ma ciò è un assurdo in quanto  $u \in ]0, \pi[$ . Quindi  $J(\varphi)$  ha rango 2 per ogni  $(u, v) \in D$ . Inoltre,  $\varphi$  è iniettiva su  $D$  e dunque per l'Osservazione 3.2 la coppia  $(D, \varphi)$  è una parametrizzazione locale di  $\mathbb{S}^2$ . Osserviamo che per  $u = 0$  si ottiene il punto  $P_1(0, 0, 1)$ , per  $u = \pi$  si ottiene  $P_2(0, 0, -1)$ , e per  $v = 0$  (o  $2\pi$ ) si ottiene la semicirconferenza  $\gamma(u) = (\sin u, 0, \cos u)$ ,  $u \in ]0, \pi[$ . Quindi  $\varphi(D)$  è la sfera  $\mathbb{S}^2$  privata della semicirconferenza  $\gamma(u)$  con  $u \in [0, \pi]$ . Per ricoprire tutta la sfera sono necessarie almeno due parametrizzazioni di questo tipo. Consideriamo la coppia  $(D, \psi)$ , dove  $D = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  e

$$\psi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \psi(u, v) = ((\sin u)\cos v, \cos u, (\sin u)\sin v).$$

Come prima si prova che  $(D, \psi)$  è una parametrizzazione locale di  $\mathbb{S}^2$ . Inoltre, in questo caso,  $\psi(D)$  è la sfera  $\mathbb{S}^2$  privata della semicirconferenza  $\beta(u) = (\sin u, \cos u, 0)$  con  $u \in [0, \pi]$ . Il codominio di questa carta locale insieme al codominio della precedente carta ricoprono l'intera sfera. Pertanto, ogni punto della sfera si può rappresentare con coordinate geografiche.

**Osservazione 3.13.** Altre carte locali che parametrizzano la sfera si possono ottenere, ad esempio, con le proiezioni stereografiche.

### Esempi 3.14. Superfici di livello

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile, dove  $A$  è aperto di  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo l'insieme (non vuoto)

$$M := \{(x, y, z) \in A : f(x, y, z) = c\}, \text{ ovvero } M := f^{-1}(c), c \in \mathbb{R}.$$

Se per ogni punto  $p \in M$  si ha  $(\nabla f)_p = (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \neq (0, 0, 0)$ , allora ogni componente connessa di  $M$  è una superficie regolare (detta *superficie di livello*). La dimostrazione si può ottenere procedendo nel modo seguente.

Fissato  $p \in M$ , una derivata parziale di  $f$  in  $p$  è non nulla, assumiamo ad esempio che sia  $f_z(p) \neq 0$ . Consideriamo la funzione

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ definita da } F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

La matrice jacobiana di  $F$  ha chiaramente rango 3 nel fissato punto  $p$ . Applicando il Teorema della funzione inversa, esistono  $V$  intorno aperto di  $p$  e  $W$  intorno aperto di  $F(p)$  in  $\mathbb{R}^3$  tali che  $F : V \rightarrow W$  sia un diffeomorfismo. L'insieme  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u, v, c) \in W\} \equiv W \cap \{z = c\}$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$ . Inoltre per ogni  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  si ha  $F^{-1}(u, v, c) \in f^{-1}(c)$ , ovvero  $f(F^{-1}(u, v, c)) = c$ . Infatti, posto  $F^{-1}(u, v, c) = (x, y, z)$ , per come definita la  $F$  si ha

$$\begin{aligned} (u, v, c) &= F(F^{-1}(u, v, c)) = F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)) \\ &= (x, y, f(F^{-1}(u, v, c))) \end{aligned}$$

e quindi  $x = u, y = v$  e  $f(F^{-1}(u, v, c)) = c$ . Allora, possiamo considerare l'applicazione

$$\varphi : D \rightarrow \varphi(D) = V \cap f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = F^{-1}(u, v, c),$$

e verificare che  $(D, \varphi)$  è una carta locale per  $M$ . Pertanto, possiamo concludere che  $M$  è una superficie regolare.

Di seguito riportiamo alcuni esempi di superfici di livello (regolari).

- (1) Il **piano**  $\pi : ax + by + cz - d = 0$  è una superficie di livello. Infatti  $\pi = f^{-1}(d)$  con  $f(x, y, z) = ax + by + cz$  e  $(\nabla f)_p = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  per ogni  $p$ .  $\{f^{-1}(d)\}_{d \in \mathbb{R}}$  è un insieme di piani paralleli.
- (2) La **sfera**  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  è una superficie di livello. Infatti  $\mathbb{S}^2 = f^{-1}(r^2)$  con  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  e  $(\nabla f)_p = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$  per ogni  $p \in \mathbb{S}^2$ . In questo caso  $\{f^{-1}(r^2)\}_{r \in \mathbb{R}_+}$  è un insieme di sfere concentriche.
- (3) **Superfici semplici**  $M : z = g(x, y)$ , con  $g(x, y)$  differenziabile, possono essere viste come superfici di livello:  $M = f^{-1}(0)$ ,  $f(x, y, z) = z - g(x, y)$ .
- (4) **Superfici cilindriche**. Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto f(x, y)$ , un'applicazione differenziabile con  $(f_x, f_y, 0) \neq (0, 0, 0)$ . Allora la superficie cilindrica (cf. Esempio 3.18)

$$M : f(x, y) = 0, \text{ ovvero } M = f^{-1}(0),$$

è una superficie di livello. In particolare, se  $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$  è una curva algebrica (del piano  $\pi_{xy}$ ) priva di punti singolari, allora la superficie  $M : f(x, y) = 0$  è una superficie di livello. Di conseguenza, il *cilindro circolare retto*

$$M : x^2 + y^2 = r^2$$

è una superficie di livello (al variare di  $r$  si ottengono cilindri coassiali). Una parametrizzazione locale di tale cilindro è data da

$$\varphi(u, v) = (r \cos v, r \sin v, u), (u, v) \in D = \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[.$$

La carta locale  $(D, \varphi)$  parametrizza il cilindro privato della retta generatrice  $\varphi(u, 0) = (r, 0, u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , parallela all'asse del cilindro.

### Esempio 3.15. Superficie di rotazione

Sia  $M$  la superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva regolare piana semplice  $\gamma$  intorno a una retta complanare con  $\gamma$  e che non incontra la stessa curva. Senza perdere in generalità, possiamo assumere che  $\gamma$  sia contenuta nel piano coordinato  $\pi_{xz} : y = 0$  e l'asse sia l'asse delle  $z$ . Sia quindi  $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ ,  $u \in I = ]a, b[$  con  $f(u) > 0$ , una parametrizzazione regolare di  $\gamma$ . Allora, una parametrizzazione locale di  $M$  è data da

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \cos v \\ f(u) \sin v \\ g(u) \end{pmatrix},$$

$(u, v) \in D = ]a, b[ \times ]0, 2\pi[$ , dove  $v$  è l'angolo di rotazione intorno all'asse  $z$ . Le circonferenze descritte durante la rotazione dei punti di  $\gamma$  si dicono *paralleli* di  $M$ . Le varie posizioni che assume  $\gamma$  su  $M$  durante la rotazione, si dicono *meridiani*.

Vogliamo provare che  $(D, \varphi)$  è una parametrizzazione locale, ossia sono verificate le proprietà (a), (b), (c) della Definizione 3.1. La (a) è banale. Per

la (c), basta osservare che  $J(\varphi) = \begin{pmatrix} f'(u)\cos v & -f(u)\sin v \\ f'(u)\sin v & f(u)\cos v \\ g'(u) & 0 \end{pmatrix}$  e quindi con un

semplice calcolo, usando il fatto che  $\gamma(u)$  è regolare con  $f(u) > 0$ , si vede che tale matrice ha rango 2. Infine, proviamo la (b). Siccome  $\gamma(u)$  è semplice, il parametro  $u$  è univocamente determinato da  $z = g(u)$  e  $x^2 + y^2 = f^2(u)$ , e quindi  $\varphi$  è iniettiva. Inoltre,  $u$  è funzione continua di  $z$  e  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , e quindi funzione continua di  $x, y, z$ . Per la continuità di  $\varphi^{-1}$  rimane da provare che  $v$  è funzione continua di  $x, y, z$ . Se  $v \in ]0, \pi[ \cup ]\pi, 2\pi[$ , da

$$\begin{aligned} \tan(v/2) &= \frac{2(\sin v/2)(\cos v/2)}{2\cos^2 v/2} = \frac{\sin v}{1 + \cos v} \\ &= \frac{y/f(v)}{1 + x/f(v)} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

si ha

$$v = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

che è funzione continua di  $x, y, z$ . Analogamente, se  $v \in ]\pi/2, 3\pi/2[$ , da

$$\begin{aligned}\cot(v/2) &= \frac{2(\operatorname{sen} v/2)(\cos v/2)}{2\operatorname{sen}^2 v/2} = \frac{\operatorname{sen} v}{1 - \cos v} \\ &= \frac{y/f(v)}{1 - x/f(v)} = \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

si ha

$$v = 2 \cot^{-1} \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

che è funzione continua di  $x, y, z$ . Con due parametrizzazioni di questo tipo si può ricoprire l'intera superficie  $M$ .

In particolare, la parametrizzazione locale data per la superficie cilindrica  $M : x^2 + y^2 = r^2$  si ottiene considerando la curva

$$\gamma(u) = (r, 0, u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

La parametrizzazione locale data per la sfera  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (in termini di coordinate geografiche) si ottiene considerando la curva

$$\gamma(u) = (\operatorname{sen} u, 0, \cos u), \quad u \in ]0, \pi[.$$

### Esempio 3.16. Superficie torica.

Sia  $\mathcal{C}$  una curva (del piano  $\pi_{xz}$ ) di equazioni cartesiane  $y = 0$  e  $f(x, z) = 0$ . Ricordiamo che la superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva  $\mathcal{C}$  intorno all'asse  $z$  ha equazione cartesiana  $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ . Ora sia  $\mathcal{C}$  la circonferenza di centro  $C(a, 0, 0)$  e raggio  $r$ , con  $0 < r < a$ , del piano  $\pi_{xz}$ , ossia  $\mathcal{C} : (x - a)^2 + z^2 = r^2, y = 0$ . Ruotando  $\mathcal{C}$  intorno all'asse  $z$  si ottiene la *superficie torica*  $T$  di equazione cartesiana

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2.$$

Osserviamo che

- (a)  $T = f^{-1}(r^2)$  dove  $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$  è differenziabile per  $(x, y) \neq (0, 0)$  e quindi per ogni  $p \in T$ ;
- (b)  $(\nabla f)_p = 2 \left( \frac{x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) \neq (0, 0, 0) \quad \forall p \in T.$

Infatti, se fosse  $(\nabla f)_p = 0$  in qualche punto  $p \in T$ , si avrebbe  $z = 0$  e quindi la contraddizione

$$\|(\nabla f)_p\| = \frac{2r}{\sqrt{x^2 + y^2}} \|(x, y, 0)\| = 2r \neq 0.$$

Dunque,  $T$  è una superficie regolare (di livello). Siccome  $T$  è in particolare una superficie di rotazione, come caso particolare dell'Esempio 3.15 considerando la curva

$$\gamma(u) = (a + r \cos u, 0, r \operatorname{sen} u), \quad u \in ]0, 2\pi[,$$

si ottiene che una parametrizzazione locale di  $T$  è data da

$$(3.1) \quad \varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

con  $(u, v) \in D = ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$ .

### Esempio 3.17. Superficie rigata

Sia  $\gamma(u)$ ,  $u \in I$  (intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ), una curva semplice regolare di  $\mathbb{R}^3$  (cf. Osservazione 1.15) e sia  $V(u)$  un campo differenziabile di vettori non nulli e definito lungo  $\gamma(u)$ . Sia  $M$  la superficie luogo delle  $\infty^1$  rette, dette rette generatrici, per  $\gamma(u)$  con la direzione di  $V(u)$ . La superficie  $M$ , detta *superficie rigata*, è parametrizzata da

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + vV(u), \text{ con } (u, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

In generale, tale  $\varphi$  può non definire una superficie regolare o immersa. Quando  $M$  è una superficie regolare, allora parleremo di superficie rigata regolare. I due esempi seguenti sono due speciali superfici rigate.

### Esempio 3.18. Cilindro generalizzato

Sia  $\gamma(u)$ ,  $u \in I$  (intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ), una curva semplice regolare e sia  $\vec{w}$  un vettore unitario di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $M$  la superficie rigata luogo delle  $\infty^1$  rette per  $\gamma(u)$  con la direzione di  $\vec{w}$ . La superficie  $M$  è detta *cilindro generalizzato*. Quindi,  $M$  è parametrizzata da

$$(3.2) \quad \varphi(u, v) = \gamma(u) + v\vec{w}, \quad (u, v) \in D = I \times \mathbb{R}.$$

L'applicazione  $\varphi(u, v)$  è differenziabile. Assumiamo che le rette generatrici incontrino  $\gamma$  solo in un punto, ovvero il vettore  $\gamma(u_2) - \gamma(u_1)$  non può essere parallelo al vettore  $\vec{w}$ , allora

$$\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \Leftrightarrow \gamma(u_2) - \gamma(u_1) = (v_2 - v_1)\vec{w} \Leftrightarrow (u_2, v_2) = (u_1, v_1).$$

Infine, assumendo che  $\dot{\gamma}(u)$  e  $\vec{w}$  siano linearmente indipendenti per ogni  $u \in I$ , si ha che la matrice jacobiana  $J(\varphi)$  ha rango 2 in ogni punto di  $D$ . Possiamo quindi concludere che  $\varphi$  definisce una superficie immersa iniettiva.

### Esempio 3.19. Cono generalizzato

Sia  $\gamma(u)$ ,  $u \in I$  (intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ), una curva semplice regolare e sia  $p_0$  un fissato punto di  $\mathbb{R}^3$  con la condizione che  $p_0 \notin \gamma(I)$ . Sia  $M$  la superficie rigata luogo delle  $\infty^1$  rette che congiungono  $p_0$  con  $\gamma(u)$  al variare di  $u$ . La superficie  $M$  è detta *cono generalizzato* di vertice  $p_0$ . Quindi,  $M$  è parametrizzata da

$$\varphi(u, v) = (1 - v)p_0 + v\gamma(u), \text{ con } (u, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

L'applicazione  $\varphi(u, v)$  è differenziabile. Assumiamo che le rette generatrici incontrino  $\gamma$  solo in un punto, ovvero comunque consideriamo due punti distinti di  $\gamma$  questi non siano collineari con il vertice  $p_0$ , allora

$$\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \Leftrightarrow v_2\gamma(u_2) - v_1\gamma(u_1) = (v_2 - v_1)p_0 \Leftrightarrow (u_2, v_2) = (u_1, v_1).$$

Infatti, se fosse  $(v_2 - v_1) \neq 0$  si avrebbe  $p_0$  allineato con  $\gamma(u_2)$  e  $\gamma(u_1)$ . Infine, assumendo che  $v > 0$ , ovvero il vertice  $p_0 \notin M$ , e che le rette generatrici non

siano tangenti a  $\gamma$ , si ha che la matrice jacobiana  $J(\varphi)$  ha rango 2 in ogni punto di  $D = I \times \mathbb{R}_+$ . Possiamo quindi concludere che  $\varphi|_D$  definisce una superficie immersa iniettiva.

### Esercizi 3.20.

- (1) Sia  $M_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0$ . Considerare  $M_0$  come una superficie di rotazione e determinare, usando l'Esempio 3.15, una parametrizzazione regolare  $(D, \varphi)$  di  $M_0$
- (2) Trovare due parametrizzazioni (locali) regolari  $(D_i, \varphi_i), i = 1, 2$ , del cilindro circolare retto  $M : x^2 + y^2 = r^2$  tale che sia  $\varphi_1(D_1) \cup \varphi_2(D_2) = M$ .
- (3) Ripetere l'Esercizio (2) per la superficie torica  $T : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$ .
- (4) Ripetere l'Esercizio (2) per il semicono rotondo  $M_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0$ .

**Esercizio 3.21.** Assumiamo che la curva  $\gamma(u)$  dell'Esempio 3.18 soddisfi l'ulteriore proprietà  $\gamma(u) \cdot \vec{w} = c$  (costante) per ogni  $u \in I$ . Si verifichi che in tal caso la superficie  $M = \varphi(D)$  è regolare, ovvero  $\varphi^{-1} : M \rightarrow D$  è continua.

### Esercizi 3.22.

- (1) Esplicitare la (3.2) nel caso di  $\gamma(u)$  curva contenuta in un piano coordinato e  $\vec{w}$  vettore ortogonale al piano di  $\gamma$ .
- (2) Sia data la superficie regolare di livello  $M : f(x, y) = 0$ . Determinare una parametrizzazione locale di  $M$  del tipo (3.2).

## 3.2. Superfici quadriche

Le superfici quadriche, dopo i piani, sono i piú semplici esempi di superfici. Tuttavia, non tutte le superfici quadriche sono superfici regolari.

### 3. 2-1. Classificazioni.

**Definizione 3.23.** Una superficie quadrica  $\mathcal{Q}$  è una superficie algebrica reale del secondo ordine.

Quindi, una superficie quadrica  $\mathcal{Q}$  (che nel seguito chiameremo semplicemente quadrica) è l'insieme dei punti  $p$  dello spazio le cui coordinate  $(x, y, z)$  soddisfano un'equazione del tipo  $f(x, y, z) = 0$ , dove  $f(x, y, z)$  è un polinomio di ordine due a coefficienti reali. Esplicitando abbiamo:

$$(3.3) \quad \mathcal{Q} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

dove i coefficienti  $a_{ij}$  sono numeri reali non tutti nulli per  $i, j = 1, 2, 3$ . Posto  $a_{ij} = a_{ji}$ , la matrice

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

detta *matrice associata alla quadrica*  $\mathcal{Q}$ , è una matrice reale simmetrica di ordine 4, quindi è diagonalizzabile ed ammette quattro autovalori reali.

### Classificazione proiettiva delle quadriche.

Una prima classificazione delle quadriche si ottiene esaminando il rango della matrice  $A$ . Tale classificazione, studiando le quadriche nello spazio proiettivo, è anche detta *classificazione proiettiva* in quanto  $rgA$  (il rango di  $A$ ) è invariante per trasformazioni proiettive. Quindi, esaminando il rango di  $A$ , otteniamo la seguente classificazione delle quadriche.

- $\mathcal{Q}$  si dice quadrica **generale** se  $rgA = 4$ .
- $\mathcal{Q}$  si dice quadrica **speciale** se  $rgA = 3$ .
- $\mathcal{Q}$  si dice quadrica **semplicemente degenere** se  $rgA = 2$ ; in tal caso  $\mathcal{Q} = \pi_1 \cup \pi_2$  (unione di due piani distinti).
- $\mathcal{Q}$  si dice quadrica **doppiamente degenere** se  $rgA = 1$ ; in tal caso  $\mathcal{Q} = \pi_1 \cup \pi_1$  (unione di due piani coincidenti).

Naturalmente le quadriche interessanti da studiare sono le quadriche generali e quelle speciali.

### Classificazione affine delle quadriche.

Sia  $\mathcal{Q}$  una quadrica arbitraria e sia  $A = (a_{ij})$  la matrice reale simmetrica associata a  $\mathcal{Q}$ . Se indichiamo con  $P$  il vettore riga  $(x, y, z)$  (coordinate del punto  $p$ ), con  $\tilde{A}$  la matrice  $A_{44}$  minore complementare dell'elemento  $a_{44}$  della matrice  $A$ , ossia

$$\tilde{A} = A_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

con  $b$  la matrice riga  $(2a_{41}, 2a_{42}, 2a_{43}) = (2a_{14}, 2a_{24}, 2a_{34})$  e con  $c$  l'elemento  $a_{44}$ , allora possiamo scrivere l'equazione (3.3) di  $\mathcal{Q}$  in forma compatta

$$\mathcal{Q} : P\tilde{A}P^T + bP^T + c = 0.$$

La classificazione affine delle quadriche  $\mathcal{Q}$  (denominata in questo modo perchè è invariante per trasformazioni affini) si ottiene esaminando la forma quadratica data dal complesso dei termini di secondo grado

$$P\tilde{A}P^T = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

dell'equazione di  $\mathcal{Q}$ . La matrice associata a questa forma quadratica è la matrice  $\tilde{A} = A_{44}$ , la quale è reale e simmetrica di ordine 3, quindi è diagonalizzabile ed ammette tre autovalori reali che indichiamo con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Inoltre, consideriamo il valore assoluto  $\tilde{s} = |\tilde{k} - \tilde{\mu}|$  della segnatura  $(\tilde{k}, \tilde{\mu})$  della matrice  $\tilde{A}$  e il valore assoluto  $s = |k - \mu|$  della segnatura  $(k, \mu)$  della matrice  $A$ .

**Osservazione 3.24.** Nello studio delle quadriche dello spazio ampliato con i punti all'infinito (detti anche punti impropri), quindi mediante l'uso delle coordinate cartesiane omogenee  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , la classificazione affine delle

quadriche generali e speciali si ottiene esaminando la *conica all'infinito*  $\mathcal{C}_\infty$  data dall'intersezione della quadrica

$$\mathcal{Q} : \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_i x_j = 0$$

con il piano improprio  $\pi_\infty : x_4 = 0$  (luogo di tutti i punti impropri). Quindi,  $\mathcal{C}_\infty$  ha equazioni

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

La matrice associata alla conica  $\mathcal{C}_\infty$  è la matrice  $\tilde{A}$ , quindi  $\mathcal{C}_\infty$  è degenera se e solo se  $rg\tilde{A} < 3$ . Ricordiamo che le coordinate cartesiane omogenee  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  sono definite a meno di un fattore  $\varrho \neq 0$  di proporzionalità, inoltre nel caso dei punti propri ( $x_4 \neq 0$ ) sono legate alle coordinate cartesiane non omogenee  $(x, y, z)$  da

$$x : y : z : 1 = x_1 : x_2 : x_3 : x_4.$$

#### Classificazione affine delle quadriche degeneri ( $rgA \leq 2$ ).

Sia  $\mathcal{Q}$  una quadrica degenera. Allora,

- $\mathcal{Q}$  è unione di due piani reali e distinti se  $rgA = rg\tilde{A} = 2$  e  $\tilde{s} = 0$ , ovvero i due autovalori non nulli della matrice  $\tilde{A}$  sono discordi;
- $\mathcal{Q}$  è unione di due piani complessi coniugati se  $rgA = rg\tilde{A} = 2$  e  $\tilde{s} = 2$ , ovvero i due autovalori non nulli della matrice  $\tilde{A}$  sono concordi;
- $\mathcal{Q}$  è unione di due piani paralleli reali e distinti se  $rgA = 2$ ,  $rg\tilde{A} = 1$  e  $s = 0$ , ovvero i due autovalori non nulli della matrice  $A$  sono discordi;
- $\mathcal{Q}$  è unione di due piani paralleli complessi coniugati se  $rgA = 2$ ,  $rg\tilde{A} = 1$  e  $s = 2$ , ovvero i due autovalori non nulli della matrice  $A$  sono concordi;
- $\mathcal{Q}$  è unione di due piani coincidenti se  $rgA = rg\tilde{A} = 1$ .

#### Classificazione affine delle quadriche speciali ( $rgA = 3$ ).

Sia  $\mathcal{Q}$  una quadrica speciale. Possiamo avere due casi:  $\det \tilde{A} \neq 0$  ( $\mathcal{C}_\infty$  è non degenera) oppure  $\det \tilde{A} = 0$  ( $\mathcal{C}_\infty$  è degenera).

Se  $\det \tilde{A} \neq 0$ ,  $\mathcal{Q}$  è un **cono** (quadrico) avente vertice  $(x_0, y_0, z_0)$  dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases}$$

Se  $\det \tilde{A} = 0$ ,  $\mathcal{Q}$  è un **cilindro** (quadrico) con generatrici parallele al vettore che ha componenti date dalla terna  $(v_1, v_2, v_3)$  soluzione (definita a meno di un coefficiente di proporzionalità) del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 = 0 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 = 0 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 = 0 \\ a_{41}v_1 + a_{42}v_2 + a_{43}v_3 = 0. \end{cases}$$

Sia  $\mathcal{Q}$  un cono quadrico ( $rgA = rg\tilde{A} = 3$ ), allora:

- (1)  $\mathcal{Q}$  è un *cono a punti reali* se  $\tilde{s} = 1$ , ovvero gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  non hanno tutti lo stesso segno. Ad esempio  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  è un cono a punti reali.
- (2)  $\mathcal{Q}$  è un *cono a punti immaginari* se  $\tilde{s} = 3$ , ovvero gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  hanno tutti lo stesso segno. Ad esempio  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  è un cono a punti immaginari.

Sia  $\mathcal{Q}$  un cilindro quadrico ( $rgA = 3$  e  $rg\tilde{A} < 3$ ). Allora,

- (1)  $\mathcal{Q}$  è un *cilindro iperbolico* se  $rg\tilde{A} = 2$  e  $\tilde{s} = 0$ , ovvero gli autovalori non nulli  $\lambda_1, \lambda_2$  di  $\tilde{A}$  sono discordi. Ad esempio,  $x^2 - y^2 = 1$  è un cilindro iperbolico.
- (2)  $\mathcal{Q}$  è un *cilindro ellittico a punti reali* se  $rg\tilde{A} = 2$ ,  $\tilde{s} = 2$  e  $s = 1$ , ovvero gli autovalori non nulli  $\lambda_1, \lambda_2$  di  $\tilde{A}$  sono concordi e gli autovalori non nulli di  $A$  non hanno tutti lo stesso segno. Ad esempio,  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  è un cilindro ellittico a punti reali.
- (3)  $\mathcal{Q}$  è un *cilindro ellittico a punti immaginari* se  $rg\tilde{A} = 2$ ,  $\tilde{s} = 2$  e  $s = 3$ , ovvero gli autovalori non nulli  $\lambda_1, \lambda_2$  di  $\tilde{A}$  sono concordi e gli autovalori non nulli di  $A$  hanno tutti lo stesso segno. Ad esempio,  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  è un cilindro ellittico a punti immaginari.
- (4)  $\mathcal{Q}$  è un *cilindro parabolico* se  $rg\tilde{A} = 1$ . Ad esempio,  $x^2 + y = 0$  è un cilindro parabolico.

**Classificazione affine delle quadriche generali** ( $rgA = 4$ ).

Sia  $\mathcal{Q}$  una quadrica generale. Una prima distinzione si ha considerando i casi:

- $\det \tilde{A} \neq 0$  (ossia, la conica  $\mathcal{C}_\infty$  è non degenera),
- $\det \tilde{A} = 0$  (ossia, la conica  $\mathcal{C}_\infty$  è degenera).

Allora, abbiamo quanto segue.

- (1)  $\mathcal{Q}$  è un **ellissoide** se  $\det \tilde{A} \neq 0$  e  $\tilde{s} = 3$ , ovvero gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  hanno lo stesso segno (quindi, la conica  $\mathcal{C}_\infty$  è a punti immaginari).  
Più precisamente:
  - 1a)**  $\mathcal{Q}$  è un *ellissoide a punti reali* se inoltre  $\det A < 0$ . In questo caso esiste il modello di rotazione.
  - 1b)**  $\mathcal{Q}$  è un *ellissoide a punti immaginari* se inoltre  $\det A > 0$ .
- (2)  $\mathcal{Q}$  è un **iperboloide** se  $\det \tilde{A} \neq 0$  e  $\tilde{s} = 1$ , ovvero gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  non hanno lo stesso segno (quindi, la conica  $\mathcal{C}_\infty$  è a punti reali).  
Più precisamente:
  - 2a)**  $\mathcal{Q}$  è un *iperboloide iperbolico* se inoltre  $\det A > 0$ . In questo caso esiste il modello di rotazione (iperboloide ad una falda);
  - 2b)**  $\mathcal{Q}$  è un *iperboloide ellittico* se inoltre  $\det A < 0$ . In questo caso esiste il modello di rotazione (iperboloide a due falde).

- (3)  $\mathcal{Q}$  è un **paraboloide** se  $\det \tilde{A} = 0$ . Più precisamente:
- 3a)**  $\mathcal{Q}$  è un *paraboloide iperbolico* detto “a sella” se inoltre  $\det A > 0$ . In questo caso non esiste il modello di rotazione;
  - 3b)**  $\mathcal{Q}$  è un *paraboloide ellittico* se inoltre  $\det A < 0$ . In questo caso esiste il modello di rotazione.

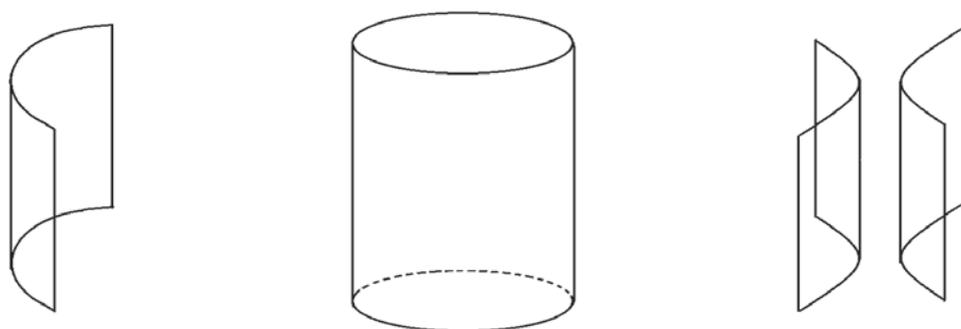


FIGURA 4. Cilindri quadrici.

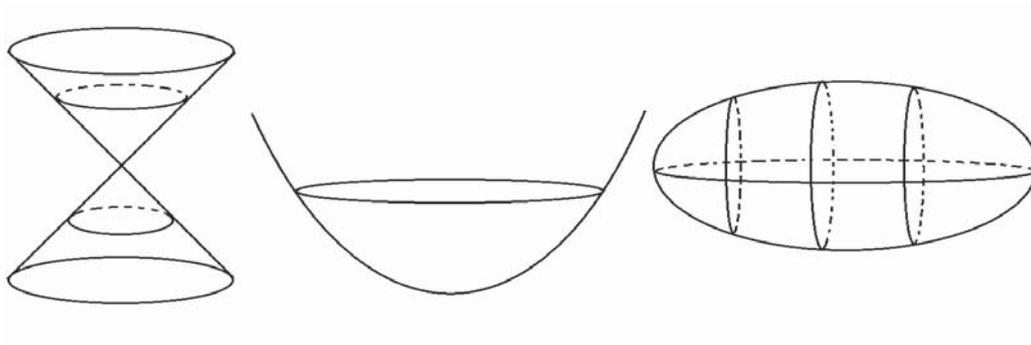


FIGURA 5. Cono quadrico -Paraboloide ellittico - Ellissoide.

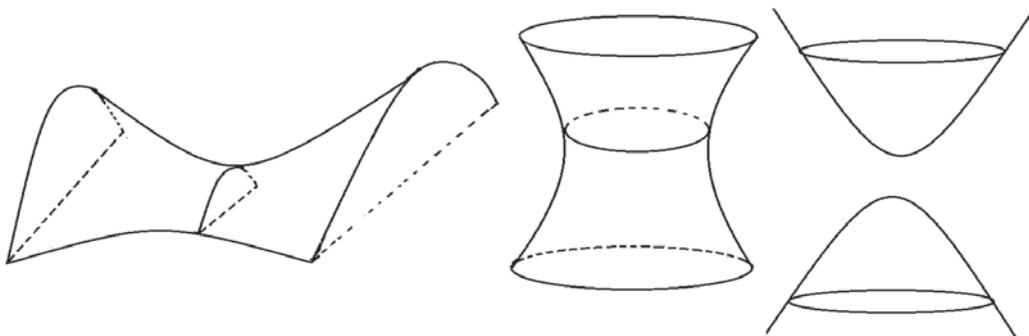


FIGURA 6. Paraboloide a sella - Iperboloidi (a 1 falda e a 2 falde).

**Osservazione 3.25.** Osserviamo che, data una quadrica  $\mathcal{Q}$  con matrice associata  $A = (a_{ij})$ , gli **invarianti** (affini) di  $\mathcal{Q}$  sono: il rango di  $A$ , il rango di  $\tilde{A} = A_{44}$ , il segno del determinante di  $A$ , il valore assoluto  $\tilde{s} = |\tilde{k} - \tilde{\mu}|$  della segnatura  $(\tilde{k}, \tilde{\mu})$  della matrice  $\tilde{A}$  e il valore assoluto  $s = |k - \mu|$  della segnatura  $(k, \mu)$  della matrice  $A$ .

### Natura dei punti di $\mathcal{Q}$ .

Sia  $\mathcal{Q} : f(x, y, z) = 0$  una quadrica a punti reali, generale oppure speciale. Un punto  $p_0 \in \mathcal{Q}$  si dice *punto semplice* se il vettore gradiente  $(\nabla f)_{p_0}$  è non nullo. Tutti i punti di  $\mathcal{Q}$ , ad eccezione del vertice nel caso in cui  $\mathcal{Q}$  è un cono, sono punti semplici (ciò si vede facilmente esprimendo  $\mathcal{Q}$  con equazione canonica). Sia  $p_0 \in \mathcal{Q}$  un punto semplice. Allora, come vedremo nella Proposizione 3.54, esiste il piano tangente in  $p_0$  e ha equazione cartesiana:

$$\pi_0 : f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) + f_z^0(z - z_0) = 0,$$

dove  $f_x^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{p_0}$ ,  $f_y^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{p_0}$  e  $f_z^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{p_0}$ . Sia  $\mathcal{C}_0$  la conica sezione della quadrica  $\mathcal{Q}$  con  $\pi_0$ , ovvero  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{Q} \cap \pi_0$ . Allora,  $\mathcal{C}_0$  è una conica degenera e

- $p_0$  si dice **punto iperbolico** se  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette reali e distinte;
- $p_0$  si dice **punto ellittico** se  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette complesse coniugate;
- $p_0$  si dice **punto parabolico** se  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette coincidenti.

Si dimostra che tutti i punti di  $\mathcal{Q}$  sono dello stesso tipo. Più precisamente si ha che:

- le quadriche con  $\text{rg}A = 3$  (coni e cilindri) sono a punti parabolici;
- una quadrica con  $\text{rg}A = 4$  può essere a punti iperbolici oppure a punti ellittici.

In particolare, le quadriche a punti iperbolici sono quadriche rigate.

**Esercizio 3.26.** Data la quadrica  $\mathcal{Q} : y^2 - z = 1$ , verificare che  $p_0 = (0, 1, 0) \in \mathcal{Q}$  è un punto parabolico, e quindi  $\mathcal{Q}$  è a punti parabolici.

**Esercizio 3.27.** Data la quadrica  $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , verificare che  $p_0 = (1, 0, 0) \in \mathcal{Q}$  è un punto iperbolico, e quindi  $\mathcal{Q}$  è a punti iperbolici.

**Esercizio 3.28.** Data  $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , verificare che il punto  $p_0(1, 0, 0) \in \mathcal{Q}$  è un punto ellittico e quindi  $\mathcal{Q}$  è a punti ellittici.

**3. 2-2. Equazioni canoniche metriche.** Il seguente teorema classifica tutte le quadriche con equazione in forma canonica.

**Teorema 3.29.** *Sia  $\mathcal{Q}$  una quadrica arbitraria. Allora, esiste un riferimento cartesiano rispetto al quale la quadrica  $\mathcal{Q}$  si può rappresentare con una delle seguenti forme canoniche.*

**Caso delle quadriche generali** ( $\text{rg}A = 4$ ).

(1)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , ellissoide a punti reali (cf. Fig. 5);

(2)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ , ellissoide a punti immaginari;

(3)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ , iperboloide iperbolico a una falda (cf. Fig. 6);

(4)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = 1$ , iperboloide ellittico a due falde (cf. Fig. 6);

(5)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ , paraboloido iperbolico detto "a sella" (cf. Fig. 6);

(6)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ , paraboloido ellittico (cf. Fig. 5).

**Caso delle quadriche speciali** ( $\text{rg}A = 3$ ).

(7)  $\mathcal{Q} : \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$ ,  $\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$ , cono a punti reali (Fig. 5);

(8)  $\mathcal{Q} : \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$ ,  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ , cono a punti immaginari;

(9)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , cilindro ellittico a punti reali (cf. Fig. 4);

(10)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ , cilindro ellittico a punti immaginari;

(11)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , cilindro iperbolico (cf. Fig. 4);

(12)  $\mathcal{Q} : y^2 = 2az$ , cilindro parabolico (cf. Fig. 4).

**Caso delle quadriche degeneri** ( $\text{rg}A \leq 2$ ).

(13)  $\mathcal{Q} : x^2 - k^2 = 0$ ,  $k \neq 0$ , due piani paralleli reali e distinti;

(14)  $\mathcal{Q} : x^2 + k^2 = 0$ ,  $k \neq 0$ , due piani paralleli complessi e coniugati;

(15)  $\mathcal{Q} : \alpha x^2 + \beta y^2 = 0$ ,  $\alpha\beta > 0$ , due piani complessi e coniugati;

(16)  $\mathcal{Q} : \alpha x^2 + \beta y^2 = 0$ ,  $\alpha\beta < 0$ , due piani reali e distinti;

(17)  $\mathcal{Q} : x^2 = 0, \quad (rgA=1)$  due piani reali coincidenti.

DIMOSTRAZIONE. Usando le notazioni precedentemente introdotte, una arbitraria quadrica  $\mathcal{Q}$  si può rappresentare con l'equazione

$$(3.4) \quad \mathcal{Q} : P\tilde{A}P^T + bP^T + c = 0$$

rispetto a un fissato riferimento cartesiano  $RC(O, e_1, e_2, e_3)$ . Siccome  $\tilde{A}$  è una matrice simmetrica con autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , allora esiste una matrice ortogonale  $B$ , con  $\det B = +1$ , tale che

$$B^T \tilde{A} B = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Sia  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  la base ortonormale di autovettori di  $\tilde{A}$  definita dalle colonne di  $B$ . Se indichiamo con  $P'$  il vettore riga  $(x', y', z')$ , delle coordinate del punto  $p$  nel riferimento cartesiano  $RC(O, e'_1, e'_2, e'_3)$ , allora  $P^T = BP'^T$  e quindi  $P = P'B^T$ . Sostituendo nella (3.4), si ha

$$\mathcal{Q} : P'B^T \tilde{A} B P'^T + bBP'^T + c = 0.$$

Siccome  $B^T \tilde{A} B = D$ , posto  $b' = bB$ , si ha  $\mathcal{Q} : P'DP'^T + b'P'^T + c = 0$ . Pertanto, nel riferimento cartesiano  $RC(O, e'_1, e'_2, e'_3)$ , la quadrica  $\mathcal{Q}$  ha equazione (indicando con  $(x, y, z)$  anche le nuove coordinate) del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + c = 0.$$

Se  $\lambda_1 \neq 0$ , consideriamo la traslazione definita da  $x' = x + a_1/(2\lambda_1)$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ . Rispetto a queste nuove coordinate, che indichiamo sempre con  $(x, y, z)$ , abbiamo

$$\mathcal{Q} : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_2 y + a_3 z + c' = 0.$$

Adesso esaminiamo i diversi casi che si possono avere.

- Gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$  (quindi  $rg\tilde{A} = 3$ ). In questo caso, procedendo come sopra, si trova un riferimento cartesiano rispetto al quale si ha

$$(3.5) \quad \mathcal{Q} : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \delta = 0.$$

Se  $\mathcal{Q}$  è generale ( $rgA = 4$ ), dall'equazione (3.5) si hanno i casi (1), (2), (3), (4). Se  $\mathcal{Q}$  è speciale ( $rgA = 3$ ), quindi  $\delta = 0$ , dall'equazione (3.5) si hanno i casi (7), (8).

- Esattamente uno degli autovalori  $\lambda_i$  è nullo (diciamo  $\lambda_3 = 0$ , quindi  $rg\tilde{A} = 2$ ). Procedendo come sopra, si trova un riferimento cartesiano rispetto al quale si ha

$$(3.6) \quad \mathcal{Q} : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2\gamma z + \delta = 0, \quad (\det A = -\lambda_1 \lambda_2 \gamma^2).$$

Se  $\mathcal{Q}$  è generale ( $rgA = 4$ ), dall'equazione (3.6), applicando una traslazione lungo l'asse  $z$ , si hanno i casi (5), (6).

Se  $Q$  è speciale ( $rgA = 3$ ), quindi  $\gamma = 0$  e  $\delta \neq 0$  (altrimenti si avrebbe  $rgA = 2$ ), dall'equazione (3.6) si hanno i casi (9), (10), (11).

Se  $Q$  ha  $rgA = 2$ , quindi  $\gamma = \delta = 0$ , dall'equazione (3.6) si hanno i casi (15), (16).

• Esattamente uno degli autovalori  $\lambda_i$  è non nullo (diciamo  $\lambda_3 \neq 0$ , quindi  $rg\tilde{A} = 1$ ). Procedendo come sopra, si trova un riferimento cartesiano rispetto al quale si ha

$$(3.7) \quad Q : \lambda_3 z^2 + a_1 x + a_2 y + \delta = 0, \quad (\det A = 0).$$

Se  $a_1 = 0$  e  $a_2 \neq 0$ , con una traslazione lungo l'asse  $y$ , l'equazione (3.7) diventa del tipo

$$(3.8) \quad Q : \lambda_3 z^2 + \alpha y = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Se  $a_1, a_2 \neq 0$ , con una traslazione nel piano  $xy$  ci riconduciamo al caso  $\delta = 0$ . Successivamente, con una rotazione, sempre nel piano  $xy$ , possiamo ricondurci al caso  $a_1 = 0$  oppure  $a_2 = 0$ , e quindi a un'equazione del tipo (3.8). Dall'equazione (3.8), si ha il caso (12) ( $rgA = 3, rg\tilde{A} = 1$ ).

Infine, se  $a_1 = a_2 = 0$ , dall'equazione (3.7) si hanno i casi (13), (14) quando  $\delta \neq 0$ , e il caso (17) quando  $\delta = 0$ .  $\square$

**Corollario 3.30.** *Tutte le quadriche generali a punti reali : (1), (3), (4), (5), (6), e tutti le quadriche speciali a punti reali: (7), (9), (11), (12) (nel caso del cono è necessario eliminare il vertice), sono superfici di livello regolari (qualcuna con due componenti connesse).*

**Esempio 3.31.** Abbiamo osservato che le quadriche a punti iperbolici sono rigate. Facciamo vedere che il paraboloido iperbolico (detto anche paraboloido a sella)

$$Q : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad \text{ovvero} \quad Q : \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z,$$

è una quadrica rigata. Difatti, possiamo scrivere

$$\frac{2z}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad \text{e} \quad \frac{2z}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}.$$

Di conseguenza, otteniamo le due schiere di rette del paraboloido:

$$2z = \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

e

$$2z = \mu \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Rette della stessa schiera sono sghembe e rette di schiere diverse sono complanari, inoltre per ogni punto  $p$  del paraboloido passano due rette appartenenti alle due diverse schiere. Tali rette sono l'intersezione del paraboloido col piano tangente in  $p$ .

**Esercizi 3.32.** -

1. Classificare ed esprimere con equazione canonica le seguenti quadriche

$$Q_1 : x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2 - 4x + 6y + 2z - 1 = 0,$$

$$Q_2 : x^2 + y^2 - z^2 + xy + x - 3 = 0,$$

$$Q_3 : y^2 - 2x + 2z + 1 = 0, \quad Q_4 : \alpha z^2 + 2x + 3y + 1 = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

2. Verificare che la quadrica

$$Q : x^2 + y^2 + 2xy + 2yz - 2x + y + 1 = 0$$

è un cono, e determinare il suo vertice.

3. Classificare le quadriche

$$Q_1 : 2x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + k = 0,$$

$$Q_2 : 2x^2 + ky^2 - 2ky + k = 0,$$

$$Q_3 : 2x^2 + ky^2 - 2yz + z^2 - 1 = 0,$$

al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.33.** Verificare che le seguenti applicazioni sono parametrizzazioni locali delle superfici accanto indicate.

(1)  $\varphi(u, v) = (a(\sin u)\cos v, b\cos u, c(\sin u)\sin v)$ , ellissoide,

(2)  $\varphi(u, v) = (a(\sinh u) \sinh v, b \cosh u, c(\sinh u) \cosh v)$ , iperboloide iperbolico,

(3)  $\varphi(u, v) = (a(\sinh u)\cos v, b(\sinh u)\sin v, c \cosh u)$ , iperboloide ellittico,

(4)  $\varphi(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$ , paraboloidi ellittico,

(5)  $\varphi(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$ , paraboloidi iperbolico,

dove  $a, b, c$  sono costanti positive. Inoltre, dire quali condizioni devono soddisfare le costanti  $a, b, c$  affinché, nei casi (1) – (4), le corrispondenti superfici siano di rotazione.

### 3.3. Funzioni differenziabili su superfici

Il seguente teorema è essenziale per poter poi definire il concetto di funzione differenziabile su una superficie, indipendentemente dalla parametrizzazione che uno considera.

**Teorema 3.34. (cambiamento di parametri)**

Sia  $M$  una superficie regolare. Siano

$$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

e

$$\bar{\varphi} : \bar{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3, \quad (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = (x(\bar{u}, \bar{v}), y(\bar{u}, \bar{v}), z(\bar{u}, \bar{v}))$$

due parametrizzazioni locali di  $M$ , con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) = W \neq \emptyset$ . Allora, le applicazioni

$$\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi} : \bar{\varphi}^{-1}(W) \xrightarrow{\bar{\varphi}} W \xrightarrow{\varphi^{-1}} \varphi^{-1}(W), \quad (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$$

e

$$\bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\bar{\varphi}^{-1}} \bar{\varphi}^{-1}(W), \quad (u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$$

sono diffeomorfismi tra aperti di  $\mathbb{R}^2$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Proviamo che  $f = \varphi^{-1} \circ \bar{\varphi}$  è un diffeomorfismo. Intanto  $f$  è un omeomorfismo in quanto composizione di omeomorfismi. Procediamo provando che  $f$  e  $f^{-1}$  sono differenziabili. Per provare che  $f$  è differenziabile basta vedere che è differenziabile in un generico punto di  $\bar{\varphi}^{-1}(W)$ . Sia  $\bar{q} \in \bar{\varphi}^{-1}(W)$ , quindi  $\bar{\varphi}(\bar{q}) \in W \subset M$ ,  $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{v})$ . Sia  $q = f(\bar{q}) = \varphi^{-1}(\bar{\varphi}(\bar{q})) = (u, v) \in D$ , allora  $q$  e  $\bar{q}$  sono punti di  $D$  e  $\bar{D}$  che individuano lo stesso punto  $\varphi(q) = \bar{\varphi}(\bar{q})$  di  $M$ . Siccome lo jacobiano  $J(\varphi)_q$  ha rango 2, possiamo assumere ad esempio che  $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$  abbia rango 2 in  $q$ . Consideriamo la funzione

$$F : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(u, v, t) \mapsto F(u, v, t) = \varphi(u, v) + (0, 0, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

Risulta  $F|_{D \times \{0\}} = \varphi$  e in particolare  $F(q, 0) = \varphi(q) = \bar{\varphi}(\bar{q})$ . Siccome lo jacobiano

$$J(F) = \begin{pmatrix} x_u & x_v & 0 \\ y_u & y_v & 0 \\ z_u & z_v & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 in  $q$ , dal Teorema della funzione inversa segue che esiste un intorno  $U$  di  $F(q, 0) = \varphi(q) = \bar{\varphi}(\bar{q})$  in  $\mathbb{R}^3$  ed esiste un intorno  $V$  di  $(q, 0)$  in  $D \times \mathbb{R}$  tali che

$$F^{-1} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V \subset D \times \mathbb{R}$$

sia un diffeomorfismo. Inoltre, per come definita la  $F$ , risulta

$$F^{-1}|_{U \cap M} : U \cap M \rightarrow V \cap D \quad \text{e} \quad F^{-1}|_{U \cap M} = \varphi^{-1}|_{U \cap M}.$$

Inoltre,  $\bar{\varphi} : \bar{D} \rightarrow M$  è continua e  $U \cap M$  è intorno di  $\varphi(q) = \bar{\varphi}(\bar{q})$  in  $M$ , per cui esiste  $\bar{D}_1$  intorno di  $\bar{q}$  in  $\bar{D}$  con  $\bar{\varphi}(\bar{D}_1) \subset U \cap M$ . Allora

$$f|_{\bar{D}_1} = \varphi^{-1} \circ \bar{\varphi}|_{\bar{D}_1} = F^{-1} \circ \bar{\varphi}|_{\bar{D}_1} : \bar{D}_1 \rightarrow U \cap M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow D$$

è differenziabile in quanto composizione di applicazioni differenziabili, e quindi  $f$  è differenziabile in  $\bar{q}$ . In modo analogo si prova che anche  $f^{-1}$  è differenziabile.  $\square$

**Esempio 3.35.** Un cambiamento di parametri sulla sfera  $\mathbb{S}^2$ : consideriamo su  $\mathbb{S}^2$  le seguenti parametrizzazioni locali

$$\varphi : D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\} \rightarrow \varphi(D) = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\},$$

$$(u, v) \mapsto \left( u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right),$$

e

$$\bar{\varphi} : \bar{D} = ]0, \frac{\pi}{2}[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \bar{\varphi}(\bar{D}) \subset \mathbb{S}^2,$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\sin \bar{u} \cos \bar{v}, \sin \bar{u} \sin \bar{v}, \cos \bar{u}).$$

Il cambiamento di parametri su  $W = \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) = \bar{\varphi}(\bar{D})$  è dato da

$$\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\sin \bar{u} \cos \bar{v}, \sin \bar{u} \sin \bar{v}, \cos \bar{u}) \mapsto (\sin \bar{u} \cos \bar{v}, \sin \bar{u} \sin \bar{v}).$$

Tale applicazione è differenziabile e invertibile (un diffeomorfismo), in quanto la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} \cos \bar{u} \cos \bar{v} & -\sin \bar{u} \sin \bar{v} \\ \cos \bar{u} \sin \bar{v} & \sin \bar{u} \cos \bar{v} \end{pmatrix}$$

ha rango 2 per ogni  $(\bar{u}, \bar{v}) \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \times ]0, 2\pi[$ .

**Definizione 3.36.** Siano  $M$  una superficie regolare e  $p_0$  un punto di  $M$ . Un'applicazione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  si dice differenziabile in  $p_0$  se esiste  $(D, \varphi)$  parametrizzazione locale con  $p_0 \in \varphi(D)$  tale che

$$\tilde{f} = f \circ \varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(D) \subset M \rightarrow \mathbb{R}$$

sia differenziabile. La funzione  $\tilde{f}$  è la funzione  $f$  in termini di coordinate locali. Si dice che  $f$  è differenziabile su  $M$  (rispettivamente su un aperto  $A$  di  $M$ ) se è differenziabile in  $p$  per ogni  $p \in M$  (rispettivamente per ogni  $p \in A$ ).

La definizione data è ben posta, ossia non dipende dalla parametrizzazione locale scelta. Infatti, se  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  è un'altra parametrizzazione locale con  $p_0 \in \bar{\varphi}(\bar{D})$ , allora

$$f \circ \bar{\varphi} = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \bar{\varphi}$$

è differenziabile in quanto dal Teorema 3.34 segue che è composizione di applicazioni differenziabili. Siccome  $f(p) = (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))$ , si pone

$$\frac{\partial f}{\partial u} := \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v} := \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial v} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v},$$

e risulta

$$(3.9) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}.$$

A volte, con abuso di notazione, si usa scrivere  $f(u, v)$  al posto di  $\tilde{f}(u, v)$ . L'insieme  $\mathcal{F}(M)$  di tutte le funzioni differenziabili definite su  $M$  ha una struttura naturale, così come visto nel caso di  $\mathbb{R}^n$  (cf. Sezione 1.3), di algebra reale commutativa. Analogamente per  $\mathcal{F}(A)$  con  $A$  aperto di  $M$ .

**Definizione 3.37.** Sia  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  con  $M$  superficie regolare. L'applicazione  $F$  si dice differenziabile in un punto  $p_0 \in M$  se esiste una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di  $M$  con  $p_0 \in \varphi(D)$  tale che  $F \circ \varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$  sia differenziabile. Equivalentemente,

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \mapsto F(p) = (F_1(p), \dots, F_k(p)),$$

è differenziabile se le sue funzioni componenti  $F_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  sono differenziabili.

$F$  si dice differenziabile su un aperto  $A$  di  $M$  se è differenziabile in  $p$  per ogni  $p \in A$ .

**Definizione 3.38.** Sia  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , con  $M$  superficie regolare, e sia  $p_0 \in \mathbb{R}^k$ .  $F$  si dice differenziabile in  $p_0$  se esiste  $U$  intorno di  $p_0$  ed esiste  $(D, \varphi)$  parametrizzazione locale di  $M$  con  $F(U) \subset \varphi(D)$  tali che

$$\tilde{F} = \varphi^{-1} \circ F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow F(U) \subset \varphi(D) \subset M \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$$

sia differenziabile.

Anche questa definizione è ben posta:

$$\tilde{\varphi}^{-1} \circ F = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ F.$$

$F$  si dice differenziabile su un aperto  $\tilde{A}$  di  $\mathbb{R}^k$  se è differenziabile in  $p$  per ogni  $p \in \tilde{A}$ . In particolare, può essere  $k = 1$  ed  $\tilde{A}$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ .

### Esempi 3.39.

(1) Sia  $M$  una superficie regolare. L'inclusione  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, p \mapsto p$ , è differenziabile. Infatti, in coordinate locali, l'applicazione

$$i \circ \varphi : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

è differenziabile.

(2) Se  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^k$  è differenziabile e  $M$  è una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , allora la restrizione  $f = F|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  è differenziabile. Infatti,

$$f = F|_M = F \circ i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^k$$

è differenziabile in quanto composizione di applicazioni differenziabili.

(3) L'applicazione

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow M = \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}, (u, v) \mapsto (re^{iv}, u),$$

è differenziabile ( $M$  è il cilindro di equazione cartesiana  $x^2 + y^2 = r^2$ ). Consideriamo la parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di  $M$ , dove

$$\varphi : D = \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[ \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (r \cos v, r \sin v, u).$$

L'applicazione  $F$  in coordinate locali, ovvero l'applicazione

$$\varphi^{-1} \circ F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(D) \rightarrow D, (u, v) \mapsto (r \cos v, r \sin v, u) \mapsto (u, v),$$

è l'identità su  $\mathbb{R}^2$  e quindi è differenziabile. Pertanto, la  $F$  è differenziabile.

**Osservazione 3.40.** Se  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^3$  è differenziabile con  $F(\mathbb{R}^k) \subset M$  superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , allora si può provare che  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow M$  è differenziabile (cf. [20] Theorem 3.2, p.145).

Introduciamo ora il concetto di applicazione differenziabile tra superfici.

**Definizione 3.41.** Siano  $M, \bar{M}$  superfici regolari ed  $F : M \rightarrow \bar{M}$ .  $F$  si dice differenziabile in un fissato punto  $p_0 \in M$ , se esiste una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di  $M$  con  $p_0 \in \varphi(D)$  ed esiste una parametrizzazione locale  $(\bar{D}, \tilde{\varphi})$  di  $\bar{M}$  con  $F(\varphi(D))$  contenuto in  $\tilde{\varphi}(\bar{D})$ , tali che

$$\tilde{F} := \tilde{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi : D \rightarrow \bar{D}$$

sia un'applicazione differenziabile (tra aperti di  $\mathbb{R}^2$ ). Inoltre,  $F$  si dice differenziabile su  $A$  aperto di  $M$  se è differenziabile in  $p$  per ogni  $p \in A$ .

$F : M \rightarrow \bar{M}$  si dice che è un diffeomorfismo se  $F$  è bigettiva con  $F$  ed  $F^{-1}$  applicazioni differenziabili, e in tal caso  $M$  e  $\bar{M}$  si dicono diffeomorfe.

$F$  si dice che è un diffeomorfismo locale se per ogni  $p_0 \in M$  esiste  $U$  intorno aperto di  $p_0$  in  $M$  ed esiste  $V$  intorno aperto di  $F(p_0)$  in  $\bar{M}$  tali che  $F|_U : U \rightarrow V$  sia un diffeomorfismo.

Osserviamo che anche la Definizione 3.41 è ben posta, ovvero non dipende dalle parametrizzazioni locali considerate. Infatti, prendendo (in modo opportuno) altre parametrizzazioni locali, si ha

$$\bar{\psi}^{-1} \circ F \circ \psi = (\bar{\psi}^{-1} \circ \bar{\varphi}) \circ (\bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi).$$

**Esempio 3.42.** L'applicazione  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p = (x, y, z) \mapsto x + y + z$ , è differenziabile, dove  $\mathbb{S}^2$  è la sfera unitaria di centro l'origine. Sia  $(D, \varphi)$  la parametrizzazione locale su  $\mathbb{S}^2$  definita da

$$D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}, \quad \varphi : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}).$$

La  $f$  in coordinate locali è l'applicazione

$$\tilde{f} = f \circ \varphi : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \mapsto u + v + \sqrt{1 - u^2 - v^2}$$

che è differenziabile su  $D$ . Si poteva anche osservare che

$$f = F \circ i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

è differenziabile in quanto

$$i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3, p \mapsto p, \text{ ed } F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto (x + y + z),$$

sono differenziabili.

**Esempio 3.43.** L'applicazione  $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ ,  $p \mapsto \frac{p}{\|p\|}$ , è differenziabile, dove  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  e  $\mathbb{S}^2$  è la sfera unitaria di centro l'origine. Consideriamo su  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  la parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  dove

$$D = \mathbb{R}_+ \times ]0, 2\pi[, \quad \varphi : (u, v) \mapsto (\cos v, \sin v, u).$$

Sia  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$  la parametrizzazione locale su  $\mathbb{S}^2$  definita da

$$\bar{D} = \{(\bar{u}, \bar{v}) : \bar{u}^2 + \bar{v}^2 < 1\}, \quad \bar{\varphi} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\bar{u}, \bar{v}, \sqrt{1 - (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)}).$$

Per come scelte le parametrizzazioni locali si ha  $f(\varphi(D)) \subset \bar{\varphi}(\bar{D})$ . Siccome

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi : (u, v) &\xrightarrow{\varphi} p = (\cos v, \sin v, u) \\ &\xrightarrow{f} \frac{p}{\|p\|} = \left( \frac{\cos v}{\sqrt{1 + u^2}}, \frac{\sin v}{\sqrt{1 + u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \right) \\ &\xrightarrow{\bar{\varphi}^{-1}} (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)) = \left( \frac{\cos v}{\sqrt{1 + u^2}}, \frac{\sin v}{\sqrt{1 + u^2}} \right), \end{aligned}$$

possiamo concludere che  $\bar{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi$  è differenziabile.

**Esempio 3.44.** La sfera  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e l'ellissoide  $M : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$  sono superfici diffeomorfe. Si verifichi che l'applicazione

$$f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M, (x, y, z) \mapsto (x', y', z') = (ax, by, cz),$$

è un diffeomorfismo (si noti che  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  implica  $(x'/a)^2 + (y'/b)^2 + (z'/c)^2 = 1$ ).

**Esercizio 3.45.** Sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Verificare che l'applicazione

$$f : \mathbb{S}^2(1) \rightarrow \mathbb{S}^2(|\lambda|), (x, y, z) \mapsto \lambda(x, y, z),$$

è un diffeomorfismo. Osservare che, in particolare, l'applicazione antipodale  $f : \mathbb{S}^2(1) \rightarrow \mathbb{S}^2(1), (x, y, z) \mapsto -(x, y, z)$ , è un diffeomorfismo della sfera.

**Esercizio 3.46.** Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione locale (regolare) di  $M$ . Si verifichi che l'applicazione  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  è un diffeomorfismo tra superfici.

**Esercizio 3.47.** Siano  $M_1, M_2$  due superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$  ed  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  con  $F(M_1) = M_2$ . Si verifichi che l'applicazione  $f = F|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_2$  è un diffeomorfismo tra superfici.

### 3.4. Curve su una superficie

Sia  $M$  una superficie regolare.

**Definizione 3.48.** Una **curva differenziabile** della superficie  $M$  è un'applicazione differenziabile  $\gamma : I \rightarrow M$ , dove  $I$  è un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ . In altre parole, fissato  $t_0 \in I$ , esiste  $J = ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \subset I$ , ed esiste  $(D, \varphi)$  parametrizzazione locale di  $M$ , con  $\gamma(J) \subset \varphi(D)$ , tali che

$$\tilde{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \gamma : J \rightarrow \gamma(J) \subset \varphi(D) \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$$

sia differenziabile.

Dalla definizione data segue che  $\tilde{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t)) = (u(t), v(t))$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^2$  contenuta in  $D$ . Di conseguenza, risulta

$$\gamma(t) = \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))),$$

ovvero

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

con

$$x(t) = x(u(t), v(t)), \quad y(t) = y(u(t), v(t)) \quad \text{e} \quad z(t) = z(u(t), v(t))$$

differenziabili. Quindi, una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $M$  è anche una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^3$ , per cui si può considerare il vettore tangente  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^3$ . D'altronde, se  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^3$  con  $\gamma(I) \subset M$ , allora  $\gamma : I \rightarrow M$  è una curva differenziabile della superficie  $M$  (cf. Osservazione 3.40). Quindi, una curva differenziabile di  $M$  la possiamo anche definire come un'applicazione differenziabile  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\gamma(I) \subset M$ .

Un ruolo fondamentale nello studio della geometria differenziale di una superficie regolare è svolto da due curve speciali che adesso introduciamo.

#### Curve coordinate

Fissato  $p_0 \in M$ , sia  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione locale di  $M$  con  $p_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \varphi(D)$ . Siano  $I_1, I_2$  intervalli aperti di  $\mathbb{R}$  tali che  $(u_0, v_0) \in I_1 \times I_2 \subset D$ . Consideriamo su  $M$  le seguenti curve:

$$\begin{aligned}\gamma_1 : I_1 &\rightarrow M, \gamma_1(u) = \varphi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)), \\ \gamma_2 : I_2 &\rightarrow M, \gamma_2(v) = \varphi(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)).\end{aligned}$$

$\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono curve differenziabili di  $M$ . Infatti,

$$\tilde{\gamma}_1 = \varphi^{-1} \circ \gamma_1 : I_1 \rightarrow D, u \mapsto \varphi(u, v_0) \mapsto (u, v_0),$$

e

$$\tilde{\gamma}_2 = \varphi^{-1} \circ \gamma_2 : I_2 \rightarrow D, v \mapsto \varphi(u_0, v) \mapsto (u_0, v),$$

sono curve differenziabili del dominio  $D$  di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\tilde{\gamma}_1$  è il segmento  $v = v_0$  di  $D$  e  $\tilde{\gamma}_2$  è il segmento  $u = u_0$  di  $D$ . Le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si dicono *curve coordinate* di  $M$  per  $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$  (rispetto alla parametrizzazione scelta). Più precisamente:

- $\gamma_1$  è detta **curva delle  $u$**  per  $p_0$  (definita da  $v = v_0$ ),
- $\gamma_2$  è detta **curva delle  $v$**  per  $p_0$  (definita da  $u = u_0$ ).

I vettori velocità  $\dot{\gamma}_1(u_0), \dot{\gamma}_2(v_0) \in T_{p_0} \mathbb{R}^3$  si dicono *vettori tangenti coordinati* in  $p_0$ . Risulta

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_1(u_0) &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)_{(u_0, v_0)} = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0)), \\ \dot{\gamma}_2(v_0) &= \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{(u_0, v_0)} = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0)).\end{aligned}$$

Nel seguito indicheremo il vettore  $\dot{\gamma}_1(u_0)$  con  $\varphi_u^0$  e il vettore  $\dot{\gamma}_2(v_0)$  con  $\varphi_v^0$ . Con  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  denoteremo i vettori tangenti coordinati nel generico punto  $p = \varphi(u, v) \in \varphi(D)$ .

Dalla proprietà *c*) della Definizione di superficie regolare, segue la seguente proposizione.

**Proposizione 3.49.** *I vettori tangenti coordinati  $\varphi_u^0, \varphi_v^0 \in T_{p_0} \mathbb{R}^3$  sono linearmente indipendenti*

**Esempio 3.50.** Sia  $\gamma(u)$  una curva semplice regolare del piano  $\pi_{xz}$ ,  $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u)$ ,  $u \in ]a, b[$ . Poichè la curva è regolare,  $(f'(u), g'(u)) \neq (0, 0)$ . Sia  $\Sigma$  la **superficie di rotazione** ottenuta ruotando  $\gamma(u)$  intorno all'asse  $z$ . Sappiamo che  $\Sigma$  è una superficie regolare (cf. Esempio 3.15). Una parametrizzazione locale di  $\Sigma$  è data da  $(D, \varphi)$ , dove

$$D = ]a, b[ \times ]0, 2\pi[ \quad \text{e} \quad \varphi : (u, v) \in D \mapsto \varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)).$$

Troviamo le curve coordinate  $\gamma_1(u)$  e  $\gamma_2(v)$  e i corrispondenti vettori velocità rispetto alla fissata parametrizzazione locale. Dato  $p_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \varphi(D)$ , la curva delle  $u$  per  $p_0$  è il *meridiano* per  $p_0$ , ossia

$$\gamma_1(u) = \varphi(u, v_0) = (f(u)\cos v_0, f(u)\sin v_0, g(u)).$$

Analogamente, la curva delle  $v$  per  $p_0$  è il *parallelo* per  $p_0$ , ovvero

$$\gamma_2(v) = \varphi(u_0, v) = (f(u_0)\cos v, f(u_0)\sin v, g(u_0)).$$

I corrispondenti vettori velocità sono:

$$\varphi_u^0 = \dot{\gamma}_1(u_0) = (f'(u_0)\cos v_0, f'(u_0)\sin v_0, g'(u_0)),$$

$$\varphi_v^0 = \dot{\gamma}_2(v_0) = (-f(u_0)\text{sen } v_0, f(u_0)\text{cos } v_0, 0).$$

Osserviamo che  $\varphi_u^0 \cdot \varphi_v^0 = 0$ , cioè i vettori  $\varphi_u^0, \varphi_v^0$  sono ortogonali. Inoltre,

$$\|\varphi_u^0\|^2 = (f'(u_0))^2 + (g'(u_0))^2 = \|\dot{\gamma}(u_0)\|^2 > 0 \quad \text{e} \quad \|\varphi_v^0\|^2 = f^2(u_0) > 0.$$

Nel **caso della sfera**  $\mathbb{S}^2$ , parametrizzata localmente con coordinate geografiche  $(u, v) \in D = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$ ,  $u$  colatitudine e  $v$  longitudine:

$$\varphi(u, v) = (\text{sen } u \text{cos } v, \text{sen } u \text{sen } v, \text{cos } u),$$

le curve delle  $u$  ( $v = v_0$ ) sono semicirconferenze di raggio massimo, e le curve delle  $v$  ( $u = u_0$ ) sono circonferenze contenute in piani ortogonali all'asse  $z$ .

Nel **caso della superficie torica**  $\mathbf{T}$ , una parametrizzazione locale è data da

$$\varphi(u, v) = ((a + r\text{cos } u)\text{cos } v, (a + r\text{cos } u)\text{sen } v, r \text{sen } u)$$

con  $(u, v) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$ . Rispetto a tale parametrizzazione, le curve delle  $u$  ( $v = v_0$ ) sono circonferenze date dalle intersezioni di  $T$  con semipiani contenenti l'asse, e le curve delle  $v$  ( $u = u_0$ ) sono circonferenze date dall'intersezione di  $T$  con piani ortogonali all'asse.

Nel **caso del cilindro circolare**  $M : x^2 + y^2 = r^2$ , una parametrizzazione locale è data da

$$\varphi(u, v) = (r\text{cos } v, r\text{sen } v, u)$$

con  $(u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[$ . Rispetto a tale parametrizzazione, le curve delle  $u$  ( $v = v_0$ ) sono rette date dalle intersezioni di  $M$  con semipiani contenenti l'asse, e le curve delle  $v$  ( $u = u_0$ ) sono circonferenze date dall'intersezione di  $M$  con piani ortogonali all'asse.

### 3.5. Piano tangente a una superficie

Sia  $M$  una superficie regolare.

**Definizione 3.51.** *Sia  $p \in M$ . Un vettore  $v_p \in T_p \mathbb{R}^3$  si dice **vettore tangente** in  $p$  alla superficie  $M$  se esiste  $\gamma : I \rightarrow M$  curva differenziabile di  $M$  ed esiste  $t_0 \in I$  tali che*

$$\gamma(t_0) = p \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(t_0) = v_p.$$

In particolare, i vettori coordinati  $\varphi_u^0$  e  $\varphi_v^0$  sono vettori tangenti alla superficie. Poniamo

$$T_p M := \{v_p \in T_p \mathbb{R}^3 : v_p \text{ tangente in } p \text{ alla superficie } M\}.$$

**Teorema 3.52.** *L'insieme  $T_p M$  è un sottospazio vettoriale 2-dimensionale di  $T_p \mathbb{R}^3$ , che viene detto piano tangente in  $p$  alla superficie  $M$ . Più precisamente, data una carta locale  $(D, \varphi)$ , si ha*

$$T_p M = \text{span}(\varphi_u^0, \varphi_v^0) =: \{v_p \in T_p \mathbb{R}^3 : v_p = \lambda \varphi_u^0 + \mu \varphi_v^0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Inoltre, se  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  è una curva differenziabile di  $M$  con sostegno in  $\varphi(D)$ , si ha

$$(3.10) \quad \dot{\gamma}(t) = u'(t) \varphi_u(u(t), v(t)) + v'(t) \varphi_v(u(t), v(t)).$$

In particolare, se  $p = \gamma(t_0)$ , il vettore  $v_p = \dot{\gamma}(t_0) = u'(t_0) \varphi_u^0 + v'(t_0) \varphi_v^0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(D, \varphi)$  una fissata carta locale con  $p \in \varphi(D)$ . Siccome  $\varphi_u^0$  e  $\varphi_v^0$  sono vettori tangenti linearmente indipendenti, per provare il teorema basta provare che  $T_p M = \text{span}(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$ .

“ $\subseteq$ ” Sia  $v_p \in T_p M$  e sia  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(t_0) = p$  e  $\dot{\gamma}(t_0) = v_p$ . Poniamo

$$\tilde{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t)) = (u(t), v(t)),$$

con  $\gamma(I) \subset \varphi(D)$ . Posto  $p = \varphi(u_0, v_0)$ ,

$$\varphi(u_0, v_0) = p = \gamma(t_0) = \varphi(\tilde{\gamma}(t_0)) = \varphi(u(t_0), v(t_0))$$

implica, essendo  $\varphi$  iniettiva,  $u(t_0) = u_0$  e  $v(t_0) = v_0$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi(u(t), v(t)) \\ &= (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) = (x(t), y(t), z(t)). \end{aligned}$$

Allora,

$$\dot{\gamma}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

dove

$$x'(t) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} = x_u u'(t) + x_v v'(t),$$

e analogamente

$$y'(t) = y_u u'(t) + y_v v'(t), \quad z'(t) = z_u u'(t) + z_v v'(t).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= u'(t) \left( x_u(u(t), v(t)), y_u(u(t), v(t)), z_u(u(t), v(t)) \right) \\ &\quad + v'(t) \left( x_v(u(t), v(t)), y_v(u(t), v(t)), z_v(u(t), v(t)) \right), \end{aligned}$$

da cui segue la (3.10). Inoltre, la (3.10) implica

$$v_p = \dot{\gamma}(t_0) = u'(t_0) \varphi_u^0 + v'(t_0) \varphi_v^0,$$

e quindi  $v_p \in \text{span}(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$ .

“ $\supseteq$ ” Sia  $v_p \in \text{span}(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$ ,  $v_p = \lambda \varphi_u^0 + \mu \varphi_v^0$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Per provare che  $v_p$  è un vettore tangente a  $M$ , occorre trovare una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $M$  tale che  $\gamma(t_0) = p$  e  $\dot{\gamma}(t_0) = v_p$ . Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = \varphi(u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t), \quad |t| < \varepsilon.$$

Prendendo  $\varepsilon$  abbastanza piccolo, si ha che

$$\tilde{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t)) = (u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t) \in D$$

e quindi  $\gamma([\varepsilon, \varepsilon]) \subset \varphi(D) \subset M$ , cioè  $\gamma(t)$  è una curva differenziabile di  $M$ . Tale curva soddisfa  $\gamma(0) = \varphi(u_0, v_0) = p$  e, per la (3.10), il vettore tangente è dato da

$$\dot{\gamma}(0) = u'(0)\varphi_u^0 + v'(0)\varphi_v^0 = \lambda\varphi_u^0 + \mu\varphi_v^0 = v_p.$$

Pertanto,  $v_p \in T_p M$ . □

**Osservazione 3.53.** Dal Teorema 3.52 segue che il piano tangente  $T_p M$  nel punto  $p = \varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ , è il piano per  $p$  e parallelo ai vettori  $\varphi_u^0$  e  $\varphi_v^0$ . Quindi  $T_p M$  (come insieme di punti) ha equazione cartesiana

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0.$$

In particolare, un vettore  $v_p \in T_p M$  se e solo se  $\varphi_u^0 \wedge \varphi_v^0 \cdot v_p = 0$ .

**Proposizione 3.54.** Sia  $M$  una superficie di livello regolare, quindi di equazione cartesiana  $f(x, y, z) = c$  e con  $(\nabla f)_p \neq (0, 0, 0)$  per ogni  $p \in M$ . Allora, se  $p = (x_0, y_0, z_0)$  è un fissato punto di  $M$ , il piano tangente  $T_p M$  (come insieme di punti) ha equazione cartesiana

$$(3.11) \quad f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) + f_z^0(z - z_0) = 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per provare che  $T_p M$  ha equazione cartesiana (3.11), basta provare che

$$T_p M = (\nabla f)_p^\perp,$$

ovvero i coefficienti di giacitura del piano  $T_p M$  sono le componenti di  $(\nabla f)_p$ . Sia  $v_p \in T_p M$  e sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v_p$ . Possiamo scrivere, rispetto a una fissata parametrizzazione locale,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))),$$

e quindi  $v_p = \dot{\gamma}(0) = (x'(0), y'(0), z'(0))_p$ . Poichè  $\gamma$  è una curva di  $M$ , si ha  $f(x(t), y(t), z(t)) = c$  per ogni  $t$ , e quindi

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t).$$

In particolare, per  $t = 0$ , si ha

$$f_x^0 x'(0) + f_y^0 y'(0) + f_z^0 z'(0) = 0, \text{ ovvero } (\nabla f)_p \cdot v_p = 0.$$

Ciò implica che  $v_p \in (\nabla f)_p^\perp$ , ovvero  $T_p M \subseteq (\nabla f)_p^\perp$ . Ma  $T_p M$  e  $(\nabla f)_p^\perp$  sono entrambi sottospazi di dimensione 2, per cui possiamo concludere che  $T_p M = (\nabla f)_p^\perp$ . □

**Osservazione 3.55.** Siano  $(D, \varphi, (u, v))$  e  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  due parametrizzazioni locali con intersezione  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  non vuota. Su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  consideriamo il **cambiamento di parametri**

$$\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi} : (\bar{u}, \bar{v}) \xrightarrow{\bar{\varphi}} p = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) \xrightarrow{\varphi^{-1}} (u, v) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})).$$

Allora, per ogni  $p \in \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  abbiamo

$$\begin{aligned} p &= \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (x(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), y(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), z(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))), \\ p &= \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = (x(\bar{u}, \bar{v}), y(\bar{u}, \bar{v}), z(\bar{u}, \bar{v})), \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} x(\bar{u}, \bar{v}) &= x(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), & y(\bar{u}, \bar{v}) &= y(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) & \text{e} \\ z(\bar{u}, \bar{v}) &= z(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})). \end{aligned}$$

Derivando, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{\bar{u}} &= (x_{\bar{u}}, y_{\bar{u}}, z_{\bar{u}}) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right), \\ \bar{\varphi}_{\bar{v}} &= (x_{\bar{v}}, y_{\bar{v}}, z_{\bar{v}}) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right). \end{aligned}$$

Pertanto,

$$(3.12) \quad \bar{\varphi}_{\bar{u}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \varphi_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \varphi_v, \quad \bar{\varphi}_{\bar{v}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \varphi_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \varphi_v.$$

Quindi la matrice del cambiamento di base, nel generico punto  $p \in \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$ , è data da

$$(3.13) \quad J_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}$$

che è la matrice jacobiana del cambiamento di parametri.

Adesso, poniamo

$$(x_1, x_2) = (u, v) \quad \text{e} \quad (y_1, y_2) = (\bar{u}, \bar{v}).$$

Inoltre, fissato un punto  $p \in \bar{\varphi}(\bar{D}) \cap \varphi(D)$ , poniamo

$$\partial_1^0 = \varphi_u^0, \quad \partial_2^0 = \varphi_v^0, \quad \bar{\partial}_1^0 = \bar{\varphi}_{\bar{u}}^0, \quad \bar{\partial}_2^0 = \bar{\varphi}_{\bar{v}}^0.$$

Allora,

$$T_p M = \text{span}(\partial_1^0, \partial_2^0) = \text{span}(\bar{\partial}_1^0, \bar{\partial}_2^0).$$

Posto

$$v_p = \sum_{i=1}^2 a_i \partial_i^0 \quad \text{e} \quad v_p = \sum_{i=1}^2 b_i \bar{\partial}_i^0,$$

dalla (3.12) segue che

$$(3.14) \quad \bar{\partial}_j^0 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \partial_i^0 \quad \text{e quindi} \quad a_i = \sum_{j=1}^2 b_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p).$$

### 3.6. Differenziale e derivata direzionale

Siano  $M_1, M_2$  superfici regolari,  $F : M_1 \rightarrow M_2$  un'applicazione differenziabile e  $p \in M_1$ .

**Definizione 3.56.** *Il differenziale di  $F$  in  $p$  è definito dall'applicazione*

$$F_{*p} : T_p M_1 \rightarrow T_{F(p)} M_2, \quad w_p = \dot{\gamma}(0) \mapsto F_{*p} w_p := \dot{\sigma}(0),$$

dove  $\gamma(t)$  è una curva differenziabile di  $M_1$  con  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = w_p$ , e  $\sigma(t) = F(\gamma(t))$  curva differenziabile di  $M_2$  con  $\sigma(0) = F(\gamma(0)) = F(p)$ .

**Proposizione 3.57.** *La definizione di  $F_{*p} w_p$  non dipende dalla scelta di  $\gamma$  e  $F_{*p}$  è un'applicazione lineare.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $(D, \varphi, (u, v))$  e  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  parametrizzazioni locali di  $M_1$  e  $M_2$  rispettivamente, con  $p = \varphi(u_0, v_0) \in \varphi(D)$  e  $F(\varphi(D)) \subset \bar{\varphi}(\bar{D})$ . L'applicazione

$$\tilde{F} = \bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi : D \rightarrow \bar{D}, \quad (u, v) \mapsto (F_1(u, v), F_2(u, v)),$$

è differenziabile poiché lo è la  $F$ . Sia  $w_p = a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0 \in T_p M_1$ , e quindi sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M_1$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = w_p$ . Allora,

$$\gamma(t) = \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi(u(t), v(t)) \quad \text{e} \quad w_p = \dot{\gamma}(0) = u'(0) \varphi_u^0 + v'(0) \varphi_v^0.$$

Pertanto,  $\sigma(t) = F(\gamma(t))$  soddisfa

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(t) &= \bar{\varphi}^{-1}(\sigma(t)) = \bar{\varphi}^{-1}(F(\gamma(t))) = \bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi(\tilde{\gamma}(t)) \\ &= \bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi(u(t), v(t)) = (F_1(u(t), v(t)), F_2(u(t), v(t))), \end{aligned}$$

ovvero

$$\tilde{\sigma}(t) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t)) \quad \text{con} \quad \bar{u}(t) = F_1(u(t), v(t)) \quad \text{e} \quad \bar{v}(t) = F_2(u(t), v(t)).$$

Di conseguenza,

$$\dot{\sigma}(0) = \bar{u}'(0) \bar{\varphi}_{\bar{u}}^0 + \bar{v}'(0) \bar{\varphi}_{\bar{v}}^0,$$

dove

$$\bar{u}'(0) = \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) u'(0) + \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) v'(0)$$

e

$$\bar{v}'(0) = \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) u'(0) + \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) v'(0).$$

Pertanto, siccome  $a_1 = u'(0)$  e  $a_2 = v'(0)$ , si ha

$$(3.15) \quad F_{*p} w_p = \dot{\sigma}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

La (3.15) implica che  $F_{*p} w_p$  non dipende da  $\gamma$  ma solo da  $w_p$  e da  $F$ . Inoltre, la stessa formula implica che  $F_{*p}$  è un'applicazione lineare.  $\square$

Si noti che per definire  $F_{*p}$  basta la differenziabilità nel punto  $p$ .

**Osservazione 3.58.** Dalla dimostrazione della proposizione precedente segue che la matrice jacobiana  $J(F)_p := J(\tilde{F})_{(u_0, v_0)}$  è la matrice associata a  $F_{*p}$  rispetto alle basi coordinate  $(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$  e  $(\tilde{\varphi}_u^0, \tilde{\varphi}_v^0)$ :

$$F_{*p} \varphi_u^0 = \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) \tilde{\varphi}_u^0 + \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) \tilde{\varphi}_v^0,$$

e

$$F_{*p} \varphi_v^0 = \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) \tilde{\varphi}_u^0 + \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) \tilde{\varphi}_v^0.$$

In particolare:  $F$  è un diffeomorfismo locale se e solo se  $F_{*p}$  è un isomorfismo per ogni  $p \in M_1$ .

Siano ora  $M$  una superficie regolare ed  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione differenziabile (in  $p \in M$ ). Sia  $w_p \in T_p M$ ,  $w_p = a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0$ , e quindi  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$ ,  $w_p = \dot{\gamma}(0) = u'(0) \varphi_u^0 + v'(0) \varphi_v^0$ . In tal caso  $\sigma(t) = f(\gamma(t)) = (f \circ \varphi)(u(t), v(t)) = \tilde{f}(u(t), v(t))$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}$ ,  $T_{\sigma(t)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(0) &= \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = u'(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u_0, v_0) + v'(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u_0, v_0) \\ &= a_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u_0, v_0) + a_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u_0, v_0) = w_p(\tilde{f}), \end{aligned}$$

dove  $w_p(\tilde{f})$  è la derivata direzionale di  $\tilde{f} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  rispetto a  $w_p = (a_1, a_2)_p$ .

**Definizione 3.59.** La **derivata direzionale** di  $f$  rispetto a  $w_p$  è definita da

$$w_p(f) := a_1 \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + a_2 \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0),$$

$$\text{dove} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) := \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) := \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Tale definizione non dipende dalla parametrizzazione scelta. Infatti, considerando due parametrizzazioni e facendo uso delle notazioni introdotte nella

Osservazione 3.55, posto  $w_p = \sum_{i=1}^2 a_i \partial_i^0 = \sum_{i=1}^2 b_i \bar{\partial}_i^0$ , la (3.9) e la (3.14) implicano

$$\sum_{i=1}^2 a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{j=1}^2 b_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^2 b_j \frac{\partial f}{\partial y_j}(p).$$

L'applicazione

$$(3.16) \quad (df)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, w_p \mapsto (df)_p(w_p) := \dot{\sigma}(0) = w_p(f),$$

è il **differenziale** di  $f$  in  $p$ , ed è chiaramente una forma lineare su  $T_p M$ , ovvero  $(df)_p$  è un elemento dello spazio duale  $T_p^* M$ . In particolare,

$$(df)_p(\varphi_u^0) = \varphi_u^0(f) \quad \text{e} \quad (df)_p(\varphi_v^0) = \varphi_v^0(f),$$

dove

$$(3.17) \quad \varphi_u^0(f) = \frac{\partial f}{\partial u}(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \text{e} \quad \varphi_v^0(f) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Di conseguenza, se  $w_p = a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0$ , considerate le applicazioni coordinate

$$u : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto u(p) \quad \text{e} \quad v : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto v(p),$$

si ha  $a_1 = w_p(u)$  e  $a_2 = w_p(v)$ , ovvero

$$(3.18) \quad w_p = w_p(u) \varphi_u^0 + w_p(v) \varphi_v^0.$$

Usando le notazioni  $(x_1, x_2) = (u, v)$  e  $\partial_1^0 = \varphi_u^0$ ,  $\partial_2^0 = \varphi_v^0$ , possiamo anche scrivere

$$w_p = w_p(x_1) \partial_1^0 + w_p(x_2) \partial_2^0 = \sum_{i=1}^2 w_p(x_i) \partial_i^0.$$

Inoltre, per ogni  $f_1, f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$  applicazioni differenziabili (in un intorno di  $p$ ) e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , si ottiene facilmente

- (i)  $w_p(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 w_p(f_1) + \lambda_2 w_p(f_2)$ ,
- (ii)  $w_p(f_1 f_2) = f_1(p) w_p(f_2) + f_2(p) w_p(f_1)$ .

Le proprietà (i) e (ii) ci dicono che  $w_p$  è una derivazione di  $\mathcal{F}(p)$  (algebra delle funzioni differenziabili in un intorno di  $p$ ).

Infine, siccome

$$(du)_p(\varphi_u^0) = (dv)_p(\varphi_v^0) = 1 \quad \text{e} \quad (du)_p(\varphi_v^0) = 0 = (dv)_p(\varphi_u^0),$$

allora  $\{(du)_p, (dv)_p\}$  è la base di  $T_p^* M$  duale della base coordinata  $\{\varphi_u^0, \varphi_v^0\}$  di  $T_p M$ . Inoltre,

$$(df)_p = \frac{\partial f}{\partial u}(p) (du)_p + \frac{\partial f}{\partial v}(p) (dv)_p.$$

**Definizione 3.60.** *Un campo vettoriale tangente alla superficie  $M$  è un'applicazione*

$$X : M \rightarrow \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M, p \mapsto X_p \in T_p M.$$

$X$  si dice differenziabile se per ogni funzione differenziabile  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , la funzione

$$X(f) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto X(f)(p) := X_p(f),$$

è differenziabile.

Rispetto a una fissata carta locale  $(D, \varphi)$ , i campi vettoriali locali  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  sono differenziabili. Infatti, dalla (3.17) si ha

$$\varphi_u(f) = \frac{\partial f}{\partial u} \quad \text{e} \quad \varphi_v(f) = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Inoltre, dalla (3.18) segue che un campo vettoriale tangente alla superficie  $M$  si esprime (localmente) con

$$X = a_1\varphi_u + a_2\varphi_v,$$

dove le funzioni componenti  $a_1, a_2$  sono date da

$$a_1 = X(u) \quad \text{e} \quad a_2 = X(v).$$

Quindi, tenendo anche conto della (3.14), si ha che  $X$  è differenziabile se e solo se le sue funzioni componenti  $a_1, a_2$  (rispetto a una fissata carta locale) lo sono.

Dalle proprietà della derivata direzionale  $w_p(f)$ , si ottiene che un campo vettoriale (differenziabile) tangente  $X$  si può pensare come una **derivazione** di  $\mathcal{F}(M)$  (algebra delle funzioni differenziabili su  $M$ ), ovvero come un operatore

$$X : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), f \mapsto X(f),$$

che soddisfa le seguenti proprietà

(i)  $X(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 X(f_1) + \lambda_2 X(f_2)$  e (ii)  $X(f_1 f_2) = f_1 X(f_2) + f_2 X(f_1)$  per ogni  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . In tal caso, per ogni  $p \in M$ , il vettore tangente  $X_p = X(p)$  è definito da

$$X_p = \mu_1 \varphi_u^0 + \mu_2 \varphi_v^0,$$

dove le costanti  $\mu_1, \mu_2$  sono definite da

$$\mu_1 = X(u)(p) \quad \text{e} \quad \mu_2 = X(v)(p).$$

Denotiamo con  $\mathfrak{X}(M)$  l'insieme di tutti i campi vettoriali tangenti (differenziabili) definiti su  $M$ . Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $f \in \mathcal{F}(M)$ , si possono definire in modo naturale i campi vettoriali  $X + Y, \lambda X, fX \in \mathfrak{X}(M)$ . Inoltre, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  si può definire il campo vettoriale tangente **parentesi di Lie**

$$[X, Y] : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), f \mapsto [X, Y](f) = XY(f) - YX(f).$$

In effetti, si può vedere che  $[X, Y]$  verifica (i) e (ii) e quindi è un elemento di  $\mathfrak{X}(M)$ . Naturalmente quanto detto si può ripetere per campi vettoriali tangenti a  $M$  ma definiti su un aperto  $A$  di  $M$ .

**Osservazione 3.61.** Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Se un campo vettoriale  $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$  ha la proprietà che  $\bar{X}_p \in T_p M$  per ogni  $p \in M$ , allora si può dimostrare che  $X = \bar{X}|_M \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Esercizio 3.62.** Verificare che  $\mathfrak{X}(M)$  ha una struttura algebrica di  $\mathcal{F}(M)$ -modulo indotta dalle operazioni

$$(X, Y) \mapsto X + Y, \quad (\lambda, X) \mapsto \lambda X \quad \text{e} \quad (f, X) \mapsto fX.$$

In particolare,  $(\varphi_u, \varphi_v)$  è base locale per  $\mathfrak{X}(M)$ .

Sia ora  $F : M \rightarrow \tilde{M}$  un diffeomorfismo tra due superfici regolari. Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , indichiamo con  $F_*X$  il campo vettoriale su  $\tilde{M}$  definito da

$$(3.19) \quad (F_*X)_q := F_{*p}X_p, \text{ per ogni } q \in \tilde{M}, q = F(p).$$

Dalla (3.15) segue che anche  $F_*X$  è differenziabile, quindi il differenziale definisce una corrispondenza biunivoca  $F_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(\tilde{M})$  che soddisfa (verificare per esercizio):

$$\begin{aligned} F_*(X + Y) &= F_*(X) + F_*(Y), & F_*(fX) &= (f \circ F^{-1})F_*(X) \quad \text{e} \\ (F_*(X))(g) &= X(g \circ F) \circ F^{-1}, & \text{dove } g &\in \mathcal{F}(\tilde{M}). \end{aligned}$$

### 3.7. Prima forma fondamentale

Finora ci siamo occupati esclusivamente dell'aspetto differenziale delle superfici, adesso iniziamo a occuparci dell'aspetto metrico. A tal fine introduciamo la prima forma fondamentale.

Siano  $M$  una superficie regolare,  $p$  un punto di  $M$  e  $T_pM$  il piano tangente in  $p$  ad  $M$ . Il prodotto scalare di  $T_p\mathbb{R}^3$  induce un prodotto scalare su  $T_pM$  (che è un sottospazio vettoriale di  $T_p\mathbb{R}^3$ ), definito da

$$v_p \cdot w_p := v \cdot w, \text{ per ogni } v_p, w_p \in T_pM.$$

**Definizione 3.63.** *La prima forma fondamentale di  $M$  in  $p$  è la forma quadratica  $\mathcal{I}_p$  associata al prodotto scalare indotto su  $T_pM$ . Quindi,*

$$\mathcal{I}_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad v_p \mapsto \mathcal{I}_p(v_p) = v_p \cdot v_p = \|v_p\|^2 = \|v\|^2.$$

Si noti che  $\mathcal{I}_p$  determina il prodotto scalare

$$v_p \cdot w_p = \frac{1}{2} \{ \mathcal{I}_p(v_p + w_p) - \mathcal{I}_p(v_p) - \mathcal{I}_p(w_p) \}.$$

#### Coefficienti della prima forma fondamentale

Consideriamo una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  e un punto  $p \in \varphi(D) \subset M$ ,  $p = \varphi(u_0, v_0)$ . Per ogni  $v_p, w_p \in T_pM$ , posto

$$v_p = a_1 \varphi_u^0 + b_1 \varphi_v^0 \quad \text{e} \quad w_p = a_2 \varphi_u^0 + b_2 \varphi_v^0,$$

si ha

$$v_p \cdot w_p = a_1 a_2 \varphi_u^0 \cdot \varphi_u^0 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \varphi_u^0 \cdot \varphi_v^0 + b_1 b_2 \varphi_v^0 \cdot \varphi_v^0,$$

e quindi

$$\mathcal{I}_p(v_p) = a_1^2 \varphi_u^0 \cdot \varphi_u^0 + 2a_1 b_1 \varphi_u^0 \cdot \varphi_v^0 + b_1^2 \varphi_v^0 \cdot \varphi_v^0.$$

I coefficienti

$$E(u_0, v_0) = \varphi_u^0 \cdot \varphi_u^0, \quad F(u_0, v_0) = \varphi_u^0 \cdot \varphi_v^0 \quad \text{e} \quad G(u_0, v_0) = \varphi_v^0 \cdot \varphi_v^0$$

determinano la prima forma fondamentale (e il prodotto scalare) nel punto  $p = \varphi(u_0, v_0)$ . Le tre funzioni differenziabili

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v$$

si dicono *coefficienti della prima forma fondamentale*  $\mathcal{I}$  (rispetto alla fissata parametrizzazione). Quindi, la matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

determina il prodotto scalare nel dominio  $D$ . Naturalmente le funzioni  $E, F, G$  si possono considerare definite anche su  $\varphi(D)$ , in tal caso si identificano con

$$E \circ \varphi^{-1}, F \circ \varphi^{-1}, G \circ \varphi^{-1}.$$

**Proposizione 3.64.** *Sia  $(\bar{\varphi}, \bar{D}, (\bar{u}, \bar{v}))$  un'altra parametrizzazione locale con intersezione  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  non vuota e sia  $J_c$  la matrice jacobiana del cambiamento di parametri definita dalla (3.13). Indicati con  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  i coefficienti di  $\mathcal{I}$  rispetto alla seconda parametrizzazione, si ha*

$$(3.20) \quad \begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = J_c^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J_c,$$

e quindi  $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = (\det(J_c))^2(EG - F^2)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Usiamo le notazioni introdotte nella Osservazione 3.55. Quindi, poniamo

$$(x_1, x_2) = (u, v), \quad (y_1, y_2) = (\bar{u}, \bar{v}), \quad \partial_1 = \varphi_u, \quad \partial_2 = \varphi_v, \quad \bar{\partial}_1 = \bar{\varphi}_{\bar{u}}, \quad \bar{\partial}_2 = \bar{\varphi}_{\bar{v}}.$$

Allora, la (3.12) e la matrice  $J_c$  diventano rispettivamente

$$\bar{\partial}_j = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \partial_k \quad \text{e} \quad J_c = (J_{kj}), \quad J_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial y_j}.$$

Inoltre, poniamo  $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j$  e  $\bar{g}_{ij} = \bar{\partial}_i \cdot \bar{\partial}_j$ . Allora,

$$\bar{g}_{ij} = \left( \sum_{k=1}^2 \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \partial_k \right) \cdot \left( \sum_{h=1}^2 \frac{\partial x_h}{\partial y_j} \partial_h \right) = \sum_{k,h=1}^2 J_{ki} J_{hj} g_{kh} = \sum_{k,h=1}^2 J_{ik}^T J_{hj} g_{kh},$$

e quindi  $(\bar{g}_{ij}) = J_c^T (g_{ij}) J_c$ , ovvero la (3.20).  $\square$

L'importanza della prima forma fondamentale viene dal fatto che la conoscenza di  $\mathcal{I}$  permette di studiare questioni metriche sulla superficie senza ulteriori riferimenti allo spazio ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Ad esempio, se  $\gamma(t)$  è una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(I) \subset \varphi(D)$ , si può definire la **lunghezza d'arco** in termini dei coefficienti della prima forma fondamentale:

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\mathcal{I}(\dot{\gamma}(t))} dt.$$

Se  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ , allora

$$\dot{\gamma}(t) = u'(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + v'(t)\varphi_v(u(t), v(t))$$

e quindi

$$\mathcal{I}(\dot{\gamma}(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = E(t)u'(t)^2 + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)v'(t)^2.$$

Facciamo vedere che l'espressione di  $\mathcal{I}(\dot{\gamma}(t))$  non dipende dalla particolare parametrizzazione considerata. Sia  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  un'altra parametrizzazione con  $\gamma(I) \subset \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$ . Poniamo  $(x_1(t), x_2(t)) = (u(t), v(t))$ ,  $(y_1(t), y_2(t)) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ ,  $\partial_1 = \varphi_u$ ,  $\partial_2 = \varphi_v$ ,  $\bar{\partial}_1 = \bar{\varphi}_u$ ,  $\bar{\partial}_2 = \bar{\varphi}_v$ , quindi  $(g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j)$  è la matrice della prima forma fondamentale rispetto a  $(D, \varphi)$  e  $(\bar{g}_{ij} = \bar{\partial}_i \cdot \bar{\partial}_j)$  è la matrice della prima forma fondamentale rispetto a  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|_{\bar{\varphi}}^2 &= \sum_{h,k} \frac{dy_h}{dt} \frac{dy_k}{dt} \bar{g}_{hk}(t) = \sum_{h,k} \frac{dy_h}{dt} \frac{dy_k}{dt} (\bar{\partial}_h \cdot \bar{\partial}_k)(\gamma(t)) \\ &= \sum_{h,k} \frac{dy_h}{dt} \frac{dy_k}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_h} (\partial_i)_{\gamma(t)} \cdot \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_k} (\partial_j)_{\gamma(t)} \right) \\ &= \sum_{h,k,i,j} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} \frac{dy_h}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} g_{ij}(\gamma(t)) = \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} g_{ij}(\gamma(t)) \\ &= \|\dot{\gamma}(t)\|_{\varphi}^2. \end{aligned}$$

L'angolo convesso  $\vartheta$  determinato da due curve regolari  $\alpha(t), \beta(s)$  di  $M$  che si incontrano in  $p_0 = \alpha(t_0) = \beta(s_0)$ , è definito da

$$\cos \vartheta = \frac{\dot{\alpha}(t_0) \cdot \dot{\beta}(s_0)}{\|\dot{\alpha}(t_0)\| \|\dot{\beta}(s_0)\|}.$$

In particolare, l'angolo convesso  $\vartheta$  tra le curve coordinate per  $p_0$  è dato da

$$\cos \vartheta = \frac{\varphi_u^0 \cdot \varphi_v^0}{\|\varphi_u^0\| \|\varphi_v^0\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Quindi, le curve coordinate di una parametrizzazione locale sono ortogonali se e solo se  $F = 0$ . Le coordinate  $(u, v)$  di una parametrizzazione regolare  $(D, \varphi)$  per cui  $E = G$  e  $F = 0$  si dicono **coordinate isoterme**. Si può dimostrare (teorema non banale) che per ogni fissato punto  $p$  di una superficie regolare esiste una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di coordinate isoterme con  $p \in \varphi(D)$  (cf., ad esempio, [9] p.227).

Data la curva differenziabile  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ , possiamo considerare la lunghezza d'arco

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}(t) dt,$$

da cui segue

$$ds/dt = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}(t),$$

e quindi

$$(ds/dt)^2 = E(t)(du/dt)^2 + 2F(t)(du/dt)(dv/dt) + G(t)(dv/dt)^2,$$

che in forma abbreviata si esprime con

$$(3.21) \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Spesso la prima forma fondamentale di una superficie regolare si esprime con la formula (3.21), e  $ds$  è detto *elemento di lunghezza d'arco*. In particolare, se  $E = G = 1$  e  $F = 0$ , allora  $ds^2 = du^2 + dv^2$  che è una “forma infinitesimale” del Teorema di Pitagora.

**Esempio 3.65.** Siano  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  e  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$  due vettori ortonormali di  $\mathbb{R}^3$ . Il piano  $M$  per  $p_0(x_0, y_0, z_0)$  e parallelo ai vettori  $\vec{a}, \vec{b}$ , è parametrizzato da

$$\varphi(u, v) = (x_0 + u a_1 + v b_1, y_0 + u a_2 + v b_2, z_0 + u a_3 + v b_3), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Quindi,

$$\varphi_u = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{e} \quad \varphi_v = (b_1, b_2, b_3).$$

I coefficienti della 1<sup>a</sup> forma fondamentale sono

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = \|\vec{a}\|^2 = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{e} \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = \|\vec{b}\|^2 = 1.$$

In particolare, se  $\vec{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{b} = (0, 1, 0)$  e  $p_0 = O(0, 0, 0)$ , allora  $M$  è il piano  $\mathbb{R}^2 : z = 0$ .

Se consideriamo l'aperto del piano  $\mathbb{R}^2$  parametrizzato con le coordinate polari:  $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0)$ ,  $(u, v) \in D = ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$ , allora

$$\varphi_u = (\cos v, \sin v, 0) \quad \text{e} \quad \varphi_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

e i corrispondenti coefficienti di  $\mathcal{I}$  sono  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = u^2$ .

**Esercizio 3.66.** Siano  $(u, v)$  le usuali coordinate cartesiane e denotiamo con  $(\bar{u}, \bar{v})$  le coordinate polari definite in  $D = ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$ . Si verifichi per tali parametrizzazioni la (3.20).

**Esempio 3.67.** Sia  $\Sigma$  la superficie di rotazione con la parametrizzazione locale (cf. Esempio 3.15 )

$$\varphi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad u \in ]a, b[ \quad \text{e} \quad v \in ]0, 2\pi[.$$

Assumiamo che la curva regolare  $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u)$ , sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Siccome i vettori  $\varphi_u, \varphi_v$  sono dati da

$$\varphi_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \quad \text{e} \quad \varphi_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0),$$

allora i coefficienti della 1<sup>a</sup> forma fondamentale sono

$$E = \|\varphi_u\|^2 = \|\dot{\gamma}(u)\|^2 = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0 \quad \text{e} \quad G = \|\varphi_v\|^2 = f^2(u) > 0.$$

In particolare, se consideriamo il cilindro circolare retto parametrizzato localmente da

$$\varphi(u, v) = (\cos v, \sin v, u), \quad \text{con} \quad u \in ]a, b[ \quad \text{e} \quad v \in ]0, 2\pi[,$$

otteniamo

$$E = \|\varphi_u\|^2 = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0 \quad \text{e} \quad G = \|\varphi_v\|^2 = 1.$$

Quindi piano e cilindro, pur essendo superfici distinte (come superfici immerse in  $\mathbb{R}^3$ ), hanno prima forma fondamentale uguale. In effetti, vedremo che le due superfici sono localmente isometriche.

**Esempio 3.68.** Sia data l'elica circolare  $\gamma(v) = (\cos v, \sin v, bv)$ ,  $b \neq 0$ . Per ogni punto di  $\gamma$  tracciamo una retta parallela al piano  $\pi_{xy} : z = 0$  e incidente l'asse  $z$ . La superficie rigata  $\Sigma$  generata da queste rette è regolare ed è detta **elicoide**. Determiniamo la prima forma fondamentale di  $\Sigma$  rispetto a una rappresentazione parametrica locale. Siano  $P(\cos v, \sin v, bv)$  il generico punto di  $\gamma$  e  $Q(0, 0, h)$  il generico punto dell'asse  $z$ . Imponendo che il vettore  $\vec{QP} = (\cos v, \sin v, bv - h)$  sia parallelo al piano  $\pi_{xy} : z = 0$ , si trova che  $h = bv$  e quindi  $\Sigma$  ha equazioni parametriche  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = bv$ . L'applicazione

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[.$$

definisce una rappresentazione parametrica locale di  $\Sigma$ . Infatti,  $\varphi$  è banalmente differenziabile e iniettiva. Inoltre,  $\varphi^{-1} : (x, y, z) \mapsto (u, v)$  è continua in quanto  $(u, v) = (x/\cos(z/b), z/b)$  se  $\cos(z/b) \neq 0$ , altrimenti  $(u, v) = (y/\sin(z/b), z/b)$ . Infine,

$$\varphi_u = (\cos v, \sin v, 0) \text{ e } \varphi_v = (-u \sin v, u \cos v, b),$$

e quindi la matrice jacobiana di  $\varphi$  ha rango 2. In particolare, i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = u^2 + b^2.$$

**Esercizio 3.69.** La superficie  $M$  ottenuta ruotando la curva  $x = \cosh z$  (del piano  $\pi_{xz}$ ) intorno all'asse  $z$  è detta **catenoide**. Determinare i coefficienti della prima forma fondamentale di  $M$  rispetto a una fissata parametrizzazione locale.

*Suggerimento:* come caso particolare dell'Esempio 3.15 si ottiene la parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = ((\cosh u) \cos v, (\cosh u) \sin v, u), \quad (u, v) \in D = \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[.$$

**Esercizio 3.70.** Verificare che i coefficienti della prima forma fondamentale della sfera  $\mathbb{S}^2$ , rispetto alle coordinate geografiche (cf. Esercizio 3.12), sono:  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = \sin^2 u$ .

**Esercizio 3.71.** Determinare la prima forma fondamentale delle seguenti superfici

$$M_1 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad M_2 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$M_3 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1, \quad M_4 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} = z.$$

*Suggerimento:* le superfici  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sono quadriche di rotazione e quindi si possono trattare come nell'Esempio 3.67 (cf. anche Esercizio 3.33).

**Esercizio 3.72.** Determinare la prima forma fondamentale di una superficie regolare rigata rispetto alla parametrizzazione definita nell'Esempio 3.17.

### 3.8. Area

Un altro concetto metrico che può essere trattato con la prima forma fondamentale è quello di area di una regione limitata di una superficie regolare  $M$ .

Diciamo *dominio* di  $M$  un sottoinsieme aperto e connesso di  $M$  il cui bordo è immagine di una circonferenza mediante un omeomorfismo differenziabile, con differenziale non nullo eccetto in un numero finito di punti. Una *regione* di  $M$  è l'unione di un dominio e del suo bordo. Infine, una regione di  $M$  è *limitata* se è contenuta in una palla di  $\mathbb{R}^3$ . Data una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di una superficie regolare  $M$ , consideriamo una regione limitata  $R$  contenuta in  $\varphi(D)$ , quindi  $R$  è immagine tramite  $\varphi$  di una regione limitata  $Q \subset D \subseteq \mathbb{R}^2$ . E' noto che la funzione  $\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|$ , definita in  $D$ , misura l'area di un parallelogramma di lati  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$ . Osserviamo che l'integrale

$$\iint_Q \|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\| \, dudv$$

non dipende dalla parametrizzazione scelta. Infatti, se  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$  è una parametrizzazione locale con  $R \subset \bar{\varphi}(\bar{D})$ ,  $\bar{Q} = \bar{\varphi}^{-1}(R) \subset \bar{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ , e  $J_c$  è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate definita dalla (3.13), si ha

$$\iint_{\bar{Q}} \|\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}\| \, d\bar{u}d\bar{v} = \iint_{\bar{Q}} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| |\det(J_c)| \, d\bar{u}d\bar{v} = \iint_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal teorema sul cambiamento di variabili per gli integrali doppi. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

**Definizione 3.73.** *Sia  $R$  una regione limitata contenuta nel dominio  $\varphi(D)$  di una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di una superficie regolare  $M$ . Diciamo area di  $R$  la quantità*

$$area(R) = \iint_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv, \quad \text{dove } Q = \varphi^{-1}(R).$$

Poichè vale l'identità

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2 = EG - F^2,$$

l'integrando di  $area(R)$  può essere scritto in termini dei coefficienti della prima forma quadratica fondamentale:

$$area(R) = \iint_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

**Esempio 3.74.** Calcoliamo l'area della sfera  $\mathbb{S}^2(r)$  di raggio  $r$  centrata nell'origine. Consideriamo la parametrizzazione locale  $(D = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[, \varphi)$  definita mediante le *coordinate geografiche* introdotte nell'Esercizio 3.12:

$$\varphi : D \rightarrow \mathbb{S}^2, (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (r(\sin u)\cos v, r(\sin u)\sin v, r\cos u).$$

Il parametro  $u$  è la *colatitudine* e il parametro  $v$  è la *longitudine* del punto  $p = \varphi(u, v)$  della sfera. Con un semplice calcolo si trova

$$\varphi_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u), \varphi_v = (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0)$$

e quindi

$$E(u, v) = r^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = r^2 \sin^2 u,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^4 \sin^2 u} = r^2 \sin u.$$

Consideriamo la regione  $R_\varepsilon = \varphi([\varepsilon, \pi - \varepsilon] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]) \subset \mathbb{S}^2$  per  $\varepsilon > 0$  “piccolo”, allora l’area

$$\begin{aligned} \text{area}(R_\varepsilon) &= \iint_{D_\varepsilon} r^2 (\sin u) \, du \, dv = r^2 \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left( \int_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \sin u \, du \right) dv \\ &= (2\pi - 2\varepsilon) r^2 [-\cos u]_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Notiamo che il dominio  $\varphi(D)$  non ricopre tutta la sfera, tuttavia la parte mancante (una semicirconferenza con i due poli) è un insieme di area nulla per cui

$$\text{area}(\mathbb{S}^2(r)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{area}(R_\varepsilon) = 4\pi r^2.$$

**Esercizio 3.75.** Consideriamo la superficie torica  $T$  con la parametrizzazione introdotta nell’Esempio 3.16. Verificare che in questo caso

$$E(u, v) = r^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = (a + r \cos u)^2,$$

$$\text{area}(R_\varepsilon) = \iint_{D_\varepsilon} r(a + r \cos u) \, du \, dv = r \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left( \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (a + r \cos u) \, du \right) dv,$$

e quindi

$$\text{area}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{area}(R_\varepsilon) = 4ar\pi^2.$$

Per una superficie regolare  $M$  si può definire l’**integrale** rispetto all’elemento d’area

$$d\sigma = |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du \, dv = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Sia  $\{(D_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$  una famiglia di parametrizzazioni locali, dove i  $D_\alpha$  sono domini limitati di integrazione tali che i corrispondenti domini  $U_\alpha = \varphi_\alpha(D_\alpha)$  ricoprono tutta la superficie  $M$ . Sia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con supporto compatto contenuto in qualche  $U_\alpha$ , allora si pone

$$(3.22) \quad \int_{U_\alpha} f \, d\sigma := \int_{D_\alpha} (f \circ \varphi_\alpha) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

dove  $(u, v)$  sono i parametri relativi alla parametrizzazione  $(D_\alpha, \varphi_\alpha)$ . Ora ricordiamo la formula del cambiamento di variabili nell’integrazione su domini di  $\mathbb{R}^2$ . Siano  $A, B$  due aperti di  $\mathbb{R}^2$ ,  $G : A \rightarrow B, x \mapsto y = G(x)$ , un diffeomorfismo e  $\det \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)$  il determinante del suo jacobiano. Se  $D \subset A$

e  $D' = G(D) \subset B$  sono domini limitati di integrazione con  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile, allora  $f \circ G : A \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(y(x))$  è integrabile e

$$(3.23) \quad \int_{D'} f(y) dy_1 dy_2 = \int_D f(G(x)) \left| \det \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \right| dx_1 dx_2.$$

Se la funzione  $f$  ha supporto contenuto in  $U_\alpha \cap U_\beta$ , tenendo conto che dalla (3.20) si ha  $\sqrt{EG - F^2}(u, v) = |\det(J_c)^{-1}| \sqrt{EG - F^2}(\bar{u}, \bar{v})$ , dove  $J_c$  è la matrice jacobiana del cambiamento di parametri, applicando la (3.23) si ottiene

$$\int_{U_\alpha} f d\sigma = \int_{U_\beta} f d\bar{\sigma}.$$

Quindi la definizione (3.22) non dipende dalla scelta della parametrizzazione locale. Più in generale, utilizzando il concetto di partizione dell'unità subordinata a un ricoprimento localmente finito (cf., ad esempio, [21]), è possibile definire l'integrale  $\int_M f d\sigma$  per  $f$  continua a supporto contenuto in un compatto di  $M$ . In particolare, se  $M$  è compatta, si può definire l'area di  $M$ .

### 3.9. Superfici orientabili

In questa sezione introduciamo il concetto di orientazione su una superficie. Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo una parametrizzazione locale  $(D, \varphi, (u, v))$  di  $M$  e un punto  $p = \varphi(u, v) \in \varphi(D)$ . Ricordiamo che la base coordinata  $(\varphi_u, \varphi_v)$  di  $T_p M$ , in quanto base ordinata, determina un'orientazione su  $T_p M$ . Se  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  è un'altra parametrizzazione locale di  $M$  con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) \neq \emptyset$ , un problema naturale che si pone è il seguente

**Problema:** per  $p \in \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$ , le basi coordinate  $(\varphi_u, \varphi_v)$  e  $(\bar{\varphi}_{\bar{u}}, \bar{\varphi}_{\bar{v}})$  determinano la stessa orientazione su  $T_p M$ ?

Per poter rispondere alla domanda posta, dobbiamo esprimere una base in funzione dell'altra. Abbiamo visto che su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  il cambiamento di base è dato dalla (3.12), ovvero

$$\bar{\varphi}_{\bar{u}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \varphi_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \varphi_v, \quad \bar{\varphi}_{\bar{v}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \varphi_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \varphi_v.$$

Quindi, le due basi coordinate  $(\varphi_u, \varphi_v)$  e  $(\bar{\varphi}_{\bar{u}}, \bar{\varphi}_{\bar{v}})$  determinano la stessa orientazione su  $T_p M$  se e solo se la matrice  $J_c$  del cambiamento di base (che è la matrice jacobiana (3.13) del cambiamento di parametri) ha  $\det(J_c) > 0$ . Allora, possiamo dare la seguente definizione (che è di natura "intrinseca").

**Definizione 3.76.** Una superficie regolare  $M$  si dice orientabile se esiste una famiglia di parametrizzazioni locali  $\mathcal{F} = \{(D_i, \varphi_i)\}_i$  tale che

- (1)  $\bigcup_i \varphi_i(D_i) = M$ ,
- (2) per ogni  $(D_1, \varphi_1), (D_2, \varphi_2) \in \mathcal{F}$ , con  $\varphi_1(D_1) \cap \varphi_2(D_2) \neq \emptyset$ , la matrice jacobiana  $J_c$  del cambiamento di parametri ha  $\det > 0$ .

La scelta di una tale famiglia determina una **orientazione** su  $M$ . Una superficie regolare che si può ricoprire con una sola parametrizzazione è banalmente orientabile. In particolare, le superfici semplici sono orientabili.

Ora vogliamo esprimere l'orientabilità dal punto di vista "estrinseco", cioè pensando la superficie immersa nello spazio  $\mathbb{R}^3$ . Un *campo vettoriale*  $X$  su una superficie regolare  $M$  è una corrispondenza

$$X : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p \mathbb{R}^3, \quad p \mapsto X(p) \in T_p \mathbb{R}^3.$$

Da non confondere con la Definizione 3.60 di campo vettoriale tangente, in generale questo  $X$  non è tangente alla superficie. In ogni caso, se  $X$  è un campo vettoriale su  $M$ , poniamo  $X(p) = \sum_{i=1}^3 X^i(p) E_i(p)$ , dove le  $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  sono dette *funzioni componenti* di  $X$ .  $X$  si dice *campo vettoriale differenziabile* su  $M$  se le sue funzioni componenti  $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  sono differenziabili. Un campo vettoriale  $N$  definito su  $M$  si dice **campo vettoriale normale** alla superficie  $M$  se  $N(p) \perp T_p M$ ,  $N(p) \neq 0$ , per ogni  $p \in M$ . In tal caso

$$T_p \mathbb{R}^3 = T_p M \oplus \text{span}(N_p).$$

**Teorema 3.77.** *Sia  $M$  una superficie regolare. Allora,  $M$  è una superficie orientabile se e solo se esiste  $N$  campo vettoriale unitario differenziabile e normale alla superficie  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $M$  una superficie orientabile e sia  $\mathcal{A} = \{(D_i, \varphi_i)\}$  una famiglia di parametrizzazioni locali che orienta  $M$ . Consideriamo una parametrizzazione  $(D, \varphi) \in \mathcal{A}$ . Su  $\varphi(D)$  possiamo definire il campo vettoriale  $N$  ponendo

$$(3.24) \quad N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \quad \forall p \in \varphi(D),$$

dove

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = EG - F^2.$$

$N$  è un campo vettoriale definito su  $\varphi(D)$ , differenziabile, unitario e normale alla superficie  $M$ . Inoltre, poiché  $M = \bigcup_i \varphi_i(D_i)$ , è possibile definire  $N$  su tutta la superficie  $M$ . Proviamo ora che la definizione di  $N$  è ben posta, cioè non dipende dalla scelta di  $(\varphi, D)$ . Siano  $(D, \varphi, (u, v))$  e  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  due parametrizzazioni di  $\mathcal{A}$  con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) \neq \emptyset$ . Indichiamo con  $N$  il campo unitario normale definito rispetto a  $(D, \varphi)$  e con  $\bar{N}$  quello definito rispetto a  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$ . Allora,

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \quad \text{e} \quad \bar{N}(p) = \frac{\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}}{\|\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}\|}$$

per ogni  $p \in \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$ . Dall'equazione (3.12), usando la matrice jacobiana  $J_c$  definita dalla (3.13), segue che

$$\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}} = \det(J_c) (\varphi_u \wedge \varphi_v),$$

e quindi

$$(3.25) \quad \bar{N}(p) = \frac{\bar{\varphi}_u \wedge \bar{\varphi}_v}{\|\bar{\varphi}_u \wedge \bar{\varphi}_v\|} = \frac{(\det(J_c) \varphi_u \wedge \varphi_v)}{|\det(J_c)| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \text{sign}(\det(J_c)) N(p).$$

Pertanto, tenendo conto che  $\mathcal{A}$  orienta  $M$ , si ha  $|\det(J_c)| = \det(J_c)$  e quindi

$$\bar{N}(p) = N(p) \quad \text{per ogni } p \in \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}).$$

Ora, essendo  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  differenziabili, dalla (3.24) segue  $N$  è differenziabile. Pertanto, esiste  $N$  campo vettoriale unitario differenziabile globalmente definito su  $M$  e normale alla stessa  $M$ .

Viceversa, sia  $N$  campo vettoriale unitario differenziabile globalmente definito su  $M$  e normale alla stessa  $M$ . Consideriamo una famiglia di parametrizzazioni locali  $\mathcal{A} = \{(D_i, \varphi_i)\}$  che ricopre  $M$ , con i domini  $D_i$  connessi. Sia  $(D, \varphi)$  un elemento di  $\mathcal{A}$ . Per ogni punto  $p = \varphi(u, v) \in \varphi(D)$ , risulta

$$f(p) := N(p) \cdot \left( \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \right)(p) = \pm 1.$$

Siccome la funzione  $f(p)$  è continua sul connesso  $\varphi(D)$ , allora  $f(p)$  deve essere costante e quindi, scambiando  $u$  con  $v$  se necessario, si ha

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(p).$$

Procedendo in questo modo con tutte le parametrizzazioni in  $\mathcal{A}$ , per ogni  $(D, \varphi), (\bar{D}, \bar{\varphi}) \in \mathcal{A}$  con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) \neq \emptyset$ , la matrice jacobiana  $J_c$  deve necessariamente avere  $\det > 0$ , altrimenti si avrebbe

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(p) = -\frac{\bar{\varphi}_u \wedge \bar{\varphi}_v}{\|\bar{\varphi}_u \wedge \bar{\varphi}_v\|}(p) = -N(p),$$

ovvero  $N(p) = 0$ , che è una contraddizione. Quindi la famiglia  $\mathcal{A}$  di parametrizzazioni, scambiando  $u$  con  $v$  in qualcuna di esse, soddisfa la condizione che definisce una superficie orientabile.  $\square$

Dal Teorema 3.77 segue che una superficie orientabile ha due orientazioni (definite da  $N$  e  $-N$ ). Osserviamo che se  $M$  non è orientabile, non esiste  $N$  globalmente, tuttavia localmente il campo vettoriale  $N$  si può sempre definire con la (3.24).

**Osservazione 3.78.** Dalla dimostrazione del Teorema 3.77 segue che è sufficiente l'esistenza di un campo vettoriale unitario continuo  $N$  per avere l'orientabilità della superficie, e tale campo vettoriale sarà poi di conseguenza differenziabile.

Non tutte le superfici sono orientabili. L'esempio più famoso è il seguente.

**Esempio 3.79. Il Nastro di Möbius (superficie non orientabile)**

Sia  $\gamma$  la circonferenza di centro  $O$  e raggio 2 del piano  $\pi_{xy}$ . Sia  $AB$  il segmento del piano  $\pi_{xz}$  definito da  $x = 2, y = 0, |z| \leq 1$ .  $C(2, 0, 0)$  è un punto di  $\gamma$  ed è il punto medio di  $AB$ . La superficie ottenuta sottoponendo il segmento  $AB$

a un movimento composto da una rotazione di  $C$  intorno all'asse  $z$  (lungo  $\gamma$ ) e contemporaneamente da una rotazione di  $AB$  intorno a  $C$  in modo tale che quando  $C$  ruota di un angolo  $v$ ,  $AB$  ruota intorno a  $C$  di un angolo  $v/2$ , è detta nastro di Möbius. Dopo una rotazione completa di  $C$  intorno all'asse  $z$ , il segmento  $AB$  è mandato in  $BA$ . Da questa costruzione, si ottiene una rappresentazione parametrica regolare locale data da

$$\begin{aligned} \varphi : D &= ]-1, 1[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow M, \\ (u, v) &\mapsto ((2 - u \sin(v/2)) \cos v, (2 - u \sin(v/2)) \sin v, u \cos(v/2)). \end{aligned}$$

Il nastro di Möbius è una superficie non orientabile. Intuitivamente, ci possiamo rendere conto della non orientabilità nel modo seguente. Se il nastro di Möbius fosse orientabile, allora dovrebbe esistere un campo unitario differenziabile  $N$  normale a  $M$ , e muovendo  $N$  lungo  $\gamma$  (supponiamo  $\gamma(0) = C = \gamma(1)$ ), si avrebbe (cf. Figura 7)

$$N_C = N_{\gamma(0)} = -N_{\gamma(1)} = -N_C \quad \text{e quindi } N_C = 0.$$

Ciò è una contraddizione in quanto  $N$  è unitario.

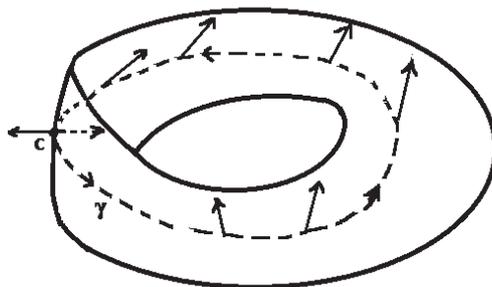


FIGURA 7. Il nastro di Möbius.

Un modo rigoroso per provare la non orientabilità del nastro di Möbius è il seguente. La parametrizzazione  $(D, \varphi)$  non ricopre tutta la superficie. Se consideriamo anche la parametrizzazione

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \bar{D} &= ]-1, 1[ \times ]\pi, 3\pi[ \rightarrow M, \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto ((2 - \bar{u} \sin(\bar{v}/2)) \cos \bar{v}, (2 - \bar{u} \sin(\bar{v}/2)) \sin \bar{v}, \bar{u} \cos(\bar{v}/2)), \end{aligned}$$

allora  $\varphi(D) \cup \bar{\varphi}(\bar{D}) = M$ . Inoltre, l'intersezione  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  è costituita da due componenti connesse:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\varphi(u, v) : 0 < v < \pi\} = \{\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) : 2\pi < \bar{v} < 3\pi\}, \\ W_2 &= \{\varphi(u, v) : \pi < v < 2\pi\} = \{\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) : \pi < \bar{u} < 2\pi\}. \end{aligned}$$

I cambiamenti di coordinate sono dati da:

$$\begin{cases} \bar{u} = -u \\ \bar{v} = v + 2\pi \end{cases} \quad \text{in } W_1, \quad \begin{cases} \bar{u} = u \\ \bar{v} = v \end{cases} \quad \text{in } W_2.$$

Ne segue che:

$$J_c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in } W_1 \quad \text{e} \quad J_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in } W_2.$$

Ciò implica che la superficie non è orientabile. Infatti, se il nastro di Möbius fosse orientabile, dovrebbe esistere un campo  $N$  differenziabile di versori normali alla superficie. Scambiando  $u$  con  $v$  se necessario, si potrebbe assumere:

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

per ogni punto  $p \in \varphi(D)$ . Inoltre, si avrebbe:

$$N(p) = \pm \frac{\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}}{\|\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}\|}$$

per ogni punto  $p \in \bar{\varphi}(\bar{D})$ , con segno costante in quanto  $\bar{D}$  connesso. D'altronde,  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) = W_1 \cup W_2$  e applicando la (3.25) a  $W_1$  e  $W_2$ , si avrebbero segni opposti per  $N$ , e quindi una contraddizione.

### Esempio 3.80. (Superfici di livello)

Ogni superficie di livello  $M : f(x, y, z) = c$ , con  $(\nabla f)_p \neq (0, 0, 0)$  per ogni  $p \in M$ , è orientabile. Infatti, nel corso della dimostrazione della Proposizione 3.54 abbiamo visto che per le superfici di livello, il gradiente  $\nabla f$  è un campo vettoriale su  $M$  ortogonale alla superficie  $M$ . Inoltre,  $\nabla f$  è differenziabile in quanto la  $f$  lo è. Pertanto,  $M$  è orientabile e

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

definisce un campo differenziabile unitario normale alla superficie  $M$ .

### Esempio 3.81. (Superficie sferica)

La sfera  $\mathbb{S}^2(r) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  è una superficie di livello con  $(\nabla f)_p = (2x, 2y, 2z)_p \neq (0, 0, 0)$  per ogni  $p \in \mathbb{S}^2$ . Pertanto,  $\mathbb{S}^2$  è orientabile e

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{r}(x, y, z), \quad \text{ossia} \quad N_p = \frac{1}{r}\vec{p}.$$

### Esempio 3.82. (Cilindro circolare retto)

Il cilindro circolare retto  $M : x^2 + y^2 = r^2$  è una superficie di livello e quindi una superficie orientabile con

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{r}(x, y, 0).$$

**Esempio 3.83. (Superficie semplice)**

Una superficie semplice  $M : z = g(x, y)$ , con  $g(x, y)$  differenziabile, è una superficie di livello e quindi una superficie orientabile con

$$N = \frac{(g_x, g_y, -1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}.$$

**Esempio 3.84. (Superficie di rotazione)**

Sia  $M$  la superficie di rotazione considerata nell'Esempio 3.15. Verifichiamo che  $M$  è un esempio di superficie orientabile. Consideriamo le parametrizzazioni locali  $(D_1, \varphi_1)$ ,  $(D_2, \varphi_2)$ , dove

$$D_1 = ]a, b[ \times ]0, 2\pi[, \quad \varphi_1(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),$$

e

$$D_2 = ]a, b[ \times ]-\pi, \pi[, \quad \varphi_2(\bar{u}, \bar{v}) = (f(\bar{u})\cos \bar{v}, f(\bar{u})\sin \bar{v}, g(\bar{u})).$$

La matrice jacobiana del cambiamento di parametri  $(u, v) \mapsto (\bar{u} = u, \bar{v} = v - \pi)$  è l'identità. Pertanto,  $\mathcal{A} = \{(D_1, \varphi_1), (D_2, \varphi_2)\}$  è un atlante che orienta  $M$ .

**Osservazione 3.85.** Intuitivamente, superfici orientabili e non orientabili si distinguono come superfici a due facce (quelle orientabili) e superfici a una sola faccia (quelle non orientabili). Basti pensare alla sfera come superficie a due facce, e al nastro di Möebius come superficie a una sola faccia.

**3.10. Struttura complessa e 2-forma d'area**

Iniziamo questa sezione introducendo la nozione di  $r$ -forma differenziale su una superficie regolare, nozione già introdotta nel caso di  $\mathbb{R}^n$  (cf. Sezione 2.8).

Una 1-forma su una superficie regolare  $M$  è una corrispondenza  $\alpha$  che ad ogni  $p \in M$  associa un elemento  $\alpha_p \in T_p^*M$ . La 1-forma  $\alpha$  si dice *1-forma differenziale* se per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , la funzione

$$\alpha(X) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \alpha(X)(p) := \alpha_p(X_p),$$

è differenziabile. Equivalentemente,

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), X \mapsto \alpha(X), \text{ è } \mathcal{F}\text{-lineare,}$$

ovvero  $\alpha$  è un elemento di  $\Lambda^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ . In particolare, per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$ , il differenziale  $(df)_p$  definito dalla (3.16) è un elemento di  $T_p^*M$ . Quindi,  $df \in \Lambda^1(M)$ . Localmente, posto  $\partial_u = \varphi_u$  e  $\partial_v = \varphi_v$ , per ogni  $\alpha \in \Lambda^1(M)$  si ha

$$\alpha = a_1 du + a_2 dv,$$

dove  $a_1 = \alpha(\partial_u)$  e  $a_2 = \alpha(\partial_v)$  sono funzioni differenziabili definite in un aperto di  $M$ . Dunque,  $(du, dv)$  è base locale per  $\Lambda^1(M)$ , duale della base locale  $(\partial_u, \partial_v)$  di  $\mathfrak{X}(M)$ .

Una 2-forma su  $M$  è una corrispondenza  $\omega$  che ad ogni  $p \in M$  associa una applicazione bilineare antisimmetrica  $\omega_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ . La 2-forma  $\omega$  si dice *2-forma differenziale* se per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , la funzione

$$\omega(X, Y) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \omega(X, Y)(p) := \omega_p(X_p, Y_p),$$

è differenziabile. Equivalentemente,

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

è un'applicazione  $\mathcal{F}$ -bilineare antisimmetrica. In particolare, per ogni 2-forma  $\omega$  si ha  $\omega(X, X) = 0$ . Denotiamo con  $\Lambda^2(M)$  l'insieme di tutte le 2-forme differenziali su  $M$ . Si noti che in generale un'applicazione  $\mathcal{F}$ -bilineare,  $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ , è un tensore covariante (differenziabile) di ordine 2. Per ogni  $\alpha, \beta \in \Lambda^1(M)$ , si può definire il *prodotto esterno*

$$\alpha \wedge \beta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), (X, Y) \mapsto (\alpha \wedge \beta)(X, Y),$$

dove

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) := \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X).$$

Chiaramente  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^2(M)$  (si noti che con lo stesso simbolo  $\wedge$  abbiamo indicato anche il prodotto vettoriale tra campi vettoriali). Localmente, per ogni 2-forma  $\omega \in \Lambda^2(M)$ , si ha

$$\omega = \omega_{12} du \wedge dv$$

dove  $\omega_{12} = \omega(\partial_u, \partial_v) = -\omega(\partial_v, \partial_u)$  è una funzione differenziabile definita in un aperto di  $M$ . Infatti,  $\omega_{11} = \omega(\partial_u, \partial_u) = 0$ ,  $\omega_{22} = \omega(\partial_v, \partial_v) = 0$  e la sola componente di  $\omega$  che può essere non nulla è  $\omega_{12}$ . Inoltre, si ha

$$(du \wedge dv)(\partial_u, \partial_v) = +1.$$

Quindi,  $du \wedge dv$  è base locale per  $\Lambda^2(M)$ . In modo analogo, uno potrebbe definire una  $r$ -forma differenziale per  $r > 2$ , ma chiaramente un'applicazione  $r$ -multilineare antisimmetrica su uno spazio vettoriale di dimensione  $n < r$  è nulla. Pertanto, una  $r$ -forma differenziale su una superficie regolare  $M$ , con  $r > 2$ , è sempre nulla.

**Teorema 3.86.** *Una superficie regolare  $M$  è orientabile se e solo se esiste una 2-forma  $\omega \in \Lambda^2(M)$  non nulla in ogni punto di  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $M$  una superficie orientabile e sia  $\mathcal{A} = \{(D_i, \varphi_i)\}$  una famiglia di parametrizzazioni locali che orienta  $M$ . Consideriamo una parametrizzazione  $(D, \varphi) \in \mathcal{A}$ . Su  $\varphi(D)$  possiamo definire la 2-forma differenziale non nulla

$$(3.26) \quad \omega = \|\partial_u \wedge \partial_v\| du \wedge dv = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

Inoltre, poiché  $M = \bigcup_i \varphi_i(D_i)$ , possiamo definire con la (3.26) una 2-forma  $\omega$  non nulla su tutta la superficie  $M$ . Proviamo che tale definizione di  $\omega$  è ben posta, cioè non dipende dalla scelta di  $(D, \varphi)$ . Siano  $(D, \varphi, (u, v))$  e  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  due elementi di  $\mathcal{A}$  con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) \neq \emptyset$ . Sia  $\omega$  la 2-forma differenziale definita su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  rispetto a  $(D, \varphi)$  e  $\bar{\omega}$  quella definita rispetto a  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$ . Allora,

$$\omega = \|\partial_u \wedge \partial_v\| du \wedge dv \quad \text{e} \quad \bar{\omega} = \|\partial_{\bar{u}} \wedge \partial_{\bar{v}}\| d\bar{u} \wedge d\bar{v}.$$

Dall'equazione (3.12), usando la matrice jacobiana  $J_c$  definita dalla (3.13), si ha

$$\|\partial_{\bar{u}} \wedge \partial_{\bar{v}}\| = |\det(J_c)| \|\partial_u \wedge \partial_v\|,$$

e

$$du \wedge dv = (du \wedge dv)(\partial_{\bar{u}}, \partial_{\bar{v}})(d\bar{u} \wedge d\bar{v}) = \dots = \det(J_c) (d\bar{u} \wedge d\bar{v}).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \omega &= \|\partial_u \wedge \partial_v\| du \wedge dv = |\det(J_c)|^{-1} \|\partial_{\bar{u}} \wedge \partial_{\bar{v}}\| \det(J_c) d\bar{u} \wedge d\bar{v} \\ &= \text{sign}(\det(J_c)) \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Siccome  $M$  è orientabile, si ha  $|\det(J_c)| = \det(J_c)$  e quindi

$$\bar{\omega} = \omega \quad \text{su } \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}).$$

Ora, essendo  $du$  e  $dv$  differenziabili, dalla (3.26) segue  $\omega$  è differenziabile. Pertanto, esiste una 2-forma differenziale globalmente definita su  $M$  e non nulla.

Viceversa, sia  $\omega$  una 2-forma differenziale globalmente definita su  $M$  e non nulla in ogni punto di  $M$ . Consideriamo una famiglia di parametrizzazioni locali  $\mathcal{A} = \{(D_i, \varphi_i)\}$  che ricopre  $M$ . Sia  $(D, \varphi)$  un elemento di  $\mathcal{A}$ . Su  $\varphi(D)$  la forma  $\omega$  è data da

$$\omega = f_1 du \wedge dv,$$

dove  $f_1$  è una funzione differenziabile su  $\varphi(D)$  e non nulla. Scambiando  $u$  con  $v$ , se necessario, possiamo assumere  $f_1 > 0$ . Procediamo allo stesso modo con tutte le parametrizzazioni in  $\mathcal{A}$ . Allora, se  $(D, \varphi, (u, v))$  e  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  sono due parametrizzazioni di  $\mathcal{A}$  con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) \neq \emptyset$ , su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  abbiamo

$$\omega = f_1 du \wedge dv \quad \text{e} \quad \bar{\omega} = f_2 d\bar{u} \wedge d\bar{v},$$

dove  $f_1, f_2$  sono funzioni differenziabili positive e definite su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$ . D'altronde, su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  abbiamo

$$du \wedge dv = \det(J_c) (d\bar{u} \wedge d\bar{v}).$$

Di conseguenza, su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  si ha

$$f_2 = f_1 \det(J_c).$$

Pertanto, la matrice jacobiana  $J_c$  deve necessariamente avere  $\det > 0$ . Quindi la famiglia di parametrizzazioni  $\mathcal{A}$  soddisfa la condizione che definisce una superficie orientabile.  $\square$

**Definizione 3.87.** Una 2-forma  $\Omega \in \Lambda^2(M)$  non nulla in ogni punto di  $M$  si dice **2-forma d'area** per  $M$  se (localmente) esiste una base ortonormale  $E_1, E_2$  di  $\mathfrak{X}(M)$  tale che  $\Omega(E_1, E_2) = +1$ .

Il nome di 2-forma d'area è giustificato dalle seguenti considerazioni. Sia  $\Omega$  una 2-forma d'area. Per quanto detto in precedenza, localmente la 2-forma  $\Omega$  si esprime con

$$\Omega = \Omega_{12} du \wedge dv$$

dove  $\Omega_{12} = \Omega(\partial_u, \partial_v) = -\Omega(\partial_v, \partial_u)$ . Siccome  $\Omega$  è una 2-forma d'area, esiste  $(E_1, E_2)$  base (locale) ortonormale di campi vettoriali tale che  $\Omega(E_1, E_2) = 1$ . Poniamo,

$$\partial_u = a_{11}E_1 + a_{21}E_2, \quad \partial_v = a_{12}E_1 + a_{22}E_2, \quad A = (a_{ij}).$$

Allora,

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= \Omega(\partial_u, \partial_v) = \Omega(a_{11}E_1 + a_{21}E_2, a_{12}E_1 + a_{22}E_2) \\ &= a_{11}a_{22}\Omega(E_1, E_2) + a_{12}a_{21}\Omega(E_2, E_1) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \det A. \end{aligned}$$

D'altronde, posto  $\partial_1 = \partial_u$ ,  $\partial_2 = \partial_v$  e  $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j$ , si ha

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \partial_i \cdot \partial_j = \left( \sum_k a_{ki}E_k \right) \cdot \left( \sum_h a_{hj}E_h \right) = \left( \sum_{kh} a_{ki}a_{hj}\delta_{kh} \right) \\ &= \left( \sum_h a_{hi}a_{hj} \right) = \left( \sum_h a_{ih}^T a_{hj} \right), \end{aligned}$$

e quindi  $\det(g_{ij}) = (\det A)^2$ , ovvero  $(\det A)^2 = EG - F^2$ . Pertanto,

$$\Omega = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv = \|\partial_u \wedge \partial_v\| du \wedge dv$$

che si può confrontare con l'integrando nella Definizione 3.73 di area.

**Definizione 3.88.** Una **struttura complessa** su una superficie regolare  $M$  è un endomorfismo  $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , quindi  $\mathcal{F}$ -lineare, tale che  $J^2 = -I$ .

Si dice anche che  $J$  è un tensore (differenziabile) di tipo  $(1,1)$  su  $M$  tale che  $J^2 = -I$ . Nel seguito l'ortogonalità e l'antisimmetria di  $J$  sarà sempre riferita alla prima forma fondamentale. Più precisamente, un endomorfismo  $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  si dice **antisimmetrico** se

$$JX \cdot Y = -X \cdot JY;$$

$J$  si dice **ortogonale** se

$$JX \cdot JY = X \cdot Y$$

(in tal caso si dice pure che il prodotto scalare è **hermitiano** rispetto a  $J$ ).

**Proposizione 3.89.** Siano  $M$  una superficie regolare e  $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  un endomorfismo. Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti:

- 1)  $J$  è una struttura complessa ortogonale;
- 2)  $J$  è una struttura complessa antisimmetrica;
- 3)  $J$  è un endomorfismo ortogonale e antisimmetrico.

**DIMOSTRAZIONE.** 1)  $\implies$  2). Sia  $J$  una struttura complessa ( $J^2 = -I$ ) ortogonale ( $JX \cdot JY = X \cdot Y$ ). Allora,  $J$  è antisimmetrica in quanto

$$JX \cdot Y = J^2X \cdot JY = -X \cdot JY.$$

2)  $\implies$  3). Sia  $J$  una struttura complessa ( $J^2 = -I$ ) antisimmetrica ( $JX \cdot Y = -X \cdot JY$ ). Allora,  $J$  è ortogonale in quanto

$$JX \cdot JY = -J^2X \cdot Y = X \cdot Y.$$

3)  $\implies$  1). Sia  $J$  un endomorfismo ortogonale ( $JX \cdot JY = X \cdot Y$ ) e antisimmetrico ( $JX \cdot Y = -X \cdot JY$ ). Allora,  $J$  è una struttura complessa. Infatti, fissato  $X$ , per ogni  $Y$

$$J^2X \cdot Y = -JX \cdot JY = -X \cdot Y$$

implica  $J^2X = -X$ , e quindi  $J^2 = -I$ . □

**Teorema 3.90.** *Sia  $M$  una superficie regolare. Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- 1)  $M$  è orientabile;
- 2) esiste  $J$  struttura complessa ortogonale su  $M$ ;
- 3) esiste una 2-forma d'area per  $M$ .

**DIMOSTRAZIONE.** 1)  $\implies$  2). Sia  $N$  un fissato campo vettoriale unitario normale che orienta  $M$  (cf. Teorema 3.77). Per ogni fissato  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , indichiamo con  $JX$  il campo vettoriale definito da

$$JX \cdot Y = \text{vol}(X, Y, N) = X \wedge Y \cdot N = N \wedge X \cdot Y \quad \text{per ogni } Y \in \mathfrak{X}(M),$$

quindi

$$JX = N \wedge X.$$

In particolare,  $JX$  è tangente alla superficie in quanto  $JX \cdot N = N \wedge X \cdot N = 0$ , ed è differenziabile in quanto  $N$  e  $X$  sono differenziabili. Dalla definizione di  $J$  segue facilmente che  $J(X_1 + X_2) = JX_1 + JX_2$  e  $J(fX) = fJX$ . Quindi, abbiamo un endomorfismo  $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  che soddisfa

$$JX \cdot Y = N \wedge X \cdot Y = -N \wedge Y \cdot X = -JY \cdot X = -X \cdot JY,$$

quindi  $J$  è un endomorfismo *antisimmetrico*. Inoltre, sempre dalla definizione di prodotto vettoriale segue che  $\|JX\| = \|X\|$ . Di conseguenza,  $\|J(X+Y)\|^2 = \|X+Y\|^2$  implica che

$$JX \cdot JY = X \cdot Y,$$

ovvero  $J$  è ortogonale. Pertanto, per la Proposizione 3.89,  $J$  è una struttura complessa. Naturalmente, se consideriamo l'orientazione definita da  $-N$ , la struttura complessa corrispondente è  $-J$ .

2)  $\implies$  3). Sia  $J$  una struttura complessa ortogonale. La forma bilineare antisimmetrica  $\Omega$  definita da

$$\Omega(X, Y) = JX \cdot Y$$

è una 2-forma non nulla in ogni punto di  $M$ . In particolare, rispetto a una base (locale) ortonormale  $(E_1, E_2 = JE_1)$  si ha

$$\Omega(E_1, E_2) = JE_1 \cdot E_2 = JE_1 \cdot JE_1 = E_1 \cdot E_1 = +1.$$

Quindi,  $\Omega$  è una 2-forma d'area per la superficie  $M$ .

3)  $\implies$  1). Siccome una 2-forma d'area è una 2-forma non nulla, l'implicazione segue dal Teorema 3.86.  $\square$

**Osservazione 3.91.** Una assegnata 2-forma d'area  $\Omega$  determina in modo intrinseco una struttura complessa ortogonale  $J$  su  $M$ . Basta definire l'endomorfismo  $J$  con la relazione

$$JX \cdot Y = \Omega(X, Y).$$

Se  $E_1, E_2$  è una base ortonormale locale positiva di campi vettoriali, ovvero  $\Omega(E_1, E_2) = +1$ , allora

$$JE_1 \cdot E_1 = \Omega(E_1, E_1) = 0 \text{ e } JE_1 \cdot E_2 = \Omega(E_1, E_2) = +1$$

implicano  $JE_1 = E_2$ . Analogamente,  $JE_2 = -E_1$ . Pertanto,  $J$  è una struttura complessa, ovvero  $J^2 = -I$ . Inoltre, è facile vedere che  $J$  è una trasformazione ortogonale:

$$JX \cdot JY = \Omega(X, JY) = -\Omega(JY, X) = -J^2Y \cdot X = Y \cdot X.$$

Naturalmente, se  $N$  è un campo vettoriale unitario normale che orienta la superficie  $M$ , la corrispondente 2-forma d'area  $\Omega$  è definita da

$$\Omega(X, Y) = JX \cdot Y = N \wedge X \cdot Y = X \wedge Y \cdot N.$$

**Osservazione 3.92.** Sia  $\Omega$  una 2-forma d'area su una superficie regolare orientabile  $M$ . Allora, per ogni 2-forma  $F \in \Lambda^2(M)$  si ha

$$F = f\Omega$$

con  $f$  funzione differenziabile su  $M$ . Più precisamente, rispetto a una fissata parametrizzazione locale  $(D, \varphi, (u, v))$  abbiamo  $F = F_{12} du \wedge dv$ ,  $\Omega = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$  e quindi  $f = F_{12}/\sqrt{EG - F^2}$ .

**Esercizio 3.93.** Sia  $\mathbb{S}^2$  la sfera unitaria di centro l'origine. Indichiamo con  $J$  la struttura complessa corrispondente a una fissata orientazione di  $\mathbb{S}^2$ . Siano  $X, Y$  i campi vettoriali definiti da  $X_p = (0, -z, y)$ ,  $Y_p = (-y, x, 0)$  per ogni  $p = (x, y, z) \in M$ . Dopo aver verificato che  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$  ed esplicitato  $JX$  e  $JY$ , si verifichi che  $JX \cdot JY = X \cdot Y$ .

*Soluzione.* Si considera su  $\mathbb{S}^2$  l'orientazione definita dal campo normale  $N_p = \vec{p} = (x, y, z)_p$ . Dall'Osservazione 3.61 segue che  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ . Infine,

$$JX = N \wedge X = (y^2 + z^2, -xy, -xz) \text{ e } JY = N \wedge Y = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$$

e

$$JX \cdot JY = -xz(y^2 + z^2) + xy^2z - x^3z - xy^2z = -xz(1 - x^2) - x^3z = -xz = X \cdot Y.$$

**Osservazione 3.94.** Un importante fatto da osservare è che del Teorema 3.90 si può dare una dimostrazione intrinseca, ossia senza fare uso del Teorema 3.77, del campo normale  $N$  e del prodotto vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ . In effetti, si può procedere nel modo seguente. Assumiamo  $M$  orientabile (si noti che la Definizione 3.76 è intrinseca). Dalla dimostrazione del Teorema 3.86 (si noti che pure tale Teorema è di natura intrinseca), ponendo localmente

$$\Omega = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv,$$

si ottiene che  $\Omega$  è una 2-forma non nulla definita globalmente su tutta la superficie. Verifichiamo che tale 2-forma è una 2-forma d'area. Sia  $E_1, E_2$  una base ortonormale locale,  $E_i = \sum_k b_{ki} \partial_k$ , dove  $B = (b_{ki})$  è la matrice del cambiamento di base che possiamo assumere (scambiando, se necessario,  $E_1$  con  $E_2$ ) abbia  $\det B > 0$ . Indicata con  $(g_{ij})$  la matrice della prima forma fondamentale, un semplice calcolo prova che

$$B^T (g_{ij}) B = I, \quad \text{e quindi} \quad (\det B) \sqrt{EG - F^2} = +1.$$

Allora,

$$\Omega(E_1, E_2) = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv(E_1, E_2) = \sqrt{EG - F^2} \det B = +1.$$

Pertanto,  $M$  orientabile implica l'esistenza di una 2-forma d'area. Poi, l'esistenza di una 2-forma d'area  $\Omega$  implica l'esistenza di una struttura complessa ortogonale  $J$ , basta definire  $JX$  con  $JX \cdot Y = \Omega(X, Y)$  (cf. Osservazione 3.91). Infine, se  $J$  è una struttura complessa ortogonale (e quindi antisimmetrica), ponendo  $\Omega(X, Y) = JX \cdot Y$  si ottiene una 2-forma non nulla e quindi, applicando il Teorema 3.86,  $M$  è orientabile.



## Operatore forma e curvatures di una superficie

Nello studio di una curva  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{R}^3$ , si è visto che la lunghezza di  $T'(s) = \ddot{\gamma}(s)$ , ovvero la misura della variazione del versore tangente, determina la curvatura di  $\gamma$ . Nel caso di una superficie, la situazione è ovviamente più articolata, basti pensare che una superficie può curvarsi lungo più direzioni (quelle che determinano il piano tangente) e in modo diverso. L'operatore forma, che è definito come la variazione del campo normale  $N$  lungo le diverse direzioni del piano tangente, e quindi studia la variazione dello stesso piano tangente, è lo strumento tecnico che ci permette di definire le curvatures per una superficie. In effetti, se pensiamo  $N$  come una derivata prima (infatti è definito da  $\varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ ), l'operatore forma può essere visto come una derivata seconda, e quindi uno si aspetta che in qualche modo possa definire le curvatures per una superficie.

### 4.1. L'operatore forma e la seconda forma fondamentale

La prima forma fondamentale permette di studiare la geometria intrinseca della superficie, con la seconda forma fondamentale (equivalentemente, con l'operatore forma, detto anche operatore di Weingarten) si studia la geometria estrinseca della superficie. Più precisamente, l'operatore forma svolge un ruolo fondamentale per determinare la "forma" di una superficie  $M$  nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ .

Sia  $M$  una superficie regolare e sia  $N$  un campo unitario differenziabile normale a  $M$ . In generale, se  $M$  non è orientabile,  $N$  è definito solo localmente. Supponiamo  $N = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $U = \varphi(D)$  con  $(D, \varphi)$  carta locale di  $M$ . Se  $\gamma : I \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$ , è una curva differenziabile di  $M$  con sostegno in  $U$ , si può considerare il campo  $N$  lungo  $\gamma(t)$ , cioè

$$N(t) := N(\gamma(t)) = (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t)), f_3(\gamma(t))) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$

e il suo derivato

$$N'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)).$$

Derivando  $N(t) \cdot N(t) = \text{cost} = 1$ , si ottiene

$$N'(t) \cdot N(t) = 0 \text{ per ogni } t, \text{ e quindi } N'(t) \in T_{\gamma(t)}M.$$

In particolare, in  $p = \gamma(t_0)$  risulta

$$N'(t_0) \cdot N_p = 0, \text{ cioè } N'(t_0) \in T_pM.$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

**Definizione 4.1.** *L'operatore forma (detto anche operatore di Weingarten) di  $M$  in un fissato punto  $p$  è l'applicazione*

$$S_p : T_p M \rightarrow T_p M, \quad v_p \mapsto S_p(v_p) := -N'(\gamma(t_0))$$

dove  $N$  è definito in un intorno del punto  $p$  e  $\gamma(t) : I \rightarrow M$  è una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(t_0) = p$  e  $\dot{\gamma}(t_0) = v_p$ .

Osserviamo che la definizione di  $S_p$  dipende dalla scelta di  $N$  (che è definito localmente), quindi cambiando  $N$  con  $-N$  l'operatore  $S_p$  cambia di segno.

**Teorema 4.2.** *L'operatore forma  $S_p$  è un endomorfismo simmetrico del piano tangente  $T_p M$  che, rispetto a una fissata parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di  $M$  con  $p \in \varphi(D)$ , soddisfa*

$$S_p(\varphi_u^0) = -N_u^0 \quad e \quad S_p(\varphi_v^0) = -N_v^0.$$

*In particolare,  $S_p(v_p)$  non dipende dalla scelta della curva  $\gamma$ , ma solo da  $v_p$  (e da  $N$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione locale di  $M$  con  $p \in \varphi(D)$ ,  $p = \varphi(u_0, v_0)$ . Per ipotesi  $N$  è definito in un intorno di  $p$ . Supponiamo  $N = (f_1, f_2, f_3)$ , dove  $(f_1, f_2, f_3)$  sono funzioni differenziabili definite su  $\varphi(D)$ . Per ogni  $q = \varphi(u, v) \in \varphi(D)$ , risulta

$$N(q) = N(\varphi(u, v)) = \left( f_1(\varphi(u, v)), f_2(\varphi(u, v)), f_3(\varphi(u, v)) \right).$$

Possiamo quindi scrivere  $N(q) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ . Siano  $N_u, N_v$  i campi vettoriali derivati di  $N$  definiti da

$$N_u = \left( \frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right)_q \quad e \quad N_v = \left( \frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right)_q.$$

Osserviamo che  $N_u$  e  $N_v$  sono differenziabili in quanto le  $f_i$  lo sono. Inoltre  $N_u$  e  $N_v$  sono tangenti a  $M$  in quanto

$$N_u = N'(\gamma_1(t)) \quad e \quad N_v = N'(\gamma_2(t))$$

dove  $\gamma_1(t) = \gamma_1(u) = \varphi(u, v)$  è la curva delle  $u$  e  $\gamma_2(t) = \gamma_2(v) = \varphi(u, v)$  è la curva delle  $v$ .

Ora, dato un vettore  $v_p$  di  $T_p M$ ,  $v_p = a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0$ , sia  $\gamma(t) : I \rightarrow M$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(t_0) = p$  e  $\dot{\gamma}(t_0) = v_p$ . Consideriamo la curva  $\tilde{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t)) = (u(t), v(t))$  (curva di  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  che corrisponde a  $\gamma$ ) e quindi  $\gamma(t) = \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi(u(t), v(t))$ . Ricordiamo che

$$\dot{\gamma}(t_0) = u'(t_0) \varphi_u^0 + v'(t_0) \varphi_v^0 = a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0.$$

Il campo normale  $N$  lungo  $\gamma(t)$  è dato da  $N(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ , ovvero

$$N(t) = N(\gamma(t)) = (f_1(\varphi(u(t), v(t))), f_2(\varphi(u(t), v(t))), f_3(\varphi(u(t), v(t)))).$$

Pertanto,

$$N'(t) = \left( \frac{df_1}{dt}, \frac{df_2}{dt}, \frac{df_3}{dt} \right)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^3 \frac{df_i}{dt} E_i(t),$$

dove

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial v} \frac{dv}{dt} = u'(t) \frac{\partial f_i}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial f_i}{\partial v},$$

da cui segue

$$N'(t) = u'(t) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial u} E_i(t) + v'(t) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial v} E_i(t),$$

e quindi

$$N'(t) = u'(t) N_u(t) + v'(t) N_v(t).$$

Per  $t = t_0$  risulta

$$N'(t_0) = N'(\gamma(t_0)) = u'(t_0) N_u^0 + v'(t_0) N_v^0 = a_1 N_u^0 + a_2 N_v^0,$$

ossia

$$(4.1) \quad S_p(v_p) = -N'(t_0) = -a_1 N_u^0 - a_2 N_v^0.$$

Dalla (4.1) segue che  $S_p(v_p)$  dipende solo da  $v_p$  (e da  $N$ ) e non dalla curva  $\gamma$ . Inoltre, sempre dalla (4.1), segue che

$$S_p(\lambda v_p + \mu w_p) = \lambda S_p(v_p) + \mu S_p(w_p).$$

In particolare, dalla (4.1), per  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 0$  si ha  $S_p(\varphi_u^0) = -N_u^0$ , e per  $a_1 = 0$  e  $a_2 = 1$  si ha  $S_p(\varphi_v^0) = -N_v^0$ . Infine, proviamo che  $S_p$  è simmetrico:

$$S_p(v_p) \cdot w_p = v_p \cdot S(w_p).$$

Poichè  $S_p$  è lineare e il prodotto scalare è bilineare, basta verificare la simmetria sui vettori della base coordinata  $(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$ , ovvero:

$$S_p(\varphi_u^0) \cdot \varphi_v^0 = \varphi_u^0 \cdot S_p(\varphi_v^0).$$

Derivando  $N \cdot \varphi_u = 0$  rispetto a  $v$ , si ottiene

$$N_v \cdot \varphi_u + N \cdot \varphi_{uv} = 0$$

dove  $\varphi_{uv} = (x_{uv}, y_{uv}, z_{uv})$  è un vettore che in generale non è tangente a  $M$ . Derivando  $N \cdot \varphi_v = 0$  rispetto a  $u$ , risulta

$$N_u \cdot \varphi_v + N \cdot \varphi_{vu} = 0.$$

Siccome  $\varphi_{vu} = (x_{vu}, y_{vu}, z_{vu}) = \varphi_{uv}$ , si ha

$$S_p(\varphi_u^0) \cdot \varphi_v^0 = \varphi_u^0 \cdot S_p(\varphi_v^0).$$

□

**Osservazione 4.3.** Nella Sezione 1.3 abbiamo introdotto la derivata covariante  $\bar{\nabla}$  per campi vettoriali definiti su  $\mathbb{R}^3$  (o su aperti di  $\mathbb{R}^3$ ). Osserviamo che se  $p$  è un fissato punto di una superficie  $M$ , ogni funzione differenziabile  $f$  definita su un aperto  $A$  di  $M$ , con  $p \in A$ , si può sempre estendere localmente a un aperto di  $\mathbb{R}^3$ . Ciò vuol dire che esiste  $U_1$  intorno aperto di  $p$  in  $M$ ,  $U_1 \subset A$ , esiste  $U_2$  intorno aperto di  $p$  in  $\mathbb{R}^3$  ed esiste  $\bar{f}$  applicazione differenziabile definita su  $U_2$  tali che  $\bar{f}|_{U_1} = f|_{U_1}$  (cf., ad esempio, [21] Prop. 2.49). Analogamente per i campi vettoriali definiti su aperti di  $M$ . Pertanto, fissato  $p \in M$ , il campo normale  $N$  possiamo sempre pensarlo definito su un intorno di  $p$  in  $\mathbb{R}^3$ . Quindi, dalla definizione di operatore forma, tenendo anche presente la (1.9), segue che

$$S_p(v_p) = -\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t_0)}N = -\bar{\nabla}_{v_p}N.$$

**Esempio 4.4.** Sia  $M = \mathbb{R}^2$  (il piano euclideo). In tal caso  $M$  è orientabile e il campo normale  $N$  è costante, quindi parallelo lungo ogni curva  $\gamma(t)$  di  $\mathbb{R}^2$ , ovvero  $N'(t) = N'(\gamma(t)) = 0$ . Pertanto, l'operatore forma  $S_p = 0$  per ogni  $p \in \mathbb{R}^2$ .

**Definizione 4.5.** La seconda forma fondamentale di  $M$  in  $p$  è la forma quadratica  $\mathcal{II}_p$  associata all'operatore forma  $S_p$ . Quindi,

$$\mathcal{II}_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad v_p \mapsto \mathcal{II}_p(v_p) := (S_p v_p) \cdot v_p.$$

Sia  $p \in \varphi(D)$ ,  $p = \varphi(u_0, v_0)$ . Per ogni  $v_p \in T_pM$ ,  $v_p = a_1\varphi_u^0 + a_2\varphi_v^0$ , risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{II}_p(v_p) &= (S_p v_p) \cdot v_p \\ &= (a_1 S_p \varphi_u^0 + a_2 S_p \varphi_v^0) \cdot (a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0) \\ &= a_1^2 (S_p \varphi_u^0) \cdot \varphi_u^0 + 2a_1 a_2 (S_p \varphi_u^0) \cdot \varphi_v^0 + a_2^2 (S_p \varphi_v^0) \cdot \varphi_v^0, \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathcal{II}_p(v_p) = a_1^2 \ell^0 + 2a_1 a_2 m^0 + a_2^2 n^0.$$

Pertanto, i coefficienti  $\ell, m, n$  definiti da

$$\ell := S(\varphi_u) \cdot \varphi_u, \quad m := S(\varphi_u) \cdot \varphi_v = \varphi_u \cdot S(\varphi_v) \quad \text{e} \quad n := S(\varphi_v) \cdot \varphi_v,$$

determinano  $\mathcal{II}$  su  $\varphi(D)$  e sono quindi detti *coefficienti della seconda forma fondamentale*.

**Osservazione 4.6.** La *terza forma fondamentale* di  $M$  in  $p$  è la forma quadratica  $\mathcal{III}_p$  associata all'operatore forma  $S_p^2$  (cf. [20], p. 208). Quindi,

$$\mathcal{III}_p(v_p) := S_p^2(v_p) \cdot v_p = S_p(v_p) \cdot S_p(v_p).$$

**Teorema 4.7.** Sia  $(D, \varphi, (u, v))$  una parametrizzazione locale di una superficie regolare  $M$ . Allora,

(a) La matrice che rappresenta l'operatore forma  $S$  rispetto alla base coordinata  $(\varphi_u, \varphi_v)$  è data da  $\mathcal{I}^{-1}\mathcal{II}$ , ovvero

$$S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\ell - Fm & Gm - Fn \\ -F\ell + Em & -Fm + En \end{pmatrix},$$

dove  $E, F, G$  sono i coefficienti della prima forma fondamentale e  $\ell, m, n$  quelli della seconda forma fondamentale rispetto alla fissata parametrizzazione.

(b) I coefficienti  $\ell, m, n$  si possono anche esprimere con

$$\ell = N \cdot \varphi_{uu}, \quad m = N \cdot \varphi_{uv}, \quad n = N \cdot \varphi_{vv},$$

ossia  $\ell, m, n$  sono le componenti normali dei campi vettoriali  $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$ .

DIMOSTRAZIONE. (a) Siccome  $(\varphi_u, \varphi_v)$  è base per  $T_p M$ , dove  $p = \varphi(u, v)$ , poniamo

$$(4.1) \quad S(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, \quad S(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v.$$

Quindi  $S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  è la matrice che rappresenta l'operatore forma  $S$  rispetto alla base  $(\varphi_u, \varphi_v)$ . Osserviamo che tale matrice, in generale, non è detto che sia simmetrica in quanto  $(\varphi_u, \varphi_v)$ , in generale, non è detto che sia ortonormale. Usando la (4.1) e la definizione di  $\ell, m, n$ , si trova

$$\begin{aligned} \ell &:= S(\varphi_u) \cdot \varphi_u = a_{11}\varphi_u \cdot \varphi_u + a_{21}\varphi_v \cdot \varphi_u = a_{11}E + a_{21}F, \\ m &:= S(\varphi_u) \cdot \varphi_v = a_{11}\varphi_u \cdot \varphi_v + a_{21}\varphi_v \cdot \varphi_v = a_{11}F + a_{21}G, \\ m &:= S(\varphi_v) \cdot \varphi_u = a_{12}\varphi_u \cdot \varphi_u + a_{22}\varphi_v \cdot \varphi_u = a_{12}E + a_{22}F, \\ n &:= S(\varphi_v) \cdot \varphi_v = a_{12}\varphi_u \cdot \varphi_v + a_{22}\varphi_v \cdot \varphi_v = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Questo sistema di equazioni scalari è equivalente alla seguente equazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene

$$S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}.$$

(b) Da  $N \cdot \varphi_u = 0$ , derivando rispetto a  $u$ , si ha  $N_u \cdot \varphi_u + N \cdot \varphi_{uu} = 0$ , e siccome  $N_u = -S(\varphi_u)$ , otteniamo

$$\ell := S(\varphi_u) \cdot \varphi_u = N \cdot \varphi_{uu}.$$

Allo stesso modo, derivando  $N \cdot \varphi_u = 0$  rispetto a  $v$ , si ottiene  $N_v \cdot \varphi_u + N \cdot \varphi_{uv} = 0$ , dove  $N_v = -S(\varphi_v)$ , e quindi

$$m := S(\varphi_v) \cdot \varphi_u = -N_v \cdot \varphi_u = N \cdot \varphi_{uv}.$$

Infine, derivando  $N \cdot \varphi_v = 0$  rispetto a  $v$ , risulta  $N_v \cdot \varphi_v + N \cdot \varphi_{vv} = 0$ , dove  $N_v = -S(\varphi_v)$ , e quindi

$$n := S(\varphi_v) \cdot \varphi_v = -N_v \cdot \varphi_v = N \cdot \varphi_{vv}.$$

□

## 4.2. I simboli di Christoffel

Siano  $M$  una superficie regolare e  $(D, \varphi, (u, v))$  una parametrizzazione locale di  $M$ . I campi vettoriali  $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$ , in generale, non sono vettori tangenti alla superficie. Quindi, poniamo

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + b_{11} N, \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + b_{12} N, \\ \varphi_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + b_{21} N, \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + b_{22} N,\end{aligned}$$

dove  $\Gamma_{ij}^k$  e  $b_{ij}$  sono funzioni differenziabili definite in  $D$ , che a volte si identificano con quelle definite in  $\varphi(D)$ . Da  $\varphi_{vu} = \varphi_{uv}$  segue che

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 \quad \text{e} \quad b_{12} = b_{21}.$$

Inoltre, dal Teorema 4.7 segue che

$$\ell = N \cdot \varphi_{uu} = b_{11}, \quad m = N \cdot \varphi_{uv} = b_{12} = b_{21} \quad \text{ed} \quad n = N \cdot \varphi_{vv} = b_{22}.$$

Le funzioni  $\Gamma_{ij}^k$ , che definiscono le componenti tangenti di  $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$ , sono dette *simboli di Christoffel* oppure *coefficienti di Christoffel*. Tenendo conto che

$$\begin{aligned}E_u &= \partial_u(\varphi_u \cdot \varphi_u) = 2\varphi_{uu} \cdot \varphi_u, & E_v &= \partial_v(\varphi_u \cdot \varphi_u) = 2\varphi_{uv} \cdot \varphi_u, \\ G_u &= \partial_u(\varphi_v \cdot \varphi_v) = 2\varphi_{uv} \cdot \varphi_v, & G_v &= \partial_v(\varphi_v \cdot \varphi_v) = 2\varphi_{vv} \cdot \varphi_v, \\ F_u &= \partial_u(\varphi_u \cdot \varphi_v) = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v + \varphi_u \cdot \varphi_{uv} = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v + (1/2)\partial_v(\varphi_u \cdot \varphi_u) \\ &= \varphi_{uu} \cdot \varphi_v + (1/2)E_v, \\ F_v &= \partial_v(\varphi_u \cdot \varphi_v) = \varphi_{uv} \cdot \varphi_v + \varphi_u \cdot \varphi_{vv} = \varphi_{vv} \cdot \varphi_u + (1/2)\partial_u(\varphi_v \cdot \varphi_v) \\ &= \varphi_{vv} \cdot \varphi_u + (1/2)G_u,\end{aligned}$$

moltiplicando scalarmente per  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  le espressioni precedenti di  $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}$  e  $\varphi_{vv}$ , si ottengono i seguenti sistemi

$$(4.2) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \varphi_{uu} \cdot \varphi_u = (1/2)E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \varphi_{uu} \cdot \varphi_v = F_u - (1/2)E_v, \end{cases}$$

$$(4.3) \quad \begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \varphi_{uv} \cdot \varphi_u = (1/2)E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \varphi_{uv} \cdot \varphi_v = (1/2)G_u, \end{cases}$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \varphi_{vv} \cdot \varphi_u = F_v - (1/2)G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \varphi_{vv} \cdot \varphi_v = (1/2)G_v. \end{cases}$$

Siccome  $EG - F^2 \neq 0$ , i precedenti sistemi determinano univocamente i coefficienti di Christoffel in funzione dei coefficienti  $E, F, G$  della prima forma fondamentale.

In particolare, per una parametrizzazione  $(u, v)$  con  $\varphi_u \cdot \varphi_v = 0$ , ossia  $F = 0$ , si ottiene

$$(4.5) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = (1/2)(E_u/E), & \Gamma_{11}^2 = -(1/2)(E_v/G), & \Gamma_{12}^1 = (1/2)(E_v/E), \\ \Gamma_{12}^2 = (1/2)(G_u/G), & \Gamma_{22}^1 = -(1/2)(G_u/E) & \Gamma_{22}^2 = (1/2)(G_v/G). \end{cases}$$

**Osservazione 4.8.** In generale, posto  $\partial_1 = \partial_u, \partial_2 = \partial_v, g_{11} = E, g_{12} = F, g_{22} = G$  e  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ , i coefficienti di Christoffel sono dati dalla formula

$$(4.6) \quad \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k (\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}) g^{km}.$$

Questa formula si può ottenere anche come conseguenza della formula (5.30) di Koszul.

**Esempio 4.9.** Se  $M$  è un piano euclideo, i coefficienti della prima forma fondamentale sono  $E = G = 1$  e  $F = 0$ , e quindi banalmente segue che i simboli di Christoffel sono tutti nulli.

**Esempio 4.10.** Sia  $M$  la superficie di rotazione ottenuta ruotando (come nell'Esempio 3.15) la curva regolare semplice  $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u), u \in ]a, b[$  intorno all'asse  $z$ . Assumiamo come nell'Esempio 3.67 che la curva  $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u)$ , sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Una parametrizzazione locale di  $M$  è data da

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \quad u \in ]a, b[ \text{ e } v \in ]0, 2\pi[.$$

Allora,

$$\varphi_u = (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)) \quad \text{e} \quad \varphi_v = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0),$$

e i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da

$$E = \|\varphi_u\|^2 = \|\dot{\gamma}(u)\|^2 = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0 \quad \text{e} \quad G = \|\varphi_v\|^2 = f^2(u) > 0.$$

Quindi, applicando le formule precedenti si trova che i coefficienti di Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  della superficie di rotazione  $M$  sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -f(u)f'(u), \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{f'(u)}{f(u)}.$$

Siccome il campo normale

$$\begin{aligned} N &= \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u)), \\ \varphi_{uu} &= (f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u)), \\ \varphi_{uv} &= (-f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0), \\ \varphi_{vv} &= (-f(u)\cos v, -f(u)\sin v, 0), \end{aligned}$$

applicando il Teorema 4.7, si trova che i coefficienti della seconda forma fondamentale sono

$$\begin{aligned} \ell &= \varphi_{uu} \cdot N = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u), \\ m &= \varphi_{uv} \cdot N = 0, \quad n = \varphi_{vv} \cdot N = f(u)g'(u). \end{aligned}$$

Se consideriamo, come caso particolare di superficie di rotazione, il cilindro circolare retto  $M : y^2 + z^2 = 1$ , che si ottiene ruotando intorno all'asse  $z$  la retta

$$\gamma(u) : x = f(u) = 1, \quad y = 0, \quad z = g(u) = u, \quad u \in \mathbb{R},$$

allora in tal caso

$$E = \|\varphi_u\|^2 = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0 \quad \text{e} \quad G = \|\varphi_v\|^2 = 1,$$

e quindi i coefficienti di Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  sono tutti nulli. Dunque piano e cilindro hanno stessa prima forma fondamentale e stessi coefficienti di Christoffel. In effetti, come vedremo, le due superfici sono localmente isometriche. Tuttavia, come superfici immerse in  $\mathbb{R}^3$  sono superfici distinte. Si può osservare che la seconda forma fondamentale del cilindro non è nulla. Infatti, con questa parametrizzazione, i coefficienti della seconda forma fondamentale del cilindro sono  $\ell = m = 0$  e  $n = 1$ .

### 4.3. Curvature principali, curvatura di Gauss e curvatura media

Abbiamo già osservato che una superficie può curvarsi lungo più direzioni. Ad esempio, nel caso di un cilindro circolare retto, se ci muoviamo lungo una retta generatrice il cilindro non si curva, mentre se ci muoviamo lungo una circonferenza (parallelo del cilindro) la superficie si curva come per una sfera avente tale circonferenza come circonferenza di raggio massimo. In effetti, come vedremo in termini più precisi, in questo modo si ottengono le due curvature principali del cilindro.

Siano  $M$  una superficie regolare,  $p \in M$  e  $S_p$  l'operatore forma di  $M$  in  $p$  definito da un fissato campo normale (locale)  $N$ . Poichè  $S_p$  è un endomorfismo simmetrico di  $T_p M$ , esiste una base ortonormale  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  di  $T_p M$  di autovettori per  $S_p$ , cioè

$$S_p(\underline{e}_1) = k_1(p) \underline{e}_1, \quad S_p(\underline{e}_2) = k_2(p) \underline{e}_2, \quad \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 = \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 = 1, \quad \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0.$$

Gli autovettori  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  si dicono *vettori principali* in  $p$  (e le loro direzioni sono dette *direzioni principali*). Gli autovalori  $k_1(p), k_2(p)$  si dicono *curvature principali* di  $M$  in  $p$ . In particolare, la seconda forma fondamentale  $\mathcal{II}_p$  soddisfa

$$\mathcal{II}_p(\underline{e}_1) = S_p(\underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 = k_1(p) \quad \text{e} \quad \mathcal{II}_p(\underline{e}_2) = S_p(\underline{e}_2) \cdot \underline{e}_2 = k_2(p).$$

Quindi per ogni  $v_p \in T_p M$ ,  $v_p = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2$ , risulta

$$\mathcal{II}_p(v_p) = k_1(p) a_1^2 + k_2(p) a_2^2.$$

**Definizione 4.11.** *Un punto  $p$  di una superficie  $M$  si dice ombelicale se*

$$k_1(p) = k_2(p).$$

Si noti che se  $p$  non è ombelicale, allora autovettori  $v_1, v_2$  relativi a  $k_1(p)$  e  $k_2(p)$  rispettivamente, sono necessariamente ortogonali. Infatti,

$$S_p(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot S_p(v_2) \text{ implica } (k_1(p) - k_2(p)) v_1 \cdot v_2 = 0.$$

### Linee di curvatura

Sia  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ , una curva regolare contenuta in  $M$ .  $\gamma(t)$  è detta *linea di curvatura* (o *linea principale*, o *curva principale*) se, per ogni  $t \in I$ , il vettore tangente  $\dot{\gamma}(t)$  è un vettore principale in  $p = \gamma(t)$ . Quindi,

$$\gamma(t) \text{ è linea di curvatura } \iff S_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = \lambda(t)\dot{\gamma}(t) \quad \forall t \in I.$$

Si noti che i concetti di direzione principale e linea di curvatura non dipendono dalla scelta locale di  $N$ .

**Proposizione 4.12.** *Sia  $M$  una superficie regolare e sia  $(D, \varphi)$  una carta locale di  $M$ . Allora, la condizione  $F = m = 0$  è sufficiente affinché le curve coordinate siano linee di curvatura. Se  $M$  è priva di punti ombelicali, la condizione  $F = m = 0$  è anche necessaria.*

**DIMOSTRAZIONE.** Assumiamo  $F = m = 0$ . La condizione  $F = 0$  implica che  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  sono ortogonali. Poi,  $m = 0$ , ovvero  $S(\varphi_u) \cdot \varphi_v = 0$ , implica che  $S(\varphi_u)$  è parallelo a  $\varphi_u$ , ossia  $\varphi_u$  definisce una direzione principale e quindi la curva delle  $u$  ( $v = \text{cost.}$ ) è una linea di curvatura. Analogamente si vede che la curva delle  $v$  ( $u = \text{cost.}$ ) è una linea di curvatura.

Viceversa, supponiamo che  $M$  sia priva di punti ombelicali, e che le curve coordinate siano linee di curvatura. Allora, i vettori tangenti coordinati  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  definiscono le direzioni principali. D'altronde, per ipotesi sappiamo che  $k_1(p) \neq k_2(p)$  per ogni  $p \in \varphi(D)$ , per cui  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  devono essere necessariamente ortogonali, e quindi  $F = 0$ . Inoltre,  $S(\varphi_u)$  è parallelo a  $\varphi_u$ , e quindi  $m = S(\varphi_u) \cdot \varphi_v = 0$ .  $\square$

**Proposizione 4.13.** *Sia  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione locale di una superficie regolare  $M$ . Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$  con sostegno in  $\varphi(D)$ , quindi  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ . Allora,  $\gamma(t)$  è una linea di curvatura se e solo se  $u(t)$  e  $v(t)$  soddisfano la seguente equazione differenziale*

$$(Em - F\ell)(t) (u'(t))^2 + (En - G\ell)(t) u'(t)v'(t) + (Fn - Gm)(t) (v'(t))^2 = 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(a_{ij})$  la matrice che rappresenta l'operatore forma  $S$  rispetto alla parametrizzazione  $(D, \varphi)$ . Di conseguenza,  $S(\dot{\gamma}(t))$  è il vettore di componenti  $(a_{11}u'(t) + a_{12}v'(t), a_{21}u'(t) + a_{22}v'(t))$ . Allora,  $\gamma(t)$  è una linea di curvatura se e solo se i vettori  $(a_{11}u'(t) + a_{12}v'(t), a_{21}u'(t) + a_{22}v'(t))$  e  $\dot{\gamma}(t) = (u'(t), v'(t))$  sono paralleli, ossia la matrice delle loro componenti ha determinante nullo, ovvero

$$a_{21} (u')^2 + (a_{22} - a_{11}) u'v' - a_{12} (v')^2 = 0.$$

Pertanto, applicando il Teorema 4.7, si ottiene il risultato enunciato.  $\square$

**Esempio 4.14.** Per una superficie di rotazione  $M$  i meridiani e i paralleli sono le linee di curvatura. Infatti, come visto nell'Esempio 4.10, con  $M$  parametrizzata localmente da

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \quad \text{con } u \in ]a, b[ \text{ e } v \in ]0, 2\pi[,$$

i coefficienti  $F$  ed  $m$  sono nulli. D'altronde, le curve coordinate di  $M$  sono i paralleli e i meridiani, per cui dalla Proposizione 4.12 segue che i meridiani e i paralleli sono le linee di curvatura della superficie di rotazione  $M$ .

**Definizione 4.15.** *La funzione*

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto K(p) := \det S_p,$$

*si chiama curvatura gaussiana di  $M$ .*

Abbiamo già osservato che, se si cambia il campo locale  $N$  con  $-N$ , l'operatore  $S_p$  cambia di segno, tuttavia il suo determinante non cambia di segno. Pertanto, anche se la superficie non è orientabile, la definizione di curvatura gaussiana è indipendente dalla scelta locale di  $N$ .

**Definizione 4.16.** *Un punto  $p$  di una superficie regolare  $M$  si dice:*

- ellittico se la curvatura gaussiana  $K(p) > 0$ ;
- iperbolico se la curvatura gaussiana  $K(p) < 0$ ;
- parabolico se  $K(p) = 0$  e l'operatore forma  $S_p \neq 0$ ;
- planare se l'operatore forma  $S_p = 0$ .

**Esempio 4.17.** Sia  $M = \mathbb{R}^2$  (il piano euclideo). In tal caso, come osservato nell'Esempio 4.4, l'operatore forma  $S_p = 0$  per ogni  $p \in \mathbb{R}^2$ , e quindi tutti i punti sono planari.

**Definizione 4.18.** *Sia  $M$  una superficie regolare orientabile, e sia  $N$  un campo normale che orienta  $M$ . La funzione  $H : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto H(p) := (\text{tr } S_p)/2$ , si chiama curvatura media di  $M$ .*

Se  $M$  non è orientabile, la curvatura media è definita solo localmente rispetto a un fissato campo locale normale  $N$  (che viene definito rispetto a una fissata parametrizzazione locale). Tuttavia, il valore assoluto della curvatura media è definito anche per superfici non orientabili.

Dalle Definizioni 4.15 e 4.18 segue che la curvatura gaussiana e la curvatura media, in termini di curvatures principali, sono date

$$K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p) \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Inoltre, tali formule implicano che  $k_1(p)$  e  $k_2(p)$  sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado (in  $k$ ):  $k^2 - 2Hk + K = 0$ , da cui

$$k_{1/2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Rispetto a una fissata parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$ , dal Teorema 4.7 segue la seguente

**Proposizione 4.19.** Per ogni  $p \in \varphi(D)$ , le curvatura gaussiana e la curvatura media sono date da:

$$(4.7) \quad K(p) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}(p)$$

e

$$(4.8) \quad H(p) = \frac{G\ell - 2Fm + En}{2(EG - F^2)}(p).$$

Inoltre, se  $F = m = 0$ , sempre dal Teorema 4.7 segue che

$$S(\varphi_u) = (\ell/E)\varphi_u \quad \text{e} \quad S(\varphi_v) = (n/G)\varphi_v.$$

Pertanto, abbiamo

**Proposizione 4.20.** Se i coefficienti  $F$  ed  $m$  sono nulli, allora le curvature principali sono date da

$$k_1 = \ell/E, \quad k_2 = n/G.$$

**Osservazione 4.21.** Rispetto a una fissata parametrizzazione locale di coordinate isoterme  $(u, v)$ , ovvero  $E = G = f(u, v)$ ,  $F = 0$ , la curvatura gaussiana è data dalla seguente formula (cf. Osservazione 5.23)

$$(4.9) \quad K = -\frac{1}{2f} \left( \frac{1}{f}(f_{uu} + f_{vv}) - \frac{1}{f^2}(f_u^2 + f_v^2) \right) = -\frac{1}{2f} \Delta(\ln f),$$

dove  $\Delta\Phi = \partial^2\Phi/\partial u^2 + \partial^2\Phi/\partial v^2$  con  $\Phi(u, v)$  funzione differenziabile.

**Esempio 4.22.** Consideriamo la sfera  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Abbiamo visto che  $\mathbb{S}^2$  è orientabile e  $N_p = (1/r)p$  è un campo unitario normale alla sfera. Determiniamo l'operatore forma  $S_p : T_p\mathbb{S}^2 \rightarrow T_p\mathbb{S}^2$ . Dato  $v_p \in T_p\mathbb{S}^2$ , sia  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  una curva differenziabile di  $\mathbb{S}^2$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v_p$ . Allora,

$$N(t) = N(\gamma(t)) = (1/r)\gamma(t), \quad \text{e quindi} \quad N'(t) = (1/r)\dot{\gamma}(t).$$

Di conseguenza,

$$S_p(v_p) = -N'(0) = -(1/r)\dot{\gamma}(0) = -(1/r)v_p.$$

Pertanto

$$S_p = -(1/r)I,$$

e quindi le curvature principali  $k_1(p) = k_2(p) = \text{cost.} = -1/r$ , la curvatura di Gauss  $K(p) = \text{cost.} = 1/r^2 > 0$  e la curvatura media  $H(p) = \text{cost.} = -1/r < 0$ . In particolare, la sfera è una superficie a punti ellittici.

**Esempio 4.23.** Consideriamo il cilindro circolare retto  $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = r^2$ . Sappiamo che il cilindro  $M$  è orientabile e  $N_p = (1/r)(x, y, 0)$  è un campo unitario normale a  $M$ . Determiniamo l'operatore forma di  $M$ . Una parametrizzazione locale di  $M$  è data da  $\varphi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$ . Di conseguenza,

$$\varphi_u = (-r \operatorname{sen} u, r \operatorname{cos} u, 0), \quad \varphi_v = (0, 0, 1),$$

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (\operatorname{cos} u, \operatorname{sen} u, 0) = (1/r)(x, y, 0).$$

Quindi l'operatore forma è dato da:

$$S(\varphi_u) = -N_u = (\operatorname{sen} u, -\operatorname{cos} u, 0) = -(1/r)\varphi_u, \quad S(\varphi_v) = -N_v = (0, 0, 0).$$

Pertanto,  $(\varphi_u, \varphi_v)$  è una base di autovettori. Le curvatures principali sono

$$k_1(p) = -(1/r) = \operatorname{cost} \neq 0 \quad \text{e} \quad k_2(p) = 0,$$

per cui  $K(p) = 0$  e  $S_p \neq 0$ . Dunque,  $M$  è una superficie a punti parabolici. Si noti che rispetto alla parametrizzazione considerata nell'Esempio 4.10, i ruoli dei parametri  $u$  e  $v$  sono scambiati e quindi i versori normali sono opposti.

**Esercizio 4.24.** Si verifichi che la superficie regolare  $M : z = \operatorname{sen} y$  è un esempio di superficie che contiene punti planari e punti parabolici.

**Esempio 4.25.** Vogliamo trovare la **curvatura gaussiana della superficie di rotazione**  $M$  ottenuta (come nell'Esempio 3.15) ruotando la curva regolare  $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u), u \in ]a, b[$  intorno all'asse  $z$ . Assumiamo come nell'Esempio 3.67 che la curva regolare  $\gamma(u)$ , sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Allora, i coefficienti della prima forma fondamentale sono  $E = 1, F = 0$  e  $G = f^2(u)$ . Inoltre, come visto nell'Esempio 4.10, i coefficienti della seconda forma fondamentale sono

$$\ell = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u), \quad m = 0, \quad n = f(u)g'(u).$$

Allora, usando per la curvatura gaussiana  $K$  la formula (4.7), troviamo

$$K(u, v) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = \frac{(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))f(u)g'(u)}{f^2(u)}$$

$$= \frac{(f'(u)g'(u)g''(u) - f''(u)(g'(u))^2)}{f(u)}.$$

D'altronde, derivando  $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$  otteniamo

$$g'(u)g''(u) = -f'(u)f''(u)$$

e quindi la precedente formula della curvatura diventa

$$K(u, v) = \frac{-f''(u)((f'(u))^2 + (g'(u))^2)}{f(u)}.$$

Pertanto,

$$(4.10) \quad K(u, v) = -\frac{f''(u)}{f(u)}.$$

**Esercizio 4.26.** Determinare, usando la (4.10), la curvatura gaussiana del cilindro circolare retto, della sfera e della superficie torica.

**Esercizio 4.27.** Sia  $M$  la superficie di rotazione dell'Esempio 4.25, dove la curva  $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u)$ , non è parametrizzata con l'ascissa

curvilinea, quindi con velocità scalare  $\|\dot{\gamma}(u)\|$ , che indichiamo con  $\alpha(u)$ , non costante.

Determinare curvature principali e curvatura gaussiana di tale superficie.

*Suggerimento:* In questo caso si trova che

- i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = \alpha^2(u), \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = f^2(u);$$

- il campo normale

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{1}{\alpha(u)}(-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u));$$

- i coefficienti della seconda forma fondamentale sono

$$\ell = (f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))/\alpha(u), \quad m = 0, \quad n = f(u)g'(u)/\alpha(u).$$

Quindi, la matrice dell'operatore forma è data da

$$(4.11) \quad S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f'g'' - f''g'}{\alpha^3} & 0 \\ 0 & \frac{g'}{f\alpha} \end{pmatrix}.$$

**Esempio 4.28.** Sia  $M$  una **superficie rigata** regolare parametrizzata, come nell'Esempio 3.17, da

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + vV(u), \quad \text{con } (u, v) \in ]a, b[ \times \mathbb{R}.$$

Allora,  $M$  ha curvatura gaussiana non positiva. Infatti,

$$\varphi_u = \dot{\gamma}(u) + vV'(u), \quad \varphi_v = V(u), \quad \varphi_{uv} = V'(u), \quad \varphi_{vv} = 0,$$

e quindi

$$K(u, v) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = -\frac{m^2}{EG - F^2} \leq 0,$$

dove

$$m = \varphi_{uv} \cdot N = 0 \quad \text{se e solo se} \quad V(u) \cdot V'(u) \wedge \dot{\gamma}(u) = 0.$$

Una superficie rigata (regolare) si dice **svilupabile** se la sua curvatura gaussiana è identicamente nulla.

Se la superficie rigata (regolare)  $M$  è un cilindro generalizzato (cf. Esempio 3.18) si ha  $V(u) = V_0$  (costante) e quindi  $V'(u) = 0$ , se  $M$  è un cono generalizzato di vertice  $p_0$  (cf. Esempio 3.19) si ha  $V(u) = \gamma(u) - p_0$  e quindi  $V'(u) = \dot{\gamma}(u)$ . In entrambi i casi, è soddisfatta la condizione  $V(u) \cdot V'(u) \wedge \dot{\gamma}(u) = 0$ , pertanto entrambe le superfici sono svilupabili.

### Esempio 4.29. Superficie tubolare

Il più semplice esempio di superficie tubolare è dato dal cilindro rotondo. Consideriamo, per semplicità, il cilindro rotondo di equazione cartesiana  $x^2 + y^2 = r^2$ . Tale cilindro si può parametrizzare con  $\varphi(u, v) = (r\cos v, r\sin v, u)$  che si può anche esprimere come intorno tubolare di raggio  $r$  dell'asse  $z$  (asse del cilindro). Infatti,

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + r(\cos v)E_{1\gamma(u)} + r(\sin v)E_{2\gamma(u)},$$

dove  $\gamma(u) = (0, 0, u)$  è l'asse del cilindro ed  $E_{1\gamma(u)}, E_{2\gamma(u)}$  sono i primi due campi di vettori della base canonica definiti lungo  $\gamma(u)$ . Quindi,  $(\vec{t}(u) = \dot{\gamma}(u), E_{1\gamma(u)}, E_{2\gamma(u)})$  è base ortonormale lungo  $\gamma$ . Inoltre, le curve delle  $v$  del dato cilindro sono circonferenze di centro  $(0, 0, u)$ , raggio  $r$  e contenute nei piani  $z = u$ . Questo discorso si può generalizzare nel modo seguente. Sia  $\gamma(u)$ ,  $u \in I$ , una curva di Frenet parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Denotiamo con  $(\vec{t}(u), \vec{n}(u), \vec{b}(u), \kappa, \tau)$  l'apparato di Frenet della curva  $\gamma(u)$ . La superficie  $M$ , intorno tubolare di raggio  $r > 0$  della curva  $\gamma$  (cf. Figura 1), è la superficie parametrizzata da

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + r(\cos v)\vec{n}(u) + r(\sin v)\vec{b}(u), \quad u \in I, v \in ]-\pi, \pi[,$$

(oppure  $v \in ]0, 2\pi[$ ). Le curve delle  $v$  sono circonferenze di raggio  $r$  contenute nei piani normali a  $\gamma$ . Assumiamo che il tubo  $M$  sia una superficie immersa (basta assumere che la curvatura  $\kappa(u)$  di  $\gamma$  soddisfi la condizione  $\kappa(u)r < 1$ ).

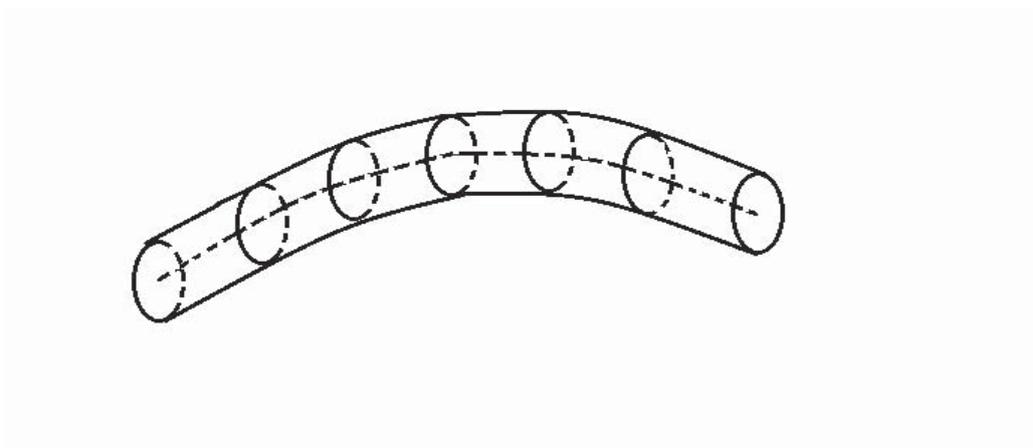


FIGURA 1. Superficie tubolare.

Determiniamo la curvatura gaussiana della superficie tubolare  $M$ . Applicando le formule di Frenet relative alla curva  $\gamma$ , si ha

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \dot{\gamma}(u) + r(\cos v)\vec{n}'(u) + r(\sin v)\vec{b}'(u) \\ &= (1 - r\kappa(u)\cos v)\vec{t}(u) - r\tau(u)(\sin v)\vec{n}(u) + r\tau(u)(\cos v)\vec{b}(u); \\ \varphi_v &= -r(\sin v)\vec{n}(u) + r(\cos v)\vec{b}(u), \\ E &= \varphi_u \cdot \varphi_u = (1 - r\kappa(u)\cos v)^2 + r^2\tau^2(u), \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = r^2\tau(u), \\ G &= \varphi_v \cdot \varphi_v = r^2. \end{aligned}$$

Siccome

$$\varphi_u = (1 - r\kappa(u)\cos v)\vec{t}(u) + \tau(u)\varphi_v,$$

la condizione  $r\kappa < 1$  implica  $(1 - r\kappa(u)\cos v) > 0$  e di conseguenza i vettori coordinati  $\varphi_u, \varphi_v$  sono linearmente indipendenti. Inoltre,

$$\begin{aligned}\varphi_u \wedge \varphi_v &= (1 - r\kappa(u)\cos v)\vec{t}(u) \wedge \varphi_v \\ &= (1 - r\kappa(u)\cos v)\vec{t}(u) \wedge \left(-r\operatorname{sen} v \vec{n}(u) + r\cos v \vec{b}(u)\right) \\ &= -r(1 - r\kappa(u)\cos v) \left(\cos v \vec{n}(u) + \operatorname{sen} v \vec{b}(u)\right), \\ \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 &= r^2(1 - r\kappa(u)\cos v)^2 = EG - F^2\end{aligned}$$

e

$$N = -\cos v \vec{n}(u) - \operatorname{sen} v \vec{b}(u).$$

Infine, determiniamo i coefficienti della seconda forma fondamentale. Sempre applicando le formule di Frenet, otteniamo

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= -r(\kappa'(u)\cos v - \tau(u)\kappa(u)\operatorname{sen} v)\vec{t}(u) \\ &\quad + \left((1 - r\kappa(u)\cos v)\kappa(u) - r\tau'(u)\operatorname{sen} v - r\tau^2(u)\cos v\right)\vec{n}(u) \\ &\quad + r(\tau'(u)\cos v - \tau^2(u)\operatorname{sen} v)\vec{b}(u), \\ \varphi_{vv} &= -r\cos v \vec{n}(u) - r\operatorname{sen} v \vec{b}(u) = rN, \\ \varphi_{uv} &= r\kappa(u)\operatorname{sen} v \vec{t}(u) - r\tau(u)\cos v \vec{n}(u) - r\tau(u)\operatorname{sen} v \vec{b}(u), \\ \ell &= \varphi_{uu} \cdot N = r\tau^2(u) - (1 - r\kappa(u)\cos v)\kappa(u)\cos v, \\ m &= \varphi_{uv} \cdot N = r\tau(u), \\ n &= \varphi_{vv} \cdot N = r.\end{aligned}$$

Allora, non esistono punti planari e la curvatura gaussiana è data da

$$K(u, v) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = -\frac{\kappa(u)\cos v}{r(1 - r\kappa(u)\cos v)}.$$

In particolare, il segno di  $K(u, v)$  dipende solo dal segno di  $\cos v$ , e quindi esistono punti parabolici, ellittici e iperbolici.

Se come curva di Frenet prendiamo una circonferenza di raggio 1, ad esempio  $\gamma(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$ , il corrispondente riferimento di Frenet è

$$\vec{t}(u) = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \quad \vec{n}(u) = (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0), \quad \vec{b}(u) = (0, 0, 1).$$

La superficie intorno tubolare di raggio  $r < 1$  della circonferenza  $\gamma$ , ha rappresentazione parametrica

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \gamma(u) + r(\cos v)\vec{n}(u) + r(\operatorname{sen} v)\vec{b}(u), \\ &= (\cos u(1 - r\cos v), \operatorname{sen} u(1 - r\cos v), r\operatorname{sen} v)\end{aligned}$$

Cambiando il parametro  $v \in ]-\pi, \pi[$  con  $\bar{v} \in ]0, 2\pi[$  definito da  $v = \pi - \bar{v}$ , si ottiene

$$\bar{\varphi}(u, \bar{v}) = \varphi(u, \pi - \bar{v}) = (\cos u(1 + r\cos \bar{v}), \operatorname{sen} u(1 + r\cos \bar{v}), r\operatorname{sen} \bar{v})$$

che rappresenta la **superficie torica** ottenuta ruotando la circonferenza  $x = (1 + r \cos \bar{v}), y = 0, z = r \sin \bar{v}$  intorno all'asse  $z$  (confrontare con la (3.1)). Quindi, la superficie torica è un esempio di superficie tubolare. In tal caso, la curvatura di  $\gamma(u)$  è  $\kappa(u) = \text{cost.} = +1$  e la curvatura di Gauss

$$K(u, \bar{v}) = -\frac{\cos v}{r(1 - r \cos v)} = \frac{\cos \bar{v}}{r(1 + r \cos \bar{v})}.$$

In particolare, la curvatura  $K(u, \bar{v})$  è costante lungo i paralleli  $\bar{v} = \text{cost.}$  (curve delle  $u$ ). Lungo i paralleli  $\bar{v} = \pi/2$  e  $\bar{v} = 3\pi/2$ , la curvatura di Gauss è nulla. Lungo il parallelo  $\bar{v} = \pi$  la curvatura di Gauss è negativa. Lungo il parallelo  $\bar{v} = 0$  (considerando una parametrizzazione definita per tale  $\bar{v}$ ) la curvatura di Gauss è positiva.

#### 4.4. Superfici minimali

Lo studio delle superfici minimali si può dire che ha avuto inizio con Lagrange(1760) il quale determinò l'equazione differenziale che deve soddisfare una superficie minimale del tipo  $z = f(x, y)$ , e con Meusnier(1776) che diede una interpretazione geometrica dell'equazione differenziale ottenuta da Lagrange.

**Definizione 4.30.** *Una superficie regolare parametrizzata  $(D, \varphi)$  è detta minimale se la sua curvatura media  $H(p)$  è identicamente nulla. Una superficie regolare  $M$  è detta superficie minimale se ogni sua parametrizzazione è minimale.*

Si noti che: *i punti non planari di una superficie minimale sono iperbolici.* Infatti, da  $k_1(p) + k_2(p) = 0$  segue  $K(p) = -k_1^2(p) < 0$ .

Un'interpretazione geometrica che giustifica il nome di superficie minimale si ottiene nel modo seguente. Sia  $\varphi : D \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regolare parametrizzata e sia  $B$  un dominio (aperto connesso) limitato di  $D$ . Se  $h : B = B \cup \partial B \rightarrow \mathbb{R}$  è un'applicazione differenziabile, l'applicazione

$$F : \bar{B} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v, t) \mapsto F(u, v, t) = \varphi(u, v) + t h(u, v) N(u, v),$$

è detta *variazione normale* di  $\varphi(\bar{B})$  determinata da  $h$ . Per ogni  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , l'applicazione

$$\varphi_t : B \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \varphi_t(u, v) = F(u, v, t),$$

definisce una superficie parametrizzata, con

$$\varphi_{tu} = \varphi_u + t h_u N + t h N_u \quad \text{e} \quad \varphi_{tv} = \varphi_v + t h_v N + t h N_v.$$

Quindi, i corrispondenti coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E_t = E + 2t h(\varphi_u \cdot N_u) + t^2 f_1, \quad G_t = G + 2t h(\varphi_v \cdot N_v) + t^2 f_3,$$

$$F_t = F + t h(\varphi_u \cdot N_v + \varphi_v \cdot N_u) + t^2 f_2,$$

dove le funzioni  $f_1, f_2, f_3$  sono polinomiali rispetto a  $t$ . Siccome

$$\varphi_u \cdot N_u = -\varphi_{uu} \cdot N = -\ell, \quad \varphi_v \cdot N_v = -\varphi_{vv} \cdot N = -n,$$

e

$$\varphi_u \cdot N_v + \varphi_v \cdot N_u = -2\varphi_{uv} \cdot N = -2m,$$

si ha

$$E_t = E - 2th\ell + t^2 f_1, \quad F_t = F - 2thm + t^2 f_2, \quad G_t = G - 2thn + t^2 f_3.$$

Di conseguenza, siccome  $2H(EG - F^2) = (En - 2Fm + Gl)$ , otteniamo

$$\begin{aligned} E_t G_t - F_t^2 &= (EG - F^2) - 2th(En - 2Fm + Gl) + t^2 f_4 \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + t^2 f_4, \end{aligned}$$

dove la funzione  $f_4$  è polinomiale rispetto a  $t$ . Inoltre, posto  $f_5 = f_4/\sqrt{EG - F^2}$ , per la funzione area  $A(t)$  della variazione  $\varphi_t(\bar{B})$  si ha (cf. Section 3.8)

$$A(t) = \iint_{\bar{B}} \sqrt{E_t G_t - F_t^2} \, dudv = \iint_{\bar{B}} \sqrt{EG - F^2} \sqrt{1 - 4thH + t^2 f_5} \, dudv.$$

La funzione  $A(t)$ , per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo, è differenziabile, e la sua derivata per  $t = 0$  è

$$(4.12) \quad A'(0) = -2 \iint_{\bar{B}} hH \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

Se  $(D, \varphi)$  è minimale, ossia  $H = 0$ , dalla (4.12) segue che  $A'(0) = 0$  per ogni  $B$  e per ogni variazione normale di  $\varphi(\bar{B})$ . Viceversa, se  $A'(0) = 0$  per ogni  $B$  e per ogni variazione normale di  $\varphi(\bar{B})$ , allora  $(D, \varphi)$  è minimale. Infatti, assumiamo per assurdo  $H(p_0) \neq 0$  per qualche  $p_0 \in D$ , e quindi  $H(p) \neq 0$  in un intorno di  $p_0$ . In tal caso, si potrebbe costruire una funzione differenziabile  $h : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $h(p) = H(p)$  in qualche intorno di  $p_0$  e  $h(p) = 0$  all'esterno di un intorno di  $p_0$ . Allora, dalla (4.12) si avrebbe che  $A'(0) < 0$  per la variazione determinata da questa  $h$ , e quindi una contraddizione. Dunque, vale il seguente

**Teorema 4.31.** *Sia  $\varphi : D \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regolare parametrizzata e sia  $B$  un dominio limitato di  $D$ . Allora, la superficie parametrizzata è minimale se e solo se  $A'(0) = 0$  per ogni dominio limitato  $B$  di  $D$  e per ogni variazione normale di  $\varphi(\bar{B})$ .*

Dunque, ogni dominio limitato  $\varphi(\bar{B})$  di una superficie minimale  $(D, \varphi)$  è un punto critico del funzionale area. In generale i punti critici non è detto che siano di minimo, quindi il termine minimale potrebbe non essere appropriato. Tuttavia, questo termine fu introdotto da Lagrange nel 1760.

**Osservazione 4.32.** Lo studio delle superfici minimali è anche legato al problema di Plateau (problema di calcolo delle variazioni), detto anche problema delle bolle (o pellicole) di sapone. Tale problema, in una forma un pò semplificata, si può esprimere nel seguente modo: “provare che per ogni curva chiusa semplice di  $\mathbb{R}^3$  esiste una superficie di area minima che ha  $\gamma$  come bordo”

Un'altra caratterizzazione delle superfici minimali è data dalla seguente

**Proposizione 4.33.** *Sia  $\varphi(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , una superficie regolare parametrizzata, e orientata da  $N$ . Se le coordinate  $(u, v)$  sono isoterme, ossia  $E(u, v) = G(u, v) = f(u, v) > 0$  ed  $F = 0$ , allora la curvatura media e il vettore  $\varphi_{uu} + \varphi_{vv}$  sono dati da*

$$H = (\ell + n)/2f \quad e \quad \varphi_{uu} + \varphi_{vv} = (2fH)N.$$

*In particolare, la superficie è minimale se e solo se il vettore  $\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome  $E = G = f$  e  $F = 0$ , dalla (4.8) si ha

$$H = (\ell + n)/2E = ((\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) \cdot N)/2f.$$

D'altronde,  $\varphi_u \cdot \varphi_u = \varphi_v \cdot \varphi_v$  implica  $\varphi_{uu} \cdot \varphi_u = \varphi_{uv} \cdot \varphi_v$ . Inoltre,  $\varphi_u \cdot \varphi_v = 0$  implica  $\varphi_{uv} \cdot \varphi_v = -\varphi_u \cdot \varphi_{vv}$ . Pertanto, otteniamo

$$(\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) \cdot \varphi_u = 0.$$

Analogamente si trova

$$(\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) \cdot \varphi_v = 0.$$

Dunque,  $\varphi_{uu} + \varphi_{vv}$  ha solo componente normale, e quindi

$$\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = ((\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) \cdot N)N = (2fH)N.$$

□

**Esempio 4.34.** Sia  $M$  l'elicoide definito nell'Esempio 3.68. Determiniamo curvatura gaussiana e curvatura media di  $M$ . L'applicazione

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[, \quad b \neq 0,$$

definisce una parametrizzazione locale di  $M$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (\cos v, \sin v, 0), & \varphi_v &= (-u \sin v, u \cos v, b), \\ E &= 1, & F &= 0, & G &= u^2 + b^2. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}}(b \sin v, -b \cos v, u),$$

$$\varphi_{uu} = (0, 0, 0), \quad \varphi_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \varphi_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0).$$

Usando le formule del Teorema 4.7, si trova che i coefficienti  $l, m, n$  sono dati da

$$l = \varphi_{uu} \cdot N = 0, \quad m = \varphi_{uv} \cdot N = b/\sqrt{u^2 + b^2} \neq 0, \quad n = \varphi_{vv} \cdot N = 0.$$

Infine, applicando la (4.7) e la (4.8), si ottiene

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = -b^2/(u^2 + b^2)^2 < 0 \quad e \\ H(p) &= \frac{Gl - 2Fm + En}{2(EG - F^2)} = 0. \end{aligned}$$

Dunque, l'elicoide  $M$  è un esempio (non banale) di superficie minimale (e quindi a punti iperbolici).

**Esercizio 4.35.** Ruotando la *catenaria*

$$\gamma(u) : x = \cosh u, y = 0, z = u, \quad u \in \mathbb{R},$$

intorno all'asse  $z$ , la corrispondente superficie di rotazione, detta *catenoide*, ha la seguente parametrizzazione regolare

$$\varphi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad \text{con } v \in ]0, 2\pi[ \text{ e } u \in \mathbb{R}.$$

Verificare, applicando la Proposizione 4.33, che anche la catenoide è una superficie minimale. Inoltre, usando la (4.11), verificare che le curvatures principali sono date da

$$k_1(u) = -\frac{1}{\cosh^2 u} \quad \text{e} \quad k_2(u) = \frac{1}{\cosh^2 u}.$$

Per altre proprietà, ed esempi, di superfici minimali si può consultare [9] Sez. 3-5 e [23] Cap.9.

#### 4.5. Curvatura normale

Siano  $M$  una superficie regolare,  $p$  un punto di  $M$  e  $v_p \in T_p M$ ,  $\|v_p\| = 1$ .

**Definizione 4.36.** *La quantità*

$$k_n(v_p) := \mathcal{I}\mathcal{I}_p(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p$$

si dice *curvatura normale di  $M$  in  $p$  nella direzione di  $v_p$* .

Naturalmente, se  $v_p \in T_p M$ ,  $v_p \neq 0$ , la curvatura normale in  $p$  nella direzione di  $v_p$  è definita da

$$k_n(v_p) := \mathcal{I}\mathcal{I}_p(v_p) / \mathcal{I}_p(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p / \|v_p\|^2.$$

Si noti che il segno di  $k_n(v_p)$  dipende da  $S_p$ , quindi cambiando  $N$  con  $-N$  la curvatura normale cambia di segno. In ogni caso

$$k_n(v_p) = k_n(-v_p).$$

Se  $\gamma(s)$  è una curva regolare di  $M$  parametrizzata con l'ascissa curvilinea, allora  $k_n(\dot{\gamma}(s_0))$  si dice *curvatura normale di  $\gamma$  in  $\gamma(s_0)$* .

**Teorema 4.37. (di Meusnier)** *Per ogni curva regolare  $\gamma(s)$  di  $M$  parametrizzata con l'ascissa curvilinea,  $\gamma(s_0) = p$ , si ha*

$$k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \ddot{\gamma}(s_0) \cdot N_p.$$

In particolare, se  $\gamma(s)$  è di Frenet,

$$k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \kappa_\gamma(s_0) \cos \vartheta$$

dove  $\kappa_\gamma(s_0)$  è l'usuale curvatura di  $\gamma$  nel punto  $p = \gamma(s_0)$  e  $\vartheta$  è l'angolo convesso determinato da  $N_p$  e da  $n_p$  versore normale principale alla curva in  $p$ . Inoltre,

$$k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \pm \kappa_\gamma(s_0) \iff N_p = \pm n_p.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poichè  $\gamma(s)$  è una curva di  $M$ , si ha  $\dot{\gamma}(s) \in T_{\gamma(s)} M$  per ogni  $s$ . Pertanto  $\dot{\gamma}(s) \cdot N_{\gamma(s)} = 0$ , e derivando tale equazione si ottiene

$$\ddot{\gamma}(s) \cdot N(s) + \dot{\gamma}(s) \cdot N'(s) = 0,$$

ovvero  $\ddot{\gamma}(s) \cdot N(s) - \dot{\gamma}(s) \cdot S_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)) = 0$  per ogni  $s$ . Per  $s = s_0$  si ha

$$k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = S(\dot{\gamma}(s_0)) \cdot \dot{\gamma}(s_0) = \ddot{\gamma}(s_0) \cdot N(s_0) = \ddot{\gamma}(s_0) \cdot N_p.$$

Se  $\gamma(s)$  è di Frenet, possiamo considerare il versore normale principale  $n_p = \ddot{\gamma}(s_0)/\|\ddot{\gamma}(s_0)\|$ , e quindi la prima formula di Frenet  $\ddot{\gamma}(s_0) = \kappa_\gamma(s_0) n_p$ . Da questa si ottiene

$$k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \ddot{\gamma}(s_0) \cdot N_p = \kappa_\gamma(s_0) n_p \cdot N_p = \kappa_\gamma(s_0) \cos \vartheta.$$

□

**Osservazione 4.38.** Se  $\gamma(t)$  è curva regolare di  $M$  con  $t$  parametro arbitrario, allora per la curvatura normale di  $\gamma(t)$  abbiamo

$$k_n(\dot{\gamma}(t)) = \frac{S_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2} = \frac{\ddot{\gamma}(t) \cdot N(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}.$$

Ora, ci chiediamo se esistono curve regolari  $\gamma(s)$  sulla superficie regolare  $M$  per cui la curvatura normale  $k_n(\dot{\gamma}(s_0))$  coincida, a meno del segno, con l'usuale curvatura  $\kappa_\gamma$  di  $\gamma$  in  $p = \gamma(s_0)$ , ovvero  $\cos \vartheta = \pm 1$  nel Teorema di Meusnier.

**Definizione 4.39.** Diciamo **curva sezione normale** di  $M$  in  $p$  una curva che si ottiene intersecando la superficie  $M$  con un piano passante per  $N_p$ .

Dato  $v_p \in T_p M$ ,  $\|v_p\| = 1$ , sia  $\pi_{v_p}$  il piano determinato da  $N_p$  e  $v_p$ . La curva  $\gamma = \pi_{v_p} \cap M$  è una sezione normale di  $M$  in  $p$ , e viene detta **curva sezione normale (di  $M$  in  $p$ ) determinata da  $v_p$** . Tale curva è regolare in quanto  $\pi_{v_p}$  e  $M$  sono superfici regolari. Parametizziamo  $\gamma$  con l'ascissa curvilinea e supponiamo  $\gamma(s_0) = p$ . Risulta  $\dot{\gamma}(s_0) \in \pi_{v_p} = \text{span}(v_p, N_p)$  (in quanto  $\gamma$  è una curva di  $\pi_{v_p}$ ). Inoltre,

$\dot{\gamma}(s_0) \in T_p M$  (in quanto  $\gamma$  è anche una curva di  $M$ ) e quindi  $\dot{\gamma}(s_0) \perp N_p$ , per cui necessariamente  $\dot{\gamma}(s_0) = \lambda v_p$ . Siccome  $\|v_p\| = \|\dot{\gamma}(s_0)\| = 1$ , si ha  $\dot{\gamma}(s_0) = \pm v_p$ . Scambiando,  $s$  con  $-s$ , se necessario, possiamo assumere  $v_p = \dot{\gamma}(s_0) \perp N_p$ . Se  $\ddot{\gamma}(s_0) = 0$ , abbiamo  $\kappa_\gamma(s_0) = 0$  e quindi applicando il Teorema di Meusnier otteniamo

$$k_n(v_p) = k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \ddot{\gamma}(s_0) \cdot N_p = 0 = \kappa_\gamma(s_0).$$

Se  $\ddot{\gamma}(s_0) \neq 0$ , indicato con  $n_p$  il versore normale principale alla curva  $\gamma(s)$  nel punto  $p$ , versore che si trova nel piano  $\pi_{v_p}$  (in quanto  $\gamma$  è una curva di  $\pi_{v_p}$ ), abbiamo

$v_p = \dot{\gamma}(s_0) \perp N_p$  e  $v_p = \dot{\gamma}(s_0) \perp n_p$ , per cui deve essere  $N_p = \pm n_p$ . Pertanto, dal Teorema di Meusnier segue che

$$k_n(v_p) = k_n(\dot{\gamma}(s_0)) = \pm \kappa_\gamma(s_0).$$

Possiamo quindi enunciare la seguente proposizione (che giustifica il nome di curvatura normale).

**Proposizione 4.40.** *La curvatura normale  $k_n(v_p)$  coincide, a meno del segno, con l'usuale curvatura in  $p$  della curva sezione normale di  $M$  in  $p$  determinata dal vettore  $v_p$ .*

**Osservazione 4.41.** Si noti che se  $\gamma(s)$  è una curva sezione normale di  $M$  in un punto  $p = \gamma(s_0)$ , non è detto (in generale) che lo sia in ogni suo punto. Nel caso in cui ciò si verifichi, la curva è speciale (cf. Proposizione 5.42).

**Osservazione 4.42.** Sia  $\pi_{N_p}$  un fissato piano per  $N_p$  e sia  $\gamma = \pi_{N_p} \cap M$  la corrispondente curva sezione normale. Allora, dalla Proposizione 4.40 segue che la curvatura di  $\gamma$  nel punto  $p$  è data da

$$\kappa_\gamma(p) = |k_n(v_p)|,$$

dove  $v_p$  è un vettore di  $T_pM$  che ha la direzione della retta  $r = \pi_{N_p} \cap T_pM$  (che è la retta tangente a  $\gamma$  nel punto  $p$ ).

**Esempio 4.43.** Se  $M$  è una sfera di raggio  $R$ , allora una curva sezione normale di  $M$  in un fissato punto  $p$  è una circonferenza di raggio massimo. Sia ora  $M$  il cilindro circolare retto  $x^2 + y^2 = R^2$ . Se  $v_p \in T_pM$  è un vettore ortogonale all'asse del cilindro, allora la corrispondente curva sezione normale in  $p$  è una circonferenza di raggio  $R$ . Se  $v_p \in T_pM$  è un vettore parallelo all'asse del cilindro, allora la corrispondente curva sezione normale in  $p$  è una retta parallela all'asse.

**Osservazione 4.44.** Sia  $(D, \varphi)$  una carta locale di una superficie regolare di  $M$  e sia  $N$  un fissato campo unitario normale definito su  $\varphi(D)$ . Sia  $\gamma(s)$  una curva differenziabile regolare di  $M$  con sostegno in  $\varphi(D)$  e parametrizzata a velocità unitaria. Osserviamo che il versore  $(N \wedge \dot{\gamma})(s)$  è ortogonale a  $N(s)$ , quindi  $(N \wedge \dot{\gamma}) \in T_{\gamma(s)}M$  e  $(\dot{\gamma}, N, N \wedge \dot{\gamma})$  è una base ortonormale di  $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$  per ogni  $s$ . Tale base ortonormale è detta *triedro di Darboux* lungo la curva  $\gamma(s)$  di  $\varphi(D)$  (cf anche Esercizio 5.44). Il campo vettoriale accelerazione  $\ddot{\gamma}(s)$  è ortogonale a  $\dot{\gamma}(s)$ , per cui  $\ddot{\gamma}(s) \in \text{span}(N, N \wedge \dot{\gamma})$  e quindi nel generico punto  $\gamma(s)$  abbiamo

$$(4.13) \quad \ddot{\gamma} = (\ddot{\gamma} \cdot N)N + (\ddot{\gamma} \cdot N \wedge \dot{\gamma})N \wedge \dot{\gamma}.$$

Dal Teorema di Meusnier, la componente normale di  $\ddot{\gamma}(s)$  definisce la curvatura normale. La componente tangente di  $\ddot{\gamma}(s)$ , ossia la funzione

$$k_g(s) = \ddot{\gamma}(s) \cdot N(s) \wedge \dot{\gamma}(s) = \dot{\gamma}(s) \wedge \ddot{\gamma}(s) \cdot N(s),$$

si dice **curvatura geodetica** della curva  $\gamma(s)$ . Cambiando  $N$  con  $-N$ , la curvatura geodetica cambia di segno. Se  $M$  è orientabile, fissato un campo vettoriale unitario normale  $N$ , la curvatura geodetica è ben definita su tutta la superficie. Per superfici non orientabili il valore assoluto della curvatura geodetica è ben definito. In ogni caso, dalla decomposizione (4.13), si ottiene la seguente relazione fra le tre curvature (cf. anche (5.19)):

$$\kappa_\gamma^2(s) = k_g^2(s) + k_n^2(\dot{\gamma}(s)).$$

Il nome di curvatura geodetica per  $k_g$  è giustificato dal suo legame con il concetto di curva geodetica (cf. Sezione 5.4).

Ora esaminiamo le direzioni, se esistono, che annullano la curvatura normale di una superficie regolare  $M$  in un punto  $p$ .

**Definizione 4.45.** Dato  $v_p \in T_p M$ ,  $\|v_p\| = 1$ , se la curvatura normale

$$k_n(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p = 0,$$

allora la direzione definita da  $v_p$  si dice che è una **direzione asintotica nel punto  $p$** . Una curva regolare  $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$  di  $M$  tale che  $\dot{\gamma}(s)$  sia sempre una direzione asintotica è detta **curva asintotica della superficie  $M$** . In particolare, la curva delle  $u$  (risp. delle  $v$ ) è una curva asintotica se e solo se  $\ell = 0$  (risp.  $n = 0$ ).

In generale, per una curva regolare  $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$  di  $M$ , il vettore tangente  $\dot{\gamma}(s) = u'(s)\varphi_u + v'(s)\varphi_v$ , e quindi  $\gamma(s)$  è asintotica se e solo se le sue componenti soddisfano l'equazione differenziale

$$(u')^2\ell + 2u'v'm + (v')^2n = 0.$$

Sia  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  una base ortonormale di vettori principali in  $p$ . Allora, un vettore  $v_p = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$  definisce una direzione asintotica se e solo se le sue componenti  $x_1, x_2$  soddisfano la seguente equazione

$$x_1^2 k_1 + x_2^2 k_2 = 0,$$

dove  $k_1, k_2$  sono le curvatures principali in  $p$ . Si hanno quindi le seguenti possibilità:

- Se  $p$  è ellittico ( $K(p) = k_1(p)k_2(p) > 0$ ), non esistono direzioni asintotiche.

- Se  $p$  è iperbolico ( $K(p) = k_1(p)k_2(p) < 0$ ), esistono due direzioni asintotiche le quali sono definite dai vettori

$$(*) \quad v_1 = \underline{e}_1 + \mu\underline{e}_2, \quad v_2 = \underline{e}_1 - \mu\underline{e}_2, \quad \text{dove } \mu = \sqrt{-(k_1/k_2)}(p).$$

In questo caso, le direzioni principali, ovvero quelle definite dai vettori principali  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ , sono le bisettrici degli angoli convessi determinati dalle direzioni asintotiche  $v_1, v_2$  (cf. Figura 2). In particolare, le direzioni asintotiche in  $p$  sono ortogonali se e solo se la curvatura media  $H$  si annulla in  $p$ . Infatti, dalla (\*) segue

$$v_1 \cdot v_2 = 0 \text{ se e solo se } (k_1 + k_2)(p) = 0.$$

- Se  $p$  è parabolico ( $k_1(p)k_2(p) = 0, k_2(p) \neq 0$ ), l'unica direzione asintotica è la direzione principale definita da  $\underline{e}_1$ .

- Se  $p$  è planare ( $k_1(p) = k_2(p) = 0$ ), tutte le direzioni in  $p$  sono asintotiche.

- Se in un punto  $p$  esiste una direzione asintotica, allora necessariamente la curvatura gaussiana  $K(p) \leq 0$ .

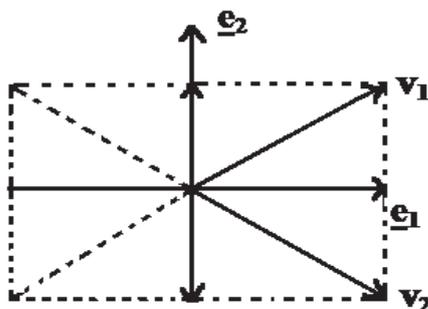


FIGURA 2. Direzioni principali e direzioni asintotiche.

**Esempio 4.46.** Sia  $M$  l'elicoide definito nell'Esempio 3.68. L'applicazione

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[, \quad b \neq 0,$$

definisce una parametrizzazione locale di  $M$ . Nell'Esempio 4.34 sono stati determinati i coefficienti della seconda forma fondamentale. Siccome  $\ell = n = 0$ , la curva delle  $u$  e quella delle  $v$  sono curve asintotiche. In particolare, per ogni fissato  $u_0 \neq 0$ , l'elica circolare  $\gamma(v) = \varphi(u_0, v) = (u_0 \cos v, u_0 \sin v, bv)$  è una curva asintotica di  $M$ .

**Esercizio 4.47.** Si consideri la superficie regolare (cf. Esempio 4.56)

$$M : \varphi(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Si verifichi che:

a) l'equazione differenziale delle curve asintotiche di  $M$  è

$$u(u')^2 - 2vu'v' - u(v')^2 = 0;$$

b) le rette  $\gamma_1(t) = (0, t, 0)$ ,  $\gamma_2(t) = (\sqrt{3}t, t, 0)$  e  $\gamma_3(t) = (-\sqrt{3}t, t, 0)$  sono curve asintotiche di  $M$ .

**Esercizio 4.48.** Sia  $\gamma(s)$  una curva regolare, con  $s$  ascissa curvilinea, di una superficie regolare  $M$ . Si verifichi che  $\gamma(s)$  è una curva asintotica di  $M$  se, e solo se, il vettore  $\ddot{\gamma}(s)$  è tangente alla superficie  $M$ . In particolare:

(a) se  $\gamma(s)$  ha curvatura  $\kappa_\gamma(s) > 0$ , allora  $\gamma(s)$  è una curva asintotica se, e solo se,  $n(s)$  (versore normale del riferimento di Frenet lungo  $\gamma$ ) è ortogonale a  $N(s) = N(\gamma(s))$  campo unitario normale alla superficie;

(b) se  $\gamma(s)$  è un segmento di retta, allora  $\gamma(s)$  è una curva asintotica.

Suggerimento: osservare che  $\dot{\gamma}(s) \cdot N(s) = 0$ , quindi derivare tale relazione e procedere. Per la proprietà (a) applicare la prima formula di Frenet:  $\ddot{\gamma}(s) = \kappa_\gamma(s)n(s)$ .

**Teorema 4.49.** (di Beltrami-Enneper) Sia  $\gamma(s)$  una curva asintotica di  $M$ ,  $s$  ascissa curvilinea, con curvatura  $\kappa_\gamma(s) > 0$ . Allora la curvatura gaussiana  $K(\gamma(s))$  e la torsione  $\tau_\gamma(s)$  soddisfano:

$$K(\gamma(s)) = -\tau_\gamma^2(s).$$

Di conseguenza, su una superficie a curvatura gaussiana costante  $< 0$ , le curve asintotiche hanno torsione costante.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $N$  un fissato campo unitario normale alla superficie  $M$  (in generale  $N$  è definito localmente). Sia  $(t(s) = \dot{\gamma}(s), n(s), b(s))$  il riferimento di Frenet lungo  $\gamma(s)$ . Dall'Esercizio 4.48 segue che  $n(s) \perp N(s)$ . D'altronde  $t(s) \perp N(s)$ , per cui  $N(s) = \pm b(s)$ . Da ciò segue, applicando la definizione di operatore forma  $S_\gamma(\dot{\gamma}(s)) = -N'(s)$  e la terza formula di Frenet  $b'(s) = -\tau_\gamma(s)n(s)$ , che

$$(4.14) \quad S_\gamma(\dot{\gamma}(s)) = \pm \tau_\gamma(s) n(s).$$

Siano  $e_1, e_2$  vettori principali in un fissato, ma arbitrario, punto  $\gamma(s)$  della curva, e siano  $\kappa_1, \kappa_2$  le corrispondenti curvature principali. Poniamo

$$\dot{\gamma}(s) = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad \text{quindi} \quad x_1^2 + x_2^2 = \|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 1.$$

Allora, dalla (4.14) si ottiene

$$S_\gamma(\dot{\gamma}(s)) \cdot S_\gamma(\dot{\gamma}(s)) = \tau_\gamma^2(s),$$

ossia

$$(4.15) \quad x_1^2 \kappa_1^2 + x_2^2 \kappa_2^2 = \tau_\gamma^2(s).$$

Inoltre,  $\gamma$  è una curva asintotica per cui

$$S_\gamma(\dot{\gamma}(s)) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0,$$

ossia

$$(4.16) \quad x_1^2 \kappa_1 + x_2^2 \kappa_2 = 0.$$

Se, nel fissato punto,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  oppure  $\kappa_1 = 0$  e  $\kappa_2 \neq 0$ , (4.15) and (4.16) implicano facilmente  $K = 0 = \tau_\gamma$ . Se  $\kappa_1 \neq 0$  e  $\kappa_2 \neq 0$ , dalla (4.16) si ottiene

$$x_1^2 \kappa_1^2 + x_2^2 \kappa_2 \kappa_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_1^2 \kappa_1 \kappa_2 + x_2^2 \kappa_2^2 = 0$$

che sostituite nella (4.15) danno

$$-(x_1^2 + x_2^2)(\kappa_1 \kappa_2) = \tau_\gamma^2(s),$$

e quindi la curvatura gaussiana nel fissato punto  $\gamma(s)$  è data da

$$K(\gamma(s)) = \kappa_1 \kappa_2 = -\tau_\gamma^2(s).$$

□

**Osservazione 4.50.** La pseudo-sfera di Beltrami (cf. Sezione 4.9) è un esempio di superficie regolare a curvatura gaussiana costante negativa.

Una motivazione per giustificare la terminologia usata per definire la natura dei punti di una superficie si ha considerando il seguente insieme di vettori tangenti in  $p$ :

$$\mathcal{D}_p = \{v_p \in T_p M : S_p(v_p) \cdot v_p = \pm 1\}, \quad \text{ovvero} \quad \mathcal{D}_p : II_p(v_p) = \pm 1.$$

Posto  $v_p = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$ ,  $\mathcal{D}_p$  ha equazioni

$$x_1^2 k_1 + x_2^2 k_2 = \pm 1.$$

Tali equazioni rappresentano una coppia di coniche (eventualmente a punti immaginari) che viene detta **indicatrice di Dupin**. Si hanno le seguenti possibilità:

- $p$  ellittico ( $k_1(p)k_2(p) > 0$ ). In tal caso l'indicatrice di Dupin è una coppia di ellissi (una a punti reali e una a punti immaginari).
- $p$  iperbolico ( $k_1(p)k_2(p) < 0$ ). In tal caso l'indicatrice di Dupin è una coppia di iperboli che hanno stessi asintoti i quali definiscono le direzioni asintotiche in  $p$ .
- $p$  parabolico ( $k_1(p) = 0, k_2(p) \neq 0$ ). In tal caso l'indicatrice di Dupin è una coppia di rette parallele.
- $p$  planare ( $k_1(p) = k_2(p) = 0$ ). In tal caso l'indicatrice di Dupin non ha significato.

**Teorema 4.51.** (*significato geometrico delle curvatures principali*) Sia  $M$  una superficie regolare e sia  $p \in M$ . Le curvatures principali  $k_1(p)$  e  $k_2(p)$  sono i valori di massimo e di minimo della curvatura normale  $k_n$  in  $p$ . In particolare, se  $k_1(p) = k_2(p) = k_0$ , allora  $S_p = k_0 I_d$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $v_p \in T_p M$ ,  $\|v_p\| = 1$ . Sia  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  una base di vettori principali in  $p$  e siano  $k_1(p), k_2(p)$  le corrispondenti curvatures principali, cioè  $S_p \underline{e}_1 = k_1(p) \underline{e}_1$  e  $S_p \underline{e}_2 = k_2(p) \underline{e}_2$ . Allora per ogni  $v_p \in T_p M$ ,  $\|v_p\| = 1$ , abbiamo

$$v_p = \cos t \underline{e}_1 + \sin t \underline{e}_2, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Pertanto

$$k_n(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p = (\cos t S_p \underline{e}_1 + \sin t S_p \underline{e}_2) \cdot (\cos t \underline{e}_1 + \sin t \underline{e}_2),$$

e quindi

$$(4.17) \quad k_n(v_p) = k_1(p) \cos^2 t + k_2(p) \sin^2 t.$$

La (4.17) è detta **formula di Eulero**. Da tale formula segue che tutte le curvatures normali in  $p$  si ottengono con la funzione

$$k_n(t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto k_n(t) = k_1(p) \cos^2 t + k_2(p) \sin^2 t.$$

La funzione  $k_n(t)$ , in quanto continua su  $[0, 2\pi]$  chiuso e limitato, ammette massimo e minimo. Derivando tale funzione, si ha

$$k'_n(t) = 2(k_2 - k_1) \cos t \sin t = (k_2 - k_1) \sin 2t.$$

Si possono quindi avere due casi:

- $k_1(p) = k_2(p)$  (ovvero  $p$  è ombelicale). Allora  $k_n(t) = \cos t = k_0$ . Ciò vuol dire che  $k_n(v_p) = \cos t$  per ogni  $v_p \in T_p M$  (con  $\|v_p\| = 1$ ), cioè tutte le direzioni in  $p$  sono principali e quindi  $S_p = k_0 I_d$ .

•  $k_2(p) \neq k_1(p)$ . In questo caso  $k'_n(t)$  si annulla per  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ . Supponiamo  $k_2(p) > k_1(p)$ , allora: per  $t = 0, \pi, 2\pi$  si ottiene  $k_1$  (minimo), e per  $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$  si ottiene  $k_2$  (massimo).  $\square$

**Osservazione 4.52.** Dal Teorema 4.51 segue che le curve principali sono curve di  $M$  la cui curvatura normale è sempre minima o massima.

#### 4.6. L'applicazione di Gauss

C. F. Gauss nel suo articolo “*Disquisitiones generales circa superficies curvas*” del 1827, definì la curvatura di una superficie  $M$  in un punto  $p \in M$  come la misura di quanto la stessa superficie si allontana dal piano tangente in quel punto. Più precisamente, fissato un punto  $p \in M$ , si considera la normale in quel punto alla superficie, poi si considera una sfera unitaria e si sceglie un raggio avente la direzione della normale fissata; la scelta del raggio individua un punto, che chiamiamo  $G(p)$ , sulla sfera. Quando  $p$  descrive una piccola regione  $\sigma$  su  $M$ ,  $G(p)$  descrive una corrispondente regione  $\sigma'$  sulla sfera unitaria. Gauss definì la curvatura  $K(p)$  della superficie  $M$  in  $p$ , considerata a meno del segno, come il limite del rapporto tra l'area della regione  $\sigma'$  sulla sfera e l'area della regione  $\sigma$  sulla superficie  $M$ , dove il limite è fatto restringendo le regioni considerate fino a farle coincidere con i rispettivi punti di partenza:

$$(4.18) \quad K(p) = \lim_{\sigma \rightarrow p} \frac{\text{area}(\sigma')}{\text{area}(\sigma)}.$$

Verifichiamo che la definizione di curvatura data da Gauss con la formula (4.18), la quale fornisce una *interpretazione geometria della curvatura gaussiana*, coincide con la Definizione 4.15. Sia  $M$  una superficie regolare orientabile di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $N = (f_1, f_2, f_3)$  un campo unitario (differenziabile) normale alla superficie  $M$ . Per ogni  $p \in M$  abbiamo  $\|N(p)\| = 1$ , ovvero  $N$  assume i suoi valori nella sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ , quindi  $N$  può essere visto come un'applicazione che viene detta **applicazione di Gauss**.

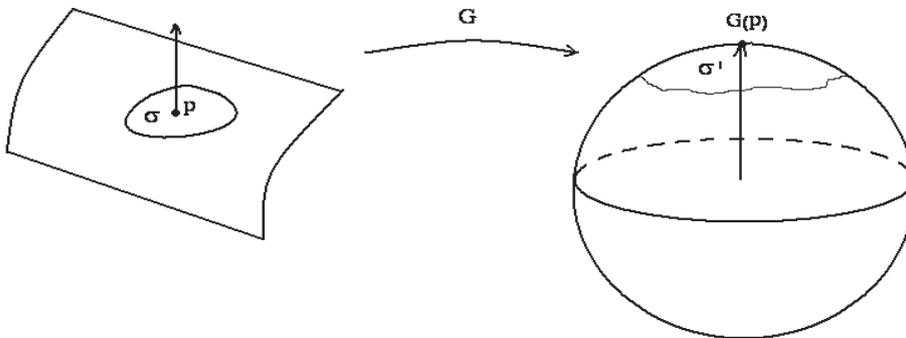


FIGURA 3. L'applicazione di Gauss.

$$G : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, p \mapsto (f_1(p), f_2(p), f_3(p)),$$

Per ogni  $p \in M$ , il piano tangente  $T_{G(p)}\mathbb{S}^2$  è l'ortogonale in  $\mathbb{R}^3$  del vettore  $G(p)$ , quindi  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$  si può identificare con  $T_pM$  (essendo entrambi ortogonali alla stessa direzione si possono identificare con una traslazione). Di conseguenza, il differenziale dell'applicazione di Gauss  $G_{*p} : T_pM \rightarrow T_{G(p)}\mathbb{S}^2$  si può pensare come un endomorfismo of  $T_pM$ . Tale endomorfismo

$$G_{*p} : T_pM \rightarrow T_pM$$

è, a meno del segno, l'operatore forma di  $M$  in  $p$ . Infatti, fissato  $p \in M$ , se  $v_p \in T_pM$  e  $\gamma(t)$  è una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v_p$ , posto  $G(t) = G(\gamma(t)) = N(\gamma(t)) = N(t)$ , dalla definizione di differenziale, segue che

$$G_{*p}(v_p) = N'(0) = -S_p(v_p).$$

In particolare, la curvatura gaussiana in  $p$

$$K(p) = \det G_{*p}.$$

Inoltre, fissata una parametrizzazione regolare locale  $(D, \varphi)$  di  $M$ , si ha

$$G_*(\varphi_u) = -S(\varphi_u) \quad \text{e} \quad G_*(\varphi_v) = -S(\varphi_v).$$

Ora, fissato  $p \in \varphi(D)$ , senza perdere in generalità possiamo assumere che  $D$  sia una palla aperta di raggio  $r$  con  $p = \varphi(0, 0)$ . Assumiamo  $K(p) \neq 0$ . Allora, prendendo  $r$  sufficientemente "piccolo", possiamo assumere che  $(D, \psi = G \circ \varphi)$  sia una parametrizzazione regolare locale della sfera  $\mathbb{S}^2$ . Quindi,

$$\psi_u = (G \circ \varphi)_u = G_*(\varphi_u) = -S(\varphi_u), \quad \psi_v = (G \circ \varphi)_v = G_*(\varphi_v) = -S(\varphi_v)$$

e

$$\psi_u \wedge \psi_v = S(\varphi_u) \wedge S(\varphi_v).$$

Pertanto, dalla Definizione 3.73, abbiamo

$$\text{area}(\psi(D)) = \iint_D \|\psi_u \wedge \psi_v\| \, dudv = \iint_D \|S(\varphi_u) \wedge S(\varphi_v)\| \, dudv.$$

D'altronde, posto  $S(\varphi_u) = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$  e  $S(\varphi_v) = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$ , usando le proprietà del prodotto vettoriale, si ha

$$\begin{aligned} S(\varphi_u) \wedge S(\varphi_v) &= (a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v) \wedge (a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(\varphi_u \wedge \varphi_v) \\ &= \det(S)(\varphi_u \wedge \varphi_v), \end{aligned}$$

e quindi

$$(4.19) \quad S(\varphi_u) \wedge S(\varphi_v) = K(u, v)(\varphi_u \wedge \varphi_v).$$

Pertanto, abbiamo

$$\text{area}(\psi(D)) = \iint_D |K(u, v)| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv.$$

Applicando le formule precedenti, si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(\psi(D))}{\text{area}(\varphi(D))} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\iint_D |K(u, v)| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv}{\iint_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(1/\text{area}(D)) \iint_D |K(u, v)| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv}{(1/\text{area}(D)) \iint_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv}. \end{aligned}$$

Ora, applicando il teorema del valor medio per gli integrali doppi, per qualche  $(u, v) \in D$  si ha

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(\psi(D))}{\text{area}(\varphi(D))} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|K| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u, v) \\ &= \frac{|K| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(0, 0) = |K(p)|. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la formula

$$|K(p)| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(\psi(D))}{\text{area}(\varphi(D))},$$

ovvero la formula (4.18).

**Esercizio 4.53.** Determinare, usando la formula (4.18), la curvatura gaussiana di una sfera di raggio  $R$  e di un piano.

#### 4.7. Approssimazione quadratica di una superficie

In questa sezione vediamo come la curvatura gaussiana, in particolare quando non nulla, “controlla” la forma della superficie in un intorno di un fissato punto. Inoltre, lo stesso studio darà un’altra motivazione per giustificare la terminologia usata per definire la natura dei punti di una superficie.

Sia  $M$  una superficie regolare e sia  $p_0 \in M$ . In un intorno di  $p_0$ , la superficie  $M$  si può rappresentare con una delle seguenti forme:

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z).$$

Consideriamo, ad esempio,  $M : z = f(x, y)$  in un intorno di  $p_0$ . Questo tipo di superficie si può parametrizzare con

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D \text{ (aperto di } \mathbb{R}^2 \text{)}.$$

Pertanto,

$$\varphi_u = (1, 0, f_u) = (1, 0, f_x), \quad \varphi_v = (0, 1, f_v) = (0, 1, f_y),$$

e quindi

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Inoltre,

$$\varphi_{uv} = (0, 0, f_{xy}), \quad \varphi_{uu} = (0, 0, f_{xx}), \quad \varphi_{vv} = (0, 0, f_{yy}).$$

I coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale sono quindi

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = 1 + f_x^2, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = f_x f_y, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = 1 + f_y^2,$$

$$\ell = N \cdot \varphi_{uu} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad m = N \cdot \varphi_{uv} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$n = N \cdot \varphi_{vv} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Pertanto, per ogni  $p \in U = \varphi(D)$ , la curvatura gaussiana e la curvatura media sono date da

$$(4.20) \quad K(p) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2},$$

$$(4.21) \quad H(p) = \frac{Gl - 2Fm + En}{2(EG - F^2)} = \frac{(1 + f_x^2) f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2) f_{xx}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

**Osservazione 4.54.** Le formule (4.20) e (4.21) valgono per ogni superficie regolare di equazione cartesiana  $z = f(x, y)$ .

Siccome stiamo facendo uno studio qualitativo, senza perdere in generalità, possiamo supporre  $p_0 = (0, 0, 0) \in M$ ,  $T_{p_0}M = \pi_{xy} : z = 0$  e che l'asse  $x$  e l'asse  $y$  siano le direzioni principali in  $p_0$  (basta applicare l'isometria  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  definita da  $F(p_0) = O(0, 0, 0)$ ,  $F_{*p_0}(\underline{e}_{1p_0}) = (1, 0, 0)_{p_0}$ ,  $F_{*p_0}(\underline{e}_{2p_0}) = (0, 1, 0)_{p_0}$  e  $F_{*p_0}N_{p_0} = (0, 0, 1)_{p_0}$ ). Poichè assumiamo  $T_{p_0}M = \pi_{xy} : z = 0$ , si ha  $N_{p_0} = (0, 0, 1)_{p_0}$ . D'altronde, come si è visto prima, il campo normale  $N$  è parallelo al campo vettoriale  $(-f_x, -f_y, 1)$  per cui necessariamente deve essere  $f_x^0 = f_y^0 = 0$ . Inoltre, un facile calcolo mostra che

$$S(\varphi_u^0) = -N_u^0 = (f_{xx}^0, f_{xy}^0, 0) = f_{xx}^0 \varphi_u^0 + f_{xy}^0 \varphi_v^0,$$

$$S(\varphi_v^0) = -N_v^0 = (f_{xy}^0, f_{yy}^0, 0) = f_{xy}^0 \varphi_u^0 + f_{yy}^0 \varphi_v^0,$$

ovvero

$$S_p = \begin{pmatrix} f_{xx}^0 & f_{xy}^0 \\ f_{xy}^0 & f_{yy}^0 \end{pmatrix} \text{ (matrice hessiana della funzione } f \text{ in } p_0 = (0, 0, 0)),$$

e quindi

$$K(p_0) = f_{xx}^0 f_{yy}^0 - (f_{xy}^0)^2 \quad \text{e} \quad H(p_0) = (f_{xx}^0 + f_{yy}^0)/2.$$

Inoltre, l'asse  $x$  e l'asse  $y$  definiscono le direzioni principali in  $p_0$ ,  $(1, 0, 0)_{p_0} = \varphi_u^0$  e  $(0, 1, 0)_{p_0} = \varphi_v^0$ , allora  $(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$  deve essere una base di vettori principali in  $p_0$ , ovvero

$$S(\varphi_u^0) = f_{xx}^0 \varphi_u^0 \quad \text{e} \quad S(\varphi_v^0) = f_{yy}^0 \varphi_v^0,$$

e ciò implica

$$k_1(p_0) = f_{xx}^0, \quad k_2(p_0) = f_{yy}^0 \quad \text{e} \quad f_{xy}^0 = 0.$$

Ora, sviluppiamo con la formula di Taylor la funzione  $f(x, y)$ , con punto iniziale  $(0, 0)$ . Approssimando fino all'ordine 2, si ha

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + (f_x^0 x + f_y^0 y) + \frac{1}{2}(f_{xx}^0 x^2 + 2f_{xy}^0 xy + f_{yy}^0 y^2).$$

Siccome  $f(0, 0) = f_x^0 = f_y^0 = f_{xy}^0 = 0$ , si ha la seguente approssimazione quadratica:

$$M : z = f(x, y) \approx \frac{1}{2}(f_{xx}^0 x^2 + f_{yy}^0 y^2),$$

dove  $f_{xx}^0 = k_1(p_0)$  e  $f_{yy}^0 = k_2(p_0)$ . Pertanto, in un intorno di  $p_0$  la superficie  $M$  è approssimata dalla quadrica

$$M_0 : z = \frac{1}{2}(k_1(p_0)x^2 + k_2(p_0)y^2).$$

$M_0$  è detta *approssimazione quadratica* di  $M$  in un intorno di  $p_0 = (0, 0, 0)$ . Denotiamo con  $\mathcal{C}_0$  la conica intersezione di  $M_0$  con lo spazio tangente  $T_{p_0}M_0$ , quindi

$$\mathcal{C}_0 : z = 0, k_1(p_0)x^2 + k_2(p_0)y^2 = 0.$$

Ne segue che:

- Se  $p_0$  è un punto ellittico, cioè  $K(p_0) > 0$ , allora  $k_1(p_0), k_2(p_0)$  sono concordi ed  $M_0$  è un *paraboloide ellittico*. In tal caso,  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette complesse coniugate.
- Se  $p_0$  è un punto iperbolico, cioè  $K(p_0) < 0$ , allora  $k_1(p_0), k_2(p_0)$  sono discordi ed  $M_0$  è un *paraboloide iperbolico* (presenta una *sella*). In tal caso,  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette reali distinte.
- Se  $p_0$  è un punto parabolico, cioè  $K(p_0) = 0, k_1(p_0) \neq 0, k_2(p_0) = 0$ , allora  $M_0$  ha equazione  $z = (k_1(p_0)/2)x^2$  e quindi è un *cilindro parabolico*. In tal caso,  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette reali coincidenti.
- Se  $p_0$  è planare, cioè  $K(p) = k_1(p_0) = k_2(p_0) = 0$ , allora  $M_0 : z = 0$  è un *piano*.

Nel caso di un punto ellittico o iperbolico, i risultati precedenti sono in accordo con la seguente proposizione.

**Proposizione 4.55.** *Sia  $M$  una superficie regolare, e sia  $p$  un punto di  $M$ .*

- *Se  $p$  è ellittico, allora esiste un intorno  $U$  di  $p$  in  $M$  tutto contenuto in uno dei due semispazi determinati da  $T_pM$ .*
- *Se  $p$  è iperbolico, allora in entrambi i semispazi determinati da  $T_pM$  cadono punti di ogni intorno  $U$  di  $p$  in  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione di  $M$  con  $\varphi(0, 0) = p$  e sia  $N$  un fissato versore normale a  $M$  definito in  $U = \varphi(D)$ . La distanza con segno, che indichiamo con  $d$ , del generico punto  $q = \varphi(u, v) \in U$  dal piano tangente  $T_pM$  è data da

$$d = p\vec{q} \cdot N_p = (q - p) \cdot N_p = (\varphi(u, v) - \varphi(0, 0)) \cdot N_p.$$

Sviluppriamo con la formula di Taylor la funzione  $\varphi(u, v)$ :

$$\varphi(u, v) = \varphi(0, 0) + \varphi_u^0 u + \varphi_v^0 v + \frac{1}{2}(\varphi_{uu}^0 u^2 + 2\varphi_{uv}^0 uv + \varphi_{vv}^0 v^2) + A_1(u, v),$$

dove la funzione  $A_1(u, v)$  soddisfa

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{A_1(u, v)}{u^2 + v^2} = 0.$$

Di conseguenza, ricordando la definizione dei coefficienti  $\ell, m, n$  della seconda forma fondamentale, si ha

$$d = (\varphi(u, v) - \varphi(0, 0)) \cdot N_p = \frac{1}{2}(\ell_0 u^2 + 2m_0 uv + n_0 v^2) + A_2 = \frac{1}{2} \mathcal{II}_p(w_p) + A_2,$$

dove  $w_p = u\varphi_u^0 + v\varphi_v^0 \in T_p M$  e  $A_2 = A_1 \cdot N_p$ . Ora, esprimendo  $w_p$  in una base ortonormale di vettori principali in  $p$ ,  $w_p = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2$ , si ha

$$\mathcal{II}_p(w_p) = k_1(p)a_1^2 + k_2(p)a_2^2.$$

Pertanto,

- Se  $p$  è ellittico (ossia,  $k_1(p), k_2(p)$  concordi), la seconda forma fondamentale  $\mathcal{II}_p(w_p)$  ha segno fissato (sempre positivo o sempre negativo) per ogni  $w_p$  e quindi per ogni  $q = \varphi(u, v)$  sufficientemente vicino a  $p$ . D'altronde,  $d$  ha lo stesso segno di  $\mathcal{II}_p(w_p)$ , per cui ogni punto sufficientemente vicino a  $p$  si trova in uno dei due semispazi determinati da  $T_p M$ .

- Se  $p$  è iperbolico (ossia,  $k_1(p), k_2(p)$  discordi), la seconda forma fondamentale  $\mathcal{II}_p(w_p)$  assume valori positivi e negativi, in corrispondenza si trovano punti  $q = \varphi(u, v)$ , sufficientemente vicini a  $p$ , in cui  $d$  ha valori positivi e altri in cui  $d$  ha valori negativi, per cui tali punti si trovano in semispazi distinti.  $\square$

La Proposizione precedente non fornisce informazioni nel caso di punti parabolici o planari. In tal caso si può vedere con degli esempi le differenti situazioni che si possono avere.

**Esempio 4.56.** Consideriamo la superficie (*sella di scimmia*)  $M : z = x^3 - 3xy^2$  (cf. Figura 4). Un semplice calcolo mostra che nell'origine  $(0, 0, 0)$

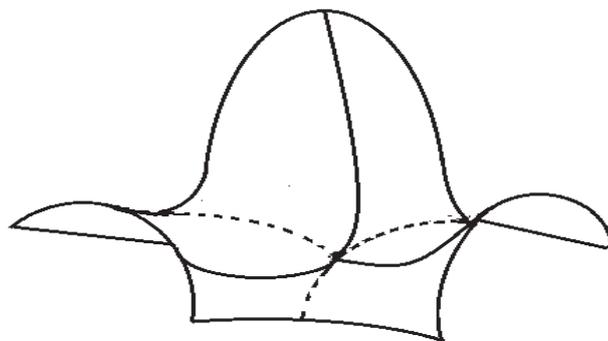


FIGURA 4. Sella di scimmia.

i coefficienti  $l, m, n$  sono nulli, pertanto  $(0, 0, 0)$  è un punto planare. Tuttavia,

in ogni intorno di questo punto ci sono punti di  $M$  in entrambi i semispazi determinati dal piano tangente in  $(0, 0, 0)$ .

**Esempio 4.57.** Consideriamo il cilindro circolare retto  $x^2 + y^2 = 1$  che è una superficie a punti parabolici. In tal caso, in ogni punto  $p$  del cilindro, il piano tangente  $T_p M$  è tangente al cilindro lungo la retta generatrice per  $p$ .

**Osservazione 4.58.** Sia  $\mathcal{Q}$  una **quadrica** generale o speciale (quindi, di rango 4 o 3). Siano  $p_0$  un punto semplice di  $\mathcal{Q}$ ,  $\pi_0$  il piano tangente alla quadrica in  $p_0$  e  $\mathcal{C}_0$  la conica sezione di  $\mathcal{Q}$  con  $\pi_0$ . Ricordiamo che nella teoria delle quadriche (cf. Sezione 3.2) il punto  $p_0$  è detto:

- *ellittico* se  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette complesse e coniugate;
- *iperbolico* se  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette reali e distinte;
- *parabolico* se  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette coincidenti.

Inoltre, da tale teoria, è noto che tutti i punti di  $\mathcal{Q}$  sono dello stesso tipo. Le quadriche di rango 3 (coni e cilindri) sono a punti parabolici, mentre una quadrica di rango 4 può essere a punti tutti iperbolici oppure a punti tutti ellittici. Più precisamente, per le quadriche di rango 4 (a punti reali) indicate nel Corollario 3.30, abbiamo che

- l'ellisse:  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  è a punti ellittici;
- l'iperboloide (a una falda):  $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$  è a punti iperbolici;
- l'iperboloide (a due falde):  $x^2/a^2 - (y^2/b^2 + z^2/c^2) = 1$  è a punti ellittici;
- il paraboloido "a sella":  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = z$  è a punti iperbolici;
- il paraboloido:  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z$  è a punti ellittici.

Per le quadriche di rango 3 (a punti reali), le quali sono tutte a punti parabolici, abbiamo

- il cono:  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ ,  $a, b > 0, c < 0$ ;
- il cilindro ellittico:  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ;
- il cilindro iperbolico  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ;
- il cilindro parabolico:  $y^2 = az$ ,  $a \neq 0$ .

Considerate tali quadriche dal punto di vista delle superfici regolari (per il cono quadrico si esclude il vertice), si verifichi per esercizio che la natura dei punti per tali superfici è la stessa di quella ricordata nell'ambito della teoria delle quadriche.

#### 4.8. Qualche teorema globale sulle superfici

Si è visto che sfere e piani sono esempi di superfici i cui punti sono tutti ombelicali. Viceversa, vale la seguente caratterizzazione delle superfici aventi solo punti ombelicali.

**Teorema 4.59.** *Una superficie regolare (connessa)  $M$  i cui punti siano tutti ombelicali è contenuta in un piano oppure in una sfera.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione locale di  $M$  con  $D$  disco di  $\mathbb{R}^2$  e quindi  $\varphi(D)$  è un connesso di  $M$ . Per ipotesi tutti i punti di  $M$  sono ombelicali, allora per ogni  $p \in \varphi(D)$ ,  $p = \varphi(u, v)$ , si ha che l'operatore forma  $S_p = f(u, v)I_d$ . Proviamo che la funzione  $f(u, v)$  che rappresenta le curvatures principali, ovvero  $k_1(u, v) = k_2(u, v) = f(u, v)$ , è una costante. Da  $S_p(\varphi_u) = f(u, v)\varphi_u$  e  $S_p(\varphi_v) = f(u, v)\varphi_v$  segue che  $f(u, v)\varphi_u = -N_u$  e  $f(u, v)\varphi_v = -N_v$ . Derivando la prima equazione rispetto a  $v$  e la seconda rispetto a  $u$  si ha

$$f_v\varphi_u + f\varphi_{uv} = -N_{uv} \quad \text{e} \quad f_u\varphi_v + f\varphi_{vu} = -N_{vu},$$

da cui segue

$$f_v\varphi_u - f_u\varphi_v = 0$$

e quindi  $f_u = f_v = 0$ . Siccome  $D$  è connesso si ottiene che  $f(u, v)$  è costante su  $D$  e quindi  $f(p) = \text{cost} = k_0$  per ogni  $p \in \varphi(D)$ . Distinguiamo due casi.

•  $k_0 = 0$ . In questo caso  $N_u = -S_p(\varphi_u) = 0$  e  $N_v = -S_p(\varphi_v) = 0$  implicano che  $N = \text{cost} = N_0$  su  $\varphi(D)$ . Allora, fissato  $p_0 \in \varphi(D)$ ,  $\varphi(D)$  è contenuto nel piano  $\pi_0$  per  $p_0$  e ortogonale a  $N_0$ , ovvero  $(p - p_0) \cdot N_0 = 0$  per ogni  $p \in \varphi(D)$ . Infatti, dato  $p \in \varphi(D)$  e considerata una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $\varphi(D)$  con  $\gamma(0) = p_0$  e  $\gamma(1) = p$ , si ha che la funzione

$$f(t) = (\gamma(t) - p_0) \cdot N_0 \quad \text{ha derivata} \quad f'(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot N_0 = 0.$$

Pertanto,  $f(t) = \text{cost} = f(0) = 0$  e in particolare  $(p - p_0) \cdot N_0 = f(1) = 0$  ci dice che  $p \in \pi_0$ .

•  $k_0 \neq 0$ . Scambiando  $N$  con  $-N$ , se necessario, possiamo assumere  $k_0 < 0$ . In questo caso, su  $\varphi(D)$  la curvatura gaussiana  $K = \text{cost} = k_0^2$ . Proviamo che  $\varphi(D)$  è contenuto nella sfera di raggio  $R = -1/k_0$  e centro

$$C_0 = p_0 + \frac{1}{k_0}N_{p_0},$$

dove  $p_0$  è un fissato punto di  $\varphi(D)$ , ovvero proviamo che  $\|C_0 - p\|^2 = R^2$  per ogni  $p \in \varphi(D)$ . Infatti, dato  $p \in \varphi(D)$ , e considerata una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $\varphi(D)$  con  $\gamma(0) = p_0$  e  $\gamma(1) = p$ , si ha che la curva

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k_0}N_{\gamma(t)}$$

ha vettore velocità

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\gamma}(t) + \frac{1}{k_0}N'(t) = \dot{\gamma}(t) - \frac{1}{k_0}S(\dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Allora,  $\alpha(t) = \text{cost}$  e quindi

$$C_0 = \alpha(0) = \alpha(1) = p + \frac{1}{k_0}N_p,$$

da cui si ha  $\|C_0 - p\|^2 = (1/k_0^2)\|N_p\|^2 = R^2$ .

Adesso proviamo che l'intera superficie  $M$  è contenuta in un piano oppure in una sfera. Fissato un punto  $p_0$  di  $M$ , sia  $p$  un arbitrario punto di  $M$ . Siccome  $M$  è connessa, esiste una curva continua  $\gamma(t)$  di  $M$  con  $\gamma(0) = p_0$  e  $\gamma(1) = p$ . Suddividiamo l'arco  $\gamma([0, 1])$  in un numero finito di archi  $\gamma_1 = \gamma(p_0, p_1)$ ,  $\gamma_2 = \gamma(p_1, p_2)$ , ...,  $\gamma_n = \gamma(p_{n-1}, p)$  abbastanza "piccoli" per cui ognuno sia contenuto nel codominio di una parametrizzazione locale  $(D_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , del tipo considerato prima. Allora  $p_0$ , e quindi  $\varphi_1(D_1)$ , è contenuto in un piano  $\pi$  oppure in una sfera  $\mathbb{S}^2$ . Se  $\varphi_1(D_1)$  è contenuto in un piano  $\pi$  (risp. in una sfera  $\mathbb{S}^2$ ), allora anche  $\varphi_2(D_2), \dots, \varphi_n(D_n)$  sono contenuti nello stesso piano  $\pi$  (risp. nella stessa sfera  $\mathbb{S}^2$ ). In particolare, risulta che  $p$  è contenuto nel piano  $\pi$  (risp. nella sfera  $\mathbb{S}^2$ ). Per l'arbitrarietà di  $p$ , possiamo concludere che tutta la superficie  $M$  è contenuta in un piano oppure in una sfera.  $\square$

**Corollario 4.60.** *Una superficie regolare (connessa)  $M$  a curvatura gaussiana positiva e i cui punti siano tutti ombelicali è contenuta in una sfera.*

**Teorema 4.61.** *Sia  $M$  una superficie regolare (connessa) compatta. Allora, esiste almeno un punto in cui la curvatura gaussiana è positiva.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funzione

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f(p) = \|p\|^2 = p \cdot p.$$

Poichè  $f$  è continua ed  $M$  è compatta, allora esiste un punto  $p_0$  in cui  $f$  assume il massimo:

$$\|p\|^2 \leq \|p_0\|^2 \quad \forall p \in M.$$

In particolare, la superficie  $M$  è contenuta nella palla di centro l'origine e raggio  $r = \|p_0\|$ . Proviamo che la curvatura gaussiana di  $M$  è positiva nel punto  $p_0$ . Sia  $V_0 \in T_{p_0}M$  un vettore tangente con  $\|V_0\| = 1$ , e sia  $\gamma(t)$ ,  $|t| < \varepsilon$ , una curva differenziabile con  $\gamma(0) = p_0$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_0$ . La funzione reale  $\phi(t) = f(\gamma(t)) = \gamma(t) \cdot \gamma(t)$ ,  $|t| < \varepsilon$ , ha un massimo per  $t = 0$ , dunque  $\phi'(0) = 0$ . D'altronde,

$$\phi'(t) = 2\dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t) \quad \implies \quad 2\dot{\gamma}(0) \cdot \gamma(0) = \phi'(0) = 0,$$

per cui  $V_0 \cdot p_0 = 0$ . Per l'arbitrarietà di  $V_0$  possiamo affermare che

$$\vec{p}_0 \perp T_{p_0}M,$$

ossia il vettore definito da  $p_0$  è ortogonale al piano tangente  $T_{p_0}M$ . Sia ora  $N$  un campo vettoriale unitario definito in un intorno di  $p_0$ . Il risultato precedente ci dice che  $N(p_0) = \pm(1/r)p_0$ , e quindi scegliamo  $N$  tale che

$$N(p_0) = +(1/r)p_0.$$

Applicando l'operatore forma a  $V_0$  si ha

$$S_{p_0}V_0 = -N'(0), \quad \text{dove} \quad N(t) = N(\gamma(t)).$$

Da  $\dot{\gamma}(t) \cdot N(t) = 0$  segue che  $\ddot{\gamma}(t) \cdot N(t) + \dot{\gamma}(t) \cdot N'(t) = 0$ , e quindi per  $t = 0$  abbiamo

$$(4.22) \quad (S_{p_0} V_0) \cdot V_0 = -N'(0) \cdot \dot{\gamma}(0) = \ddot{\gamma}(0) \cdot N(0) = (1/r)(\ddot{\gamma}(0) \cdot p_0).$$

D'altronde,  $t = 0$  è di massimo per la funzione  $\phi(t)$ , per cui  $\phi''(0) \leq 0$ . Siccome,

$$\phi''(t) = (\phi'(t))' = 2(\dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t))' = 2(\ddot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t) + \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)),$$

allora

$$0 \geq \phi''(0) = 2(\ddot{\gamma}(0) \cdot \gamma(0) + \dot{\gamma}(0) \cdot \dot{\gamma}(0)) = 2(\ddot{\gamma}(0) \cdot p_0 + V_0 \cdot V_0),$$

e quindi

$$(4.23) \quad \ddot{\gamma}(0) \cdot p_0 + 1 \leq 0.$$

Usando la (4.22) e la (4.23), la curvatura normale di  $M$  in  $p_0$  e nella direzione di  $V_0$  è data da

$$k_n(V_0) = (S_{p_0} V_0) \cdot V_0 = \frac{1}{r}(\ddot{\gamma}(0) \cdot p_0) \leq -\frac{1}{r} < 0.$$

In particolare, le curvature principali in  $p_0$  soddisfano  $-k_1(p_0) \geq (1/r) > 0$  e  $-k_2(p_0) \geq (1/r) > 0$ , pertanto la curvatura gaussiana

$$K(p_0) = k_1(p_0)k_2(p_0) \geq (1/r^2) > 0.$$

□

Come conseguenza, otteniamo

**Corollario 4.62.** *In  $\mathbb{R}^3$  non esistono superfici regolari compatte con curvatura gaussiana  $K \leq 0$ . In particolare, in  $\mathbb{R}^3$  non esistono superfici regolari compatte minimali.*

#### 4.9. La pseudo-sfera di Beltrami

Il piano euclideo ( $K=0$ ) e la sfera canonica  $\mathbb{S}^2(R)$  ( $K = \frac{1}{R^2}$ ) sono modelli di superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$  a curvatura gaussiana costante non negativa.

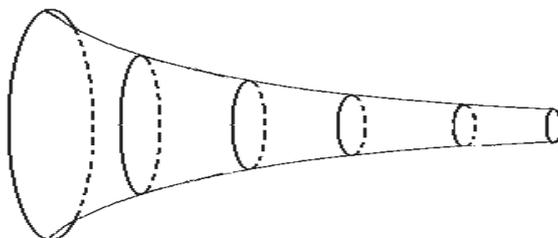


FIGURA 5. La pseudo-sfera di Beltrami.

La *pseudo-sfera di Beltrami* è un modello di superficie regolare a curvatura gaussiana costante negativa (che non è possibile visualizzare in modo completo

in  $\mathbb{R}^3$ ). Nel seguito diamo una descrizione di tale superficie (cf. M. Villa [27]). La pseudo-sfera di Beltrami è la superficie generata dalla rotazione di una trattrice intorno al proprio asintoto. La trattrice dal punto di vista meccanico è la curva descritta in un piano orizzontale da un punto pesante attaccato all'estremo di un filo teso, di cui l'altro estremo percorre una retta appartenente a quel piano (ciò giustifica il nome della curva). La curva è anche detta *curva del cane* pensando ad una persona che, percorrendo una retta, tira per il guinzaglio un cane restio a seguirlo.

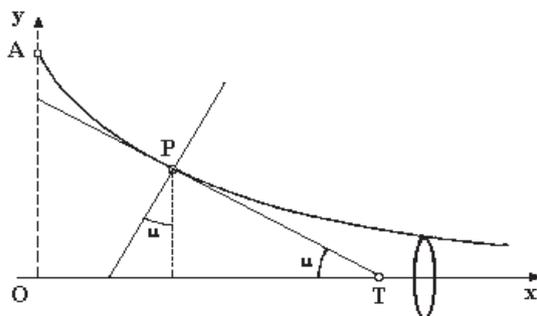


FIGURA 6. La trattrice.

Nel piano euclideo la *trattrice* è una curva per cui, se  $P$  è un punto di essa e  $T$  è il punto in cui la tangente in  $P$  interseca una retta fissa  $a$ , il segmento  $PT$  ha lunghezza costante ( $= R$ ) al variare di  $P$  sulla curva. La retta  $a$  è l'asintoto della trattrice. Supponendo che la retta  $a$  sia l'asse  $x$ , allora la trattrice  $\gamma$  ha equazione del tipo  $y = y(x)$ . Fissato  $P_0(x_0, y_0) \in \gamma$  e detto  $T$  il punto in cui la tangente in  $P_0$  incontra l'asse  $x$ , la retta  $[P_0, T]$  è la tangente in  $P_0$  a  $\gamma$ , quindi ha equazione

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{con} \quad y'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0).$$

Siccome  $T$  ha coordinate  $x_1 = x_0 - \frac{1}{y'(x_0)}y_0 = x_0 - \frac{dx}{dy}(y_0)y_0$  e  $y_1 = 0$ , si ha

$$\overline{P_0T} = \text{cost} = R \Leftrightarrow R^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \left(\frac{dx}{dy}(y_0)\right)^2 y_0^2 + y_0^2.$$

Considerato  $P(x, y)$  generico punto di  $\gamma$ , si ha :

$$R^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 y^2 + y^2, \quad \text{cioè} \quad \frac{R^2 - y^2}{y^2} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2, \quad y > 0.$$

Pertanto,

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \sqrt{R^2 - y^2} \quad (\text{eq. differenziale della curva}),$$

e quindi

$$x = \int \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y} dy.$$

Indicato con  $u$  l'angolo formato dalla tangente  $PT$  con l'asse  $x$ , si ha

$$y = R \operatorname{sen} u, \quad x = R \int \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen} u} du = R \left( \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} - \int \operatorname{sen} u du \right).$$

Il punto  $A$  inizio della curva (pensando alla generazione meccanica) ha coordinate  $(0, R)$ , pertanto dovrà aversi  $x = 0$  per  $u = \pi/2$ . Dunque, le equazioni parametriche di  $\gamma$  sono :

$$(4.24) \quad \gamma : \begin{cases} x = R \ln \tan u/2 + R \cos u, \\ y = R \operatorname{sen} u, \quad u \in ]0, \pi[. \end{cases}$$

$\gamma(u)$  è una curva regolare tranne che per  $u = \pi/2$ . Eliminando  $u$  si ottiene l'equazione cartesiana:

$$x = -\sqrt{R^2 - y^2} + R \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Per  $u \in ]0, \pi/2[$  si ottiene la curva in Figura 6, per  $u \in ]\pi/2, \pi[$  si ottiene una curva simmetrica rispetto all'asse  $y$ . Infatti, cambiando nella (4.24)  $u$  con  $\pi - u$ , la  $x$  cambia di segno mentre la  $y$  resta inalterata. Quindi,  $\gamma$  è simmetrica rispetto all'asse  $y$ . Il punto  $A$  è una cuspidale per la curva e l'asse  $y$  è la relativa tangente cuspidale. La pseudo-sfera si ottiene ruotando  $\gamma$  intorno all'asse  $x$ , pertanto è parametrizzata da

$$\varphi(u, v) = (R(\ln \tan u/2 + \cos u), R \operatorname{sen} u \cos v, R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v),$$

dove  $u \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $v \in ]0, 2\pi[$ . I vettori tangenti coordinati sono

$$\varphi_u = R \cos u \left( \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}, \cos v, \operatorname{sen} v \right), \quad \varphi_v = R (0, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos v),$$

e quindi la prima forma fondamentale è definita dai coefficienti

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = R^2 \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u}, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = R^2 \operatorname{sen}^2 u.$$

Inoltre,

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (\operatorname{sen} u, -\cos u \cos v, -\cos u \operatorname{sen} v)$$

e quindi i coefficienti della seconda forma fondamentale sono dati da

$$l = \varphi_{uu} \cdot N = -R \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}, \quad m = \varphi_{uv} \cdot N = 0, \quad n = \varphi_{vv} \cdot N = R \operatorname{sen} u \cos u.$$

Pertanto, la curvatura gaussiana della pseudo-sfera è una costante negativa:

$$(4.25) \quad K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{ln}{EG} = -\frac{1}{R^2}.$$

Si può verificare che la geometria sulla pseudo-sfera di Beltrami, assumendo come rette le geodetiche di tale superficie, coincide (limitatamente a regioni opportune) con la geometria piana iperbolica. Hilbert dimostrò che non esiste una superficie dello spazio euclideo a curvatura costante negativa in cui valga in tutta la sua estensione la geometria iperbolica. Più precisamente, nello

spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  non esiste una superficie regolare completa (nel senso della Definizione 5.92) di curvatura gaussiana costante negativa.

**Osservazione 4.63.** La pseudo-sfera di Beltrami è una superficie di rotazione ottenuta ruotando la trattrice  $\gamma(u)$ , definita dall'equazione (4.24), intorno all'asse  $x$ . Tale curva  $\gamma(u)$  non è parametrizzata a velocità unitaria. Ora, consideriamo una curva semplice regolare  $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u), u \in ]a, b[$ , parametrizzata con l'ascissa curvilinea, quindi con  $(f')^2 + (g')^2 = 1$ . La superficie di rotazione ottenuta ruotando  $\gamma(u)$  intorno all'asse  $z$  è parametrizzata da (cf. Esempio 3.67)

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)).$$

Inoltre, la curvatura gaussiana di  $M$  è data dall'equazione (cf. Esempio 4.25)

$$(4.26) \quad K(u, v) = -\frac{f''(u)}{f(u)}.$$

Assumendo che la curvatura gaussiana  $K = \text{cost.} = -1$ , la soluzione generale dell'equazione (4.26) è

$$f(u) = ce^u + de^{-u}, \quad \text{con } c, d \text{ costanti.}$$

Al fine di esprimere  $g(u)$  con funzioni elementari, assumiamo  $c = 1$  e  $d = 0$ . Allora

$$f(u) = e^u \quad \text{e} \quad g(u) = \int \sqrt{1 - e^{2u}} du \quad \text{con } u \leq 0.$$

Risolvendo l'integrale (tralasciando la costante arbitraria) si trova che la curva  $\gamma$  parametrizzata a velocità unitaria è la trattrice con equazioni parametriche

$$\gamma(u) = (e^u, 0, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u})),$$

e con equazioni cartesiane

$$y = 0, \quad z = \sqrt{1 - x^2} - \cosh^{-1}(1/x), \quad 0 < x \leq 1.$$

Quindi, la pseudo-sfera di Beltrami è parametrizzata con

$$\varphi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u})), \quad u < 0 \text{ e } v \in ]0, 2\pi[.$$

Con questa parametrizzazione i coefficienti della prima forma fondamentale sono (cf. Esempio 3.67)  $E = 1, F = 0$  e  $G = f^2(u) = e^{2u}$ . Adesso consideriamo il cambiamento di parametri

$$\bar{u} = v, \quad \bar{v} = e^{-u}, \quad \text{e quindi} \quad u = -\ln \bar{v}, \quad v = \bar{u}.$$

Rispetto alla parametrizzazione definita dai nuovi parametri  $(\bar{u}, \bar{v})$ , i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati dalla (3.20), ovvero

$$\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = J_c^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(u) \end{pmatrix} J_c,$$

dove  $J_c = \begin{pmatrix} 0 & -1/\bar{v} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Pertanto si ottiene  $\bar{E} = \bar{F} = 1/\bar{v}^2$  e  $\bar{G} = 0$ . Questa presentazione locale della prima forma fondamentale della pseudo-sfera di Beltrami si presta ad essere estesa al caso del modello (iperbolico) del semipiano di Poincaré  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  (cf. Sezione 6.2).

**Esercizio 4.64.** Risolvere l'equazione (4.26) nel caso  $K = \text{cost} = 0$  e nel caso  $K = \text{cost} > 0$ , esplicitando i tipi di superfici che si ottengono.



## Geometria intrinseca delle superfici

In questo capitolo studiamo principalmente, di una superficie regolare, proprietà e concetti di natura intrinseca, ossia proprietà che dipendono soltanto dalla prima forma fondamentale e quindi sono invarianti per isometrie. Ad esempio, sono di natura intrinseca: la distanza (intrinseca), la derivata covariante (di Levi-Civita), il concetto di curva geodetica e quello di curvatura gaussiana (“Teorema egregium” di Gauss). Proprietà che dipendono dall’operatore forma, ovvero dalla seconda forma fondamentale, e quindi dalla loro “forma” in  $\mathbb{R}^3$ , si dicono proprietà estrinseche. Superfici congruenti, ossia superfici che hanno “stessa forma” in  $\mathbb{R}^3$ , sono superfici isometriche che hanno “stesso” operatore forma.

### 5.1. Distanza intrinseca

Uno dei concetti più importanti nell’ambito della geometria intrinseca di una superficie è quello di distanza che adesso introduciamo.

Sia  $M$  una superficie regolare (connessa) di  $\mathbb{R}^3$ . Se  $p$  e  $q$  sono due punti di  $M$ , possiamo considerare la distanza euclidea

$$d_0(p, q) = \|q - p\|,$$

ed è ben noto che la curva che realizza tale distanza e il segmento che congiunge  $p$  e  $q$ , segmento che in generale non si trova sulla superficie. Vogliamo definire una distanza intrinseca tra  $p$  e  $q$ , ovvero una distanza che si basi solo su misure fatte sulla superficie  $M$ .

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  è una curva differenziabile di  $M$  con sostegno  $\gamma([a, b])$  che non si può ricoprire con una sola parametrizzazione  $(D, \varphi)$ , allora  $\gamma([a, b])$  (in quanto compatto) lo si può ricoprire con un numero finito di domini  $\varphi_i(D_i)$  e

$$L(\gamma) := \sum_{i=1}^r L(\gamma_i) \geq 0,$$

dove ogni arco  $\gamma_i$  ha sostegno contenuto in  $\varphi_i(D_i)$ . Se  $\gamma$  è una curva differenziabile a tratti,  $L(\gamma)$  è definita come somma finita delle lunghezze degli archi differenziabili. Ora, sia  $C(p, q)$  l’insieme di tutte le curve differenziabili a tratti che congiungono  $p$  e  $q$ . Si può provare (usando il fatto che  $M$  è connessa) che  $C(p, q)$  è non vuoto. Possiamo quindi definire la funzione

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+, (p, q) \mapsto d(p, q) = \inf_{\gamma \in C(p, q)} L(\gamma) \geq 0.$$

**Proposizione 5.1.** *La funzione  $d$  definisce una distanza su  $M$  (detta distanza intrinseca), ovvero per ogni  $p, q, x \in M$  sono verificate le seguenti proprietà:*

- (1)  $d(p, q) = d(q, p)$ ,
- (2)  $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q)$ ,
- (3)  $d(p, q) \geq 0$ ,  $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ .

**DIMOSTRAZIONE.** (1) Basta osservare che se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  congiunge  $p$  a  $q$ , allora  $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t)$  congiunge  $q$  a  $p$  e  $L(\gamma) = L(\gamma^{-1})$ .

(2) Dalle definizioni di  $d(p, x)$  e  $d(x, q)$  segue che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\gamma_1 \in C(p, x)$  ed esiste  $\gamma_2 \in C(x, q)$  tali che

$$L(\gamma_1) < d(p, x) + \varepsilon/2, \quad L(\gamma_2) < d(x, q) + \varepsilon/2.$$

Allora,

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \in C(p, q), \quad L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) < d(p, x) + d(x, q) + \varepsilon,$$

e quindi

$$d(p, q) = \inf_{\sigma \in C(p, q)} L(\sigma) \leq L(\gamma) < d(p, x) + d(x, q) + \varepsilon$$

per ogni  $\varepsilon > 0$ . Pertanto,  $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q)$ .

(3) L'implicazione  $p = q \Rightarrow d(p, q) = 0$  è banale. Proviamo che

$$d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q, \quad \text{cioè } p \neq q \Rightarrow d(p, q) > 0.$$

Supponiamo  $p \neq q$ . Sia  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione locale con  $\varphi(x_0) = p$ ,  $x_0 = (u_0, v_0)$ , e  $q \notin \varphi(D)$ . Sia  $r > 0$  tale che il disco chiuso  $\bar{B}(x_0, r) \subset D$ . Consideriamo ora una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $\gamma \in C(p, q)$ . Poiché  $q = \gamma(1) \notin \varphi(\bar{B}(x_0, r))$ , la componente connessa di 0 in  $\gamma^{-1}(\varphi(\bar{B}(x_0, r)))$  è del tipo  $[0, \delta]$  con  $\delta < 1$ . Allora, posto  $\tilde{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \gamma|_{[0, \delta]}$ , si ha

$$L(\gamma|_{[0, \delta]}) = \int_0^\delta \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^\delta \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt = L(\tilde{\gamma}) \geq r$$

in quanto  $\tilde{\gamma}(\delta) \in \partial \bar{B}(x_0, r) = \mathbb{S}^1(x_0, r)$ . Pertanto,

$$L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[0, \delta]}) \geq r \quad \text{per ogni } \gamma \in C(p, q),$$

e quindi

$$d(p, q) = \inf L(\gamma) \geq r > 0.$$

□

### Esempio 5.2. La distanza euclidea

Se la superficie  $M$  è il piano euclideo  $\mathbb{R}^2$ , la corrispondente funzione  $d$  è la distanza euclidea  $d_0$ . Basta osservare che il segmento  $\gamma_0(t) = (1 - t)p + tq$ ,  $t \in [0, 1]$ , ha  $L(\gamma_0) = \|q - p\|$  e, per ogni  $\gamma \in C(p, q)$ , la disuguaglianza

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \geq \dot{\gamma}(t) \cdot \left( \frac{q - p}{\|q - p\|} \right)$$

implica

$$L(\gamma) \geq \|q - p\| = L(\gamma_0).$$

**Esempio 5.3. La distanza sulla sfera**

Sia  $\mathbb{S}^2$  la sfera canonica di centro  $C_0$  e raggio  $r$ . Proviamo che per ogni  $p, q \in \mathbb{S}^2$ ,  $p \neq q$ , esiste una curva differenziabile minimale  $\gamma$  che li congiunge (ed è unica se  $q \neq -p$ ). Più precisamente,

$$d(p, q) = L(\gamma) = r \vartheta(p, q),$$

dove  $\gamma$  è l'arco più corto della circonferenza di raggio massimo che congiunge  $p$  e  $q$ , e  $\vartheta(p, q)$  è l'angolo convesso individuato da  $p$  e  $q$  (pensati come vettori).

Siano  $p$  e  $q$  due punti di  $\mathbb{S}^2$ ,  $p \neq q$ , e sia  $\Gamma$  la circonferenza di raggio massimo per  $p$  e  $q$ . Denotiamo con  $\pi$  il piano che contiene  $\Gamma$ . Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane con origine in  $C_0$  e piano coordinato  $\pi_{yz} = \pi$ . Sia  $(D, \varphi, (u, v))$  il corrispondente sistema di coordinate geografiche,  $u$  colatitudine e  $v$  longitudine (cf. Esercizio 3.12). Allora, siccome  $p$  e  $q$  hanno stessa longitudine, possiamo assumere  $p = \varphi(u_0, v_0)$  e  $q = \varphi(u_1, v_1 = v_0)$  con  $u_1 \geq u_0$ ,  $u_0, u_1 \in [0, \pi]$ . Se  $\gamma_0(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , è l'arco (più corto) di  $\Gamma$  che congiunge  $p$  a  $q$ :  $\gamma_0(0) = p$  e  $\gamma_0(1) = q$ , si ha che

$$L(\gamma_0) = r \vartheta(p, q) = r(u_1 - u_0).$$

Ora, sia  $\gamma(t)$  una generica curva di  $\mathbb{S}^2$  che, per semplicità di notazione, assumiamo differenziabile, che congiunge  $p$  a  $q$ . Quindi,

$$\begin{aligned} \gamma(t) = \varphi(u(t), v(t)) &= (r \sen u(t) \cos v(t), r \sen u(t) \sen v(t), r \cos u(t)) \\ &= (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

con  $u(0) = u_0$ ,  $u(1) = u_1$  e  $v(0) = v(1) = v_0$ . Rispetto alla parametrizzazione definita dalle coordinate geografiche,  $\varphi_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sen v, -r \sen u)$  e  $\varphi_v = (-r \sen u \sen v, r \sen u \cos v, 0)$ , per cui i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \sen^2 u.$$

Allora

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = r^2 u'(t)^2 + r^2 (v'(t))^2 \sen^2 u(t)$$

e quindi (se  $\gamma$  fosse differenziabile a tratti dovremmo considerare una somma finita di integrali)

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt = r \int_0^1 \sqrt{u'(t)^2 + (v'(t))^2 \sen^2 u(t)} dt \\ &\geq r \int_0^1 |u'(t)| dt = r(u_1 - u_0) = L(\gamma_0). \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in C(p, q)} L(\gamma) = L(\gamma_0) = r(u_1 - u_0).$$

**Osservazione 5.4.** Si noti che nei due esempi precedenti, per ogni  $p, q \in M$  esiste sempre una curva differenziabile  $\gamma \in C(p, q)$  tale che  $L(\gamma) = d(p, q)$ . Ciò non vale sempre, ad esempio se consideriamo la superficie  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  e i punti  $p = (-1, 0), q = (1, 0)$ , si ha:

$$d(p, q) = 2 \quad \text{ma non esiste } \gamma \in C(p, q) \text{ tale che } L(\gamma) = 2.$$

In ogni caso, se  $M$  è una arbitraria superficie regolare (connessa) si ha

$$d(p, q) \geq d_0(p, q) \quad \text{per ogni } p, q \in M,$$

dove  $d_0$  è la distanza euclidea.

## 5.2. Superfici isometriche e il Teorema egregium di Gauss

In questa sezione studieremo il concetto di superfici isometriche. Tale concetto, come vedremo, è di natura intrinseca, ovvero dipende solo dalla prima forma fondamentale. In particolare, come una conseguenza del Teorema egregium di Gauss, si ottiene che la curvatura gaussiana è invariante per isometrie (locali) e quindi è un invariante intrinseco della superficie.

**Definizione 5.5.** Siano  $M_1, M_2$  due superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$ . Diremo che un diffeomorfismo  $f : M_1 \rightarrow M_2$  è una isometria se il suo differenziale conserva la prima forma fondamentale, ovvero

$$(5.1) \quad f_{*p} v_p \cdot f_{*p} w_p = v_p \cdot w_p \quad \forall p \in M_1 \text{ e } \forall v_p, w_p \in T_p M_1.$$

Diremo che  $f : M_1 \rightarrow M_2$  è una isometria locale se per ogni  $p \in M_1$  esistono  $U_1$  intorno aperto di  $p$  in  $M_1$  e  $U_2$  intorno aperto di  $f(p)$  in  $M_2$  tali che  $f : U_1 \rightarrow U_2$  sia una isometria.

Diremo che due superfici  $M_1, M_2$  sono isometriche se esiste una isometria  $f : M_1 \rightarrow M_2$ . Diremo che  $M_1, M_2$  sono localmente isometriche se per ogni  $p \in M_1$  esistono  $U_1$  intorno aperto di  $p$  in  $M_1$  e  $U_2$  intorno aperto di  $f(p)$  in  $M_2$  tali che  $f : U_1 \rightarrow U_2$  sia una isometria. Una proprietà geometrica (o una quantità geometrica, o un oggetto geometrico) di una superficie regolare  $M$  diremo che è un **invariante intrinseco** della stessa superficie se è invariante per isometrie.

**Osservazione 5.6.** Se il differenziale di un'applicazione differenziabile  $f : M_1 \rightarrow M_2$  conserva la prima forma fondamentale in un fissato punto  $p$ , allora il differenziale  $f_{*p}$  è un isomorfismo e quindi  $f$  è un diffeomorfismo locale definito su un intorno di  $p$ .

L'aspetto fondamentale delle superfici (localmente) isometriche è che sono caratterizzate dal fatto di avere la "stessa" prima forma fondamentale. In termini più precisi abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 5.7.** Siano  $M_1, M_2$  due superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$ . Allora,  $M_1, M_2$  sono localmente isometriche se e solo se per ogni fissato  $p_1 \in M_1$

esistono una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di  $M_1$ ,  $p_1 \in \varphi(D)$ , e una parametrizzazione locale  $(D, \bar{\varphi})$  di  $M_2$  tali che

$$E(u, v) = \bar{E}(u, v), F(u, v) = \bar{F}(u, v) \text{ e } G(u, v) = \bar{G}(u, v) \quad \forall (u, v) \in D.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $M_1, M_2$  localmente isometriche. Per definizione esistono un intorno  $U_1$  di  $p_1$  in  $M_1$ , un aperto  $U_2$  in  $M_2$  e un'isometria  $f : U_1 \subset M_1 \rightarrow U_2 \subset M_2$ . Allora, presa una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di  $M_1$  con  $p_1 \in \varphi(D) \subset U_1$ , l'applicazione  $\bar{\varphi} = f \circ \varphi : D \rightarrow M_2$  definisce una parametrizzazione locale di  $M_2$ . Rispetto a queste parametrizzazioni, se  $p = \varphi(u, v)$ , si ha  $f(p) = f(\varphi(u, v)) = \bar{\varphi}(u, v)$ . Inoltre, si ottiene

$$\bar{E}(u, v) = \bar{\varphi}_u \cdot \bar{\varphi}_v = f_*\varphi_u \cdot f_*\varphi_v = \varphi_u \cdot \varphi_v = E(u, v),$$

e analogamente per gli altri coefficienti della prima forma fondamentale.

Viceversa, fissato  $p_1 \in M_1$ , consideriamo  $(D, \varphi)$  e  $(D, \bar{\varphi})$  parametrizzazioni come nell'enunciato. Allora  $f = \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : U_1 = \varphi(D) \rightarrow U_2 = \bar{\varphi}(D)$  è chiaramente un diffeomorfismo. Inoltre, tale  $f$  è una isometria. Infatti, tenendo presente la definizione di differenziale, si ha

$$f_*\varphi_u \cdot f_*\varphi_v = (f \circ \varphi)_u \cdot (f \circ \varphi)_v = \bar{\varphi}_u \cdot \bar{\varphi}_v = \bar{E}(u, v) = E(u, v) = \varphi_u \cdot \varphi_v;$$

analogamente

$$f_*\varphi_u \cdot f_*\varphi_w = \varphi_u \cdot \varphi_w \quad \text{e} \quad f_*\varphi_v \cdot f_*\varphi_w = \varphi_v \cdot \varphi_w.$$

Pertanto,  $M_1, M_2$  sono localmente isometriche. □

Una caratterizzazione delle isometrie è la seguente

**Proposizione 5.8.** *Sia  $f : M_1 \rightarrow M_2$  un diffeomorfismo (risp. diffeomorfismo locale) tra superfici. Allora,  $f$  è una isometria (risp. isometria locale) se e solo se  $f$  conserva la lunghezza di curve, ovvero  $L(\gamma) = L(f(\gamma))$  per ogni curva differenziabile di  $M_1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f : M_1 \rightarrow M_2$  una isometria locale. Se  $\gamma_1(t)$  è una curva differenziabile di  $M_1$ , allora la curva  $\gamma_2(t) = f(\gamma_1(t))$  ha velocità scalare  $\|\dot{\gamma}_2(t)\| = \|f_*(\dot{\gamma}_1(t))\| = \|\dot{\gamma}_1(t)\|$ , e quindi  $L(\gamma_1) = L(f(\gamma_1))$ .

Viceversa, assumiamo che  $L(\gamma) = L(f(\gamma))$  per ogni curva differenziabile  $\gamma$  di  $M_1$ . Consideriamo un punto  $p \in M_1$  e un vettore tangente  $v_p \in T_p M_1$ . Sia  $\gamma_1(t)$ ,  $|t| < \varepsilon$ , una curva differenziabile di  $M_1$  con  $\gamma_1(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}_1(0) = v_p$ . La curva  $\gamma_2(t) = f(\gamma_1(t))$  ha velocità scalare

$$\|\dot{\gamma}_2(t)\| = \|f_*(\dot{\gamma}_1(t))\|.$$

Fissato  $t_0 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , poniamo

$$L_{\gamma_1}(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt \quad \text{e} \quad L_{\gamma_2}(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt.$$

Poichè  $f$  conserva la lunghezza di curve, si ha  $L_{\gamma_1}(t) = L_{\gamma_2}(t)$  e quindi

$$\left( \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt \right)' = \left( \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt \right)',$$

da cui segue

$$\|\dot{\gamma}_1(t)\| = \|\dot{\gamma}_2(t)\|.$$

In particolare, per  $t = 0$  si ha

$$\|v_p\| = \|\dot{\gamma}_1(0)\| = \|\dot{\gamma}_2(0)\| = \|f_{*p}(\dot{\gamma}_1(0))\| = \|f_{*p}(v_p)\|,$$

e quindi  $f$  è una isometria.  $\square$

**Corollario 5.9.** *La distanza definita su una superficie (cf. Sezione 5.1) è un invariante intrinseco della stessa superficie. In altre parole, se  $f : M_1 \rightarrow M_2$  è una isometria tra superfici regolari, allora*

$$d_1(p, q) = d_2(f(p), f(q)) \quad \text{per ogni } p, q \in M_1.$$

**Osservazione 5.10.** Si noti che del Corollario 5.9 vale anche il viceversa. Più precisamente, si può dimostrare che se  $f : M_1 \rightarrow M_2$  è un'applicazione suriettiva tra superfici regolari che conserva le distanze, allora  $f$  è una isometria.

**Esercizio 5.11.** Si verifichi che l'insieme  $\text{Iso}(M)$  di tutte le isometrie di una superficie regolare  $M$  è un gruppo rispetto alla usuale composizione.  $\text{Iso}(M)$  è detto *gruppo delle isometrie* di  $M$ .

La seguente proposizione ci dice come si possono costruire isometrie di una superficie.

**Proposizione 5.12.** *Se  $F$  è un'isometria dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  e  $M_1, M_2$  sono due superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$  con  $F(M_1) = M_2$ , allora  $f = F|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_2$  è un'isometria tra superfici e  $f_{*p} = F_{*p|T_p M_1}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $F$  è un'isometria di  $\mathbb{R}^3$ , allora  $F$  è bigettiva,  $F, F^{-1}$  sono differenziabili e  $F_{*p}$  conserva il prodotto scalare. Ne segue che anche  $f = F|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_2$  è bigettiva e che  $f, f^{-1}$  sono differenziabili. Inoltre, prendendo  $p \in M_1$  e  $v_p \in T_p M_1$ , e quindi una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $M_1$  con  $\gamma(0) = p$  e  $v_p = \dot{\gamma}(0)$ , si ha

$$f_{*p}v_p = f_{*p}\dot{\gamma}(0) = (f \circ \dot{\gamma})(0) = (F \circ \dot{\gamma})(0) = F_{*p}v_p.$$

Ciò implica che  $f_{*p} = F_{*p|T_p M_1}$  e che  $f_{*p}$  conserva il prodotto scalare. Pertanto,  $f$  è un'isometria tra superfici.  $\square$

Il seguente teorema determina le isometrie della sfera canonica  $\mathbb{S}^2$  (di centro l'origine e raggio 1).

**Teorema 5.13.** *Le isometrie della sfera canonica  $\mathbb{S}^2$  sono tutte e sole le restrizioni a  $\mathbb{S}^2$  delle trasformazioni ortogonali di  $\mathbb{R}^3$ . Quindi, il gruppo delle isometrie  $\text{Iso}(\mathbb{S}^2)$  si può identificare con  $O(3)$  gruppo delle matrici ortogonali di ordine 3.*

**DIMOSTRAZIONE.** Le trasformazioni ortogonali sono isometrie di  $\mathbb{R}^3$  e quindi, applicando la proposizione precedente, per provare che la restrizione a  $\mathbb{S}^2$  di una trasformazione ortogonale  $F$  è una isometria, basta verificare che  $F(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$ . Se  $p \in \mathbb{S}^2$ , allora  $\|p\|^2 = 1$  implica  $\|F(p)\|^2 = \|p\|^2 = 1$  e quindi  $F(p) \in \mathbb{S}^2$ , cioè  $F(\mathbb{S}^2) \subseteq \mathbb{S}^2$ . Essendo  $F$  ortogonale, anche  $F^{-1}$  lo è, per cui  $F^{-1}(\mathbb{S}^2) \subseteq \mathbb{S}^2$ . Applicando  $F$  si ottiene  $\mathbb{S}^2 = F(F^{-1}(\mathbb{S}^2)) \subseteq F(\mathbb{S}^2)$  e quindi  $F(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$ .

Viceversa, sia ora  $f$  un'isometria della sfera  $\mathbb{S}^2$ . Proviamo che  $f$  è la restrizione ad  $\mathbb{S}^2$  di una trasformazione ortogonale  $F$  di  $\mathbb{R}^3$ . Ricordiamo che la distanza su  $\mathbb{S}^2$  è definita in questo modo (cf. Esempio 5.3):

$$d(x, y) = \vartheta(x, \hat{y}) \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^2,$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo convesso tra  $x$  e  $y$ . Allora, poiché  $f$  è un'isometria di  $\mathbb{S}^2$ , applicando il Corollario 5.9, si ha

$$\vartheta(x, \hat{y}) = \vartheta(f(x), \hat{f(y)})$$

e quindi

$$(5.2) \quad x \cdot y = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^2,$$

cioè  $f$  conserva il prodotto scalare di vettori unitari di  $\mathbb{R}^3$ . Adesso consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto F(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Allora,  $F|_{\mathbb{S}^2} = f$ . Inoltre,  $F$  conserva il prodotto scalare di  $\mathbb{R}^3$ . Infatti, usando la (5.2), per  $x, y \in \mathbb{R}^3, x, y \neq 0$ , si ha

$$F(x) \cdot F(y) = \|x\| \|y\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = x \cdot y.$$

Poiché  $F$  conserva il prodotto scalare, è facile vedere che è anche lineare e quindi una trasformazione ortogonale.  $\square$

### Omogeneità

Una superficie regolare  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  si dice *omogenea* se per ogni  $p, q \in M$  esiste una isometria di  $M$  tale che  $f(p) = q$ .

• **Il piano euclideo**  $(\mathbb{R}^2, g_0)$  è banalmente omogeneo. Per ogni  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ , la traslazione definita da  $F(p) = p + v, v = p_2 - p_1$ , soddisfa la proprietà  $F(p_1) = p_2$ .

• **Omogeneità della sfera.** Verifichiamo che la sfera canonica  $\mathbb{S}^2$  è omogenea. Siano  $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^2$  con  $p_1 \neq p_2$ , altrimenti come isometria si considera l'identità. Sia  $E^2$  il piano per l'origine (che è il centro della sfera) e per i punti  $p_1$  e  $p_2$ . Indichiamo con  $R$  la rotazione nel piano  $E^2$  che porta  $p_1$  in  $p_2$ . Se  $\{e_1, e_2\}$  è una base ortonormale di  $E^2$  e  $\{e_1, e_2, e_3\}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ , allora la trasformazione  $T$  di  $\mathbb{R}^3$  definita da  $T(e_1) = R(e_1), T(e_2) = R(e_2), T(e_3) = e_3$  è

una trasformazione ortogonale e quindi un'isometria di  $\mathbb{S}^2$  (cf. Teorema 5.13). Tale isometria soddisfa  $T(p_1) = R(p_1) = p_2$ .

**Esempio 5.14.** L'applicazione

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \text{ (cilindro } x^2 + y^2 = 1), \\ (u, v) \mapsto (e^{iu}, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

è un esempio di isometria locale. Infatti, consideriamo su  $\mathbb{R}^2$  la parametrizzazione locale

$$\varphi : D = ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto (u, v, 0) \equiv (u, v)$$

e su  $M$  la parametrizzazione locale

$$\bar{\varphi} : \bar{D} = D \rightarrow M, \bar{\varphi} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\cos \bar{u}, \sin \bar{u}, \bar{v}).$$

Rispetto a queste parametrizzazioni, risulta

$$\tilde{f} = \bar{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi : (u, v) \xrightarrow{\varphi} (u, v) \xrightarrow{f} (\cos u, \sin u, v) \xrightarrow{\bar{\varphi}^{-1}} (\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$$

cioè  $\tilde{f} = I_d$ . Quindi lo jacobiano  $J(f)_p = I_d$ , da cui segue che  $f_{*p}$  conserva il prodotto scalare. Inoltre,  $f$  localmente è un diffeomorfismo, ma non è bigettiva, pertanto  $f$  è un'isometria locale. Osserviamo che se consideriamo la superficie  $M_1$  data dalla striscia di piano  $]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$  e la superficie  $M_2$  data dal cilindro privato di una retta generatrice, ad esempio l'asse delle  $z$ , allora le due superfici sono isometriche, tuttavia esse non sono congruenti (cf. Osservazione 5.33).

**Esercizio 5.15.** Sia data l'isometria locale (considerata nell'esempio precedente)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ,  $(u, v) \mapsto (e^{iu}, v) = (\cos u, \sin u, v)$ . Si considerino nel piano  $\mathbb{R}^2(x, y)$  le rette  $r_1 : x = u_0$ ,  $r_2 : y = v_0$ ,  $r_3 : y = bx$ . Riconoscere le curve  $\gamma_i = f(r_i)$ , per  $i = 1, 2, 3$ , del cilindro  $M$ .

**Osservazione 5.16.** Sia  $f : M_1 \rightarrow M_2$  un'isometria (locale), e siano  $(D_1, \varphi_1)$ ,  $(D_2, \varphi_2)$  parametrizzazioni locali di  $M_1$  e  $M_2$  in  $p$  e  $f(p)$  rispettivamente. Siano  $A_I$  e  $B_I$  le matrici dei coefficienti della prima forma fondamentale di  $M_1$  e  $M_2$  rispetto alle parametrizzazioni considerate, e sia  $J(f)$  la matrice jacobiana associata a  $f$  rispetto alle stesse parametrizzazioni. Dalla definizione di differenziale (cf. Section 3.6) segue che  $J(f)$  è la matrice associata all'applicazione lineare  $f_*$  rispetto alle basi coordinate, pertanto la condizione (5.1) che definisce un'isometria (locale) è equivalente alla condizione matriciale:

$$(5.3) \quad A_I = (J(f))^T B_I J(f),$$

dove  $(J(f))^T$  è la trasposta di  $J(f)$ .

**Esempio 5.17.** Consideriamo il cono rotondo  $M_0 : z^2 - (x^2 + y^2) = 0$ ,  $z > 0$ . Più precisamente,  $M_0$  è un semicono di vertice l'origine. Osserviamo che l'intera superficie  $M_0$  è descritta da

$$\varphi(u, v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v \cos u, v \sin u, v), \text{ con } u \in [0, 2\pi[ \text{ e } v > 0.$$

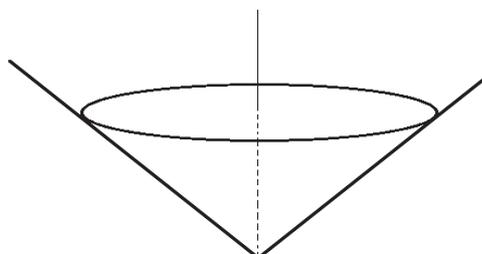


FIGURA 1. Semicono rotondo.

Si noti che  $\pi/4$  è l'angolo di semiapertura del cono considerato (cf. Figura 1). Proviamo che  $M_0$  è localmente isometrico al piano  $\mathbb{R}^2$ , e a tal fine verifichiamo che l'applicazione

$$f : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3, p = \varphi(u, v) \mapsto f(p) = \left( v \cos \frac{\sqrt{2}}{2} u, v \sin \frac{\sqrt{2}}{2} u, 0 \right),$$

è un'isometria locale. La coppia  $(D, \varphi)$ ,  $D = \{(u, v) : u \in ]0, 2\pi[, v > 0\}$ , definisce una parametrizzazione locale di  $M_0$ , e  $\bar{\varphi} : (x, y) \mapsto (x, y, 0)$  è una parametrizzazione globale per il piano. Rispetto alla parametrizzazione  $(D, \varphi)$ , abbiamo  $\varphi_u = \frac{\sqrt{2}}{2}(-v \sin u, v \cos u, 0)$  e  $\varphi_v = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos u, \sin u, 1)$ , e quindi la matrice dei coefficienti della prima forma fondamentale di  $M_0$  è

$$A_I = \begin{pmatrix} v^2/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente, la matrice dei coefficienti della prima forma fondamentale per  $\mathbb{R}^2$  è

$$B_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altronde, rispetto alle fissate parametrizzazioni,

$$f \equiv \bar{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi : (u, v) \mapsto (f_1(u, v), f_2(u, v)) = \left( v \cos \frac{\sqrt{2}}{2} u, v \sin \frac{\sqrt{2}}{2} u \right),$$

e quindi la matrice jacobiana di  $f$  è data da

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} v \sin \frac{\sqrt{2}}{2} u & \cos \frac{\sqrt{2}}{2} u \\ \frac{\sqrt{2}}{2} v \cos \frac{\sqrt{2}}{2} u & \sin \frac{\sqrt{2}}{2} u \end{pmatrix}.$$

Infine, un facile calcolo mostra che

$$(J(f))^t B_I J(f) = (J(f))^t J(f) = \begin{pmatrix} v^2/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_I.$$

Pertanto, per quanto detto nell'Osservazione 5.16,  $f$  è un'isometria locale.

**Esercizio 5.18.** Ripetere lo svolgimento dell'Esempio 5.17 dove

$$M_0 : z = k\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad \text{con } k \text{ costante positiva.}$$

**Esempio 5.19.** Sia  $\Sigma$  la superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva semplice regolare  $\gamma(v) : x = f(v) > 0, y = 0, z = g(v), v \in ]a, b[$ , intorno all'asse  $z$ . Una rappresentazione parametrica locale di  $\Sigma$  è data da

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \quad \text{con } u \in ]a, b[ \text{ e } v \in ]0, 2\pi[.$$

Abbiamo visto (cf. Esempio 3.67) che i coefficienti della 1<sup>a</sup> forma fondamentale sono dati da

$$E = \|\varphi_u\|^2 = \|\dot{\gamma}(u)\|^2, \quad G = \|\varphi_v\|^2 = f^2(u) > 0 \quad \text{e} \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0.$$

In particolare, se come curva consideriamo la *catenaria*

$$\gamma(u) : x = a \cosh u, y = 0, z = au, \quad a = \text{cost} \neq 0, \quad u \in \mathbb{R},$$

la corrispondente superficie di rotazione, detta *catenoide*, ha la seguente parametrizzazione regolare

$$\varphi(u, v) = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, au), \quad \text{con } u \in \mathbb{R} \text{ e } v \in ]0, 2\pi[.$$

Pertanto, rispetto a questa parametrizzazione, i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da

$$E = a^2(1 + \sinh^2 u) = a^2 \cosh^2 u, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = a^2 \cosh^2 u.$$

Facciamo vedere che *la catenoide è localmente isometrica all'elicoide*.

Ricordiamo che una rappresentazione parametrica regolare dell'elicoide, denotando con  $(\bar{u}, \bar{v})$  i parametri, è data da (cf. Esempio 3.68)

$$\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}\cos \bar{v}, \bar{u}\sin \bar{v}, a\bar{v}), \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[.$$

Sull'elicoide consideriamo il seguente cambiamento di parametri:

$$\bar{v} = v, \quad \bar{u} = a \sinh u, \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[.$$

Tale cambio di parametri è ammissibile in quanto la corrispondenza è biunivoca, e la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} a \cosh u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 per ogni  $(u, v)$ . Rispetto a nuovi parametri  $(u, v)$ , l'elicoide è parametrizzato da

$$\psi(u, v) = (a \sinh u \cos v, a \sinh u \sin v, av), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[,$$

e i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da

$$E = a^2 \cosh^2 u, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = a^2 \cosh^2 u.$$

Dalla Proposizione 5.7, segue che la catenoide e l'elicoide sono superfici localmente isometriche.

**Esercizio 5.20.** Si consideri l'elicoide  $M$ :  $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ . Si verifichi che le seguenti trasformazioni definiscono isometrie di  $M$ .

- $R_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, 0, 0) - (0, y, z)$ , (simmetria ortogonale rispetto all'asse  $x$ );
- $R_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (0, y, 0) - (x, 0, z)$ , (simmetria ortogonale rispetto all'asse  $y$ );
- $T_a : \varphi(u, v) \mapsto \varphi(u, v + a)$ , dove  $a \in \mathbb{R}$ .

**Osservazione 5.21.** Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo una dilatazione (detta anche omotetia)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (ax, ay, az), \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Se  $A$  è una quantità relativa alla superficie  $M$ , con  $\bar{A}$  denotiamo la corrispondente quantità della superficie  $\bar{M} = f(M)$ . Allora, i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di  $\bar{M}$  sono dati da

$$(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}) = a^2(E, F, G) \quad e \quad (\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}) = a(l, m, n).$$

Quindi, per la curvatura gaussiana e la curvatura media di  $\bar{M}$  si ha

$$\bar{K} = a^{-2}K \quad e \quad \bar{H} = a^{-1}H.$$

In particolare, superfici a curvatura gaussiana costante si possono sempre ricondurre ai casi di

$$K = 1, 0, -1.$$

Per la verifica di quanto enunciato si può procedere nel seguente modo.

Primo passo: osservare che

$$\bar{\varphi}_u = a\varphi_u, \quad \bar{\varphi}_v = a\varphi_v, \quad \bar{N}_{f(p)} = N_p \quad (\text{come parti vettoriali}).$$

Secondo passo: calcolare  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  applicando la definizione, calcolare  $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$  applicando la (b) del Teorema 4.7, e infine calcolare  $\bar{K}, \bar{H}$  applicando la (4.7) e la (4.8).

Adesso proviamo il famoso

**Teorema 5.22. (Teorema egregium di Gauss)** *La curvatura gaussiana di una superficie regolare  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  è invariante per isometrie (locali), ovvero dipende solo dalla prima forma fondamentale, quindi è un invariante intrinseco della superficie.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $M$  una superficie regolare. Consideriamo una parametrizzazione locale  $(D, \varphi, (u, v))$  e sia  $N = (\varphi_u \wedge \varphi_v) / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = (\varphi_u \wedge \varphi_v) / \sqrt{EG - F^2}$ . Ricordiamo che vale la (4.19) la quale si può anche scrivere nella forma

$$N_u \wedge N_v = K(u, v)(\varphi_u \wedge \varphi_v).$$

Moltiplicando scalarmente tale formula per  $\varphi_u \wedge \varphi_v$ , abbiamo

$$K\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = (N_u \wedge N_v) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v),$$

e tenendo presente l'identità

$$(v_1 \wedge v_2) \cdot (w_1 \wedge w_2) = (v_1 \cdot w_1)(v_2 \cdot w_2) - (v_1 \cdot w_2)(v_2 \cdot w_1),$$

si ha

$$(5.4) \quad K\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = (N_u \cdot \varphi_u)(N_v \cdot \varphi_v) - (N_u \cdot \varphi_v)(N_v \cdot \varphi_u).$$

Poi dalla definizione di  $N$  segue che

$$N_u = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(\varphi_{uu} \wedge \varphi_v + \varphi_u \wedge \varphi_{vu}) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \varphi_u \wedge \varphi_v,$$

$$N_v = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(\varphi_{uv} \wedge \varphi_v + \varphi_u \wedge \varphi_{vv}) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \varphi_u \wedge \varphi_v,$$

e quindi

$$N_u \cdot \varphi_u = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \varphi_{uu} \wedge \varphi_v \cdot \varphi_u, \quad N_u \cdot \varphi_v = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \varphi_u \wedge \varphi_{vu} \cdot \varphi_v,$$

$$N_v \cdot \varphi_u = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \varphi_{uv} \wedge \varphi_v \cdot \varphi_u, \quad N_v \cdot \varphi_v = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \varphi_u \wedge \varphi_{vv} \cdot \varphi_v.$$

Allora, la (5.4) diventa

$$K(EG - F^2)^2 = (\varphi_{uu} \wedge \varphi_v \cdot \varphi_u)(\varphi_u \wedge \varphi_{vv} \cdot \varphi_v) - (\varphi_{uv} \wedge \varphi_v \cdot \varphi_u)(\varphi_u \wedge \varphi_{uv} \cdot \varphi_v) \\ = (\varphi_{uu} \wedge \varphi_u \cdot \varphi_v)(\varphi_{vv} \wedge \varphi_u \cdot \varphi_v) - (\varphi_{uv} \wedge \varphi_u \cdot \varphi_v)(\varphi_{uv} \wedge \varphi_u \cdot \varphi_v).$$

Usando l'espressione del prodotto misto in termini matriciali, si ha

$$K(EG - F^2)^2 = \det \left( \begin{pmatrix} \varphi_{uu} \\ \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix} (\varphi_{vv} \varphi_u \varphi_v) \right) - \det \left( \begin{pmatrix} \varphi_{uv} \\ \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix} (\varphi_{uv} \varphi_u \varphi_v) \right),$$

dove  $\varphi_{uu}, \varphi_{vv}, \varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v$  sono considerati come vettori riga oppure come vettori colonna. Sviluppando si ottiene

$$K(EG - F^2)^2 = \det \begin{pmatrix} \varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} & \varphi_{uu} \cdot \varphi_u & \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \\ \varphi_u \cdot \varphi_{vv} & \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_{vv} & \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix} \\ - \det \begin{pmatrix} \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv} & \varphi_{uv} \cdot \varphi_u & \varphi_{uv} \cdot \varphi_v \\ \varphi_u \cdot \varphi_{uv} & \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_{uv} & \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix},$$

e quindi, tenendo conto che

$$\varphi_u \cdot \varphi_{vv} = (F_v - (1/2)G_u) \quad \text{e} \quad \varphi_{uu} \cdot \varphi_v = (F_u - (1/2)E_v),$$

si ha

$$\begin{aligned}
K(EG - F^2)^2 &= (\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv})(EG - F^2) - (\varphi_u \cdot \varphi_{vv})(G\varphi_{uu} \cdot \varphi_u - F\varphi_{uu} \cdot \varphi_v) \\
&\quad + (\varphi_v \cdot \varphi_{vv})(F\varphi_{uu} \cdot \varphi_u - E\varphi_{uu} \cdot \varphi_v) - (\varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv})(EG - F^2) \\
&\quad + (\varphi_u \cdot \varphi_{uv})(G\varphi_{uv} \cdot \varphi_u - F\varphi_{uv} \cdot \varphi_v) \\
&\quad - (\varphi_v \cdot \varphi_{uv})(F\varphi_{uv} \cdot \varphi_u - E\varphi_{uv} \cdot \varphi_v) \\
&= (\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} - \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv})(EG - F^2) \\
&\quad - (F_v - (1/2)G_u) \left[ (1/2)E_u G - F(F_u - (1/2)E_v) \right] \\
&\quad + (1/2)G_v \left[ (1/2)E_u F - E(F_u - (1/2)E_v) \right] \\
&\quad + (1/4)E_v(E_v G - FG_u) - (1/4)G_u(FE_v - EG_u).
\end{aligned}$$

Osserviamo che tutti i termini, tranne il primo, dipendono esplicitamente solo dalla prima forma fondamentale. Esaminiamo quindi il termine

$$(\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} - \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv}).$$

Derivando  $(1/2)E_v = \varphi_u \cdot \varphi_{uv}$  rispetto a  $v$ , e  $F_v - (1/2)G_u = \varphi_u \cdot \varphi_{vv}$  rispetto a  $u$ , otteniamo

$$\begin{aligned}
\varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv} + \varphi_u \cdot \varphi_{uvv} &= (1/2)E_{vv}, \\
\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} + \varphi_u \cdot \varphi_{vuu} &= F_{uv} - (1/2)G_{uu},
\end{aligned}$$

e quindi

$$(\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} - \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv}) = F_{uv} - (1/2)G_{uu} - (1/2)E_{vv}.$$

Pertanto la curvatura gaussiana dipende solo dalla prima forma fondamentale e quindi, tenendo presente la Proposizione 5.7, la curvatura gaussiana è invariante per isometrie locali.  $\square$

**Osservazione 5.23.** Dalla dimostrazione del Teorema egregium di Gauss segue che la curvatura gaussiana è data dalla seguente formula:

$$\begin{aligned}
K(EG - F^2)^2 &= \left[ F_{uv} - (1/2)G_{uu} - (1/2)E_{vv} \right] (EG - F^2) \\
(5.5) \quad &\quad - (F_v - (1/2)G_u) \left[ (1/2)E_u G - F(F_u - (1/2)E_v) \right] \\
&\quad + (1/2)G_v \left[ (1/2)E_u F - E(F_u - (1/2)E_v) \right] \\
&\quad + (1/4)E_v(E_v G - FG_u) - (1/4)G_u(FE_v - EG_u).
\end{aligned}$$

In particolare, se  $F = 0$  (la parametrizzazione considerata ha curve coordinate ortogonali) la formula precedente diventa

$$\begin{aligned}
K(EG)^2 &= -(1/2)EG(E_{vv} + G_{uu}) \\
(5.6) \quad &\quad + (1/4) \left[ GE_u G_u + GE_v^2 + EE_v G_v + EG_u^2 \right],
\end{aligned}$$

che si può anche scrivere nella forma più compatta

$$(5.7) \quad K(EG)^2 = -(1/2)EG(E_{vv} + G_{uu}) + (1/4)G_u(EG)_u + (1/4)E_v(EG)_v.$$

Pertanto, per  $F = 0$  e  $E(u, v) = G(u, v) = f(u, v)$ , ossia in coordinate isoterme, la (5.7) diventa

$$K = -\frac{1}{2f}\Delta(\ln f),$$

ossia la (4.9).

**Esercizio 5.24.** Si consideri la sfera  $\mathbb{S}^2$ , di centro l'origine e raggio  $R$ , parametrizzata (localmente) con le coordinate geografiche  $(u, v)$ . Dopo aver trovato i coefficienti della prima forma fondamentale  $E(u, v) = R^2$ ,  $F(u, v) = 0$  e  $G(u, v) = R^2 \sin^2 u$ , si verifichi, applicando la formula (5.6), che la curvatura gaussiana  $K = 1/R^2$ .

**Osservazione 5.25.** Da notare che l'inverso del Teorema 5.22 non è vero. Infatti, esistono superfici regolari aventi stessa curvatura gaussiana ma che non sono localmente isometriche. Ad esempio, le superfici  $M_1, M_2$  parametrizzate da  $\varphi_1(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$  e  $\varphi_2(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u)$ , con  $(u, v) \in D = ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$ , hanno stessa curvatura gaussiana :  $K_1(u, v) = K_2(u, v)$  ma non sono localmente isometriche (cf.[9] Esercizio 3, p.237). Tuttavia, superfici regolari  $M_1, M_2$  che hanno curvatura gaussiana  $K_1(u, v) = \text{cost.} = K_2(u, v)$  sono localmente isometriche (cf.[16] Teorema 4.30, p.155).

Infine, possiamo dare una formula più compatta che esprime la curvatura gaussiana in termini dei derivati di una opportuna base ortonormale.

Fissata una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di una superficie regolare  $M$ , applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori della base  $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ , otteniamo per lo spazio tangente la base ortonormale:

$$X = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}, \quad Y = \frac{\tilde{Y}}{\|\tilde{Y}\|} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}}(\varphi_v - (F/E)\varphi_u),$$

dove

$$\tilde{Y} = \varphi_v - \frac{(\varphi_v \cdot \varphi_u)}{(\varphi_u \cdot \varphi_u)}\varphi_u = \varphi_v - (F/E)\varphi_u.$$

Pertanto, il campo normale

$$(5.8) \quad N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = X \wedge Y.$$

Quindi  $\{X, Y, N\}$  è una terna ortonormale di campi vettoriali definiti sull'aperto  $\varphi(D)$  di  $M$ .

**Proposizione 5.26.** Con le notazioni sopra introdotte, la curvatura gaussiana è data da

$$K(u, v) = \frac{(X_u \cdot Y_v) - (X_v \cdot Y_u)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

DIMOSTRAZIONE. Intanto osserviamo che i campi derivati  $X_u, X_v, Y_u, Y_v$ , tenendo conto del fatto che  $X$  e  $Y$  sono dei versori, si esprimono con:

$$(5.9) \quad \begin{cases} X_u = (X_u \cdot Y)Y + (X_u \cdot N)N, \\ X_v = (X_v \cdot Y)Y + (X_v \cdot N)N, \\ Y_u = (Y_u \cdot X)X + (Y_u \cdot N)N, \\ Y_v = (Y_v \cdot X)X + (Y_v \cdot N)N. \end{cases}$$

Abbiamo osservato che la (4.19) si può anche scrivere nella forma

$$N_u \wedge N_v = K(u, v)(\varphi_u \wedge \varphi_v) = K(u, v)\|(\varphi_u \wedge \varphi_v)\|N.$$

e quindi

$$(5.10) \quad (N_u \wedge N_v) \cdot N = K\sqrt{EG - F^2}.$$

Inoltre, possiamo scrivere  $N_u$  ed  $N_v$  come segue:

$$N_u = \langle N_u, X \rangle X + \langle N_u, Y \rangle Y, \quad N_v = \langle N_v, X \rangle X + \langle N_v, Y \rangle Y.$$

Quindi, applicando la (5.8),

$$\begin{aligned} (N_u \wedge N_v) \cdot N &= (N_u \wedge N_v) \cdot (X \wedge Y) \\ &= \left( (N_u \cdot X)(N_v \cdot Y) - (N_u \cdot Y)(N_v \cdot X) \right) (X \wedge Y) \cdot (X \wedge Y) \\ &= (X_u \cdot N)(N \cdot Y_v) - (Y_u \cdot N)(N \cdot X_v). \end{aligned}$$

D'altronde, usando la (5.9), otteniamo

$$X_u \cdot Y_v = (X_u \cdot N)(Y_v \cdot N) \quad \text{e} \quad Y_u \cdot X_v = (Y_u \cdot N)(X_v \cdot N).$$

Pertanto,

$$(X_u \cdot N)(Y_v \cdot N) - (Y_u \cdot N)(X_v \cdot N) = X_u \cdot Y_v - Y_u \cdot X_v,$$

e quindi

$$(N_u \wedge N_v) \cdot N = X_u \cdot Y_v - Y_u \cdot X_v.$$

Questa formula e la (5.10) implicano il risultato enunciato.  $\square$

### 5.3. Superfici congruenti

La geometria di una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$  può essere studiata da due punti di vista, quello intrinseco (tema principale di questo capitolo) e quello estrinseco che studia la “forma” della superficie in  $\mathbb{R}^3$ . In questa sezione, al fine di meglio capire la natura della geometria intrinseca, studiamo alcuni aspetti della geometria estrinseca. Iniziamo con la seguente definizione.

**Definizione 5.27.** *Due superfici regolari  $M, \bar{M}$  di  $\mathbb{R}^3$  si dicono congruenti se esiste un'isometria  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $F(M) = \bar{M}$ .*

Quindi, superfici congruenti hanno la stessa “forma” in  $\mathbb{R}^3$  per cui differiscono solo per la loro posizione nello spazio.

**Esempio 5.28.** Le sfere

$\mathbb{S}^2(0, r) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  e  $\mathbb{S}^2(p_0, r) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$  sono congruenti (basta applicare una traslazione). Le superfici

$$M : z = xy \quad \text{e} \quad \bar{M} : z = (y^2 - x^2)/2$$

sono congruenti. La rotazione (di  $45^\circ$  intorno all'asse  $z$ ) definita da  $F(E_1) = (\sqrt{2}/2)E_1 + (\sqrt{2}/2)E_2$ ,  $F(E_2) = -(\sqrt{2}/2)E_1 + (\sqrt{2}/2)E_2$  e  $F(E_3) = E_3$ , trasforma la superficie  $M$  nella superficie  $\bar{M}$ .

Proviamo che superfici congruenti sono in particolare isometriche, e inoltre hanno "stesso" operatore forma.

**Teorema 5.29.** *Siano  $M, \bar{M}$  superfici regolari congruenti e sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'isometria tale che  $F(M) = \bar{M}$ . Allora,*

- (1)  $f = F|_M : M \rightarrow \bar{M}$  è un'isometria tra superfici;
- (2)  $f$  conserva gli operatori forma nel senso che (scegliendo in modo opportuno i campi normali) vale la seguente relazione

$$f_{*p} \circ S_p = \bar{S}_{f(p)} \circ f_{*p} \quad \text{per ogni } p \in M.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La proprietà (1) è stata provata nella Proposizione 5.12. Proviamo la (2). Sia  $N$  un campo unitario differenziabile normale a  $M$  e definito in un intorno  $U$  di  $p$  in  $M$ . Sia  $\bar{N} := F_*N$ , cioè  $\bar{N}_{F(q)} = F_{*q}N_q$  per ogni  $q \in U$ .  $\bar{N}$  è un campo vettoriale differenziabile definito su  $F(U) = f(U) \subset \bar{M}$  intorno di  $f(p)$  in  $\bar{M}$ . Per  $q \in U$ , l'applicazione  $F_{*q} : T_q\mathbb{R}^3 \rightarrow T_{f(q)}\mathbb{R}^3$  è un isomorfismo e conserva il prodotto scalare. Anche l'applicazione  $f_{*q} : T_qM \rightarrow T_{f(q)}\bar{M}$  è un isomorfismo che conserva il prodotto scalare in quanto  $f_{*q} = F_{*q}|_{T_qM}$ . Poi da  $N_q \cdot v_q = 0$  per ogni  $v_q \in T_qM$ , applicando  $F_{*q}$  si ha

$$F_{*q}N_q \cdot F_{*q}v_q = N_q \cdot v_q = 0 \quad \forall v_q \in T_qM,$$

per cui

$$F_{*q}N_q \cdot w_{f(q)} = 0 \quad \forall w_{f(q)} \in T_{f(q)}\bar{M} = F_{*q}(T_qM).$$

Pertanto  $\bar{N} = F_*N$  è normale a  $\bar{M}$ . Inoltre

$$\|\bar{N}_{\bar{q}}\| = \|\bar{N}_{f(q)}\| = \|F_{*q}N_q\| = 1 \quad \forall \bar{q} \in F(U) = f(U), \bar{q} = f(q),$$

ovvero  $\bar{N}$  è unitario. Ora, siano  $S_p$  l'operatore forma definito da  $N$  e  $\bar{S}_{f(p)}$  l'operatore forma definito da  $\bar{N}$ . Sia  $v_p \in T_pM$ , quindi sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v_p$ , e sia  $\bar{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) = F(\gamma(t))$  la corrispondente curva differenziabile di  $\bar{M}$ . La curva  $\bar{\gamma}$  soddisfa

$$\bar{\gamma}(0) = F(\gamma(0)) = F(p) = f(p) \quad \text{e} \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = F_{*p}\dot{\gamma}(0) = F_{*p}v_p = f_{*p}v_p.$$

Allora,

$N(t) = N(\gamma(t))$  è un campo vettoriale differenziabile lungo  $\gamma$ , e

$\bar{N}(t) = F_{*\gamma(t)}N(t)$  è un campo vettoriale differenziabile lungo  $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ .

Poiché  $F$  è isometria di  $\mathbb{R}^3$ , e quindi un'applicazione affine, applicando la (1) del Teorema 1.79, si ha  $(F_*N)'(t) = F_*N'(t)$  ovvero  $\bar{N}'(t) = F_*N'(t)$ . Di conseguenza,

$$\begin{aligned} f_{*p}S_p v_p &= F_{*p}S_p v_p = -F_{*p}N'(0) = -(F_*N)'(0) = -\bar{N}'(0) = -\bar{N}'(\bar{\gamma}(0)) \\ &= \bar{S}_{f(p)}(\dot{\bar{\gamma}}(0)) = \bar{S}_{f(p)}f_{*p}v_p. \end{aligned}$$

□

Il Teorema 5.22 ci dice che la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie. Dal Teorema 5.29 si ottiene il seguente

**Corollario 5.30.** *Curvature principali e media, oltre alla gaussiana, sono invarianti per superfici congruenti.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $M, \bar{M}$  superfici regolari congruenti e sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'isometria tale che  $F(M) = \bar{M}$ . Consideriamo l'isometria  $f = F|_M$  e un punto  $p \in M$ . Se  $S_p \underline{e}_i = k_i(p) \underline{e}_i$ ,  $i = 1, 2$ , allora applicando la (2) del Teorema 5.29 si ha

$$\bar{S}_{f(p)}f_{*p}\underline{e}_i = f_{*p}S_p \underline{e}_i = f_{*p}k_i(p)\underline{e}_i = k_i(p)f_{*p}\underline{e}_i.$$

Pertanto,  $f_{*p}\bar{e}_i$  sono vettori principali di  $\bar{M}$  in  $f(p)$  con curvature principali

$$\bar{k}_i(f(p)) = k_i(p), \quad i = 1, 2.$$

In particolare, la curvatura di Gauss  $\bar{K}(f(p)) = K(p)$  e la curvatura media  $\bar{H}(f(p)) = H(p)$ . □

Del Teorema precedente, vale anche il viceversa, ovvero superfici isometriche che hanno “stesso” operatore forma sono congruenti. Più precisamente, abbiamo

**Teorema 5.31.** *Sia  $f : M \rightarrow \bar{M}$  un'isometria tra superfici regolari (connesse, orientate) che conserva gli operatori forma, cioè  $f_{*p}S_p = \bar{S}_{f(p)}f_{*p}$  per ogni  $p \in M$ . Allora,  $M$  e  $\bar{M}$  sono congruenti, cioè esiste  $F$  isometria di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $f = F|_M$ . Se vale  $f_{*p}S_p = -\bar{S}_{f(p)}f_{*p}$  per ogni  $p \in M$ , basta invertire l'orientazione di  $M$  (oppure di  $\bar{M}$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** (sunto) Siano  $N, \bar{N}$  campi vettoriali unitari normali alle superfici  $M, \bar{M}$  rispettivamente. Fissato  $p \in M$ , il differenziale  $f_{*p} : T_pM \rightarrow T_{f(p)}\bar{M}$  è una trasformazione ortogonale e quindi trasforma basi ortonormali in basi ortonormali, per cui applicando la Proposizione 1.61, esiste una sola isometria  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che

$$F(p) = f(p), \quad F_{*p}v_p = f_{*p}v_p \text{ per ogni } v_p \in T_pM, \quad F_{*p}N_p = \bar{N}_{f(p)}.$$

La seconda parte della dimostrazione del teorema consiste nel provare che l'isometria  $F$  considerata soddisfa  $F(q) = f(q)$  per ogni  $q \in M$  (cf., ad esempio, [20], Teorema 8.3, p. 299). □

**Osservazione 5.32.** I Teoremi 5.29 e 5.31 corrispondono al teorema fondamentale sulle curve. Più precisamente, la condizione “ $M, \bar{M}$  sono isometriche” corrisponde alla condizione “le curve  $\alpha, \beta$  hanno stessa velocità scalare e sono definite sullo stesso intervallo” e la condizione “ $M, \bar{M}$  hanno stesso operatore forma” corrisponde a “ $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$  e  $\tau_\alpha = \pm\tau_\beta$ ”.

**Osservazione 5.33.** Esistono esempi di superfici isometriche ma non congruenti. Nell'Esempio 5.14 è stato osservato che la striscia di piano  $M = ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$  e la superficie  $\bar{M} = \varphi(]0, 2\pi[ \times \mathbb{R})$  dove  $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$  sono isometriche. Tuttavia, le due superfici non sono congruenti, ad esempio  $M$  è a punti planari mentre  $\bar{M}$  (che è un cilindro circolare retto privato di una retta generatrice) è a punti parabolici.

In conclusione lo studio geometrico di una superficie  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  può essere fatto da un punto di vista intrinseco, cioè studiando quelle proprietà geometriche che dipendono solo dalla prima forma fondamentale e quindi sono invarianti per isometrie di  $M$ , oppure da un punto di vista estrinseco, cioè studiando quelle proprietà geometriche che dipendono, oltre che dalla prima forma fondamentale, anche dalla seconda forma fondamentale e quindi legate alla forma di  $M$  in  $\mathbb{R}^3$ . Una generalizzazione, in arbitraria dimensione, dello studio intrinseco di una superficie porta allo studio della geometria riemanniana.

**Esercizio 5.34.** Sia data la superficie  $M : z = xy$ . Si verifichi che la trasformazione ortogonale  $F$  definita da:  $F(E_1) = E_2, F(E_2) = -E_1, F(E_3) = -E_3$ , soddisfa  $F(M) = M$ .

**Esercizio 5.35.** Verificare che curve asintotiche, linee di curvatura, indicatrici di Dupin e punti ombelicali sono invarianti per superfici congruenti.

#### 5.4. Derivata covariante e curve geodetiche

Le curve geodetiche sono curve speciali di una superficie, esse svolgono un ruolo analogo a quello svolto dalle rette nella geometria euclidea del piano. Iniziamo col definire la *derivata covariante* che è un concetto di derivata intrinseca sulla superficie.

**Derivata covariante.** Siano  $M$  una superficie regolare e  $\gamma(t), t \in I$ , una curva differenziabile di  $M$ . Se  $(D, \varphi, (u, v))$  è una parametrizzazione locale di  $M$  con  $\gamma(I) \cap \varphi(D)$  non vuota, posto  $\gamma(t) = \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi(u(t), v(t))$ , denotiamo con

$$\varphi_u(t) = \varphi_u(u(t), v(t)) \text{ e } \varphi_v(t) = \varphi_v(u(t), v(t)).$$

i campi vettoriali coordinati definiti lungo l'arco di  $\gamma$  contenuto in  $\varphi(D)$ . Un campo vettoriale differenziabile lungo  $\gamma$  e tangente a  $M$  è un campo vettoriale  $V(t)$  che localmente si esprime con

$$(5.11) \quad V(t) = a_1(t)\varphi_u(t) + a_2(t)\varphi_v(t)$$

dove le componenti  $a_1(t), a_2(t)$  sono funzioni differenziabili di  $t$ . In particolare,  $V(t)$  è un campo vettoriale differenziabile lungo  $\gamma$  come curva di  $\mathbb{R}^3$ . Denotiamo con  $\mathfrak{X}(\gamma)$  lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali differenziabili lungo  $\gamma$  tangenti ad  $M$ .

**Definizione 5.36.** *La derivata covariante di un campo vettoriale  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  è il campo vettoriale  $\frac{DV}{dt} \in \mathfrak{X}(\gamma)$  definito da*

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)^\top,$$

dove  $\left(\frac{dV}{dt}\right)^\top$  denota la proiezione ortogonale di  $\frac{dV}{dt} \in T_{\gamma(t)\mathbb{R}^3}$ , ossia di  $V'(t)$ , sul piano tangente  $T_{\gamma(t)}M$ , ovvero la sua componente tangente.

Denotiamo con  $N$  un campo vettoriale unitario e normale alla superficie  $M$ , in generale  $N$  è definito solo localmente. Siccome  $V(t) \cdot N(t) = 0$ , dalla definizione di  $\frac{DV}{dt}$  segue che

$$\frac{dV}{dt} = \frac{DV}{dt} + \left(\frac{dV}{dt} \cdot N(t)\right)N(t) = \frac{DV}{dt} - (V(t) \cdot N'(t))N(t),$$

e quindi si ottiene l'**equazione di Gauss**:

$$(5.12) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{DV}{dt} + (V(t) \cdot S(\dot{\gamma}(t)))N(t) = \frac{DV}{dt} + \mathcal{I}\mathcal{L}_{\gamma(t)}(V(t), \dot{\gamma}(t))N(t).$$

Notiamo che l'operatore  $D/dt$  è un endomorfismo di  $\mathfrak{X}(\gamma)$ . Inoltre, per ogni  $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$  e per ogni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile, valgono le proprietà

$$(5.13) \quad \frac{D}{dt}(fV) = f'(t)V + f\frac{DV}{dt},$$

$$(5.14) \quad \frac{d}{dt}(V \cdot W) = \frac{DV}{dt} \cdot W + V \cdot \frac{DW}{dt}.$$

La prima si ottiene considerando le componenti tangenti di entrambi i membri di  $(fV)' = f'(t)V + fV'(t)$ . Per la seconda basta applicare l'equazione di Gauss a  $(V \cdot W)' = V' \cdot W + V \cdot W'$ .

Determiniamo ora l'espressione di  $DV/dt$  rispetto alla fissata parametrizzazione locale. Derivando  $V(t)$  dato dalla (5.11), e ricordando le formule che esprimono  $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$  in termini dei coefficienti di Christoffel (cf. Sezione 4.2), otteniamo

$$\begin{aligned} V'(t) &= a'_1(t) \varphi_u(t) + a_1(t) \varphi'_u(t) + a'_2(t) \varphi_v(t) + a_2(t) \varphi'_v(t) \\ &= a'_1(t) \varphi_u(t) + a'_2(t) \varphi_v(t) + a_1(t)(u' \varphi_{uu} + v' \varphi_{uv})(t) \\ &\quad + a_2(t)(u' \varphi_{vu} + v' \varphi_{vv})(t) \\ &= a'_1(t) \varphi_u(t) + a'_2(t) \varphi_v(t) + a_1(t)u'(t)(\Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + \ell N)(t) \\ &\quad + a_2(t)v'(t)(\Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + n N)(t) \\ &\quad + (a_1(t)v'(t) + a_2(t)u'(t))(\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + m N)(t). \end{aligned}$$

Di conseguenza, prendendo le componenti tangenti di entrambi i membri, si ha

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \left( a_1'(t) + a_1(t)(u'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1)(t) + a_2(t)(u'\Gamma_{12}^1 + v'\Gamma_{22}^1)(t) \right) \varphi_u(t) \\ &\quad + \left( a_2'(t) + a_1(t)(u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2)(t) + a_2(t)(u'\Gamma_{12}^2 + v'\Gamma_{22}^2)(t) \right) \varphi_v(t). \end{aligned}$$

Ponendo  $x_1 = u, x_2 = v, \partial_1 = \varphi_u$  e  $\partial_2 = \varphi_v$ , e ricordando che  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , la formula precedente si può esprimere in forma compatta:

$$(5.15) \quad \frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left( a_k'(t) + \sum_{i,j=1}^2 a_i(t)x_j'(t)\Gamma_{ij}^k(t) \right) \partial_k(t).$$

Dalla (5.15) segue che la derivata covariante dipende, oltre che dalla curva e dalle componenti di  $V$ , solo dai simboli di Christoffel e quindi dalla prima forma fondamentale. Pertanto, *la derivata covariante è una derivata intrinseca della superficie.*

**Curve geodetiche.** Se  $M$  è il piano euclideo, i coefficienti di Christoffel sono nulli e quindi dalla (5.15) segue che  $V(t)$  soddisfa  $DV/dt = 0$  se e solo se le sue componenti  $a_k(t)$  sono costanti lungo  $\gamma$ , ossia  $V(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$ . In generale, per una superficie regolare  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  abbiamo la seguente

**Definizione 5.37.** *Un campo vettoriale  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  si dice che è un campo vettoriale parallelo lungo  $\gamma$  se in un intorno di ogni punto di  $\gamma$  si ha*

$$\frac{DV}{dt} = 0.$$

Non vogliamo sviluppare la teoria generale dei campi vettoriali paralleli su una superficie, ma siamo interessati a una particolare classe di campi vettoriali paralleli. Data una curva differenziabile  $\gamma(t)$ , il campo tangente  $\dot{\gamma}(t)$  è un elemento di  $\mathfrak{X}(\gamma)$  e quindi si può considerare la sua derivata covariante.

**Definizione 5.38.** *Una curva differenziabile  $\gamma$  della superficie  $M$  si dice **curva geodetica** se il campo tangente  $\dot{\gamma}(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$ , ovvero*

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$$

*in un intorno di ogni punto di  $\gamma$ .*

Dall'equazione di Gauss (5.12) segue che  $\gamma(t)$  è una curva geodetica se e solo se il vettore accelerazione  $\ddot{\gamma}(t)$  è normale al piano tangente, ossia  $\ddot{\gamma}(t)$  è parallelo alla normale alla superficie. Quindi, per una curva geodetica si ha

$$\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in I,$$

per cui

$$(\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t))' = 2\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) = 0.$$

In particolare, se  $\gamma(t)$  è una geodetica non banale,  $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{cost} \neq 0$ , cioè la parametrizzazione è regolare e il vettore velocità ha lunghezza costante non nulla. In particolare, tale curva può essere riparametrizzata mediante l'ascissa curvilinea.

**Proposizione 5.39.** *Se una superficie regolare  $M$  contiene una curva  $\gamma$  che è una (parte di) retta, allora  $\gamma$  è una geodetica (come insieme di punti). In particolare, le rette generatrici di una superficie rigata regolare sono geodetiche per la superficie.*

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che  $\gamma$  si può parametrizzare con  $\gamma(t) = p_0 + tv$ , e quindi  $\ddot{\gamma}(t) = 0$ .  $\square$

Supponiamo ora che la superficie  $M$  sia orientata. Quindi su  $M$  è fissato campo unitario normale  $N$ , equivalentemente una 2-forma d'area  $\Omega$ . Indichiamo con  $J$  la corrispondente struttura complessa, allora  $J$  è definita da (cf. Sezione 3.10)

$JX = N \wedge X$ , equivalentemente (in modo intrinseco)  $JX \cdot Y = \Omega(X, Y)$ , dove  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . In particolare,  $JX \cdot X = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile regolare di  $M$  e sia  $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$  un campo vettoriale unitario. Allora,

$$0 = \frac{d}{dt}(V \cdot V) = 2 \frac{DV}{dt} \cdot V$$

implica che  $\frac{DV}{dt}$  è ortogonale a  $V(t)$ , per cui sarà parallelo a  $JV(t)$ , ossia

$$\frac{DV}{dt} = \lambda(t) JV(t).$$

La quantità  $[\frac{DV}{dt}] = \lambda(t)$  si dice *valore algebrico della derivata covariante* in  $t$ , e chiaramente dipende dall'orientazione di  $N$ . In particolare, se  $\gamma(s)$  è parametrizzata con l'ascissa curvilinea,  $\frac{D\dot{\gamma}}{ds}$  è parallelo a  $J(\dot{\gamma}(s)) = N \wedge \dot{\gamma}(s)$ .

**Definizione 5.40.** *La funzione  $k_g : I \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto k_g(s)$ , definita da*

$$(5.16) \quad \begin{aligned} k_g(s) &:= \frac{D\dot{\gamma}}{ds} \cdot J(\dot{\gamma}(s)) = \ddot{\gamma}(s) \cdot J(\dot{\gamma}(s)) \\ &= (N \wedge \dot{\gamma}(s)) \cdot \ddot{\gamma}(s) = \Omega(\dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s)) \end{aligned}$$

è detta **curvatura geodetica** di  $\gamma$ .

Di conseguenza,

$$(5.17) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{ds} = k_g(s) J(\dot{\gamma}(s)).$$

Se la superficie non è orientabile la scelta locale di  $N$  può cambiare lungo  $\gamma$ , d'altronde cambiando  $N$  con  $-N$  la curvatura geodetica cambia di segno, per

cui per superfici non orientabili il valore assoluto della curvatura geodetica (che indichiamo sempre con  $k_g$ ) è ben definito. In particolare,

$$k_g^2(s) = \left\| \frac{D\dot{\gamma}}{ds} \right\|^2.$$

Quindi, otteniamo

**Proposizione 5.41.** *Una curva  $\gamma(s)$  è una curva geodetica se e solo se la sua curvatura geodetica è identicamente nulla.*

Dal Teorema di Meusnier segue che la curvatura normale  $k_n(s) = (\ddot{\gamma}(s) \cdot N_{\gamma(s)})$ , inoltre ricordando che  $\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$  è l'usuale curvatura di  $\gamma(s)$  come curva di  $\mathbb{R}^3$ , dall'equazione di Gauss

$$(5.18) \quad \ddot{\gamma}(s) = \frac{D\dot{\gamma}}{ds} + (\ddot{\gamma}(s) \cdot N_{\gamma(s)})N_{\gamma(s)}$$

si ha la seguente relazione fra le tre curvature:

$$(5.19) \quad \kappa^2(s) = k_g^2(s) + k_n^2(s).$$

**Proposizione 5.42.** *Se la curva  $\gamma(s)$  è una curva sezione normale di  $M$  in ogni suo punto, allora  $\gamma(s)$  è una curva geodetica.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\gamma(s)$  è una curva sezione normale di  $M$  in ogni suo punto, dalla Proposizione 4.40 segue che  $\kappa^2(s) = k_n^2(s)$ , e quindi la (5.19) ci dice che la curva  $\gamma(s)$  è una curva geodetica.  $\square$

**Osservazione 5.43.** Sia  $M$  una superficie regolare orientata e sia  $J$  la corrispondente struttura complessa. Se  $\gamma(s)$  è una curva regolare di  $M$  parametrizzata con l'ascissa curvilinea, posto

$$\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s) \quad \text{e} \quad \vec{n}(s) = J\dot{\gamma}(s),$$

la base ortonormale  $(\vec{t}(s), \vec{n}(s))$  è il riferimento di Frenet tangente a  $M$  lungo la curva  $\gamma$  (come curva della superficie  $M$ ). Tenendo presente la (5.17) e che  $D\vec{n}(s)/ds$  è ortogonale a  $\vec{n}$ , le corrispondenti **formule di Frenet** sono

$$\frac{D\vec{t}}{ds} = k_g(s)\vec{n}(s), \quad \frac{D\vec{n}}{ds} = -k_g(s)\vec{t}(s).$$

Quindi, la curvatura geodetica  $k_g(s)$  è la curvatura di  $\gamma$  nell'ambito della teoria delle curve di Frenet su una superficie.

**Esercizio 5.44.** Sia  $M$  una superficie regolare orientata e sia  $N$  un fisso campo unitario normale alla superficie. Sia  $\gamma(s)$  una curva regolare di  $M$  parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Lungo la curva  $\gamma$  consideriamo il riferimento ortonormale di  $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$

$$\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s), \quad N(s) = N(\gamma(s)), \quad \vec{n}(s) = N(s) \wedge T(s) = J\dot{\gamma}(s).$$

$(\vec{t}(s), N(s), \vec{n}(s))$  è detto *triedro di Darboux*. Mostrare che

$$(5.20) \quad \begin{cases} \vec{t}'(s) &= a(s) N(s) + b(s) \vec{n}(s), \\ N'(s) &= -a(s) \vec{t}(s) - c(s) \vec{n}(s), \\ \vec{n}'(s) &= -b(s) \vec{t}(s) + c(s) N(s). \end{cases}$$

Tali formule sono l'analogo delle formule di Frenet per il triedro di Darboux. Stabilire il significato geometrico dei coefficienti provando quanto segue.

- 1)  $a(s)$  è la curvatura normale  $k_n(s)$ , e quindi  $a(s) = 0$  se e solo se  $\gamma(s)$  è una curva asintotica.
- 2)  $b(s)$  è la curvatura geodetica  $k_g(s)$ , e quindi  $b(s) = 0$  se e solo se  $\gamma(s)$  è una curva geodetica.
- 3)  $-c(s) = \vec{n}(s) \cdot N'(s)$  è la **torsione geodetica**  $\tau_g(s)$  di  $\gamma(s)$ , e  $c(s) = 0$  se e solo se  $\gamma(s)$  è un linea principale.

Quindi, il sistema (5.20) diventa

$$\begin{cases} \vec{t}'(s) &= k_n(s) N(s) + k_g(s) \vec{n}(s), \\ N'(s) &= -k_n(s) \vec{t}(s) + \tau_g(s) \vec{n}(s), \\ \vec{n}'(s) &= -k_g(s) \vec{t}(s) - \tau_g(s) N(s). \end{cases}$$

Infine, verificare che:

- 4) se la curvatura geodetica  $k_g(s) = 0$ , usando la (5.19), la seconda parte del Teorema di Meusnier e la seconda formula di Frenet, si ha  $\tau_g^2(s) = \tau^2(s)$  dove  $\tau(s)$  è l'usuale torsione di  $\gamma(s)$ .

**Esempio 5.45.** Sia  $M$  la sfera canonica  $\mathbb{S}^2$  di raggio  $R$  e sia  $\gamma(s)$  il parallelo di colatitudine  $\vartheta$  ( $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ ) della sfera  $\mathbb{S}^2$ . Allora  $\gamma(s)$  ha raggio  $r = R \sin \vartheta$  e quindi curvatura  $\kappa(s) = 1/(R \sin \vartheta)$ . Inoltre, considerando il campo normale  $N$  alla sfera orientato verso l'interno e usando il Teorema di Meusnier, la curvatura normale  $k_n(s) = \kappa(s) \cos(\frac{\pi}{2} - \vartheta) = \kappa(s) \sin \vartheta = 1/R$ . Di conseguenza, applicando la (5.19), si ottiene che la curvatura geodetica è data da

$$k_g(p) = \sqrt{\kappa^2(p) - k_n^2(p)} = \frac{\cos \vartheta}{R \sin \vartheta} (= \text{cost.}) \quad \forall p \in \gamma.$$

In particolare, dalla Proposizione 5.41, otteniamo che il parallelo  $\gamma(s)$  è una curva geodetica se e solo se  $\vartheta = \pi/2$ , ovvero  $\gamma(s)$  è una circonferenza di raggio massimo.

**Esempio 5.46.** Ogni curva  $\gamma(s)$  della sfera canonica  $\mathbb{S}^2$  di raggio  $R$  ha torsione geodetica nulla. Infatti,

$$\begin{aligned} \tau_g(s) &= \vec{n}(s) \cdot N'(s) = \vec{n}(s) \cdot (1/R)\dot{\gamma}(s) \\ &= (1/R)J(\dot{\gamma}(s)) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0. \end{aligned}$$

Torniamo ora al caso generale. Siano quindi  $M$  una superficie regolare e  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$ . Rispetto a una fissata parametrizzazione locale,  $\gamma(t) = \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi(u(t), v(t)) = \varphi(x_1(t), x_2(t))$  e quindi

$$\dot{\gamma}(t) = u'(t) \varphi_u(t) + v'(t) \varphi_v(t) = x'_1(t) \partial_1(t) + x'_2(t) \partial_2(t).$$

Prendendo  $V(t) = \dot{\gamma}(t)$ , la (5.15) diventa

$$(5.21) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left( x''_k(t) + \sum_{i,j=1}^2 x'_i(t) x'_j(t) \Gamma_{ij}^k(t) \right) \partial_k(t).$$

Pertanto,  $\gamma(t)$  è una curva geodetica se e solo se è soddisfatto il seguente sistema di equazioni

$$x''_k(t) + \sum_{i,j=1}^2 x'_i(t) x'_j(t) \Gamma_{ij}^k(t), \quad k = 1, 2.$$

In forma più esplicita,  $\gamma(t)$  è una curva geodetica se e solo se è soddisfatto il seguente sistema di equazioni

$$(5.22) \quad \begin{cases} u''(t) + \Gamma_{11}^1(t)(u'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^1(t)u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^1(t)(v'(t))^2 = 0, \\ v''(t) + \Gamma_{11}^2(t)(u'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^2(t)u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^2(t)(v'(t))^2 = 0. \end{cases}$$

Questo è un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari del secondo ordine. Se imponiamo che  $\gamma(0) = p_0 = \varphi(u_0, v_0)$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_0 \in T_{p_0}M$ ,  $V_0 = a_0\varphi_u^0 + b_0\varphi_v^0$ , abbiamo le condizioni iniziali

$$u(0) = u_0, v(0) = v_0 \text{ e } u'(0) = a_0, v'(0) = b_0$$

associate al sistema (5.22). Pertanto, dalla teoria delle ODE si ha l'esistenza e l'unicità della curva geodetica con le fissate condizioni iniziali. In altre parole, abbiamo il seguente

**Teorema 5.47.** *Per ogni  $p_0 \in M$  e per ogni  $V_0 \in T_{p_0}M$ , esiste un  $\varepsilon > 0$  ed esiste un'unica geodetica  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tale che  $\gamma(0) = p_0$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_0$ .*

Se  $\gamma$  e  $\sigma$  sono due curve geodetiche definite in un intervallo aperto  $I$  con  $\gamma(0) = \sigma(0)$  e  $\dot{\gamma}(0) = \dot{\sigma}(0)$ . Per il Teorema 5.47, tali curve coincidono in un intorno di 0. Sia  $] -a, a[ \subset I$  tale che  $\gamma(t) = \sigma(t)$  per ogni  $t \in ] -a, a[$ . Per continuità si ha  $\gamma(a) = \sigma(a)$  e  $\dot{\gamma}(a) = \dot{\sigma}(a)$ . Quindi, applicando il Teorema 5.47, si ha che  $\gamma$  e  $\sigma$  coincidono anche su un intorno destro di  $a$ . Analogamente su un intorno sinistro di  $-a$ . Così procedendo si ha che  $\gamma(t) = \sigma(t)$  per ogni  $t \in I$ . Di conseguenza, si ha l'unicità anche della *geodetica massimale*  $\gamma : I \rightarrow M$ .

**Esempio 5.48.** Abbiamo visto che per il piano euclideo un campo  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  è parallelo se e solo se  $V(t) = \text{cost}$ . Di conseguenza, una curva  $\gamma(t)$  è una curva geodetica (con  $\gamma(0) = p_0$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_0$ ) se e solo se  $\gamma$  è una retta parametrizzata da  $\gamma(t) = tV_0 + p_0$ .

Osserviamo che il concetto di curva geodetica dipende oltre che dalla sua “forma” anche dalla sua parametrizzazione. Ad esempio, la semiretta  $\gamma(t) = (t^2, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , del piano euclideo non soddisfa il sistema (5.22). Se  $\gamma$  è una geodetica (come insieme di punti), un parametro  $t$  per cui  $\gamma(t)$  risulti geodetica si dice *parametro ammissibile*. Scrivendo  $\gamma(t)$  geodetica intendiamo che  $t$  è parametro ammissibile.

**Esercizio 5.49.** Sia  $\gamma$  una curva geodetica parametrizzata con  $t$  parametro ammissibile e sia  $t = t(s)$ ,  $\frac{dt}{ds} \neq 0$ , un cambiamento di parametro. Posto  $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ , si verifichi che

$$\gamma(s) \text{ è geodetica se e solo se } t = as + b, a \neq 0.$$

Se  $\gamma(t)$  è geodetica, sappiamo che  $\|\dot{\gamma}(t)\| = a$  (cost.  $\neq 0$ ). Allora, l’ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt = at + b, a \neq 0.$$

Pertanto, per una curva geodetica l’ascissa curvilinea è un parametro ammissibile.

**Osservazione 5.50.** Sia  $\varphi : D \rightarrow M, (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ , una superficie parametrizzata. Allora,

$$(5.23) \quad \frac{D}{du} \varphi_v = \frac{D}{dv} \varphi_u.$$

$$\text{Infatti } \frac{D}{du} \varphi_v = (\varphi_{uv})^\top = (\varphi_{vu})^\top = \frac{D}{dv} \varphi_u.$$

Il nostro prossimo obiettivo è provare che il concetto di curva geodetica è invariante per isometrie. Intanto proviamo che la derivata covariante è invariante per isometrie, ossia proviamo il seguente Teorema.

**Teorema 5.51.** Sia  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  un’isometria tra superfici regolari e sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$ . Posto  $\tilde{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$ , per ogni  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  si ha:

$$(5.24) \quad (f_*)_{\gamma(t)} \frac{DV}{dt} = \frac{\tilde{D}}{dt} (f_*)_{\gamma(t)} V,$$

dove  $D/dt$  e  $\tilde{D}/dt$  sono le derivate covarianti lungo  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  rispettivamente.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  un’isometria. Allora, applicando la Proposizione 5.7, presa una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di  $M$ , l’applicazione  $\tilde{\varphi} = f \circ \varphi : D \rightarrow \tilde{M}$  definisce una parametrizzazione locale di  $\tilde{M}$ . Inoltre, rispetto a queste parametrizzazioni, se  $p = \varphi(u, v)$ , si ha  $f(p) = f(\varphi(u, v)) = \tilde{\varphi}(u, v)$ ,  $f_* \varphi_u = \tilde{\varphi}_u$ ,  $f_* \varphi_v = \tilde{\varphi}_v$ , e quindi

$$\tilde{E}(u, v) = \tilde{\varphi}_u \cdot \tilde{\varphi}_u = f_* \varphi_u \cdot f_* \varphi_u = \varphi_u \cdot \varphi_u = E(u, v).$$

Analogamente per gli altri coefficienti della prima forma fondamentale. In particolare, per i coefficienti di Christoffel (che sono determinati, come visto,

dalla prima forma fondamentale) si ha  $\bar{\Gamma}_{ij}^k(u, v) = \Gamma_{ij}^k(u, v)$ . Per provare la (5.24), consideriamo prima il caso  $V(t) = \varphi_u(t)$ . In tal caso  $(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u = \bar{\varphi}_u(t)$ . Applicando la (5.15) si ha

$$\frac{D\varphi_u}{dt} = (u'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1)(t)\varphi_u(t) + (u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2)(t)\varphi_v(t),$$

e quindi

$$\begin{aligned} (f_*)_{\gamma(t)}\frac{D\varphi_u}{dt} &= (u'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1)(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u(t) + (u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2)(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_v(t) \\ &= (u'(t)\Gamma_{11}^1 + v'(t)\Gamma_{12}^1)(t)\bar{\varphi}_u(t) + (u'(t)\Gamma_{11}^2 + v'(t)\Gamma_{12}^2)(t)\bar{\varphi}_v(t) \\ &= \frac{\tilde{D}\bar{\varphi}_u}{dt} = \frac{\tilde{D}}{dt}(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u. \end{aligned}$$

Analogamente  $(f_*)_{\gamma(t)}\frac{D\varphi_v}{dt} = \frac{\tilde{D}}{dt}(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_v$ .

Ora, consideriamo il caso generale  $V(t) = a_1(t)\varphi_u(t) + a_2(t)\varphi_v(t)$ . Allora,

$$(f_*)_{\gamma(t)}V = a_1(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u(t) + a_2(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_v(t) = a_1(t)\bar{\varphi}_u(t) + a_2(t)\bar{\varphi}_v(t),$$

$$\frac{DV}{dt} = a_1(t)\frac{D\varphi_u}{dt} + a_1'(t)\varphi_u(t) + a_2(t)\frac{D\varphi_v}{dt} + a_2'(t)\varphi_v(t),$$

e quindi

$$\begin{aligned} (f_*)_{\gamma(t)}\frac{DV}{dt} &= a_1(t)(f_*)_{\gamma(t)}\frac{D\varphi_u}{dt} + a_1'(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u(t) \\ &\quad + a_2(t)(f_*)_{\gamma(t)}\frac{D\varphi_v}{dt} + a_2'(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_v(t) \\ &= a_1(t)\frac{\tilde{D}}{dt}(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u + a_1'(t)\bar{\varphi}_u(t) \\ &\quad + a_2(t)\frac{\tilde{D}}{dt}(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_v + a_2'(t)\bar{\varphi}_v(t) \\ &= a_1(t)\frac{\tilde{D}\bar{\varphi}_u}{dt} + a_1'(t)\bar{\varphi}_u(t) + a_2(t)\frac{\tilde{D}\bar{\varphi}_v}{dt} + a_2'(t)\bar{\varphi}_v(t) \\ &= \frac{\tilde{D}}{dt}(a_1(t)\bar{\varphi}_u(t) + a_2(t)\bar{\varphi}_v(t)) \\ &= \frac{\tilde{D}}{dt}(f_*)_{\gamma(t)}V(t). \end{aligned}$$

□

**Corollario 5.52.** *Siano  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  un'isometria,  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$  e  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Posto  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ , si hanno le seguenti proprietà.*

**a)**  *$V$  è parallelo lungo  $\gamma$  se e solo se  $(F_*)_{\gamma(t)}V$  è parallelo lungo  $\tilde{\gamma}$ .*

**b)**  *$\gamma(t)$  è una geodetica di  $M$  se e solo se  $\tilde{\gamma}(t)$  è una geodetica di  $\tilde{M}$ .*

### 5.5. La connessione di Levi-Civita delle superfici

In questa sezione vogliamo estendere il concetto di derivata covariante al caso di campi vettoriali definiti su una superficie regolare  $M$  (o su un aperto di  $M$ ), e quindi introdurre la connessione di Levi-Civita su  $M$ .

Ricordiamo che  $\mathfrak{X}(M)$  è l'insieme di tutti i campi vettoriali differenziabili tangenti a  $M$  e definiti su  $M$ . Consideriamo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $W_p \in T_pM$ . Intanto, definiamo la derivata covariante di  $X$  rispetto al vettore tangente  $W_p$  che indichiamo con  $\nabla_{W_p}X$ . Consideriamo una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $M$  con  $\gamma(0) = p$  e  $W_p = \dot{\gamma}(0)$ , allora definiamo

$$\nabla_{W_p}X := \frac{DX}{dt}(0) \in T_pM, \text{ dove } X(t) = X(\gamma(t)) \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

Rispetto a una fissata parametrizzazione locale, posto  $W_p = w^1\partial_1(p) + w^2\partial_2(p)$ ,  $X = X^1\partial_1 + X^2\partial_2$ ,  $x_1 = u, x_2 = v, \partial_1 = \varphi_u$  e  $\partial_2 = \varphi_v$ , tenendo conto che

$$\frac{dX^k}{dt}(0) = \dot{\gamma}(0)(X^k) = W_p(X^k),$$

dalla (5.15) segue che

$$\nabla_{W_p}X = \sum_{k=1}^2 \left( W_p(X^k) + \sum_{i,j=1}^2 X^i(p)w^j\Gamma_{ij}^k(p) \right) \partial_k(p).$$

Quindi, la definizione di  $\nabla_{W_p}X$  non dipende dalla curva considerata. Se consideriamo due campi vettoriali  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , allora si pone

$$(\nabla_Y X)_p := (\nabla_{Y_p} X).$$

Quindi, localmente

$$\nabla_Y X = \sum_{k=1}^2 \left( Y(X^k) + \sum_{i,j=1}^2 X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k$$

da cui si evince che  $\nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$ . In particolare,

$$\begin{aligned} \nabla_{\varphi_u} \varphi_u &= \nabla_{\partial_1} \partial_1 = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{11}^k \partial_k = (\varphi_{uu})^\top, \\ \nabla_{\varphi_v} \varphi_u &= \nabla_{\partial_2} \partial_1 = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k \partial_k = (\varphi_{uv})^\top = \nabla_{\varphi_u} \varphi_v, \\ \nabla_{\varphi_v} \varphi_v &= \nabla_{\partial_2} \partial_2 = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{22}^k \partial_k = (\varphi_{vv})^\top. \end{aligned}$$

L'operatore

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

che prende il nome di **connessione lineare**, soddisfa le seguenti proprietà (da verificare per esercizio):

$$(5.25) \quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$$

$$(5.26) \quad \nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$$

$$(5.27) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (\nabla_Xf)Y,$$

per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ , dove  $\nabla_Xf := X(f)$ . L'operatore  $\nabla_Y : X \mapsto \nabla_YX$ , si dice *derivata covariante rispetto a Y*. Nel caso di  $M = \mathbb{R}^2$ , i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  sono nulli, quindi ritroviamo la *connessione euclidea* di  $\mathbb{R}^2$  (cf. Sezione (1.3)):

$$\bar{\nabla}_YX = \sum_{k=1}^2 Y(X^k)\partial_k = (Y(X^1), Y(X^2)).$$

Notiamo che, usando le connessioni lineari  $\bar{\nabla}$  di  $\mathbb{R}^3$  e  $\nabla$  di  $M$ , l'equazione di Gauss (5.12) si può esprimere nella forma

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)}V = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}V + \mathcal{I}\mathcal{L}_{\gamma(t)}(V(t), \dot{\gamma}(t))N(t),$$

dove  $\gamma$  è una curva differenziabile di  $M$ . Di conseguenza, per  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e per  $p \in M$ , abbiamo l'equazione di Gauss per campi vettoriali

$$(5.28) \quad (\bar{\nabla}_XY)_p = (\nabla_XY)_p + \mathcal{I}\mathcal{L}_p(X_p, Y_p)N_p.$$

Pertanto, la *connessione lineare*  $\nabla$  che abbiamo definito su  $M$  è esattamente quella indotta, mediante l'equazione di Gauss, dalla *connessione lineare euclidea*  $\bar{\nabla}$  di  $\mathbb{R}^3$ . Quindi, ci aspettiamo un legame tra  $\nabla$  e la prima forma fondamentale di  $M$ . Infatti, abbiamo la seguente

**Proposizione 5.53.** *La connessione lineare  $\nabla$  definita su  $M$  è simmetrica:*

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y],$$

*ed è compatibile con la prima forma fondamentale:*

$$(5.29) \quad X(Y \cdot Z) = (\nabla_XY) \cdot Z + Y \cdot (\nabla_XZ) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

*Inoltre,  $\nabla$  (detta **connessione di Levi-Civita**) è univocamente determinata dalla prima forma fondamentale:*

$$(5.30) \quad (\nabla_YX \cdot Z) = \frac{1}{2} \left( X(Y \cdot Z) + Y(X \cdot Z) - Z(X \cdot Y) \right. \\ \left. - Y \cdot [X, Z] - X \cdot [Y, Z] - Z \cdot [X, Y] \right).$$

La (5.30) è nota in letteratura col nome **formula di Koszul**.

**DIMOSTRAZIONE.** La simmetria di  $\bar{\nabla}$  (cf. Proposizione 1.41) e la (5.28) implicano la simmetria di  $\nabla$ . Inoltre, la compatibilità della connessione euclidea  $\bar{\nabla}$  con il prodotto scalare euclideo è data da (cf. Proposizione 1.41)

$$(5.31) \quad X(Y \cdot Z) = (\bar{\nabla}_XY) \cdot Z + Y \cdot (\bar{\nabla}_XZ).$$

Le equazioni (5.28) e (5.31) implicano la (5.29). Infine, usando la simmetria di  $\nabla$  e la compatibilità di  $\nabla$  con la prima forma fondamentale, si ha

$$\begin{aligned} X(Y \cdot Z) &= (\nabla_X Y \cdot Z) + (Y \cdot \nabla_X Z) \\ &= ([X, Y] + \nabla_Y X) \cdot Z + Y \cdot ([X, Z] + \nabla_Z X), \\ Y(X \cdot Z) &= (\nabla_Y X \cdot Z) + (X \cdot \nabla_Y Z) = (\nabla_Y X \cdot Z) + X \cdot ([Y, Z] + \nabla_Z Y), \\ -Z(X \cdot Y) &= -(\nabla_Z X \cdot Y) - (X \cdot \nabla_Z Y), \end{aligned}$$

per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Sommando si ottiene la (5.30). La (5.30) mostra che  $\nabla$  è univocamente determinata dalla prima forma fondamentale in quanto il prodotto scalare indotto è definito positivo e quindi non degenere.  $\square$

Infine, osserviamo che se  $F : M \rightarrow \tilde{M}$  è una isometria tra superfici regolari, il Teorema 5.51 vale anche nella seguente forma

$$(5.32) \quad F_*(\nabla_Y X) = \tilde{\nabla}_{F_*Y} F_*X \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

dove  $F_*X$  è il campo vettoriale definito dalla (3.19). Quindi, *la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  definita sulla superficie è invariante per isometrie*. La dimostrazione della (5.32) segue dal Teorema 5.51. Infatti, per  $q \in \tilde{M}$ ,  $q = F(p)$ ,  $p \in M$ , abbiamo

$$\begin{aligned} (F_*(\nabla_Y X))_q &= F_{*p}(\nabla_Y X)_p = F_{*p}(\nabla_{Y_p} X) = F_{*\gamma(0)}(\nabla_{\dot{\gamma}(0)} X) \\ &= \left( F_{*\gamma(t)} \frac{DX}{dt} \right) (0) = \left( \frac{\tilde{D}}{dt} F_{*\gamma(t)} X \right) (0) = \tilde{\nabla}_{F_*\dot{\gamma}(0)} F_*X \\ &= \tilde{\nabla}_{F_*Y_p} F_*X = \tilde{\nabla}_{(F_*Y)_q} F_*X = \left( \tilde{\nabla}_{F_*Y} F_*X \right)_q, \end{aligned}$$

dove la  $\gamma$  è una curva differenziabile con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = Y_p$ .

## 5.6. Gradiente, divergenza e l'operatore di Laplace-Beltrami

La prima forma fondamentale (o una metrica riemanniana) e la connessione di Levi-Civita sono le nozioni di cui abbiamo bisogno per estendere al caso delle superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$  alcuni ben noti operatori del calcolo differenziale, quali l'operatore gradiente, l'operatore divergenza e l'operatore di Laplace-Beltrami.

**Il gradiente su superfici regolari.** Sia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile definita su una superficie regolare  $M$  di  $\mathbb{R}^3$ . Nella Sezione 3.6 abbiamo definito il differenziale di  $f$ .

**Definizione 5.54.** *Il gradiente di  $f$  è il campo vettoriale  $\nabla f$  (tangente a  $M$ ) che ad ogni punto  $p$  associa il vettore tangente  $(\nabla f)_p$  duale del differenziale  $(df)_p$ , ovvero  $(\nabla f)_p$  è definito da*

$$(\nabla f)_p \cdot w_p = (df)_p(w_p) = w_p(f) \quad \forall w_p \in T_p M.$$

Si noti che per indicare il gradiente abbiamo usato lo stesso simbolo usato nell'indicare la derivata covariante della connessione di Levi-Civita. Posto  $(\nabla f)_p = a_1 \varphi_u + a_2 \varphi_v$ , dalla (3.17) si ottiene

$$(\nabla f)_p \cdot \varphi_u = \varphi_u(f) = (\partial f / \partial u)(p) = f_u,$$

$$(\nabla f)_p \cdot \varphi_v = \varphi_v(f) = (\partial f / \partial v)(p) = f_v.$$

Inoltre,

$$(\nabla f)_p \cdot \varphi_u = a_1 E + a_2 F \quad \text{e} \quad (\nabla f)_p \cdot \varphi_v^0 = a_1 F + a_2 G.$$

Quindi,

$$a_1 E + a_2 F = f_u, \quad a_1 F + a_2 G = f_v.$$

Risolviendo tale sistema, si ottengono le componenti di  $(\nabla f)_p$  rispetto alla base  $\varphi_u, \varphi_v$  di  $T_p M$ . Pertanto, localmente, il gradiente è dato dalla seguente formula

$$(5.33) \quad \nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \varphi_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} \varphi_v.$$

In particolare, se la base  $(\varphi_u, \varphi_v)$  è ortonormale, si ha

$$\nabla f = f_u \varphi_u + f_v \varphi_v.$$

In ogni caso le funzioni componenti di  $\nabla f$  sono differenziabili, quindi

$$\forall f \in \mathcal{F}(M) : \nabla f \in \mathfrak{X}(M).$$

In termini di campi vettoriali, il gradiente  $\nabla f$  è definito

$$(\nabla f) \cdot X = X(f) \quad \text{per ogni } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Diamo ora una presentazione in forma compatta del gradiente  $\nabla f$ . Poniamo

$$\partial_1 = \varphi_u, \quad \partial_2 = \varphi_v, \quad g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j, \quad i, j = 1, 2, \quad \text{e} \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

Allora,

$$g^{11} = G / \sqrt{EG - F^2}, \quad g^{22} = E / \sqrt{EG - F^2}, \quad g^{12} = g^{21} = -F / \sqrt{EG - F^2}.$$

Quindi la (5.33) si può scrivere nella seguente forma compatta

$$(5.34) \quad \nabla f = \sum_{i,j=1}^2 (g^{ij} \partial_i f) \partial_j.$$

Se  $M$  è il piano euclideo  $\mathbb{R}^2$ , si ha  $g^{ij} = (\delta_{ij})$  e quindi ritroviamo il gradiente di funzioni differenziabili su  $\mathbb{R}^2$ .

**L'operatore divergenza su superfici regolari.** La Definizione (1.6) di divergenza data per campi vettoriali differenziabili definiti su  $\mathbb{R}^n$  (o su un suo aperto) fa uso del prodotto scalare euclideo e della connessione euclidea  $\bar{\nabla}$ . Tale definizione si può estendere, usando la prima forma fondamentale e la connessione di Levi-Civita, al caso delle superfici di  $\mathbb{R}^3$ .

**Definizione 5.55.** *Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Si definisce divergenza di un campo vettoriale  $X \in \mathfrak{X}(M)$  la funzione differenziabile*

$$\operatorname{div} X := \operatorname{tr} \nabla X, \quad \text{quindi} \quad \operatorname{div} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M),$$

dove  $\nabla X : Y \mapsto \nabla_Y X$  è l'operatore lineare definito dalla connessione di Levi-Civita.

Fissata una parametrizzazione locale, come prima poniamo  $\partial_1 = \varphi_u$ ,  $\partial_2 = \varphi_v$ ,  $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j$ ,  $i, j = 1, 2$ , e  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ . Inoltre, sia  $(E_1, E_2)$  una base ortonormale (locale) per  $\mathfrak{X}(M)$ , e sia  $A = (a_{ki})$  la matrice definita da  $E_i = \sum_{k=1}^2 a_{ki} \partial_k$ . Allora,

$$\delta_{ij} = E_i \cdot E_j = \sum_{k,h=1}^2 a_{ki} a_{hj} g_{kh} = \sum_{h=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 a_{ki} g_{kh} \right) a_{hj}$$

implica  $I = (A^t G)A$ , dove  $G = (g_{ij})$ , e quindi

$$(5.35) \quad AA^t = G^{-1} = (g^{kh}).$$

Ora, se poniamo  $\nabla_{\partial_k} X = \sum_{i=1}^2 b_{ik} \partial_i$ , tenendo presente la (5.35) si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \operatorname{tr} \nabla X = \sum_{i=1}^2 (\nabla_{E_i} X \cdot E_i) \\ &= \sum_{i,k,h=1}^2 a_{ki} a_{hi} (\nabla_{\partial_k} X \cdot \partial_h) = \sum_{k,h=1}^2 g^{kh} (\nabla_{\partial_k} X \cdot \partial_h) \\ &= \sum_{k,h,i=1}^2 g^{kh} b_{ki} g_{hi} = \sum_{k,i=1}^2 \left( \sum_{h=1}^2 g^{kh} g_{hi} \right) b_{ik} \\ &= \sum_{k,i=1}^2 \delta_{ki} b_{ik}, \end{aligned}$$

e quindi

$$(5.36) \quad \operatorname{div} X = b_{11} + b_{22}.$$

D'altronde, se poniamo  $X = X^1 E_1 + X^2 E_2$ , usando le proprietà della connessione di Levi-Civita e la definizione dei coefficienti di Christoffel, abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} X &= \sum_{j=1}^2 \nabla_{\partial_i} (X^j \partial_j) = \sum_{j=1}^2 (\partial_i (X^j) \partial_j + X^j \nabla_{\partial_i} \partial_j) \\ &= \partial_i (X^1) \partial_1 + \partial_i (X^2) \partial_2 + X^1 (\Gamma_{i1}^1 \partial_1 + \Gamma_{i1}^2 \partial_2) + X^2 (\Gamma_{i2}^1 \partial_1 + \Gamma_{i2}^2 \partial_2) \\ &= (\partial_i (X^1) + X^1 \Gamma_{i1}^1 + X^2 \Gamma_{i2}^1) \partial_1 + (\partial_i (X^2) + X^1 \Gamma_{i1}^2 + X^2 \Gamma_{i2}^2) \partial_2 \end{aligned}$$

e quindi

$$b_{11} = \partial_1 (X^1) + X^1 \Gamma_{11}^1 + X^2 \Gamma_{12}^1 \quad \text{e} \quad b_{22} = \partial_2 (X^2) + X^1 \Gamma_{21}^2 + X^2 \Gamma_{22}^2.$$

Di conseguenza, dalla (5.36), otteniamo

$$(5.37) \quad \operatorname{div} X = \sum_{i=1}^2 (\partial_i (X^i) + \sum_{j=1}^2 X^j \Gamma_{ij}^i).$$

Ora, usando la formula (4.6) che esprime i coefficienti di Christoffel  $\Gamma_{ij}^i$  in funzione dei coefficienti  $g_{hk}$  della prima forma fondamentale, e la formula della derivata di un determinante:

$$\partial_i \det(g_{ij}) = \det(g_{ij}) \sum_{k=1}^2 g^{ik} \partial_j g_{ik}, \quad \text{dove} \quad \det(g_{ij}) = EG - F^2,$$

dalla (5.37) otteniamo

$$(5.38) \quad \operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \sum_{i=1}^2 \partial_i (X^i \sqrt{EG - F^2}).$$

In particolare, se  $g_{12} = F = 0$ , dalla (5.38) si ottiene

$$(5.39) \quad \operatorname{div} X = \partial_1(X^1) + \partial_2(X^2) + X^1 \left( \frac{E_1}{E} + \frac{G_1}{G} \right) + X^2 \left( \frac{E_2}{E} + \frac{G_2}{G} \right),$$

dove  $E_1 = \partial_1 E = \partial_u E = E_u$ ,  $E_2 = \partial_2 E = \partial_v E = E_v$ , e analogamente per  $G_1, G_2$ .

**L'operatore di Laplace-Beltrami su superfici regolari.** Se  $f$  è una funzione differenziabile definita su  $\mathbb{R}^n$  (o su un suo aperto) il laplaciano di  $f$  è definito con la (1.7). In modo analogo abbiamo la seguente definizione nel caso delle superfici.

**Definizione 5.56.** *Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ . L'operatore differenziale*

$$\Delta : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), f \mapsto \Delta f = \operatorname{div} \nabla f,$$

è detto operatore di Laplace-Beltrami.

Si noti che in letteratura, l'operatore di Laplace-Beltrami si può trovare definito anche come  $-\operatorname{div} \nabla f$ .

Dalla (5.34) segue che il campo vettoriale  $X = \nabla f$  ha componente  $j$ -ma  $X^j = (\nabla f)^j = \sum_{i=1}^2 (g^{ij} \partial_i f)$ , per cui dalla (5.38) segue che

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( \sqrt{EG - F^2} \sum_{i=1}^2 (g^{ij} \partial_i f) \right).$$

In particolare, se  $F = 0$  abbiamo  $g^{11} = 1/E$ ,  $g^{22} = 1/G$ ,  $g^{12} = g^{21} = 0$ , e la formula precedente diventa

$$(5.40) \quad \Delta f = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \partial_1 \left( \frac{\sqrt{EG}}{E} \partial_1 f \right) + \partial_2 \left( \frac{\sqrt{EG}}{G} \partial_2 f \right) \right).$$

**Esempio 5.57.** Consideriamo come superficie regolare la sfera  $\mathbb{S}^2$  parametrizzata con coordinate geografiche  $(u, v)$ ,  $u \in ]0, \pi[$  e  $v \in ]0, 2\pi[$ . In questo caso (cf. Esercizio 3.70)  $E = 1, F = 0$  e  $G = \sin^2 u$ . Quindi, dalla (5.40), l'operatore di Laplace-Beltrami è dato da

$$\Delta f = (\cotgu) \partial_u f + \partial_{uu} f + \frac{1}{\sin^2 u} \partial_{vv} f.$$

**Invarianza dell'operatore di Laplace-Beltrami per isometrie.** Iniziamo richiamando alcune **proprietà del differenziale**. Sia  $F : M \rightarrow \tilde{M}$  un'applicazione differenziabile tra superfici regolari. Il differenziale  $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} \tilde{M}$  introdotto con la Definizione 3.56, si può anche esprimere (in termini di derivate direzionali) con

$$F_{*p}(X_p)(g) = X_p(g \circ F)$$

per ogni  $X_p \in T_p M$  e per ogni  $g$  funzione differenziabile in un intorno di  $F(p)$ .

Sia ora  $F$  un diffeomorfismo, allora il suo differenziale  $F_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(\tilde{M})$  definito da  $(F_* X)_q = F_{*p}(X_p)$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $q = F(p) \in \tilde{M}$ ,  $p \in M$ , si può anche esprimere con

$$(5.41) \quad (F_* X)(g) = X(g \circ F) \circ F^{-1} \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall g \in \mathcal{F}(\tilde{M}).$$

Inoltre,  $F_{*p}$  è un isomorfismo e  $F_{*p}^{-1} = (F^{-1})_{*F(p)}$ . In particolare se  $F$  è un'isometria, da

$$F_{*p}(X_p) \cdot F_{*p}(Y_p) = X_p \cdot Y_p \quad \text{per ogni } p \in M \text{ e per ogni } X_p \in T_p M,$$

segue

$$(5.42) \quad (F_* X \cdot F_* Y) \circ F = X \cdot Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Ora verifichiamo l'invarianza dell'operatore di Laplace-Beltrami per isometrie. Più precisamente proviamo la seguente

**Proposizione 5.58.** *Sia  $F : M \rightarrow \tilde{M}$  un'isometria tra due superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$ . Allora,*

- 1)  $F_* \nabla(f \circ F) = \nabla f$  per ogni  $f \in \mathcal{F}(\tilde{M})$ ;
- 2)  $\text{div}(F_* X) = (\text{div} X) \circ F^{-1}$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ;
- 3)  $\Delta(f \circ F) = (\tilde{\Delta} f) \circ F$  per ogni  $f \in \mathcal{F}(\tilde{M})$ ,

dove  $\Delta$  e  $\tilde{\Delta}$  sono gli operatori di Laplace-Beltrami relativi alle superfici  $M, \tilde{M}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** 1) Tenendo presente che  $F^{-1}$  è isometria con  $F_*^{-1} = (F^{-1})_*$ , la (5.41) e la definizione di gradiente, si ha:

$$\begin{aligned} (F_* \nabla(f \circ F)) \cdot Y &= (F_*^{-1} F_* \nabla(f \circ F) \cdot F_*^{-1} Y) \circ F^{-1} \\ &= (\nabla(f \circ F) \cdot F_*^{-1} Y) \circ F^{-1} = ((F_*^{-1} Y))(f \circ F) \circ F^{-1} \\ &= (Y((f \circ F) \circ F^{-1})) \circ F^{-1} \\ &= Y(f) = (\nabla f) \cdot Y \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(\tilde{M}), \end{aligned}$$

e quindi la 1).

2) Sia  $(E_1, E_2)$  base ortonormale (locale) per  $\mathfrak{X}(M)$ , e quindi  $(F_* E_1, F_* E_2)$  base ortonormale (locale) per  $\mathfrak{X}(\tilde{M})$ . Allora, tenendo conto che  $F^{-1}$  è una isometria e che la connessione di Levi-Civita è invariante per isometrie, ossia

usando la (5.32), si ha

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(F_*X) &= \operatorname{tr}(\tilde{\nabla}F_*X) = \sum_{i=1}^2 (\tilde{\nabla}_{F_*E_i}F_*X) \cdot F_*E_i \\
 &= \left( \left( \sum_{i=1}^2 F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*E_i}F_*X \right) \cdot E_i \right) \circ F^{-1} \\
 &= \left( \left( \sum_{i=1}^2 \nabla_{E_i}X \right) \cdot E_i \right) \circ F^{-1} \\
 &= (\operatorname{div}X) \circ F^{-1}.
 \end{aligned}$$

3) Applicando la 1) e la 2), si ottiene

$$\begin{aligned}
 \Delta(f \circ F) &= \operatorname{div}\nabla(f \circ F) = \operatorname{div}(F_*^{-1}\nabla f) \\
 &= (\operatorname{div}\nabla f) \circ F \\
 &= (\Delta f) \circ F.
 \end{aligned}$$

□

**Esercizio 5.59.** Siano  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ ,  $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Si verifichino le seguenti proprietà.

- 1)  $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}X + (\nabla f) \cdot X$ ;
- 2)  $\nabla(f_1f_2) = f_1\nabla f_2 + f_2\nabla f_1$ ;
- 3)  $\Delta(f_1f_2) = f_1\Delta f_2 + f_2\Delta f_1 + 2(\nabla f_1) \cdot (\nabla f_2)$ .

**Hessiano di una funzione.** L'hessiano di una funzione  $f \in \mathcal{F}(M)$ , che si indica con  $\operatorname{Hess}f$ , è definito come la derivata covariante seconda di  $f$ . Più precisamente,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Hess}f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathcal{F}(M), (X, Y) \mapsto (\operatorname{Hess}f)(X, Y), \text{ dove} \\
 (\operatorname{Hess}f)(X, Y) &:= \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y} f = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f.
 \end{aligned}$$

Dalla simmetria della connessione di Levi-Civita segue la simmetria di  $\operatorname{Hess}f$ :

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{Hess}f)(X, Y) - (\operatorname{Hess}f)(Y, X) &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f \\
 &\quad - Y(X(f)) + (\nabla_Y X)f \\
 &= [X, Y](f) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)f \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Le sue componenti

$$(\operatorname{Hess}f)(\partial_i, \partial_j) = \partial_i \partial_j f - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \partial_k f.$$

Da  $Y(f) = (\nabla f) \cdot Y$  segue che

$$\begin{aligned}
 XY(f) &= X((\nabla f) \cdot Y) = (\nabla_X \nabla f) \cdot Y + \nabla f \cdot (\nabla_X Y) \\
 &= (\nabla_X \nabla f) \cdot Y + (\nabla_X Y)(f)
 \end{aligned}$$

e quindi

$$(5.43) \quad (Hessf)(X, Y) = (\nabla_X \nabla f) \cdot Y.$$

Un'importante proprietà dell'hessiano è che la sua traccia è esattamente l'operatore di Laplace-Beltrami:

$$\Delta f = \text{tr}(Hessf).$$

Infatti, fissata una base ortonormale (locale)  $(E_1, E_2)$  di  $\mathfrak{X}(M)$ , usando la (5.43), si ha

$$\begin{aligned} \text{tr}(Hessf) &= \sum_{i=1}^2 (Hessf)(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^2 (\nabla_{E_i} \nabla f) \cdot E_i \\ &= \text{tr} \nabla f = \text{div} \nabla f \\ &= \Delta f. \end{aligned}$$

Infine, osserviamo che tutti i concetti esposti in questa sezione si possono estendere facilmente al caso di una varietà riemanniana di dimensione  $n$ . Per approfondimenti sull'operatore di Laplace-Beltrami, e in particolare sulla geometria spettrale dello stesso operatore, su una varietà riemanniana compatta, si consiglia [M. Berger, P. Gauduchon e E. Mazet, Le spectre d'une variété Riemannienne, Lect. Notes Math., vol. 194, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1971].

### 5.7. Curvatura gaussiana e tensore di curvatura

Scopo di questa sezione è esprimere la curvatura gaussiana di una superficie in termini del tensore di curvatura associato alla connessione di Levi-Civita (tensore che si esprime con la derivata covariante seconda). Quindi, un altro modo per vedere che la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie.

Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Indichiamo con  $N$  un campo unitario normale alla superficie che come sappiamo, in generale, è definito solo localmente. Siano  $p$  un punto di  $M$  ed  $S$  l'operatore forma in  $p$ . Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , il campo vettoriale  $S(X)$  è definito da (cf. anche Osservazione 4.3)

$$S(X)(p) := S(X_p) = -\bar{\nabla}_{X_p} N = -(\bar{\nabla}_X N)_p, \quad \text{ovvero} \quad SX = -\bar{\nabla}_X N,$$

dove  $N$  è pensato definito in un intorno del punto  $p$  in  $\mathbb{R}^3$ ,  $p \in M$ . Se  $\{X_p, Y_p\}$  è una base arbitraria di  $T_p M$ , applicando la stessa dimostrazione del punto (a) del Teorema 4.7, si ha che la matrice che rappresenta l'operatore forma  $S$  rispetto alla base  $\{X_p, Y_p\}$  è data da

$$S = \begin{pmatrix} X_p \cdot X_p & X_p \cdot Y_p \\ X_p \cdot Y_p & Y_p \cdot Y_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (SX_p) \cdot X_p & (SY_p) \cdot X_p \\ (SX_p) \cdot Y_p & (SY_p) \cdot Y_p \end{pmatrix}.$$

Quindi la curvatura gaussiana  $K(p)$  è data da

$$(5.44) \quad K(p) = \det S = \frac{((SX_p) \cdot X_p)((SY_p) \cdot Y_p) - ((SX_p) \cdot Y_p)^2}{\|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - (X_p \cdot Y_p)^2}.$$

Osserviamo che la quantità

$$A(X_p, Y_p) := \|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - (X_p \cdot Y_p)^2 = \|X_p \wedge Y_p\|^2$$

è il quadrato dell'area del parallelogramma costruito sui vettori  $X_p, Y_p$ .

Ricordiamo che la connessione di Levi-Civita della superficie  $M$  è la componente tangente dell'equazione di Gauss (5.28)

$$(\bar{\nabla}_X Y) = (\nabla_X Y) + ((SX) \cdot Y)N,$$

ovvero per ogni  $p \in M$ :

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + ((SX_p) \cdot Y_p)N_p.$$

Ricordiamo che un tensore  $T$  di tipo  $(1, 3)$  su  $M$  è definito come un'applicazione

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y, Z) \mapsto T(X, Y, Z),$$

$\mathcal{F}(M)$ -lineare in  $X, Y, Z$ . Un tensore di tipo  $(0, 4)$  su  $M$  è definito come un'applicazione

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), \quad (X, Y, Z, V) \mapsto T(X, Y, Z, V),$$

$\mathcal{F}(M)$ -lineare in  $X, Y, Z, V$ .

**Definizione 5.60.** *Il tensore di curvatura associato alla connessione di Levi-Civita  $\nabla$  della superficie  $M$  è il tensore  $R$  di tipo  $(1, 3)$  definito da*

$$R(X, Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Verifichiamo che  $R$  è effettivamente un tensore, cioè un'applicazione  $\mathcal{F}(M)$ -lineare in  $X, Y, Z$ . Intanto osserviamo che la connessione lineare euclidea di  $\mathbb{R}^n$ , e quindi anche di  $\mathbb{R}^3$ , soddisfa

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \bar{\nabla}_X (Y(Z^1), \dots, Y(Z^n)) = (X(Y(Z^1)), \dots, X(Y(Z^n))) \\ \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z &= \bar{\nabla}_Y (X(Z^1), \dots, X(Z^n)) = (Y(X(Z^1)), \dots, Y(X(Z^n))) \\ \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z &= ([X, Y](Z^1), \dots, [X, Y](Z^n)) \\ &= (X(Y(Z^1)) - Y(X(Z^1)), \dots, X(Y(Z^n)) - Y(X(Z^n))). \end{aligned}$$

Quindi,

$$(5.45) \quad -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z = 0.$$

D'altronde, calcolando la derivata covariante seconda usando  $SX = -\bar{\nabla}_X N$  e l'equazione di Gauss, si ottiene

$$\begin{aligned} -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= -\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + (S(Y) \cdot Z)N) \\ &= -\nabla_X \nabla_Y Z - (S(X) \cdot \nabla_Y Z)N \\ &\quad - X((SY) \cdot Z)N - ((SY) \cdot Z)\bar{\nabla}_X N \\ &= -\nabla_X \nabla_Y Z + ((SY) \cdot Z)S(X) - ((SX) \cdot \nabla_Y Z + X((SY) \cdot Z))N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z &= \bar{\nabla}_Y \left( \nabla_X Z + (S(X) \cdot Z)N \right) \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z + (S(Y) \cdot \nabla_X Z)N + Y(S(X) \cdot Z)N + (S(X) \cdot Z) \bar{\nabla}_Y N \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z - (S(X) \cdot Z)S(Y) + \left( S(Y) \cdot \nabla_X Z + Y(S(X) \cdot Z) \right)N, \\
\bar{\nabla}_{[X,Y]} Z &= \nabla_{[X,Y]} Z + S([X, Y]) \cdot Z)N.
\end{aligned}$$

Sostituendo queste formule nella (5.45), separando la componente tangente e ponendola uguale a zero si ottiene

$$-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z = (S(X) \cdot Z)SY - (S(Y) \cdot Z)SX,$$

quindi otteniamo

$$(5.46) \quad R(X, Y)Z = (S(X) \cdot Z)SY - (S(Y) \cdot Z)SX,$$

e in un fissato punto  $p$  abbiamo

$$R(X_p, Y_p)Z_p = (S(X_p) \cdot Z_p)SY_p - (S(Y_p) \cdot Z_p)SX_p.$$

L'espressione alla destra della (5.46) è  $\mathcal{F}(M)$ -lineare in  $X, Y, Z$ , pertanto definisce un tensore di tipo  $(1, 3)$  su  $M$ . In particolare, dalla (5.46) abbiamo

$$R(X, Y)X = ((SX) \cdot X)SY - ((SY) \cdot X)SX$$

e quindi

$$(5.47) \quad (R(X, Y)X) \cdot Y = ((SX) \cdot X)((SY) \cdot Y) - ((SY) \cdot X)((SX) \cdot Y).$$

La (5.47) e la (5.44) implicano che la curvatura gaussiana si può esprimere con la seguente formula

$$(5.48) \quad K(p) = \frac{(R(X_p, Y_p)X_p) \cdot Y_p}{A(X_p, Y_p)}.$$

Si noti che l'espressione alla destra della (5.48) non dipende dalla base scelta in  $T_p M$ , e quindi se  $E_1, E_2$  è una base ortonormale di  $T_p M$  si ha

$$K(p) = (R(E_1, E_2)E_1) \cdot E_2.$$

Inoltre, siccome la connessione  $\nabla$  è invariante per isometrie (cf. (5.32)), dalla (5.48) si ottiene che la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie (*Teorema egregium di Gauss*).

Il tensore di curvatura  $R$  di tipo  $(0, 4)$ , detto anche **tensore di curvatura di Riemann** della superficie  $M$ , è definito da

$$R(X, Y, Z, W) := (R(X, Y)Z) \cdot W).$$

Ovviamente è anche definito il tensore di curvatura di tipo  $(0, 4)$  in un fissato punto  $p$  di  $M$ , basta porre

$$R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) := (R(X_p, Y_p)Z_p) \cdot W_p).$$

**Proposizione 5.61.** *Il tensore di curvatura  $R$  soddisfa le seguenti proprietà:*

- 1)  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$  e quindi  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$ ,
- 2)  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$
- 3)  $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ ,
- 4)  $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$  (1<sup>a</sup> identità di Bianchi).

**DIMOSTRAZIONE.** La 1) segue direttamente dalla definizione di  $R(X, Y)Z$ . La 2) segue dalla (5.46) tenendo conto che l'operatore  $S$  è simmetrico. La 3) si può ottenere come conseguenza della 1) e della 2). La 4) si ottiene con un calcolo diretto usando la (5.46) e la simmetria dell'operatore  $S$ .  $\square$

Osserviamo che per la sfera  $\mathbb{S}^2$  di raggio  $r$ , l'operatore forma  $S = -(1/r)I$  e quindi il tensore di curvatura assume la seguente semplice forma

$$R(X, Y)Z = K_0((X \cdot Z)Y - (Y \cdot Z)X)$$

dove  $K_0 = (1/r^2)$  è la curvatura gaussiana della sfera. Più in generale, vale il seguente

**Teorema 5.62.** *Per ogni superficie regolare  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  il tensore di curvatura è dato da*

$$R(X, Y)Z = K((X \cdot Z)Y - (Y \cdot Z)X),$$

dove  $K$  è la funzione curvatura gaussiana della superficie.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $R_0$  il tensore di tipo (1, 3) definito da

$$R_0(X, Y)Z = ((X \cdot Z)Y - (Y \cdot Z)X).$$

Proviamo che  $R = KR_0$ , ovvero  $R = K(p)R_0$  in ogni fissato punto  $p$  di  $M$ . Sia  $(e_1, e_2)$  una base ortonormale di vettori principali in  $p$ , quindi

$$S(e_1) = k_1(p)e_1 \quad \text{e} \quad S(e_2) = k_2(p)e_2,$$

dove  $k_1(p), k_2(p)$  sono le curvatures principali in  $p$ . Siccome  $R$  e  $K(p)R_0$  sono due tensori, per dimostrare che coincidono basta verificare che

$$R(e_i, e_j)W = K(p)R_0(e_i, e_j)W \quad \text{per ogni } i, j = 1, 2 \text{ e per ogni } W \in T_pM.$$

Dalla 1) della Proposizione 5.61, si ha

$$R(e_i, e_i)W = 0 \quad \text{e} \quad R(e_1, e_2)W = -R(e_2, e_1)W.$$

Inoltre, dalla definizione di  $R_0$  si ha

$$R_0(e_i, e_i)W = 0 \quad \text{e} \quad R_0(e_1, e_2)W = -R_0(e_2, e_1)W.$$

Quindi, basta verificare che  $R(e_1, e_2)W = K(p)R_0(e_1, e_2)W$ . Applicando la (5.46) e la definizioni di  $R_0$ , abbiamo

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)W &= ((Se_1) \cdot W)Se_2 - ((Se_2) \cdot W)Se_1 \\ &= k_1(p)k_2(p)((e_1 \cdot W)e_2 - (e_2 \cdot W)e_1) \\ &= K(p)((e_1 \cdot W)e_2 - (e_2 \cdot W)e_1) \\ &= K(p)R_0(e_1, e_2)W. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 5.63.** Fissata una base ortonormale  $(e_1, e_2)$  di  $T_pM$ , indichiamo con  $J_0$  la struttura complessa di  $T_pM$  definita da  $J_0e_1 = e_2$  e  $J_0e_2 = -e_1$ , quindi una rotazione di  $90^0$ . Osserviamo che il tensore  $R_0$  soddisfa

$$R_0(e_1, e_2) = J_0.$$

Infatti,  $R_0(e_1, e_2) : T_pM \rightarrow T_pM, w_p \mapsto R_0(e_1, e_2)w_p$ , è un endomorfismo e

$$R_0(e_1, e_2)w_p = ((e_1 \cdot w_p)e_2 - (e_2 \cdot w_p)e_1) = J_0(w_p).$$

Infine, vogliamo definire la **derivata covariante seconda**  $\nabla^2 Z$  di un fissato  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Se  $T$  è un tensore di tipo  $(1, 1)$ , ossia un endomorfismo di  $\mathfrak{X}(M)$ ,  $\nabla T$  denota il tensore di tipo  $(1, 2)$  definito da

$$(\nabla T)(X, Y) = (\nabla_X T)Y := \nabla_X TY - T(\nabla_X Y).$$

Fissato  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\nabla Z : X \mapsto \nabla_X Z$  si può pensare come un tensore di tipo  $(1, 1)$  su  $M$ . Pertanto, la derivata covariante seconda di  $Z$  è definita da

$$(\nabla^2 Z)(X, Y) = \nabla_{X,Y}^2 Z := (\nabla_X \nabla Z)(Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .  $\nabla^2 Z$  è un tensore di tipo  $(1, 2)$  su  $M$ , ossia è  $\mathcal{F}(M)$ -lineare in  $X, Y$ . Siccome  $\nabla$  è simmetrica, otteniamo:

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z = -\nabla_{X, Y}^2 Z + \nabla_{Y, X}^2 Z.$$

Quindi,  $R(X, Y)Z$  è la parte antisimmetrica del tensore  $\nabla^2 Z$ . Pertanto, abbiamo

**Proposizione 5.64.** *Il tensore di curvatura  $R$  stima la non invertibilità della derivata covariante seconda di un campo di vettori.*

**Osservazione 5.65.** La presentazione intrinseca della curvatura gaussiana fatta in questa sezione si presta in modo naturale ad essere generalizzata in dimensione arbitraria e a introdurre quindi il concetto di curvatura sezionale per le varietà riemanniane di dimensione  $n$ . Si noti che, in dimensione  $n > 2$ , il tensore di curvatura di Riemann  $R$  associato alla varietà riemanniana è un oggetto analitico in generale non facile da maneggiare.

### 5.8. Esempi di curve geodetiche

In questa sezione determiniamo le curve geodetiche di alcune superfici più significative. Iniziamo con le seguenti proposizioni.

**Proposizione 5.66.** *Sia  $M$  una superficie regolare. Se il sostegno  $\sigma(I)$  di una curva differenziabile  $\sigma : I \rightarrow M$  è il luogo dei punti fissi di un'isometria  $f$  di  $M$ , cioè  $\sigma(I) = \{p \in M : f(p) = p\}$ , allora  $\sigma$  (opportunamente parametrizzata) è una curva geodetica di  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $p \in \sigma(I)$ ,  $p = \sigma(t_0)$ . Posto  $V_0 = \dot{\sigma}(t_0)$ , per il Teorema di esistenza e unicità delle geodetiche, esiste un'unica geodetica  $\gamma(s)$ ,  $s \in ]-\delta, +\delta[$ , tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_0$ . Poiché  $f$  è una isometria,  $\gamma_1 = f \circ \gamma$  è una geodetica con  $\gamma_1(0) = f(\gamma(0)) = f(p) = p$  e  $\dot{\gamma}_1(0) = (f \circ \gamma)'(0) = (f_*)_p \dot{\gamma}(0) = (f_*)_p \dot{\sigma}(t_0) = (f \circ \sigma)'(t_0) = \dot{\sigma}(t_0) = V_0$ . Dunque, per l'unicità della geodetica  $\gamma$  con le fissate condizioni iniziali, avremo  $(f \circ \gamma)(s) = \gamma(s)$  per ogni  $s \in ]-\delta, +\delta[$  e quindi  $\gamma(] - \delta, +\delta[) \subset \sigma(I)$ . Ciò prova che  $\sigma$  è una geodetica in un intorno di  $p$  e quindi, per l'arbitrarietà di  $p$ ,  $\sigma$  è una geodetica (come insieme di punti).  $\square$

**Proposizione 5.67.** *Sia  $M : \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  una superficie regolare. Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- a) *la curva delle  $u$  ( $v = v_0$ ) è una curva geodetica;*
- b) *la componente tangente  $(\varphi_{uu})^\top = 0$ ;*
- c)  *$\nabla_{\varphi_u} \varphi_u = 0$  (ovvero,  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$ ).*

*Analoghe proprietà valgono per caratterizzare le curve delle  $v$  come curve geodetiche (basta sostituire  $\varphi_u$  con  $\varphi_v$ , e  $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$  con  $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** La curva delle  $u$  definita da  $v = v_0(\text{cost.})$  si parametrizza con  $u(t) = t, v(t) = v_0$ . Pertanto le equazioni (5.22) che caratterizzano le geodetiche, in questo caso, si riducono a  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$ . D'altronde,

$$(\varphi_{uu})^\top = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v.$$

In modo analogo si procede per le curve delle  $v$ .  $\square$

**Esercizio 5.68.** Determinare le isometrie del piano euclideo per le quali è possibile applicare la Proposizione 5.66.

**Osservazione 5.69.** Ricordiamo che la nozione di curva geodetica è chiaramente di natura locale, quindi anche le isometrie locali trasformano geodetiche in geodetiche.

#### Esempio 5.70. Piano euclideo

Le geodetiche di un piano (euclideo) di  $\mathbb{R}^3$  sono tutte e sole le rette (opportunamente parametrizzate) o segmenti di retta di tale piano. Infatti, in questo caso  $\gamma(t)$  come curva di  $\mathbb{R}^3$  è data da  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , e la derivata covariante

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \ddot{\gamma}(t)$$

e quindi:

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0 \Leftrightarrow (x_1''(t), x_2''(t), x_3''(t)) = 0 \Leftrightarrow \gamma(t) = tv + x_0.$$

**Esempio 5.71. Piano euclideo in coordinate polari**

Consideriamo il piano euclideo  $\mathbb{R}^2$  privato del semiasse positivo delle  $x$ . Ricordiamo che rispetto alle coordinate cartesiane  $(u, v) = (x, y)$  i coefficienti della prima forma fondamentale  $\mathcal{I}$  sono  $E = G = 1$  ed  $F = 0$ . Consideriamo adesso come nuove coordinate le coordinate polari  $(\bar{u}, \bar{v}) = (\varrho, \vartheta)$  definite da

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta, \quad \varrho > 0, \quad \vartheta \in ]0, 2\pi[.$$

Vogliamo determinare le equazioni differenziali delle geodetiche rispetto alle coordinate polari. In questo caso la matrice (3.13) del cambiamento di parametri

$$J_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Pertanto, indicati con  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  i coefficienti di  $\mathcal{I}$  rispetto alla parametrizzazione delle coordinate polari, applicando la (3.20) si ha :

$$\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\varrho \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, dalla (4.5) segue che i coefficienti di Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ , non nulli sono

$$(5.49) \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = (1/\varrho) \quad \text{e} \quad \Gamma_{22}^1 = -\varrho.$$

Ora sia  $\gamma(t) = (\varrho(t), \vartheta(t))$  una curva parametrizzata a velocità unitaria, quindi

$$(5.50) \quad (\varrho')^2 + \varrho^2(\vartheta')^2 = 1.$$

Usando il sistema (5.22), tenendo conto della (5.49), si ha che  $\gamma(t)$  è una curva geodetica se e solo se

$$(5.51) \quad \varrho'' - \varrho(\vartheta')^2 = 0$$

$$(5.52) \quad \varrho \vartheta'' + 2\varrho' \vartheta' = 0.$$

Si vede facilmente che la (5.52) è equivalente alla

$$(5.53) \quad \varrho^2 \vartheta' = c_0 \text{ (costante),}$$

e quindi

$$\varrho^2 (\vartheta')^2 = \frac{c_0^2}{\varrho^2}.$$

Sostituendo quest'ultima nella (5.50), si ha

$$(\varrho')^2 = 1 - \frac{c_0^2}{\varrho^2}.$$

Quindi

$$(5.54) \quad \varrho' = \pm \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\varrho^2}}.$$

Si noti che la (5.51), sostituendo la (5.53), diventa  $\varrho'' - c_0^2/\varrho^3 = 0$  che è identicamente soddisfatta come conseguenza della (5.54), pertanto la (5.51) si può tralasciare. Dalla (5.53), e dalla (5.54) col segno positivo, abbiamo

$$(5.55) \quad \frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{c_0}{\varrho^2 \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\varrho^2}}}$$

Integrando si ottiene

$$\vartheta = \vartheta_0 + \arccos \frac{c_0}{\varrho}, \quad \text{e quindi} \quad \cos(\vartheta - \vartheta_0) = \frac{c_0}{\varrho}$$

che è (ovviamente) l'equazione di una retta in coordinate polari (cf. Figura 2).

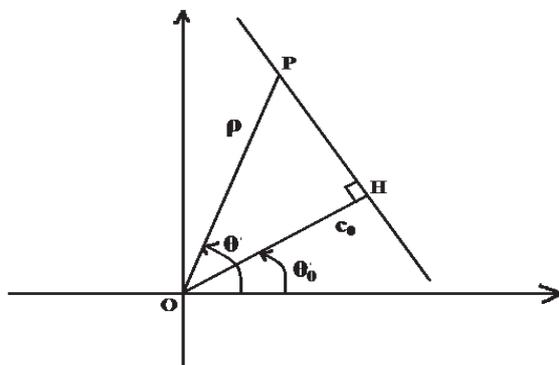


FIGURA 2. Retta di equazione  $\cos(\theta - \theta_0) = \frac{OH}{OP} = \frac{c_0}{\rho}$ .

D'altronde, sviluppando il coseno si ha

$$\varrho \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \varrho \sin \vartheta \sin \vartheta_0 = c_0$$

e sostituendo le coordinate  $x = \varrho \cos \vartheta$  e  $y = \varrho \sin \vartheta$ , si ottiene la stessa retta con equazione cartesiana  $(\cos \vartheta_0)x + (\sin \vartheta_0)y = c_0$ .

### Esempio 5.72. Sfera canonica $\mathbb{S}^2$

Le geodetiche massimali della sfera canonica  $\mathbb{S}^2$  sono tutte e sole le circonferenze (opportunamente parametrizzate) di raggio massimo.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathbb{S}^2$  la sfera di centro l'origine  $O$  e raggio  $R$ . Sia  $\sigma$  una circonferenza di raggio massimo di  $\mathbb{S}^2$  e sia  $E$  il piano per il centro  $O$  e contenente  $\sigma$ . Consideriamo due vettori  $V_1, V_2$  unitari e ortogonali del piano  $E$  applicati in  $O$ . Allora, si può scrivere

$$\sigma(t) = R(\cos t)V_1 + R(\sin t)V_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi,  $\dot{\sigma}(t) = R(-\sin t)V_1 + R(\cos t)V_2$ , e

$$\frac{d\dot{\sigma}}{dt} = \ddot{\sigma}(t) = R(-\cos t)V_1 + R(-\sin t)V_2 = -\sigma(t) = -RN_\sigma(t)$$

è ortogonale a  $T_{\sigma(t)}\mathbb{S}^2 = \sigma(t)^\perp$ , per cui

$$\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = (\ddot{\sigma}(t))^\top = 0.$$

Pertanto, le circonferenze di raggio massimo sono curve geodetiche per  $\mathbb{S}^2$ .

Viceversa, sia  $\gamma(t)$  un arco geodetico, parametrizzato a velocità unitaria, con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_p$ . Allora,  $V_1 = (1/R)p$  e  $V_2 = V_p$ , pensati come vettori applicati nell'origine (centro della sfera), sono ortonormali e la curva

$$\sigma(t) = R(\cos \frac{t}{R})V_1 + R(\sin \frac{t}{R})V_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

è una circonferenza di raggio massimo della sfera  $\mathbb{S}^2$  che soddisfa le condizioni  $\sigma(0) = p$  e  $\dot{\sigma}(0) = V_p$ . Pertanto, per l'unicità delle curve geodetiche con fissate condizioni iniziali, l'arco di curva  $\gamma$  sarà contenuto nella circonferenza  $\sigma$ .

Un altro metodo per vedere che le circonferenze di raggio massimo sono curve geodetiche di  $\mathbb{S}^2$  è il seguente. Sia  $\sigma$  una circonferenza di raggio massimo di  $\mathbb{S}^2$  e sia  $E$  il piano per il centro  $O$  di  $\mathbb{S}^2$  tale che  $\sigma = E \cap \mathbb{S}^2$ . Consideriamo la riflessione  $\Phi$  di  $\mathbb{R}^3$  rispetto al piano  $E$ :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 = E \oplus E^\perp &\longrightarrow \mathbb{R}^3 = E \oplus E^\perp \\ x = x_E + x_{E^\perp} &\longmapsto \Phi(x) = x_E - x_{E^\perp}. \end{aligned}$$

$\Phi$  è una trasformazione ortogonale di  $\mathbb{R}^3$ . Quindi, per il Teorema 5.13,  $\phi = \Phi|_{\mathbb{S}^2}$  è una isometria di  $\mathbb{S}^2$ . D'altronde il piano  $E$  è l'autospazio di  $\Phi$  relativo all'autovalore  $+1$ . Pertanto, applicando la Proposizione 5.66, la circonferenza

$$\sigma = \mathbb{S}^2 \cap E = \{x \in \mathbb{S}^2 : x \in E\} = \{x \in \mathbb{S}^2 : \phi(x) = x\}$$

è una curva geodetica.  $\square$

### Esempio 5.73. Cilindro circolare retto

Consideriamo il cilindro circolare retto  $M : x^2 + y^2 = 1$ . Questo è un caso particolare dell'Esempio 3.15, ottenuto con  $f(u) = 1$  e  $g(u) = u$ , pertanto una parametrizzazione locale di  $M$  è  $\varphi(u, v) = (\cos v, \sin v, u)$ . Siccome i coefficienti di Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  sono tutti nulli (cf. Esempio 4.10), dal sistema (5.22) segue che una curva  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  di  $M$  è una curva geodetica se e solo se sono soddisfatte le equazioni

$$u''(t) = 0 \quad \text{e} \quad v''(t) = 0.$$

Quindi le geodetiche del cilindro  $M$  sono tutte e sole le curve del tipo

$$\gamma(t) = (\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d), \quad t \in \mathbb{R},$$

dove  $a, b, c, d$  sono costanti.

- Se  $a = c = 0$ , la curva si riduce a un punto (geodetica banale).
- Se  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$ , allora  $\gamma(t)$  è un'elica circolare.
- Se  $a = 0$  ( e  $c \neq 0$ ), allora  $\gamma(t)$  è una retta generatrice (un meridiano).
- Se  $c = 0$  ( e  $a \neq 0$ ), allora  $\gamma(t)$  è una circonferenza (un parallelo).

#### Esempio 5.74. Cilindro retto su una curva piana

Sia  $\gamma(u)$ ,  $u \in I$  (intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ), una curva semplice regolare piana, parametrizzata a velocità unitaria, e sia  $V_0$  un vettore unitario di  $\mathbb{R}^3$  ortogonale al piano di  $\gamma$ . Sia  $M$  il *cilindro generalizzato* avente  $\gamma$  come curva direttrice e generatrici parallele a  $V_0$ . Un tale cilindro è detto *cilindro retto su una curva piana*. Allora,  $M$  è una superficie regolare e *le sue curve geodetiche sono tutte e sole le curve  $\sigma(t)$  parametrizzate a velocità costante che formano un angolo costante con  $V_0$ , ovvero le curve che sono eliche cilindriche (cf. Definizione 2.39) dette anche curve di Lancret.*

DIMOSTRAZIONE. Intanto, per quanto osservato nell'Esempio 3.18 e nell'Esercizio 3.21 segue che  $M$  è una superficie regolare parametrizzata da

$$(5.56) \quad \varphi(u, v) = \gamma(u) + v V_0, \quad (u, v) \in D = I \times \mathbb{R}.$$

Dalla (5.56) segue che  $\varphi_u = \dot{\gamma}(u)$  e  $\varphi_v = V_0$ . Inoltre,  $\gamma(u) \cdot V_0$  è costante (in quanto  $\gamma$  è contenuta in un piano ortogonale a  $V_0$ ). Allora,

$$E = \|\dot{\gamma}(u)\|^2 = 1, \quad F = \dot{\gamma}(u) \cdot V_0 = 0, \quad G = \|V_0\|^2 = 1,$$

e quindi dalla (4.5) segue che tutti i coefficienti di Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  sono nulli. Sia ora  $\sigma(t)$  una curva di  $M$  parametrizzata a velocità costante, quindi

$$\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t)) = \gamma(u(t)) + v(t) V_0, \quad \dot{\sigma}(t) = u'(t)\dot{\gamma}(u) + v'(t)V_0.$$

Applicando la (5.22), la curva  $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  è geodetica se e solo se sono soddisfatte le equazioni  $u''(t) = 0$  e  $v''(t) = 0$ , ossia le funzioni

$$u'(t) \quad \text{e} \quad v'(t) \quad \text{sono costanti.}$$

D'altronde,  $(u')^2 + (v')^2 = \|\dot{\sigma}(t)\|^2 = c^2$  ( $c > 0$  costante), per cui

$$(*) \quad \text{la curva } \sigma(t) = \varphi(u(t), v(t)) \text{ è geodetica se e solo se } v' \text{ è costante.}$$

Inoltre,

$$\dot{\sigma}(t) \cdot V_0 = (u'\dot{\gamma}(u) + v'V_0) \cdot V_0 = v'$$

e

$$\dot{\sigma}(t) \cdot V_0 = \|\dot{\sigma}(t)\| \cos \vartheta(t) = c \cos \vartheta(t),$$

dove  $\vartheta(t)$  è l'angolo convesso tra la curva  $\dot{\sigma}(t)$  e  $V_0$ . Pertanto, dalla (\*) segue che la curva  $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  è geodetica se e solo se  $\vartheta(t)$  è costante.  $\square$

**Esempio 5.75. Superficie di rotazione**

Consideriamo una superficie di rotazione  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  ottenuta ruotando una curva regolare piana semplice  $\gamma$  intorno ad un asse del piano della curva e che non intersechi la stessa curva. Supponiamo che il piano di  $\gamma$  sia il piano  $xz$ , l'asse di rotazione sia l'asse  $z$  e la curva  $\gamma$  sia parametrizzata da  $x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u), u$  ascissa curvilinea, pertanto  $M$  (ottenuta ruotando  $\gamma$  intorno all'asse  $z$ ) ha equazioni parametriche  $x = f(u)\cos v, y = f(u)\sin v, z = g(u)$  (cf. Esempio 3.15). Sia  $\varphi(u, v)$  la corrispondente parametrizzazione locale di  $M$ . Sappiamo che i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da (cf. Esempio 3.67)

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = f^2(u).$$

Inoltre, il campo normale ad  $M$  è dato da

$$(5.57) \quad N = (-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u)).$$

Per le curve geodetiche della suddetta superficie di rotazione  $M$  abbiamo quanto segue.

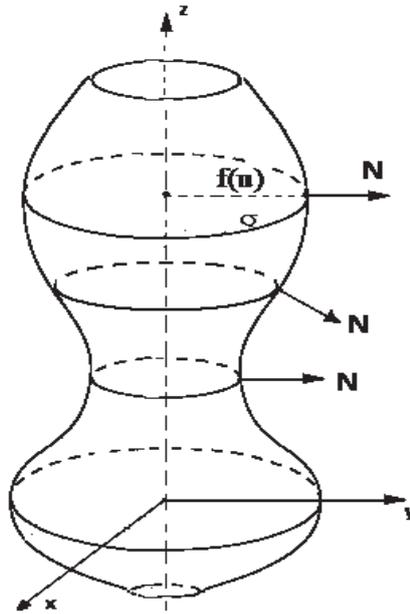


FIGURA 3. Geodetiche su una superficie di rotazione.

- 1) Se  $\sigma(t)$  è un parallelo (ossia  $u = u_0$ ), allora  $\sigma(t)$  è una curva geodetica se e solo se il campo normale  $N_{\sigma(t)}$  è ortogonale all'asse di rotazione, equivalentemente  $u_0$  è un punto critico per la funzione  $f(u)$ .

- 2) Sia  $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  una curva regolare di  $M$  parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Se  $\sigma(t)$  è una curva geodetica, allora è soddisfatta la

seguinte equazione differenziale:

$$(5.58) \quad f^2(u(t))v'(t) = c,$$

dove  $c$  è una costante associata alla geodetica. Se  $\sigma(t)$  non è un parallelo, allora vale anche il viceversa. Inoltre, la costante  $c = 0$  se e solo se  $\sigma(t)$  è un meridiano. In particolare, ogni meridiano (ossia  $v = v_0$ ) è una curva geodetica.

- 3) Per ogni curva geodetica  $\sigma(t)$  vale la relazione di Clairaut

$$f(u(t))\operatorname{sen} \vartheta(t) = c,$$

dove  $\vartheta(t)$  è l'angolo convesso tra  $\dot{\sigma}(t)$  e il meridiano per  $\sigma(t)$ . Se  $\sigma(t)$  è un meridiano, si ha  $\vartheta = 0$  e  $c = 0$ . Se  $\sigma(t)$  è un parallelo, si ha  $\vartheta = \pi/2$  e  $f(u) = c$  è il raggio del parallelo. Viceversa, se  $\sigma(t)$  non è un parallelo e soddisfa la relazione di Clairaut, allora  $\sigma(t)$  è una curva geodetica.

DIMOSTRAZIONE. Dall'Esempio 4.10 sappiamo che i coefficienti di Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  di  $M$  sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -f(u)f'(u), \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{f'(u)}{f(u)}.$$

Dunque, per una curva  $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  di  $M$  la (5.21) diventa

$$(5.59) \quad \frac{D\dot{\sigma}}{dt} = (u'' - f(u)f'(u)(v')^2)(t)\varphi_u(t) + (v'' + 2\frac{f'(u)}{f(u)}u'v')(t)\varphi_v(t),$$

e quindi la curva  $\sigma(t)$  è una curva geodetica se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti equazioni differenziali:

$$(5.60) \quad u''(t) - f(u)f'(u)(v'(t))^2 = 0, \quad v''(t) + 2\frac{f'(u)}{f(u)}u'(t)v'(t) = 0.$$

1) Sia  $\sigma(t)$ , con  $t$  ascissa curvilinea, un parallelo di  $M$ , cioè  $\sigma(t) = \varphi(u_0, v(t))$ . Allora,  $\dot{\sigma}(t) = (0, v'(t)) = v'(t)\varphi_v(t)$  e

$$1 = \dot{\sigma}(t) \cdot \dot{\sigma}(t) = f^2(u_0)(v'(t))^2 \text{ implica } (v'(t))^2 = 1/f^2(u_0) = \text{cost.},$$

da cui segue  $v''(t) = 0$ . Dunque la seconda equazione del sistema (5.60) è identicamente soddisfatta. Mentre la prima equazione diventa

$$f(u_0)f'(u_0)(v'(t))^2 = 0.$$

Siccome  $f(u_0) \neq 0$ , il parallelo  $\sigma(t)$  è una geodetica se e solo se  $f'(u_0) = 0$ . D'altronde, dalla (5.57) segue che  $f'(u_0) = 0$  se e solo se  $N_{\sigma(t)}$  (campo normale ad  $M$  in  $\sigma(t)$ ) è ortogonale all'asse di rotazione (cf. Figura 3).

2) Sia  $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  una curva di  $M$  parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Da

$$\begin{aligned} (f^2(u(t))v'(t))' &= 2f(u)f'(u)u'(t)v'(t) + f^2(u(t))v''(t) \\ &= f^2(u(t))(2\frac{f'(u)}{f(u)}u'(t)v'(t) + v''(t)), \end{aligned}$$

dove  $f^2(u) > 0$ , segue che  $f^2(u(t))v'(t)$  è cost. se e solo se

$$2(f'(u)/f(u))u'(t)v'(t) + v''(t) = 0.$$

Allora, se  $\sigma(t)$  è geodetica, dal sistema (5.60) abbiamo l'equazione differenziale (5.58).

Viceversa, assumiamo che  $\sigma(t)$  non sia un parallelo e sia soddisfatta la (5.58). Allora, vale la seconda equazione del sistema (5.60) in quanto, come visto prima, è equivalente all'equazione (5.58). Inoltre, derivando  $\|\dot{\sigma}(t)\| = 1$ , ossia  $(u'(t))^2 + f^2(t)(v'(t))^2 = 1$ , si ha

$$0 = 2u'u'' + 2f(u)f'(u)u'(v')^2 + 2f^2v'v''.$$

Da questa, usando la seconda equazione del sistema (5.60), ossia la

$$2(f'(u)/f(u))u'(t)v'(t) + v''(t) = 0,$$

si ha

$$\begin{aligned} 0 &= 2u'u'' + 2f(u)f'(u)u'(v')^2 - 2f^2(u)v' \left( 2 \frac{f'(u)}{f(u)} u'v' \right) \\ &= 2u' \left( u'' - f'(u)f(u)(v')^2 \right). \end{aligned}$$

Se fosse  $(u'' - f'(u)f(u)(v')^2)(t_0) \neq 0$  in qualche  $t_0$ , allora sarebbe  $u'(t) = 0$  in un intorno di  $t_0$  e quindi si avrebbe  $u(t) = u_0$  nello stesso intorno, per cui  $\sigma(t)$  dovrebbe essere un parallelo in un intorno di  $t_0$  che è una contraddizione. Pertanto, si ha  $u'' - f'(u)f(u)(v')^2 = 0$  ovvero la prima equazione della (5.60), e quindi  $\sigma(t)$  è una curva geodetica. Inoltre, da  $f^2(u(t))v'(t) = c$  segue che

$$\text{la costante } c = 0 \Leftrightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow v(t) = v_0 \Leftrightarrow \sigma(t) \text{ è un meridiano di } M.$$

Quindi, ogni meridiano  $\sigma(t) = \varphi(u(t), v_0)$ , con  $t$  ascissa curvilinea, soddisfa l'equazione (5.58) e quindi è una curva geodetica di  $M$ .

3) Proviamo che ogni curva geodetica  $\sigma(t)$  soddisfa la relazione di Clairaut. Siccome  $E = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = f^2(u)$ , allora  $E_1 = \varphi_u$  e  $E_2 = (1/f)\varphi_v$  è base ortonormale lungo  $\sigma$  e quindi possiamo scrivere

$$\dot{\sigma}(t) = \cos \vartheta(t)E_1 + \sin \vartheta(t)E_2,$$

dove  $\vartheta(t)$  è l'angolo convesso tra  $\dot{\sigma}(t)$  e  $\varphi_u$  (vettore tangente al meridiano per  $\sigma(t)$ ). Da

$$E_1 \wedge \dot{\sigma}(t) = E_1 \wedge (\cos \vartheta(t)E_1 + \sin \vartheta(t)E_2) = (1/f)\sin \vartheta(t)\varphi_u \wedge \varphi_v$$

e

$$E_1 \wedge \dot{\sigma}(t) = \varphi_u \wedge (u'\varphi_u + v'\varphi_v)(t) = (v'\varphi_u \wedge \varphi_v)(t),$$

si ottiene  $\sin \vartheta(t) = fv'(t)$  che con l'equazione (5.58) implica la relazione di Clairaut.

Viceversa, supponiamo che  $\sigma(t)$ , sempre con  $t$  ascissa curvilinea, soddisfi la relazione di Clairaut  $f \sin \vartheta = c$ . Procedendo come prima si ha  $\sin \vartheta(t) =$

$f v'(t)$ , e quindi la relazione di Clairaut implica la (5.58). Siccome,  $\sigma(t)$  non è un parallelo, dalla 2) segue che  $\sigma(t)$  è una curva geodetica.  $\square$

**Osservazione 5.76.** Sia  $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  una curva regolare della superficie di rotazione  $M$  considerata nell'Esempio 5.75. Assumiamo che  $\sigma(t)$  sia una curva geodetica parametrizzata con l'ascissa curvilinea, e quindi abbiamo  $\|\dot{\sigma}(t)\| = 1$  e la (5.58). Allora è soddisfatto il sistema di equazioni differenziali:

$$(*) \quad (u'(t))^2 + f^2(u(t))(v'(t))^2 = 1, \quad f^2(u(t))v'(t) = c.$$

Assumiamo inoltre che  $\sigma$  non sia un meridiano, quindi la costante  $c \neq 0$ . Cambiando parametrizzazione, se necessario, possiamo assumere  $v'(t) > 0$  e quindi  $c > 0$ . Dal sistema (\*) segue

$$\begin{aligned} (u'(t))^2 &= 1 - f^2(u(t))(v'(t))^2 = 1 - f^2(u(t))c^2/f^4(u(t)) \\ &= (f^2(u(t)) - c^2)/f^2(u(t)). \end{aligned}$$

Quindi, deve essere

$$f(u(t)) \geq c, \quad \text{per ogni } t.$$

Ciò significa che la geodetica si trova nella parte di superficie i cui punti sono a distanza  $\geq c$  dall'asse.

### Esempio 5.77. Superficie torica

La superficie torica è una superficie di rotazione e quindi valgono i risultati dell'Esempio 5.75. In particolare, un meridiano è costituito da due circonferenze che saranno quindi geodetiche; tra i paralleli solo quello di raggio massimo e quello di raggio minimo sono geodetiche.

### Esempio 5.78. Superficie tubolare

Consideriamo la superficie  $M$ , intorno tubolare di raggio  $r > 0$  della curva di Frenet  $\gamma(u)$ , quindi la superficie parametrizzata da (cf. Esempio 4.29)

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + r(\cos v)\vec{n}(u) + r(\sin v)\vec{b}(u)$$

con la condizione  $\kappa(u)r < 1$ . Vogliamo vedere se per questa superficie le curve coordinate sono curve geodetiche. Proviamo che le curve delle  $v$  sono sempre curve geodetiche. Come visto nell'Esempio 4.29, abbiamo

$$\begin{aligned} N &= -\cos v \vec{n}(u) - \sin v \vec{b}(u), \\ \varphi_{uu} &= -r(\kappa'(u) \cos v - \tau(u)\kappa(u) \sin v) \vec{t}(u) \\ &\quad + ((1 - r\kappa(u)\cos v)\kappa(u) - r\tau'(u) \sin v - r\tau^2(u)\cos v) \vec{n}(u) \\ &\quad + r(\tau'(u) \cos v - \tau^2(u) \sin v) \vec{b}(u), \\ \varphi_{vv} &= -r \cos v \vec{n}(u) - r \sin v \vec{b}(u) = rN, \\ \ell &= \varphi_{uu} \cdot N = r\tau^2(u) - \kappa(u) \cos v(1 - r\kappa(u)\cos v). \end{aligned}$$

Da queste formule si ottiene che la componente tangente  $\varphi_{vv}^\top = 0$ , e quindi dalla Proposizione 5.67 segue che le curve delle  $v$  sono curve geodetiche.

Consideriamo ora il caso in cui la curva di Frenet  $\gamma(u)$  abbia curvatura costante  $\kappa(u) = \kappa_0 > 0$  e torsione costante  $\tau(u) = \tau_0$  (in particolare può essere  $\tau_0 = 0$ ). In tal caso,

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= (r\tau_0\kappa_0\sin v)\vec{t}(u) + ((1-r\kappa_0\cos v)\kappa_0 - r\tau_0^2\cos v)\vec{n}(u) \\ &\quad - (r\tau_0^2\sin v)\vec{b}(u), \\ \varphi_{uu}^\top &= \varphi_{uu} - (\varphi_{uu} \cdot N)N = \varphi_{uu} - \ell N \\ &= (r\tau_0\kappa_0\sin v)\vec{t}(u) + (\kappa_0\sin^2 v(1-r\kappa_0\cos v))\vec{n}(u) \\ &\quad - \kappa_0\cos v\sin v(1-r\kappa_0\cos v)\vec{b}(u).\end{aligned}$$

Pertanto, se  $\gamma(u)$  è una (parte di) elica circolare oppure una (parte di) circonferenza, dalla Proposizione 5.67 segue che le curve delle  $u$  sono curve geodetiche se, e solo se,  $\sin v = 0$  (quindi per  $v = 0, \pi$ ).

**Esercizio 5.79.** Verificare che se  $M$  è una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$  simmetrica rispetto a un piano  $E$  (per l'origine), allora la curva  $\gamma = E \cap M$  è una curva geodetica (come insieme di punti) per  $M$ . Applicare questo risultato al caso dell'ellissoide:  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ .

**Esercizio 5.80.** Si consideri la curva piana  $\gamma : y^2 - z^2 = 1, x = 0$ . Sia  $M_1$  la superficie di rotazione ottenuta ruotando  $\gamma$  intorno all'asse  $z$  e sia  $M_2$  la superficie di rotazione ottenuta ruotando  $\gamma$  intorno all'asse  $y$ . Determinare i paralleli di  $M_1, M_2$  (se esistono) che sono curve geodetiche. Inoltre, determinare tre differenti tipi di geodetiche di  $M_1$  per il punto  $p_0 = (0, 1, 0)$ .

**Esercizio 5.81.** Sia  $M$  una superficie di rotazione con la proprietà che tutti i paralleli siano curve geodetiche. Dire che tipo di superficie di rotazione è  $M$ .

### 5.9. Geodetiche e curve minimali

Nel caso del piano euclideo, dati due punti  $p$  e  $q$  esiste sempre una curva geodetica (un segmento di retta) di lunghezza minima che li congiunge. In questa sezione vogliamo studiare la seguente questione “dati due punti  $p$  e  $q$  di un'arbitraria superficie regolare  $M$ , esiste una geodetica di lunghezza minima che li congiunge?”

**Definizione 5.82.** Sia  $M$  una superficie regolare e sia  $d$  la funzione distanza intrinseca di  $M$ . Una curva differenziabile  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  congiungente due punti  $p, q$ , si dice curva minimale se  $L(\gamma) = d(p, q)$  cioè se  $L(\gamma) \leq L(\sigma)$ , per ogni  $\sigma \in C(p, q)$ .

Nella sezione successiva vedremo che curve minimali sono curve geodetiche. Intanto, vediamo con degli esempi le diverse situazioni che si possono presentare.

**1.** Sia  $M$  il piano euclideo  $\mathbb{R}^2$ . Tra tutte le curve che congiungono due punti  $p, q \in \mathbb{R}^2$ , il segmento di retta  $\gamma(t) = (1-t)p + tq, t \in [0, 1]$ , è quello che realizza la minima distanza.

**2.** Per la sfera canonica  $\mathbb{S}^2$ , abbiamo visto che le curve le geodetiche sono tutte e sole le circonferenze di raggio massimo. In tal caso, comunque prendiamo due punti esiste sempre una geodetica minimale che li congiunge. Se  $p, q \in \mathbb{S}^2$  non sono antipodali, allora esiste un'unica geodetica minimale  $\gamma$  che li congiunge. Se  $p, q \in \mathbb{S}^2$  sono antipodali, esistono infinite geodetiche minimali che li congiungono.

**3.** Sia  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (piano euclideo privato dell'origine). Se  $p = (1, 0)$  e  $q = (-1, 0)$ , allora non esiste una geodetica che li congiunge.

**4.** Sia  $M$  la superficie cilindrica  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .

Nell'Esempio 5.73 sono state determinate le geodetiche del cilindro circolare retto  $M$ . Un altro modo per determinare le geodetiche di  $M$  è il seguente. Poiché il rivestimento  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ ,  $(\vartheta, v) \mapsto (e^{i\vartheta}, v)$  è una isometria locale, le geodetiche di  $M$  sono tutte e sole le immagini mediante  $F$  delle curve geodetiche del piano euclideo. Quindi, le geodetiche di  $M$  sono le rette generatrici (immagini delle rette parallele all'asse delle  $v$ ), le circonferenze (immagini delle rette parallele all'asse delle  $\vartheta$ ) e le eliche (immagini di rette non parallele agli assi). Se  $p, q$  appartengono alla stessa circonferenza, allora esistono due archi di geodetica che li congiungono di cui uno minimale. Se  $p, q$  non appartengono alla stessa circonferenza, in tal caso esistono infinite geodetiche che li congiungono le cui lunghezze non sono uguali. Per vedere ciò, consideriamo l'isometria locale  $F$  la quale sviluppa il cilindro sul piano (cf. Figura 4).

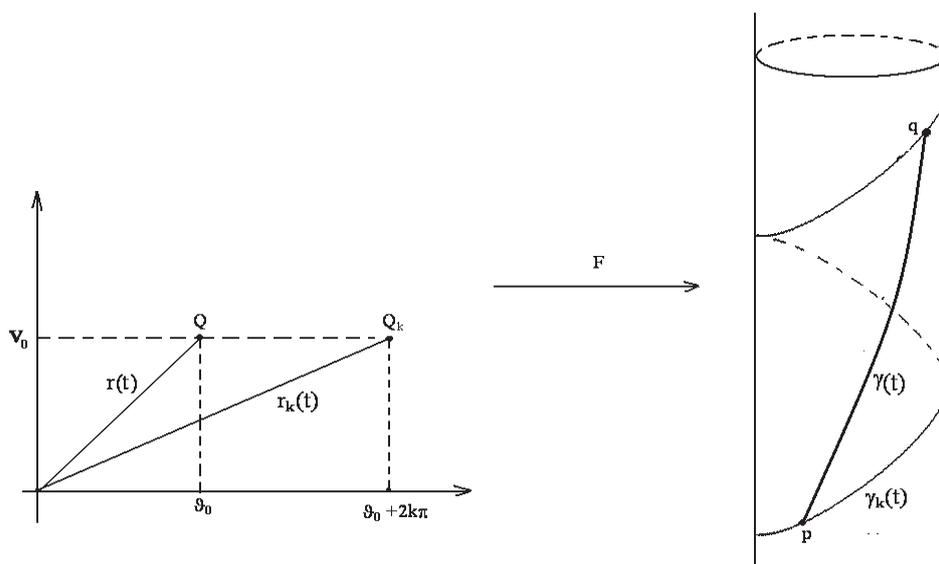


FIGURA 4

Poniamo  $F(0, 0) = p$  e  $F(\vartheta_0, v_0) = q$  con  $\vartheta_0 \neq 0$ , quindi con  $p, q$  non appartenenti alla stessa generatrice. Se  $r(t)$  è il segmento  $\overline{OQ}$ ,  $Q(\vartheta_0, v_0)$ , l'elica  $\gamma(t) = F(r(t))$  è una geodetica che congiunge  $p$  e  $q$ . Se consideriamo  $Q_k = (\vartheta_0 + 2k\pi, v_0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , e  $r_k(t)$  è il segmento  $\overline{OQ_k}$ , allora  $\gamma_k(t) = F(r_k(t))$  è una geodetica che congiunge, per ogni  $k$ , gli stessi punti. La geodetica minimale è l'arco di elica che corrisponde al segmento  $\overline{OQ}$  con  $Q(\vartheta_0, v_0)$ ,  $0 < \vartheta_0 < 2\pi$ . In particolare, se  $p, q$  appartengono alla stessa generatrice, vale il discorso di prima:  $F(\vartheta_0, v_0) = p$ ,  $F(\vartheta_0 + 2k\pi, v_1) = F(\vartheta_0, v_1) = q$ , e la geodetica minimale è il segmento di generatrice che congiunge  $p$  e  $q$ .

Dal Teorema 5.47 abbiamo l'esistenza e l'unicità (locale) della geodetica con fissate condizioni iniziali. Si può dimostrare, usando la teoria delle equazioni differenziali, la seguente

**Proposizione 5.83.** *Per ogni fissato  $p_0 \in M$ , esistono un intorno aperto  $U$  di  $p_0$ , un  $\delta > 0$  e un  $\varepsilon > 0$  tali che per ogni  $p \in U$  e per ogni  $V \in T_p M$ ,  $\|V\| < \delta$ , esiste un'unica curva geodetica  $\gamma_{p,V}(t)$ , definita per  $|t| < \varepsilon$ , che soddisfa*

$$\gamma_{p,V}(0) = p \quad e \quad \dot{\gamma}_{p,V}(0) = V.$$

Consideriamo la geodetica  $\gamma_{p,V}(t)$ , definita per  $|t| < \varepsilon$ . Se  $\lambda$  è una costante  $\neq 0$ , la curva  $\sigma(t) := \gamma_{p,V}(\lambda t)$ ,  $|\lambda t| < \varepsilon$ , è una geodetica e verifica le condizioni:

$$\sigma(0) = \gamma_{p,V}(0) = p \quad e \quad \dot{\sigma}(0) = \lambda \dot{\gamma}_{p,V}(0) = \lambda V.$$

Dunque, per l'unicità delle geodetiche con le fissate condizioni iniziali, deve essere

$$\sigma(t) = \gamma_{p,\lambda V}(t) \quad \text{con} \quad |t| < \varepsilon/|\lambda|.$$

Pertanto, per  $\lambda$  costante  $\neq 0$ , abbiamo la seguente proprietà di omogeneità:

$$(5.61) \quad \gamma_{p,\lambda V}(t) = \gamma_{p,V}(\lambda t) \quad \text{con} \quad |t| < \varepsilon/|\lambda|.$$

Quindi è possibile diminuire la velocità di una geodetica aumentando l'intervallo di tempo (cioè l'intervallo di  $t$ ), e viceversa. Applicando la (5.61) per  $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$ , con  $\|V\| < \delta$  (dove  $\delta$  è definito dalla Proposizione 5.83), si ha che

$$\gamma_{p,\frac{\varepsilon}{2}V}(t) \text{ è definita per } |t| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon/2} = 2, \text{ dove } \|(\varepsilon/2)V\| < (\varepsilon/2)\delta.$$

Di conseguenza, per ogni  $W \in T_p M$ ,  $\|W\| < \delta_0$ , prendendo  $\delta_0 < \frac{\varepsilon\delta}{2}$ , si ottiene che la geodetica  $\gamma_{p,W}(t)$  è definita per  $|t| < 2$ . Pertanto, abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 5.84.** *Per ogni  $p_0 \in M$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $p_0$  e un  $\delta_0 > 0$  tale che per ogni  $p \in U$  e per ogni  $W \in T_p M$ ,  $\|W\| < \delta_0$ , la geodetica  $\gamma_{p,W}(t)$  è definita per  $|t| < 2$  e quindi, in particolare, per  $t = 1$ .*

Nel seguito, quando il punto  $p$  è fissato, la geodetica  $\gamma_{p,V}(t)$  la denotere-  
mo semplicemente con  $\gamma_V(t)$ . La Proposizione 5.84 permette di introdurre la  
seguente definizione.

**Definizione 5.85.** *L'applicazione esponenziale in  $p$  è l'applicazione*

$$\begin{aligned} \exp_p : B(0, \delta_0) &= \{W \in T_p M : \|W\| < \delta_0\} \subset T_p M \rightarrow M, \\ W &\mapsto \exp_p W = \gamma_W(1). \end{aligned}$$

Si noti che  $\exp_p$  è differenziabile in quanto le soluzioni di un sistema di equazio-  
ni differenziali dipendono differenziabilmente dalle condizioni iniziali, inoltre è  
definita in generale solo su un intorno del vettore nullo, e  $\exp_p 0 = p$ . Se  $\exp_p$   
è definita in  $W \in B(0, \delta_0)$ , allora  $\gamma_W(t)$  è definita per  $t \in [-1, 1]$  e

$$(5.62) \quad \gamma_W(t) = \gamma_{tW}(1) = \exp_p(tW) \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Geometricamente,  $\exp_p V = \gamma_V(1)$  è un punto di  $M$  che si trova sulla geodetica  
 $\gamma_V(t)$  a distanza  $\|V\|$  dal punto  $p$  nel verso di  $V$ . Infatti, siccome  $\|\dot{\gamma}_V(t)\| =$   
 $\text{cost.}$ , abbiamo

$$L(\gamma_V|_{[0,1]}) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_V(t)\| dt = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_V(0)\| dt = \int_0^1 \|V\| dt = \|V\|.$$

La seguente proposizione evidenzia la naturalità dell'applicazione esponen-  
ziale.

**Proposizione 5.86.** *L'applicazione esponenziale commuta con le isome-  
trie. Più precisamente, se  $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  è un'isometria, allora*

$$f \circ \exp_p V = \exp_{f(p)} \circ f_{*p} V \quad \text{per } V \in B(0, \delta_0) \subset T_p M.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $V \in B(0, \delta_0)$  e  $\gamma_V(t)$  la geodetica definita per  $t \in$   
 $[0, 1]$ , con  $\gamma_V(0) = p$  e  $\dot{\gamma}_V(0) = V$ . Poiché  $f$  è una isometria, la curva  $\tilde{\gamma}(t) =$   
 $f \circ \gamma_V(t)$  è una geodetica e inoltre  $\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma_V(0)) = f(p)$  e  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = f_{*p} \dot{\gamma}_V(0) =$   
 $f_{*p} V$ . Pertanto,  $f \circ \gamma_V(t) = \gamma_{f_{*p} V}(t)$  per ogni  $t \in [0, 1]$ , e quindi:

$$f(\exp_p V) = f(\gamma_V(1)) = \gamma_{f_{*p} V}(1) = \exp_{f(p)} f_{*p} V.$$

□

**Esempio 5.87.** Nel caso del piano euclideo  $\mathbb{R}^2$ , per  $V \in T_p \mathbb{R}^2$ , la geodetica  
 $\gamma_V(t) = p + tV$  è definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Quindi,

$$\exp_p : T_p \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_V(1) = V \mapsto p + V.$$

**Esempio 5.88.** Nel caso della sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ , l'applicazione esponenziale  
in un fissato punto  $p \in \mathbb{S}^2$  è definita su tutto lo spazio tangente  $T_p \mathbb{S}^2$  e applica  
la palla aperta  $B(0, \pi)$  di centro l'origine e raggio  $\pi$  di  $T_p \mathbb{S}^2$  iniettivamente su  
 $\mathbb{S}^2 - \{q\}$ , dove  $q$  è il punto antipodale di  $p$ . Inoltre,  $\exp_p$  applica il bordo di  
 $B(0, \pi)$  nel punto  $q$  (cf. Figura 5).

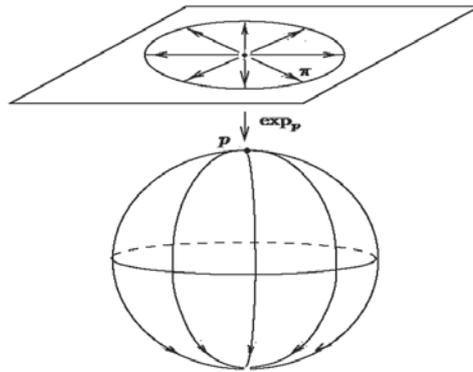


FIGURA 5

Vediamo di giustificare in qualche modo il termine esponenziale dato all'applicazione  $\exp_p$ . Fissati  $p \in \mathbb{S}^2$  e  $V_0 \in T_p\mathbb{S}^2$ , indichiamo con  $\mathbb{S}^1$  la geodetica massimale con le fissate condizioni iniziali  $(p, V_0)$ , quindi la circonferenza di raggio massimo (della sfera  $\mathbb{S}^2$ ) passante per  $p$  e tangente in  $p$  a  $V_0$ . Indichiamo con  $T_p\mathbb{S}^1$  il sottospazio 1-dimensionale di  $T_p\mathbb{S}^2$  generato dal vettore  $V_0$ , allora  $\exp_p$  ristretta a  $T_p\mathbb{S}^1$  assume valori in  $\mathbb{S}^1$ . In questo caso, per  $x \in T_p\mathbb{S}^1$ , la geodetica  $\gamma_x(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , è l'arco di circonferenza  $\gamma_1$  uscente da  $p$ , nel verso definito da  $x$ , con  $L(\gamma_1) = \|x\|$ . Identificato  $T_p\mathbb{S}^1$  con  $\mathbb{R}$ ,  $x$  si può pensare come la misura in radianti di un angolo, allora si ha (cf. Figura 6)

$$\exp_p : T_p\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, x \mapsto \gamma_x(1) = e^{ix}.$$

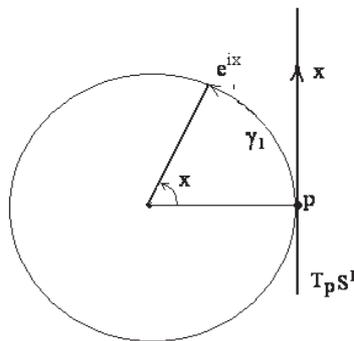


FIGURA 6

In generale, l'applicazione esponenziale in un fissato punto  $p \in M$  definisce solo un diffeomorfismo locale.

**Teorema 5.89.** *Per ogni  $p \in M$  esiste un intorno aperto  $B(0)$  dell'origine in  $T_p M$  diffeomorfo, mediante l'applicazione  $\exp_p$ , a un intorno aperto  $U(p)$  di  $p$  in  $M$ , ossia  $\exp_p : B(0) \rightarrow U(p)$ ,  $V \mapsto \gamma_V(1)$ , è un diffeomorfismo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo che  $\exp_p : B(0, \delta_0) \subset T_p M \rightarrow M$ . Indichiamo con  $f$  l'applicazione esponenziale  $\exp_p$  e consideriamo il suo differenziale  $f_* : T_0(T_p M) \rightarrow T_p M$  nell'origine. Per ogni fissato  $V$  in  $T_0(T_p M)$ , che possiamo identificare con  $T_p M$ , consideriamo la curva differenziabile  $\sigma(t) = tV$  di  $T_p M$ . Siccome  $\sigma(0) = 0$  e  $\dot{\sigma}(0) = V$ , abbiamo

$$f_*(V) = f_*(\dot{\sigma}(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \sigma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_V(t))|_{t=0} = \dot{\gamma}_V(0) = V.$$

Dunque,  $f_*$  è l'identità e quindi, applicando il Teorema della funzione inversa, esiste un intorno  $B(0)$  dell'origine in  $T_p M$  diffeomorfo, mediante l'applicazione  $\exp_p$ , a un intorno  $U(p)$  di  $p$  in  $M$ .  $\square$

L'intorno aperto  $U$  di  $p$  in  $M$  definito nel Teorema 5.89, viene detto **intorno normale** del punto  $p$ . In particolare, prendendo l'aperto  $B(0)$  del tipo  $B(0, r)$ , l'intorno normale corrispondente  $U = \exp_p B(0, r)$  viene detto **palla geodetica** di  $M$  centrata in  $p$ , in tal caso le geodetiche di  $U$  uscenti da  $p$  sono dette **geodetiche radiali**. Per  $\delta < r$ , l'intorno  $S(p, \delta) = \exp_p(\partial \bar{B}(0, \delta))$ , è detto **cerchio geodetico** di  $M$  centrato in  $p$ .

Siccome l'applicazione  $\exp_p$  è un diffeomorfismo sull'aperto  $B(0)$ , allora  $\exp_p$  può definire nuove coordinate nell'aperto  $U$  che vengono dette *coordinate normali*.

Il seguente teorema esprime la minimalità delle geodetiche radiali.

**Teorema 5.90.** *Sia  $\gamma : [0, c] \rightarrow M$  una geodetica radiale di  $U = \exp_p B(0, r)$  palla geodetica centrata in  $p = \gamma(0)$ . Allora, per ogni  $q \in \gamma([0, c])$ , l'arco geodetico radiale  $\gamma(p, q)$  è l'unica curva minimale che congiunge  $p$  e  $q$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** ([20], p. 344).  $\square$

Sia  $\gamma$  una curva geodetica di  $M$  e siano  $p_1, p_2$  due punti nel sostegno di  $\gamma$ . Se  $p_2$  è abbastanza vicino a  $p_1$ , in altre parole se  $p_2$  è contenuto in una palla geodetica centrata in  $p_1$ , allora l'arco geodetico  $\gamma(p_1, p_2)$  è radiale e quindi, per il Teorema 5.90, è l'unica curva minimale che congiunge  $p_1$  e  $p_2$ . Pertanto, vale la seguente

**Proposizione 5.91.** *Ogni curva geodetica di  $(M, g)$  è localmente minimale.*

Concludiamo questa sezione con un breve cenno al Teorema di Hopf-Rinow. Nel caso del piano euclideo è ben noto che ogni segmento di retta si può prolungare indefinitamente, per la geodetiche abbiamo la seguente

**Definizione 5.92.** *Una superficie  $M$  è detta geodeticamente completa se ogni geodetica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  può essere estesa a una geodetica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ .*

Il piano euclideo e la sfera canonica sono chiaramente superfici geodeticamente complete. Ricordiamo che esiste anche la nozione di completezza nell'ambito degli spazi metrici: uno *spazio metrico* si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente. D'altronde, una superficie è uno spazio metrico rispetto alla distanza intrinseca  $d$  (cf. Sezione 5.1). La topologia indotta dalla distanza intrinseca  $d$  è equivalente alla topologia indotta su  $M$  dalla topologia euclidea di  $\mathbb{R}^3$ . Il teorema di Hopf-Rinow ci dice non solo che le due nozioni di completezza sono equivalenti, ma sono anche sufficienti per l'esistenza di geodetiche minimali.

**Teorema 5.93.** (di **Hopf-Rinow**) *Sia  $M$  una superficie (connessa) regolare e sia  $d$  la distanza intrinseca di  $M$ . Allora, seguenti proprietà sono equivalenti.*

- (1)  $M$  è geodeticamente completa.
- (2)  $(M, d)$  è uno spazio metrico completo.
- (3) Chiusi e limitati di  $(M, d)$  sono compatti.

*Inoltre, se una di queste condizioni vale, per ogni  $p, q \in M$  esiste una geodetica minimale (non necessariamente unica) che li congiunge.*

Esistono superfici complete in cui la geodetica minimale non è unica. Ad esempio, se consideriamo due punti antipodali della sfera canonica, la geodetica minimale che li congiunge non è univocamente determinata. Inoltre, se consideriamo come superficie di  $\mathbb{R}^3$  il semipiano euclideo  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ , questa è una superficie in cui comunque prendiamo due punti esiste una geodetica minimale che li congiunge, tuttavia non è una superficie completa, ad esempio la successione  $\{p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_n$  è una successione di Cauchy che non è convergente in  $\mathbb{R}_+^2$ . Quindi, della seconda parte del Teorema 5.93 non vale il viceversa.

**Corollario 5.94.** *Una superficie regolare (connessa) compatta è geodeticamente completa.*

Quindi per le superfici regolari connesse compatte di  $\mathbb{R}^3$  comunque si considerano due punti esiste sempre una geodetica minimale che li congiunge.

## 5.10. Energia di una curva

Scopo di questa sezione è studiare l'energia di una curva. Vedremo, come conseguenza della prima formula variazionale dell'energia di una curva, che le curve geodetiche sono punti critici del funzionale energia e che le curve minimali sono necessariamente curve geodetiche.

Sia  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \sigma(t)$ , una curva differenziabile di una superficie regolare  $M$  di  $\mathbb{R}^3$ . L'**energia** di  $\sigma$  è definita da

$$E(\sigma) := \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\|^2 dt.$$

Possiamo quindi considerare il funzionale  $E : \sigma \mapsto E(\sigma)$  che viene detto *funzionale energia*. Si noti che l'energia di una curva, a differenza della lunghezza, dipende dalla parametrizzazione. Se  $\theta : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta], t \mapsto \theta(t)$ , è un cambiamento regolare di parametro, le curve  $\tilde{\sigma} : [\alpha, \beta] \rightarrow M, \theta \mapsto \tilde{\sigma}(\theta)$  e  $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \theta : [a, b] \rightarrow M, t \mapsto \sigma(t)$ , in generale, non hanno la stessa energia:

$$2E(\sigma) = \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\|^2 dt = \int_a^b \|\dot{\tilde{\sigma}}(\theta(t))\|^2 |\theta'(t)|^2 dt \neq \int_\alpha^\beta \|\dot{\tilde{\sigma}}(\theta)\|^2 d\theta = 2E(\tilde{\sigma}).$$

**Lemma 5.95.** *Si ha*

$$L^2(\sigma) \leq 2(b-a)E(\sigma),$$

dove l'uguaglianza si ha se e solo se  $\sigma(t)$  è parametrizzata a velocità costante (ossia  $t$  è proporzionale all'ascissa curvilinea).

**DIMOSTRAZIONE.** Ricordiamo che  $L(\sigma) = \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\| dt$ . Date due funzioni reali continue  $f_1, f_2$  definite in  $[a, b]$ , applicando la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$\left( \int_a^b f_1 f_2 dt \right)^2 \leq \left( \int_a^b f_1^2 dt \right) \left( \int_a^b f_2^2 dt \right),$$

dove l'uguaglianza si ha se e solo se la funzione  $f_2$  è proporzionale a  $f_1$ . Applicando la suddetta disuguaglianza alle funzioni  $f_1 = \text{cost.} = 1$  e  $f_2 = \|\dot{\sigma}(t)\|$ , si ha l'enunciato del lemma.  $\square$

Siano  $D$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$  e  $H : D \rightarrow M, (t, r) \mapsto H(t, r)$ , un'applicazione differenziabile. Fissato il parametro  $t$  (rispettivamente  $r$ ),  $H(t, r)$  si può pensare come una curva parametrizzata di  $M$ . Allora,

$$\frac{\partial H}{\partial t} : (t, r) \mapsto \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{(t,r)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial r} : (t, r) \mapsto \left( \frac{\partial H}{\partial r} \right)_{(t,r)}$$

sono *campi differenziabili di vettori lungo  $H$* . Siccome  $\left( \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial r} \right)^\top = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t} \right)^\top$ , si ha

$$(5.63) \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{D}{dr} \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Sia

$$H : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, (t, r) \mapsto H(t, r) = \sigma_r(t),$$

una **variazione** della curva  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ , cioè un'applicazione differenziabile con

$$H(t, 0) = \sigma_0(t) = \sigma(t).$$

Se inoltre, per ogni  $r \in (-\epsilon, \epsilon)$ , si ha

$$H(a, r) = \sigma_r(a) = \sigma(a) \quad \text{e} \quad H(b, r) = \sigma_r(b) = \sigma(b),$$

allora la **variazione** è detta **propria** (cf. Figura 7). Per ogni fissato  $r \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,

$$\sigma_r : [a, b] \rightarrow M, t \mapsto \sigma_r(t) = H(t, r),$$

è una *curva della variazione*  $H$ . Se la variazione è propria, tutte le curve  $\sigma_r(t)$  hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Per ogni fissato  $t \in [a, b]$ , la curva

$$\sigma_t : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad r \mapsto \sigma_t(r) = H(t, r),$$

è detta **curva trasversa** della variazione (cf. Figura 7). Il vettore velocità  $V(t)$  della curva trasversa  $\sigma_t(r)$ , per  $r = 0$ , è dato da

$$V(t) = \left( \frac{\partial H(t, r)}{\partial r} \right) (t, 0) = \left( \frac{d}{dr} \sigma_t(r) \right) \Big|_{r=0} = \dot{\sigma}_t(0) \in T_{H(t,0)}M = T_{\sigma(t)}M.$$

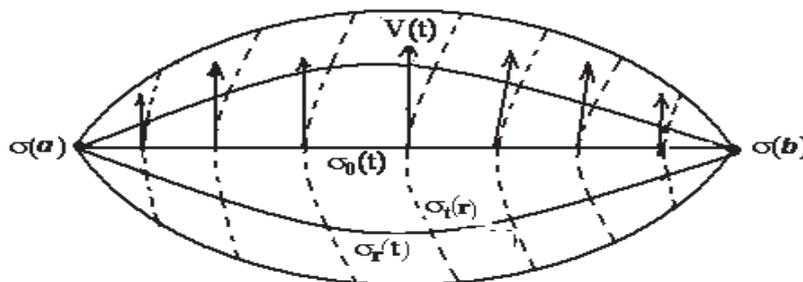


FIGURA 7. Le curve tratteggiate sono le curve trasverse.

Quindi,  $V(t) \in \mathfrak{X}(\sigma)$  è un campo differenziabile lungo  $\sigma_0(t) = \sigma(t)$  che viene detto **campo variazionale** di  $H$ . Se la variazione è propria:

$$\sigma_a(r) = H(a, r) = \sigma(a) = p = \text{cost.} \quad \text{e} \quad \sigma_b(r) = H(b, r) = \sigma(b) = q = \text{cost.},$$

e quindi

$$\dot{\sigma}_a(0) = \dot{\sigma}_b(0) = 0, \quad \text{cioè} \quad V(a) = V(b) = 0.$$

La funzione

$$E : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad r \mapsto E(r) = E(\sigma_r(t)) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\sigma}_r(t)\|^2 dt$$

è detta **energia** di  $H$ .

**Teorema 5.96. (formula della variazione prima)**

Sia  $H(t, r)$  una variazione propria di  $\sigma$ . Allora

$$(5.64) \quad E'(0) = - \int_a^b \left( V(t) \cdot \frac{D\dot{\sigma}}{dt}(t) \right) dt.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo la derivata del funzionale energia

$$E'(r) = \frac{dE}{dr} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{dr} (\dot{\sigma}_r(t) \cdot \dot{\sigma}_r(t)) dt.$$

$X(r) := \dot{\sigma}_r(t) = \frac{d}{dt}\sigma_r(t) = \frac{\partial}{\partial t}H(t, r)$  è un campo vettoriale lungo la curva trasversa  $\sigma_t(r)$ . Tenendo presente le proprietà della derivata covariante e la (5.63), si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr}(\dot{\sigma}_r(t) \cdot \dot{\sigma}_r(t)) &= \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial}{\partial t}H(t, r) \cdot \frac{\partial}{\partial t}H(t, r) \right) \\
 &= 2 \left( \frac{D}{dr} \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) \\
 (5.65) \qquad \qquad \qquad &= 2 \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right).
 \end{aligned}$$

D'altronde,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) = \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right),$$

per cui dalla (5.65) segue

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr}(\dot{\sigma}_r(t) \cdot \dot{\sigma}_r(t)) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right).$$

Pertanto,

$$E'(r) = \int_a^b \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt - \int_a^b \left( \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt$$

e quindi

$$E'(0) = \left\{ \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=a}^{t=b} \right\}_{r=0} - \left\{ \int_a^b \left( \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt \right\}_{r=0}.$$

Ricordiamo che

$$\frac{\partial H}{\partial r}(t, 0) = V(t) \quad \text{e} \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t}(t, 0) = \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t),$$

per cui,

$$E'(0) = \left\{ \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=a}^{t=b} \right\}_{r=0} - \int_a^b \left( V(t) \cdot \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t) \right) dt.$$

Inoltre, poichè la variazione è propria, abbiamo

$$\frac{\partial H}{\partial r}(a, 0) = V(a) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial r}(b, 0) = V(b) = 0,$$

e quindi il termine  $A := \left\{ \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=a}^{t=b} \right\}_{|r=0}$  è dato da

$$\begin{aligned} A &= \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial r}(b, r) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(b, r) \right) - \left( \frac{\partial H}{\partial r}(a, r) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(a, r) \right) \right]_{|r=0} \\ &= \left( \frac{\partial H}{\partial r}(b, 0) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(b, 0) \right) - \left( \frac{\partial H}{\partial r}(a, 0) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(a, 0) \right) \\ &= \left( V(b) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(b, 0) \right) - \left( V(a) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(a, 0) \right) = 0. \end{aligned}$$

Dunque la (5.64). □

**Definizione 5.97.** Una curva differenziabile  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \sigma(t)$ , si dice **punto critico** per il funzionale energia  $E$  se per ogni variazione propria  $H(t, r) = \sigma_s(t)$  di  $\sigma$  si ha

$$\left( \frac{dE(r)}{dr} \right)_{|r=0} = 0.$$

Dal Teorema 5.96 segue facilmente che le curve geodetiche sono punti critici del funzionale energia. Viceversa, sia  $\sigma(t)$  una curva punto critico dell'energia, ossia  $E'(0) = 0$  per ogni variazione propria di  $\sigma(t)$ . Consideriamo il campo di vettori

$$W(t) = f(t) \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t) \in \mathfrak{X}(\sigma),$$

dove  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è un'applicazione differenziabile con  $f(t) > 0$  per ogni  $t \in ]0, 1[$  e  $f(0) = f(1) = 0$ . Applicando il Teorema 5.89, per ogni  $t \in [0, 1]$  esiste  $U_t$  intorno normale di  $\sigma(t)$ , ed esiste un  $\delta_t > 0$  tale che  $\exp_{\sigma(t)} V$  sia definita per  $\|V\| < \delta_t$ .  $\{U_t\}$  è un ricoprimento aperto del compatto  $\sigma([0, 1])$ , quindi esiste un sottoricoprimento finito  $U_1, \dots, U_k$  di  $\sigma([0, 1])$ . Prendendo  $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ , si ha che  $\exp_{\sigma(t)} V$  è definita per ogni  $t \in [0, 1]$  e per ogni  $V \in T_{\sigma(t)} M$ ,  $\|V\| < \delta$ . Posto  $\bar{\delta} = \max\{\|W(t)\|, t \in [0, 1]\}$  e  $\varepsilon = \delta/\bar{\delta}$ , si ha

$$\|rW(t)\| = |r| \|W(t)\| < \varepsilon \|W(t)\| < \varepsilon \bar{\delta} = \delta \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \forall r \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Quindi, l'applicazione

$$H(t, r) := \exp_{\sigma(t)} rW(t)$$

è definita per ogni  $t \in [0, 1]$  e per ogni  $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Inoltre,  $H(t, r)$  soddisfa:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \exp_{\sigma(t)} 0 = \sigma(t), \\ H(0, r) &= \exp_{\sigma(0)} rW(0) = \exp_{\sigma(0)} 0 = \sigma(0), \\ H(1, r) &= \exp_{\sigma(1)} rW(1) = \exp_{\sigma(1)} 0 = \sigma(1). \end{aligned}$$

Pertanto  $H(t, r)$  definisce una variazione propria di  $\sigma$ . Inoltre, il campo variazionale di questa variazione è dato da:

$$\begin{aligned} V(t) &= \left( \frac{\partial}{\partial r} H(t, r) \right)_{|r=0} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \exp_{\sigma(t)} r W(t) \right)_{|r=0} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \gamma_{W(t)}(r) \right)_{|r=0} = \dot{\gamma}_{W(t)}(0) = W(t). \end{aligned}$$

Applicando la formula della variazione prima a questa variazione  $H(t, r)$ , si ha:

$$0 = E'(0) = - \int_0^1 g \left( f(t) \frac{D\dot{\sigma}}{dt}, \frac{D\dot{\sigma}}{dt} \right) dt = - \int_0^1 f(t) \left\| \frac{D\dot{\sigma}}{dt} \right\|^2 dt.$$

Pertanto,  $\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = 0$  e quindi  $\sigma(t)$  è una curva geodetica. Dunque, abbiamo provato il seguente

**Teorema 5.98.** *Sia  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M, t \mapsto \sigma(t)$ , una curva differenziabile. Allora,  $\sigma(t)$  è una curva geodetica se e solo se  $\sigma(t)$  è punto critico del funzionale energia.*

**Osservazione 5.99.** Si noti che mentre la nozione di curva geodetica ha carattere locale, la caratterizzazione di curva geodetica come punto critico del funzionale energia ha carattere globale.

Un'altra conseguenza del Teorema 5.96 è che una curva minimale è necessariamente una curva geodetica. Più precisamente abbiamo il seguente risultato.

**Teorema 5.100.** *Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M, s \mapsto \gamma(s)$ , una curva regolare di  $M$  parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Se  $\gamma$  è minimale, ossia  $L(\gamma) \leq L(\sigma)$  per ogni curva differenziabile a tratti  $\sigma$  che congiunge  $p$  a  $q$ , allora  $\gamma(s)$  è una curva geodetica.*

**DIMOSTRAZIONE.** La disuguaglianza  $L(\gamma) \leq L(\sigma)$  per ogni curva differenziabile a tratti  $\sigma$  che congiunge  $p$  a  $q$ , vale in particolare per ogni curva differenziabile che congiunge  $p$  a  $q$ . Sia quindi  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  un'arbitraria curva differenziabile che congiunge  $p$  a  $q$ . Siccome  $\gamma$  è parametrizzata con l'ascissa curvilinea, applicando il Lemma 5.95 a  $\gamma$  si ha

$$2(b-a)E(\gamma) = L^2(\gamma).$$

Applicando lo stesso Lemma alla curva  $\sigma$ , si ha

$$L^2(\sigma) \leq 2(b-a)E(\sigma).$$

D'altronde, per ipotesi  $L^2(\gamma) \leq L^2(\sigma)$ . Quindi, abbiamo

$$E(\gamma) \leq E(\sigma)$$

per ogni curva differenziabile che congiunge  $p$  a  $q$ , ovvero  $\gamma$  è un minimo assoluto per il funzionale energia. Di conseguenza, si ha  $E'(0) = 0$  per ogni variazione propria di  $\gamma$ . Applicando il Teorema 5.98, possiamo concludere che  $\gamma$  è una curva geodetica.  $\square$

### 5.11. Curve magnetiche su superfici orientabili

Dal punto di vista dei sistemi dinamici, una geodetica corrisponde alla traiettoria di una particella che si muove senza l'azione di un campo magnetico. In questo contesto, le curve magnetiche generalizzano le curve geodetiche. L'approccio allo studio delle curve magnetiche dello spazio  $\mathbb{R}^3$  con le 2-forme chiuse (cf. Sezione 2.8) si presta ad essere generalizzato al caso di una varietà riemanniana di dimensione  $n \geq 2$ . Si noti che le curve magnetiche sono state considerate per la prima volta, come osservato in [13], da V.I. Arnold (*Some remarks on flows of line elements and frames*, Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 562–564) e D.V. Anosov and Y.G. Sinai (*Certain smooth ergodic systems*, Uspekhi Mat. Nauk. 22(5) (1967), 107–172; Russian Math. Surveys 22(5) (1967), 103–167).

In questa sezione esponiamo alcuni semplici risultati sulle curve magnetiche, dette anche geodetiche magnetiche [5], nel caso particolare delle superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$ . Per maggiori approfondimenti e sviluppi sulla teoria delle curve magnetiche sulle superfici si rinvia a [2],[6] e in particolare al recente articolo di V. Branding e W. Rossman [5], e alla bibliografia in esso riportata.

Sia  $(M, g)$  una superficie regolare orientabile e sia  $N$  un fissato campo unitario normale che orienta  $M$ . Inoltre, sia  $\Omega$  la 2-forma d'area che definisce la stessa orientazione su  $M$ . Consideriamo su  $M$  la struttura complessa (naturale)  $J$  indotta da  $N$  e quindi dalla 2-forma  $\Omega$  (cf. Sezione 3.10), ovvero

$$\Omega(X, Y) = JX \cdot Y = N \wedge X \cdot Y = X \wedge Y \cdot N.$$

Sappiamo che  $J$  è anche una trasformazione ortogonale antisimmetrica:

$$JX \cdot JY = X \cdot Y, \quad JX \cdot Y = -X \cdot JY.$$

Su  $M$  possiamo definire il differenziale esterno di una 2-forma con la formula (2.14) (tale formula vale più in generale per varietà differenziabili di dimensione  $n$ ). Come osservato nella Sezione 3.10, ogni  $r$ -forma su una superficie regolare, con  $r > 2$ , è sempre nulla, e quindi in particolare ogni 2-forma è chiusa. Come nel caso dello spazio euclideo (cf. Sezione 2.8), possiamo dare la seguente definizione (cf., ad esempio, [6]).

**Definizione 5.101.** *Un campo magnetico su una superficie regolare orientabile è una fissata 2-forma  $F$ .*

Una 2-forma  $F$  su  $M$  è completamente determinata da una funzione differenziabile  $f \in \mathcal{F}(M)$  (cf. Osservazione 3.92) :

$$F = f\Omega.$$

Quindi, se  $F = f\Omega$  è la 2-forma che definisce un campo magnetico su  $M$ , la funzione  $f$  è definita come l'*intensità del campo magnetico*. La corrispondente *forza di Lorentz*  $\Phi$ , ovvero l'endomorfismo antisimmetrico metricamente equivalente a  $F$ , è definita da

$$\Phi X \cdot Y = F(X, Y) = f\Omega(X, Y) = f(JX \cdot Y),$$

e quindi

$$\Phi = fJ.$$

Nel seguito  $(M, F)$  denoterà sempre una superficie regolare orientabile di  $\mathbb{R}^3$  (orientata da  $N$ , equivalentemente da  $\Omega$ ) con una fissata 2-forma  $F$ .

**Definizione 5.102.** *Sia  $\gamma(t)$  una curva regolare parametrizzata di  $M$ . La curva  $\gamma(t)$  si dice che è una curva magnetica di  $(M, F)$ , anche detta geodetica magnetica, se soddisfa l'equazione di Lorentz*

$$(5.66) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \Phi(\dot{\gamma}(t)) = f(\gamma(t)) J(\dot{\gamma}).$$

Qualche osservazione su analogie e differenze con le curve geodetiche.

- Il teorema di esistenza e unicità delle curve geodetiche, con fissate condizioni iniziali, vale anche per le curve magnetiche.
- Le curve magnetiche, così come le curve geodetiche, hanno velocità scalare costante:

$$(\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t))' = 2 \frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} \cdot \dot{\gamma}(t) = 2\Phi(\dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 2F(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

- A differenza delle curve geodetiche, assegnato un campo magnetico  $F$ , una curva magnetica  $\gamma(t)$  associata a  $F$  non si può riscaldare, essa dipende dalla velocità scalare  $\|\dot{\gamma}(t)\|$ . Infatti, posto  $t = cs$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ , e  $\beta(s) = \gamma(t(s)) = \gamma(cs)$ , si ha  $\dot{\beta}(s) = c\dot{\gamma}(t) = c\dot{\gamma}(t(s))$  e quindi

$$\frac{D\dot{\beta}}{ds} = c^2 \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = c^2 \Phi(\dot{\gamma}(t)) = c\Phi(\dot{\beta}(s)).$$

Pertanto,  $\beta(s) = \gamma(cs)$  è curva magnetica rispetto al campo magnetico  $\tilde{F} = cF$ . Di conseguenza vale la seguente

**Proposizione 5.103.** *Sia  $F$  un campo magnetico non banale su una superficie regolare orientabile  $M$ . Allora, non esiste una connessione lineare su  $M$  le cui geodetiche siano le curve magnetiche di  $(M, F)$ .*

- Abbiamo visto (cf. Sezione 5.10) che le curve geodetiche sono punti critici del funzionale energia  $E$ . Anche le curve magnetiche di  $(M, F)$  possono essere viste, almeno localmente, come soluzioni di un problema variazionale. Infatti, sia  $U$  un aperto della superficie  $M$  tale che  $F = d\omega$  per qualche 1-forma  $\omega$  (detta *1-forma potenziale*). Siano  $p, q \in U$  e  $C(p, q)$  l'insieme di tutte le curve differenziabili che congiungono  $p$  a  $q$  e contenute in  $U$ . Per  $\gamma \in C(p, q)$ ,

$\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , consideriamo il funzionale, detto *funzionale di Landau-Hall*,

$$LH(\gamma) = \int_a^b \left( \frac{1}{2} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 + \omega(\dot{\gamma}) \right) dt = E(\gamma) + \int_a^b \omega(\dot{\gamma}) dt.$$

Si può vedere che una curva  $\gamma(t)$  di  $C(p, q)$  soddisfa l'equazione di Lorentz (5.66) se e solo se è punto critico del funzionale di Landau-Hall (cf.[2]).

La seguente caratterizzazione delle curve magnetiche è utile per applicazioni numeriche [5].

**Proposizione 5.104.** *Una curva regolare parametrizzata  $\gamma(t)$  di  $(M, F = f\Omega)$  è una curva magnetica, ossia soddisfa l'equazione di Lorentz se, e solo se, è soddisfatto il seguente sistema di equazioni*

$$(5.67) \quad \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = c^2 (\text{cost.} \neq 0) \quad e \quad \dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) \wedge N(t) = f(\gamma(t))c^2.$$

In particolare, se  $\gamma(t)$  è parametrizzata a velocità scalare costante (uguale a 1), allora  $\gamma(t)$  è una curva magnetica se e solo se è soddisfatta l'equazione

$$\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) \wedge N(t) = f(\gamma(t)).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma(t)$  curva magnetica. Per quanto osservato prima,  $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = c^2$  ( $\text{cost} \neq 0$ ). Usando le proprietà del prodotto misto, le proprietà di  $J$  e l'equazione di Gauss (5.12), otteniamo (omettendo il parametro)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} \wedge N &= \ddot{\gamma} \cdot N \wedge \dot{\gamma} = \ddot{\gamma} \cdot J\dot{\gamma} = \left( \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot J\dot{\gamma} \right) \\ &= f(\gamma)(J\dot{\gamma} \cdot J\dot{\gamma}) \\ &= f(\gamma) \|\dot{\gamma}\|^2 = f(\gamma) c^2. \end{aligned}$$

Ora proviamo il viceversa. Osserviamo che  $E_1(t) = (1/c)\dot{\gamma}(t)$  e  $E_2(t) = (1/c)J\dot{\gamma}(t)$  formano una base ortonormale lungo  $\gamma$ . Quindi, possiamo scrivere

$$(5.68) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \left( \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot E_1(t) \right) E_1(t) + \left( \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot E_2(t) \right) E_2(t).$$

Siccome  $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = (\text{cost})^2$ , si ha

$$c \left( \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot E_1(t) \right) = \left( \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot \dot{\gamma}(t) \right) = \frac{1}{2} (\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t))' = 0.$$

Inoltre,

$$c \left( \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot E_2(t) \right) = \left( \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot J\dot{\gamma}(t) \right) = (\ddot{\gamma} \cdot N \wedge \dot{\gamma}) = (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} \wedge N) = f(\gamma)c^2.$$

Pertanto, dalla (5.68) si ottiene l'equazione di Lorentz (5.66).  $\square$

**Osservazione 5.105.** Sia  $\gamma(t)$  una curva regolare parametrizzata di  $(M, F = f\Omega)$ . Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- 1)  $\gamma(t)$  è una curva magnetica;
- 2)  $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = c^2$  ( $\text{cost} \neq 0$ ) e  $\Omega(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) = f(\gamma(t))c^2$ ;

$$3) \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = c^2 \text{ (cost} \neq 0) \quad \text{e} \quad \Omega(\dot{\gamma}(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}) = f(\gamma(t))c^2.$$

Basta osservare, tenendo presente la (5.67) e la Proposizione 5.104, che

$$\Omega(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) = \dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) \wedge N(t) \quad \text{e}$$

$$\Omega(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) = J(\dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} = J(\dot{\gamma}) \cdot \left( \frac{D\dot{\gamma}}{dt} + (\ddot{\gamma} \cdot N)N \right) = \Omega(\dot{\gamma}(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}).$$

Si noti che la 3) prescinde dall'ipotesi di immersione di  $M$  in  $\mathbb{R}^3$ .

Sia ora  $\gamma(s)$  una curva differenziabile regolare di  $M$  parametrizzata a velocità unitaria. Allora, lungo  $\gamma$  possiamo considerare (cf. Sezione 5.4) il riferimento di Frenet ( $\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$ ,  $\vec{n}(s) = J\vec{t}(s)$ ), e la curvatura geodetica

$$k_g(s) := \frac{D\vec{t}}{ds} \cdot \vec{n}(s).$$

Quindi, abbiamo le formule di Frenet

$$\frac{D\vec{t}}{ds} = k_g(s)\vec{n}(s), \quad \frac{D\vec{n}}{ds} = -k_g(s)\vec{t}(s).$$

Siccome  $\Phi(\dot{\gamma}) = fJ(\dot{\gamma}) = fJ(\vec{t}) = f\vec{n}$ , l'equazione di Lorentz (5.66) diventa

$$\frac{D\vec{t}}{ds} = f\vec{n}.$$

D'altronde, dalla prima formula di Frenet

$$\frac{D\vec{t}}{ds} = k_g(s)\vec{n}(s).$$

Pertanto, otteniamo (cf. anche [2])

**Teorema 5.106.** *Per una curva magnetica  $\gamma(s)$  di  $(M, F = f\Omega)$ , la curvatura geodetica è data da  $k_g(s) = f(\gamma(s))$ .*

Un campo magnetico  $F$  di intensità costante  $f = \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \neq 0$ , è detto *campo magnetico uniforme*. Consideriamo  $\mu \neq 0$ , altrimenti ricadiamo nel caso delle curve geodetiche.

**Corollario 5.107.** *Le curve magnetiche  $\gamma(s)$  di  $(M, F)$ , dove  $F$  è campo magnetico uniforme con intensità  $\mu \neq 0$ , sono tutte e sole le curve che hanno curvatura geodetica  $k_g(s) = \text{cost.} = \mu$ .*

**Osservazione 5.108.** Per una curva magnetica  $\gamma(t)$ , come nel Teorema 5.106, parametrizzata a velocità scalare  $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{cost.} = c > 0$ , la curvatura geodetica  $k_g(t) = f(\gamma(t))/c$ . Infatti, in tal caso il riferimento di Frenet lungo  $\gamma(t)$  è ( $\vec{t}(t) = \frac{1}{c}\dot{\gamma}(t)$ ,  $\vec{n}(t) = J\vec{t}(t) = \frac{1}{c}J(\dot{\gamma}(t))$ ) e le corrispondenti formule sono

$$\frac{D\vec{t}}{dt} = ck_g(t)\vec{n}(t), \quad \frac{D\vec{n}}{dt} = -ck_g(t)\vec{t}(t).$$

Pertanto, da

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = f(\gamma(t))J(\dot{\gamma}) \quad \text{e} \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = ck_g(t)J(\dot{\gamma}),$$

si ottiene  $ck_g(t) = f(\gamma(t))$ .

**Esempio 5.109. Le curve magnetiche del piano euclideo**

Sia  $M$  il piano euclideo  $\mathbb{R}^2$  e sia  $F$  il campo magnetico uniforme  $F = \mu\Omega$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \neq 0$ , dove  $\Omega$  è la 2-forma fondamentale  $\Omega(X, Y) = JX \cdot Y$  e  $J$  è la struttura complessa canonica di  $\mathbb{R}^2$  (cf. Sezione 2.3), quindi  $\Omega = dx \wedge dy$ . Allora, le curve magnetiche di  $(\mathbb{R}^2, F)$  sono tutte e sole (parti di) circonferenze di raggio  $r = 1/|\mu|$  del piano  $\mathbb{R}^2$ . Ciò segue dal Corollario 5.107 e dal fatto che le curve regolari di  $\mathbb{R}^2$  di curvatura geodetica costante (ovvero, l'usuale curvatura è costante) sono tutte e sole (parti di) circonferenze di raggio  $r = 1/|\mu|$ . Oppure, con un calcolo diretto, basta osservare che in questo caso l'equazione di Lorentz

$$\ddot{\gamma} = \mu J\dot{\gamma}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \neq 0,$$

è equivalente al sistema di equazioni differenziali  $x'' = -\mu y'$ ,  $y'' = \mu x'$ .

**Esempio 5.110. Le curve magnetiche della sfera canonica**

Sia  $\mathbb{S}^2$  la sfera canonica di raggio  $R$  e sia  $F$  il campo magnetico uniforme  $F = \mu\Omega$ , dove  $\Omega$  è la 2-forma d'area della sfera (cf. Osservazione 3.10). Allora, le curve magnetiche di  $(\mathbb{S}^2, F)$  sono tutte e sole (parti di) circonferenze, opportunamente parametrizzate, di raggio  $r < R$  di  $\mathbb{S}^2$ . Sia  $\gamma$  una circonferenza di raggio  $r < R$  della sfera  $\mathbb{S}^2$ , quindi un parallelo di  $\mathbb{S}^2$ . Parametizziamo  $\gamma$  con

$$\gamma(s) = (r\cos(s/r), r\sin(s/r), \delta), \quad \text{dove } \delta^2 = R^2 - r^2,$$

quindi  $\gamma$  è la sezione di  $\mathbb{S}^2$  con il piano  $z = \delta < R$ . Allora,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= (-\sin(s/r), \cos(s/r), 0) \quad \text{e} \\ \ddot{\gamma} &= (-(1/r)\cos(s/r), -(1/r)\sin(s/r), 0). \end{aligned}$$

Inoltre, il campo normale lungo  $\gamma$  è dato da

$$N(s) = N(\gamma(s)) = ((r/R)\cos(s/r), (r/R)\sin(s/r), (\delta/R)).$$

Per dimostrare che il parallelo  $\gamma(s)$  è una curva magnetica, possiamo procedere in diversi modi.

1) Ricordiamo che nel caso di  $\mathbb{S}^2$ , la struttura complessa  $J$  determinata da  $\Omega$  è definita da  $JX = N \wedge X$  (cf. Sezione 3.10), quindi

$$J\dot{\gamma} = N(s) \wedge \dot{\gamma}(s) = (1/R)(-\delta\cos(s/r), -\delta\sin(s/r), r).$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{D\dot{\gamma}}{ds} &= \ddot{\gamma} - (\ddot{\gamma} \cdot N)N = \ddot{\gamma} + \frac{1}{R}N \\ &= \left( \frac{r^2 - R^2}{rR^2} \cos(s/r), \frac{r^2 - R^2}{rR^2} \sin(s/r), \frac{\delta}{R^2} \right) \\ &= \left( -\frac{\delta^2}{rR^2} \cos(s/r), -\frac{\delta^2}{rR^2} \sin(s/r), \frac{\delta}{R^2} \right) \\ &= \frac{\delta}{R^2} \left( -\frac{\delta}{r} \cos(s/r), -\frac{\delta}{r} \sin(s/r), 1 \right). \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\frac{D\dot{\gamma}}{ds} = \frac{\delta}{Rr} J\dot{\gamma} = \mu J\dot{\gamma}, \quad \text{dove} \quad \mu = \frac{\delta}{Rr},$$

e quindi  $\gamma(s)$  soddisfa l'equazione di Lorentz (5.66) con  $F = \mu\Omega$ .

2) Basta osservare che il parallelo  $\gamma(s)$  soddisfa l'equazione

$$\dot{\gamma}(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) \wedge N(s) = \frac{\delta}{R} \left( (1/r) \sin^2(s/r) + (1/r) \cos^2(s/r) \right) = \mu,$$

con  $\mu = \delta/Rr$ , e applicare la Proposizione 5.104. Da  $\mu = \delta/Rr$  e  $\delta^2 = R^2 - r^2$ , si ottiene che  $r$ ,  $R$  e  $\mu$  sono legati da

$$r = R/\sqrt{1 + R^2\mu^2}.$$

3) E' noto che il parallelo  $\gamma(s)$  ha curvatura geodetica costante data da (cf. Esempio 5.45)

$$k_g(s) = \frac{\cos \vartheta}{R \sin \vartheta},$$

dove  $\vartheta$ , ( $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ), è la colatitudine che individua  $\gamma$ . Pertanto, dal Corollario 5.107 segue che  $\gamma(s)$  è una curva magnetica con  $\mu = k_g$ . Inoltre,  $\gamma(s)$  ha raggio  $r$  dato da

$$r = R \sin \vartheta = \frac{R}{\sqrt{1 + (\cos^2 \vartheta / \sin^2 \vartheta)}} = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 k_g^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \mu^2}} < R.$$

Viceversa, data  $\gamma(s)$  curva magnetica di  $(\mathbb{S}^2, F = \mu\Omega)$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_p$ , consideriamo il parallelo  $\sigma$  di  $\mathbb{S}^2$  dato da  $\mathbb{S}^2 \cap \Pi$ , dove  $\Pi$  è il piano contenente il vettore tangente  $V_p = (p, v) \in T_p \mathbb{S}^2$  (ovvero, contenente la retta per  $p$  e parallela a  $v$ ) e a distanza  $\delta = \sqrt{R^2 - r^2}$  dal centro di  $\mathbb{S}^2$ , dove la costante  $r = R/\sqrt{1 + R^2\mu^2}$ . Il parallelo  $\sigma$  ha raggio  $r$ , e per quanto detto prima è curva magnetica di  $\mathbb{S}^2$  con le stesse condizioni iniziali di  $\gamma(s)$  e campo magnetico  $F = \mu\Omega$ . Quindi, per l'unicità delle curve magnetiche con fissate condizioni iniziali,  $\gamma(s)$  è contenuta in  $\sigma$ .

Siccome  $r < R$ , i punti antipodali non si potranno mai congiungere con una curva magnetica di  $(\mathbb{S}^2, F = \mu\Omega)$ .

**Esempio 5.111. Le curve magnetiche del piano iperbolico**

Una breve descrizione delle curve magnetiche nel semipiano di Poincaré, come modello di piano iperbolico, è data nell'Osservazione 6.11.

**Esempio 5.112. Superficie di rotazione**

Sia  $M$  una superficie di rotazione come nell'Esempio 5.75. Sia  $\sigma(t)$ , con  $t$  ascissa curvilinea, un parallelo di  $M$ , cioè  $\sigma(t) = \sigma_{u_0}(t) = \varphi(u_0, v(t))$ . Allora, come nella dimostrazione dei risultati dell'Esempio 5.75, la (5.59) diventa

$$\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = -f(u_0)f'(u_0)(v'(t))^2\varphi_u(t),$$

e siccome  $1 = \dot{\sigma}(t) \cdot \dot{\sigma}(t) = f^2(u_0)(v'(t))^2$ , si ha

$$\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = -\frac{f'(u_0)}{f(u_0)}\varphi_u(t).$$

Dunque, il parallelo  $\sigma_{u_0}(t)$  ha curvatura geodetica costante che indichiamo con  $k_g(u_0)$ . Infatti,

$$\|D\dot{\sigma}/dt\|^2 = (f'(u_0))^2/(f(u_0))^2 \quad \text{e quindi} \quad k_g^2(u_0) = (f'(u_0))^2/(f(u_0))^2.$$

D'altronde, ogni superficie di rotazione è orientabile (cf. Esempio 3.84). Pertanto, ogni parallelo  $\sigma_{u_0}(t)$  è una curva magnetica di  $M$  rispetto al campo magnetico uniforme  $F = \mu\Omega$  con  $\mu = k_g(u_0)$ . Cambiando verso al campo normale  $N$ , se necessario, possiamo assumere  $k_g(u_0) = f'(u_0)/f(u_0)$ . Naturalmente consideriamo il caso  $k_g(u_0) \neq 0$ , ovvero  $f'(u_0) \neq 0$ , altrimenti il parallelo  $\sigma_{u_0}(t)$  è una curva geodetica.

**Esercizio 5.113.** Sia  $M$  una superficie di rotazione del tipo considerato nell'Esempio 5.112. Assumiamo che tutti i paralleli di  $M$  abbiano la stessa curvatura geodetica, ovvero  $k_g(u) = k_g(u_0) \neq 0$  per ogni  $u$ . Dire che tipo di superficie di rotazione è  $M$ . Inoltre, confrontare il risultato di questo esercizio con quello dell'Esercizio 5.81.

*Suggerimento:* tenere presente la formula (4.10) che esprime la curvatura gaussiana di una superficie di rotazione.

**Esercizio 5.114.** Sia  $M$  il cono ottenuto ruotando la semiretta  $\gamma(u) = (au, 0, bu)$ ,  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $u > 0$ , intorno all'asse delle  $z$ . Verificare che per ogni  $\mu > 0$  esiste una curva magnetica rispetto al campo magnetico uniforme  $F = \mu\Omega$ .

**Osservazione 5.115.** Per uno studio delle curve magnetiche (rispetto a un campo magnetico uniforme) sulla superficie torica si può vedere [2].

**Osservazione 5.116.** P. Herreros [13] per affrontare un problema sulle superfici relativo alle curve chiuse di curvatura geodetica costante, studia le curve magnetiche su una superficie in presenza di un campo magnetico uniforme.



## CAPITOLO 6

### Geometria iperbolica

Per una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , molte proprietà geometriche e oggetti geometrici dipendono solo dai coefficienti della prima forma fondamentale  $E, F, G$ , in altre parole sono invarianti che fanno parte della geometria intrinseca della superficie. D'altronde, il fatto cruciale che permette di sviluppare una geometria intrinseca è che i coefficienti  $E, F, G$  sono funzioni differenziabili che definiscono un prodotto scalare su ogni piano tangente, ovvero i coefficienti  $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$  definiscono una matrice simmetrica definita positiva. Equivalentemente, la matrice  $(g_{ij})$  definisce un tensore (differenziabile) covariante simmetrico di ordine 2 e definito positivo. In questo modo si può definire una “prima forma fondamentale”, ovvero una metrica riemanniana, su un arbitrario dominio  $D$  di  $\mathbb{R}^2$  e quindi sviluppare su  $D$  una geometria analoga alla geometria intrinseca di una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Come un'applicazione di questo approccio, studieremo modelli di geometria (non euclidea) iperbolica.

#### 6.1. Domini riemanniani e varietà riemanniane

##### Domini riemanniani

Sia  $D$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $g = (g_{ij})$  una matrice simmetrica definita positiva di ordine 2 costituita da funzioni differenziabili  $g_{ij}$  definite su  $D$ . In tal caso diciamo che  $g$  è una *metrica riemanniana* e  $(D, g)$  è un dominio riemanniano (2-dimensionale). Naturalmente  $(\delta_{ij})$ , il più semplice esempio di matrice simmetrica definita positiva su  $D$ , definisce la *metrica euclidea*  $g_0$  su  $D$ .

Sia  $(D, g)$  un arbitrario dominio riemanniano. Per ogni  $p \in D$ , il piano tangente è definito, come nel caso di  $\mathbb{R}^2$ , da

$$T_p D = \{V_p = (p, v) : v \in \mathbb{R}^2\} = T_p \mathbb{R}^2.$$

Le coordinate  $(x_1, x_2)$  svolgono il ruolo dei parametri  $(u, v)$ , i campi vettoriali  $\partial_1, \partial_2$  definiti da

$$(\partial_1)_p = (E_1)_p = (1, 0)_p \quad \text{e} \quad (\partial_2)_p = (E_2)_p = (0, 1)_p$$

svolgono il ruolo dei campi vettoriali  $(\varphi_u, \varphi_v)$ . Quindi ogni vettore tangente  $V_p = (v_1, v_2)_p = v_1(\partial_1)_p + v_2(\partial_2)_p$  con  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$  e  $p \in D$ . Naturalmente, un campo vettoriale (differenziabile)  $V$  su  $D$ , ossia un elemento di  $\mathfrak{X}(D)$ , è definito da

$$V = a_1 \partial_1 + a_2 \partial_2,$$

dove  $a_1, a_2$  sono funzioni differenziabili su  $D$ .

La matrice  $g = (g_{ij})$  definisce un prodotto scalare tra campi vettoriali differenziabili e tra vettori tangenti. Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$ ,  $X = (a_1, a_2) = a_1\partial_1 + a_2\partial_2$ ,  $Y = (b_1, b_2) = b_1\partial_1 + b_2\partial_2$ , allora  $g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}$  e

$$g(X, Y) = a_1b_1g_{11} + a_2b_2g_{22} + (a_1b_2 + a_2b_1)g_{12}$$

è una funzione differenziabile su  $D$ , quindi un elemento di  $\mathcal{F}(D)$ . Se  $V_p, W_p \in T_p\mathbb{R}^2$ ,  $p \in D$ ,  $V_p = v_1(\partial_1)_p + v_2(\partial_2)_p$  e  $W_p = w_1(\partial_1)_p + w_2(\partial_2)_p$ , si ha

$$g_p(V_p, W_p) = v_1w_1g_{11}(p) + v_2w_2g_{22}(p) + (v_1w_2 + v_2w_1)g_{12}(p).$$

La metrica euclidea  $g_0$  induce il prodotto scalare euclideo:

$$g_0(X, Y) = a_1b_1 + a_2b_2 = X \cdot Y.$$

Dati due domini riemanniani  $(D, g)$  e  $(\tilde{D}, \tilde{g})$ , un'applicazione differenziabile  $f : D \rightarrow \tilde{D}$  si dice che è una isometria se  $f$  è un diffeomorfismo il cui differenziale soddisfa

$$\tilde{g}_p(f_*V_p, f_*W_p) = g_p(V_p, W_p), \text{ per ogni } p \in D \text{ e } V_p, W_p \in T_p\mathbb{R}^2.$$

La condizione che un diffeomorfismo  $f : D \rightarrow \tilde{D}$  sia una isometria è tradotta in termini matriciali dalla seguente condizione (cf. anche (5.3))

$$(6.1) \quad (g_{ij})_p = (J(f))^t(\tilde{g}_{ij})_{f(p)}J(f)$$

dove  $J(f)$  è la matrice jacobiana di  $f$ .

Alla luce di quanto detto, possiamo introdurre per un dominio riemanniano  $(D, g)$  tutti gli invarianti intrinseci che abbiamo studiato per le superfici, quindi sviluppare per  $(D, g)$  i concetti studiati nelle sezioni del precedente capitolo, ad eccezione della Sezione 5.3. Ad esempio, la *lunghezza di curve* di  $D$  rispetto a  $g$  e la *distanza* su  $D$  indotta da  $g$ , si definiscono in modo del tutto analogo al caso delle superfici di  $\mathbb{R}^3$ . La situazione è un pò più delicata nel definire la curvatura gaussiana, i coefficienti di Christoffel, la derivata covariante e le curve geodetiche di  $(D, g)$ . Per tali invarianti possiamo procedere, ad esempio, nel modo seguente.

La curvatura gaussiana (o meglio la *curvatura di Gauss-Riemann*)  $K$  si definisce mediante la formula (5.5) sostituendo i coefficienti  $E, F, G$  rispettivamente con  $g_{11}, g_{12}$  e  $g_{22}$ . Quindi,

$$(6.2) \quad \begin{aligned} K(\det(g_{ij}))^2 = & \left[ (\partial_2\partial_1g_{12} - (1/2)\partial_1^2g_{22} - (1/2)\partial_2^2g_{11}) \det(g_{ij}) \right. \\ & - (\partial_2g_{12}) \left[ (1/2)g_{22}\partial_1g_{11} - g_{12}(\partial_1g_{12} - (1/2)\partial_2g_{11}) \right] \\ & + (1/2)(\partial_1g_{22}) \left[ (1/2)g_{22}\partial_1g_{11} - g_{12}(\partial_1g_{12} - (1/2)\partial_2g_{11}) \right] \\ & + (1/2)\partial_2g_{22} \left[ (1/2)g_{12}\partial_1g_{11} - g_{11}(\partial_1g_{12} - (1/2)\partial_2g_{11}) \right] \\ & + (1/4)\partial_2g_{11}(g_{22}\partial_2g_{11} - g_{12}\partial_1g_{22}) \\ & \left. - (1/4)\partial_1g_{22}(g_{12}\partial_2g_{11} - g_{11}\partial_1g_{22}) \right]. \end{aligned}$$

In particolare, se  $g_{12} = 0$ , la (6.2) diventa

$$(6.3) \quad K(g_{11}g_{22})^2 = -(1/2)g_{11}g_{22}(\partial_2^2 g_{11} + \partial_1^2 g_{22}) \\ + (1/4)g_{22} \left[ (\partial_1 g_{11})(\partial_1 g_{22}) + (\partial_2 g_{11})^2 \right] \\ + (1/4)g_{11} \left[ (\partial_2 g_{11})(\partial_2 g_{22}) + (\partial_1 g_{22})^2 \right].$$

Analogamente i *simboli di Christoffel*  $\Gamma_{ij}^k$  si definiscono mediante le soluzioni dei sistemi (4.2), (4.3) e (4.4). Risolvendo tali sistemi, si trova che i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  si possono esprimere con la seguente formula

$$(6.4) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 (\partial_j g_{ir} + \partial_i g_{jr} - \partial_r g_{ij}) g^{rk},$$

dove  $(g^{ij})$  denota la matrice inversa di  $(g_{ij})$ .

Sia ora  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ , una curva differenziabile di  $D$  e sia

$$V(t) = a_1(t) (\partial_1)_t + a_2(t) (\partial_2)_t$$

un campo vettoriale differenziabile lungo  $\gamma$ . Consideriamo la corrispondenza

$$\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma), V(t) \mapsto \frac{DV}{dt},$$

dove il campo vettoriale  $\frac{DV}{dt}$  è definito dall'equazione (5.15), ossia

$$(6.5) \quad \frac{DV}{dt} := \sum_{k=1}^2 \left( a'_k(t) + \sum_{i,j=1}^2 a_i(t) x'_j(t) \Gamma_{ij}^k(t) \right) \partial_k(t).$$

Si vede facilmente che con questa definizione,  $\frac{D}{dt}$  è un endomorfismo di  $\mathfrak{X}(\gamma)$  che soddisfa le proprietà (5.13) e (5.14). In particolare, prendendo  $V(t) = \dot{\gamma}(t)$ , la (6.5) diventa

$$(6.6) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left( x''_k(t) + \sum_{i,j=1}^2 x'_i(t) x'_j(t) \Gamma_{ij}^k(t) \right) \partial_k(t).$$

Possiamo quindi definire una curva differenziabile  $\gamma(t)$  come *curva geodetica* se il campo tangente  $\dot{\gamma}(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$ , ovvero  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0 \quad \forall t \in I$ . Inoltre, procedendo come per le superfici, si può definire la *curvatura geodetica*  $k_g(s)$  di una curva regolare  $\gamma(s)$ . Esaminando le dimostrazioni del Teorema 5.51 e del Corollario 5.52 vediamo che esse sono di natura intrinseca, quindi valgono anche nel caso di un dominio riemanniano  $(D, g)$ . Pertanto, la derivata covariante definita da (6.5) e la corrispondente nozione di curva geodetica, sono invarianti riemanniani ossia invarianti per isometrie (locali) di  $(D, g)$ . Naturalmente anche il Teorema 5.47 di esistenza e unicità delle curve geodetiche vale per domini riemanniani.

**Esempio 6.1.** Si consideri il dominio riemanniano  $(D, g)$ , dove  $D = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  e  $g = (1/y^2)g_0$ , quindi  $g_{11} = g_{22} = (1/y^2)$  e  $g_{12} = 0$ . La

matrice inversa  $(g^{ij})$  è definita da  $g^{11} = g^{22} = y^2$  e  $g_{12} = 0$ . Quindi dalla (6.4) si ottiene che i coefficienti di Christoffel non nulli sono dati da:

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -(1/y), \quad \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = 1/y.$$

Pertanto, se  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}_+^2$ , la (6.6) implica che

$$(6.7) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \left( x''(t) - \frac{2}{y(t)}x'(t)y'(t), \quad y''(t) + \frac{1}{y(t)}(x'(t))^2 - \frac{1}{y(t)}(y'(t))^2 \right).$$

Un altro modo di procedere per introdurre gli invarianti di cui sopra è il seguente. Primo passo definire la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  associata al dominio riemanniano  $(D, g)$ . Per fare ciò, basta definire  $\nabla_X Y$  con la formula (5.30) di Koszul:

$$2g(\nabla_Y X, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [X, Y]).$$

e poi verificare che

- $\nabla$  è una connessione lineare, ossia verifica (5.25), (5.26) e (5.27);
- $\nabla$  è simmetrica:  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ;
- $\nabla$  è compatibile con la metrica  $g$ :  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ .

Per come definita, la connessione di Levi-Civita è invariante per isometrie. Quindi, se  $F$  è un'isometria tra  $(D, g)$  e  $(\tilde{D}, \tilde{g})$  vale l'analogia della (5.32)

$$F_*(\nabla_Y X) = \tilde{\nabla}_{F_*Y} F_*X.$$

I simboli di Christoffel definiti dalla (6.4), si dicono anche coefficienti della connessione di Levi-Civita  $\nabla$ . Infatti, tali coefficienti sono determinati anche dalla relazione

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Avendo a disposizione la connessione di Levi-Civita  $\nabla$ , si può definire il tensore di curvatura con la formula

$$R(X, Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

e quindi la curvatura di Gauss-Riemann con la formula (5.48). Con un calcolo un pò laborioso, si dimostra che questa definizione di curvatura gaussiana coincide con la (6.2). Infine, si può verificare che, dati una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $D$  e un campo vettoriale  $X \in \mathfrak{X}(D)$ , il campo vettoriale  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} X$  coincide con il campo vettoriale  $DX(t)/dt$  definito dalla (6.5).

### Varietà riemanniane

Vogliamo dare adesso una veloce presentazione di come il concetto di superficie e il concetto di dominio riemanniano, si possono estendere a quello più generale di varietà riemanniana. Per approfondimenti sulle varietà differenziabili e sulle varietà riemanniane (in generale di dimensione  $n$ ) si può consultare, ad esempio, [21] e la bibliografia in esso riportata. Una *superficie astratta*

(detta anche *varietà differenziabile di dimensione 2*) è uno spazio topologico connesso e di Hausdorff  $M$ , localmente omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , munito di un atlante differenziabile, ossia di una famiglia  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i : U_i \rightarrow D_i)\}_{i \in I}$  che verifica le seguenti proprietà.

- 1) Se  $(U, \phi : U \rightarrow D)$  è un generico elemento di  $\mathcal{A}$ , allora  $U$  è un aperto di  $M$ ,  $D$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e l'applicazione  $\phi : p \mapsto \phi(p) = (x_1, x_2)$  è un omeomorfismo (detto *applicazione coordinata*). La coppia  $(U, \phi)$  si dice carta locale e  $(x_1, x_2)$  si dicono *coordinate locali* del punto  $p$  rispetto alla fissata carta locale.
- 2) I domini delle carte ricoprono  $M$ , cioè  $M = \cup_i U_i$ .
- 3) Per ogni  $i, j \in I$ , con  $U_i \cap U_j$  non vuoto, le applicazioni

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j), (x_1, x_2) = \phi_i(p) \mapsto (y_1, y_2) = \phi_j(p),$$

e

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j), (y_1, y_2) = \phi_j(p) \mapsto (x_1, x_2) = \phi_i(p),$$

sono applicazioni differenziabili tra aperti di  $\mathbb{R}^2$ . In altre parole, la proprietà 3) ci dice che il cambiamento di coordinate avviene con applicazioni differenziabili.

L'atlante  $\mathcal{A}$  si dice che definisce una struttura differenziabile su  $M$ , e due atlanti differenziabili  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  e  $\mathcal{A}' = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$  definiscono la stessa struttura differenziabile su  $M$  se  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  è ancora un atlante differenziabile di  $M$ . Sostituendo  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{R}^n$ , con la stessa definizione, si ha il concetto di varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Funzioni differenziabili a valori reali su una varietà differenziabile, e funzioni differenziabili tra varietà differenziabili, si definiscono come per le superfici (cf. Sezione 3.3) ossia in termini di coordinate locali. Un vettore tangente in un punto  $p$  di una varietà differenziabile  $M$  è definito come una derivazione dell'algebra  $\mathcal{F}(p)$  delle funzioni differenziabili in un intorno di  $p$  (cf. Sezione 1.3). Quindi, lo spazio tangente  $T_p M$  è lo spazio di tutti i vettori tangenti. In particolare, le derivazioni

$$(\partial_i)_p : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto (\partial f / \partial x_i)(p) := (\partial(f \circ \phi^{-1}) / \partial x_i)(\phi(p)),$$

definiscono i vettori tangenti coordinati.

Una metrica riemanniana su una superficie astratta  $M$  (o più in generale su una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale) viene definita assegnando nel dominio di ogni carta locale di un atlante differenziabile, una matrice simmetrica  $g = (g_{ij})$  di ordine 2 definita positiva, con i coefficienti  $g_{ij}$  differenziabili, che soddisfino, per ogni cambiamento di coordinate, la condizione di compatibilità (3.20). In modo equivalente, una metrica riemanniana su una superficie astratta si può definire assegnando un tensore covariante  $g$  del secondo ordine, simmetrico e definito positivo, cioè un'applicazione  $\mathcal{F}$ -bilineare

$$g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M) \text{ che soddisfa}$$

$$g(X, Y) = g(Y, X), \quad g(X, X) \geq 0, \quad g(X, X)(p) = 0 \Rightarrow X_p = 0.$$

Una metrica riemanniana  $g$  induce un prodotto scalare su ogni piano tangente

$$g_p((\partial_i)_p, (\partial_j)_p) := g(\partial_i, \partial_j)(p) = g_{ij}(p),$$

dove  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ . La coppia  $(M, g)$  si dice **varietà riemanniana**. Naturalmente, domini riemanniani e superfici (connesse) regolari di  $\mathbb{R}^3$  (con la prima forma fondamentale) sono esempi di varietà riemanniana di dimensione 2. Per una varietà riemanniana si possono considerare il concetto di isometria con la formula (6.1), il concetto di derivata covariante con la formula (6.5) e quindi quello di curva geodetica (che è sempre invariante per isometrie). Naturalmente, si può considerare la connessione di Levi-Civita con la formula (5.30) di Koszul e il concetto di curvatura di Gauss-Riemann.

**Osservazione 6.2.** Come nel caso delle superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$  (cf. Sezioni 3.8, 3.9 e 3.10), anche per le superfici astratte possiamo definire il concetto di orientabilità, di  $r$ -forma differenziale (per  $r = 1, 2$ ), di area, di 2-forma d'area e di struttura complessa. In particolare, il concetto di orientabilità per le superfici astratte si può dare esattamente con la Definizione 3.76, ed anche il Teorema 3.86 (orientabilità in termini di una 2-forma non nulla) vale per varietà differenziabili 2-dimensionali.

**Osservazione 6.3.** Da notare che, in generale, i concetti di derivata covariante e curva geodetica si possono introdurre indipendentemente dalla presenza di una metrica riemanniana, essi sono concetti di natura affine che si possono introdurre semplicemente assegnando una connessione lineare  $\nabla$ . Un diffeomorfismo  $F$  di una varietà differenziabile  $M$ , che conserva la fissata connessione lineare  $\nabla$ :  $F_*(\nabla_Y X) = \nabla_{F_*Y} F_*X$ , e quindi conserva parallelismo e curve geodetiche, si dice trasformazione affine di  $(M, \nabla)$ . La derivata covariante (e quindi anche la nozione di curva geodetica) introdotta in queste note in effetti è indotta da una speciale connessione lineare intimamente legata alla prima forma fondamentale (o alla metrica riemanniana nel caso dei domini riemanniani), ovvero è indotta dalla connessione di Levi-Civita.

## 6.2. Isometrie del semipiano di Poincaré

**6. 2-1. Il semipiano di Poincaré.** Il semipiano di Poincaré, detto anche piano iperbolico, è il dominio riemanniano  $(D, g)$  considerato nell'Esempio 6.1. Quindi,  $D$  è il semipiano superiore

$$\mathbb{R}_+^2 = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\},$$

e  $g$  è la metrica riemanniana definita per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^2$  da

$$g_{11}(p) = g_{22}(p) = \frac{1}{y^2(p)} \text{ e } g_{12}(p) = 0, \quad \text{ossia } g_p = (g_{ij})(p) \equiv \frac{1}{y^2(p)} g_0.$$

Il semipiano di Poincaré è un modello di geometria iperbolica, forse il più interessante rispetto agli altri modelli (disco di Beltrami e disco di Poincaré). Una domanda naturale è chiedere se il semipiano di Poincaré si può realizzare come superficie di  $\mathbb{R}^3$ . Questo, come già osservato nella Sezione 4.9, non è possibile in quanto il semipiano di Poincaré è un dominio riemanniano completo (cf. Osservazione (6.9)). Tuttavia, ci sono superfici regolari in  $\mathbb{R}^3$  la cui

geometria intrinseca è localmente isometrica a quella del semipiano di Poincaré. Il classico esempio è la superficie data dalla pseudo-sfera di Beltrami, infatti nell'Osservazione 4.63 si è visto che tale superficie si può parametrizzare localmente con coordinate rispetto alle quali la prima forma fondamentale si esprime come la metrica riemanniana  $g$  del modello iperbolico del semipiano di Poincaré.

**La curvatura di Gauss-Riemann del semipiano di Poincaré**  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ .

Siccome

$$g_{11} = g_{22} = 1/y^2 \quad \text{e} \quad g_{12} = 0,$$

allora

$$\partial_2 g_{11} = \partial_2 g_{22} = -2/y^3, \quad \partial_1 g_{11} = \partial_1 g_{22} = 0, \quad \partial_2^2 g_{11} = 6/y^4.$$

Quindi, sostituendo nella (6.3) ossia nella formula

$$\begin{aligned} K(g_{11}g_{22})^2 = & -(1/2)g_{11}g_{22}(\partial_2^2 g_{11} + \partial_1^2 g_{22}) + (1/4)g_{22} \left[ (\partial_1 g_{11})(\partial_1 g_{22}) + (\partial_2 g_{11})^2 \right] \\ & + (1/4)g_{11} \left[ (\partial_2 g_{11})(\partial_2 g_{22}) + (\partial_1 g_{22})^2 \right], \end{aligned}$$

si ottiene che la curvatura di Gauss-Riemann del semipiano di Poincaré è data da

$$(1/y^8)K = -3/y^8 + 1/y^8 + 1/y^8.$$

Pertanto,  $K = \text{cost.} = -1$  in accordo col fatto che la curvatura gaussiana della pseudo-sfera di Beltrami, data dalla (4.25), è  $-1$  (prendendo la costante  $R = 1$ ).

**Esercizio 6.4.** Determinare, usando la formula di Koszul per la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  del semipiano di Poincaré, i campi vettoriali  $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ , ( $j = 1, 2$ ). Quindi, determinare la curvatura di Gauss-Riemann usando il tensore di curvatura.

**6. 2-2. Isometrie del semipiano di Poincaré.** Iniziamo introducendo l'inversione rispetto a una circonferenza. Sia  $\mathbb{S}^1$  la circonferenza del piano euclideo di centro  $p_0$  e raggio  $r$ . L'inversione rispetto a tale circonferenza è l'applicazione

$$\mathfrak{I} : \mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}, \quad p \mapsto p',$$

dove  $p'$  è il punto della semiretta  $p_0p$  tale che  $\overline{p_0p} \cdot \overline{p_0p'} = r^2$ . Se  $p$  è interno (risp. esterno) a  $\mathbb{S}^1$ , allora  $p'$  è esterno (risp. interno) a  $\mathbb{S}^1$ . Se  $p \in \mathbb{S}^1$ , allora  $p' = p$ . Quindi  $\mathfrak{I}$  scambia l'interno con l'esterno e mantiene fissi i punti della circonferenza  $\mathbb{S}^1$ . Graficamente l'inversione si può costruire come segue (cf. Figura 1). Se  $p$  è interno al cerchio, mandiamo da  $p$  la perpendicolare alla retta  $p_0p$  e siano  $H$  e  $K$  le intersezioni di tale perpendicolare con la circonferenza. Le tangenti alla circonferenza in  $H$  e  $K$  si incontrano nel punto corrispondente  $p'$  (applicando il primo Teorema di Euclide si ha  $\overline{p_0p} \cdot \overline{p_0p'} = \overline{p_0H}^2 = r^2$ ). Se invece il punto  $p$  è esterno, basta condurre da esso le tangenti alla circonferenza

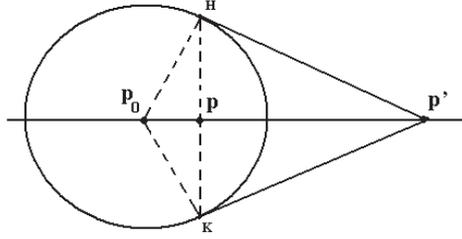


FIGURA 1

e congiungere i loro punti di contatto; tale congiungente incontra  $p_0p$  nel punto corrispondente  $p'$ . Usando coordinate cartesiane, se  $p_0 = (x_0, y_0)$ ,  $p = (x, y)$  e  $p' = (x', y')$ , si vede facilmente che l'inversione è rappresentata dalle equazioni:

$$(6.8) \quad x' = x_0 + \frac{r^2(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad y' = y_0 + \frac{r^2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Allora, l'inversione rispetto alla circonferenza di centro l'origine e raggio  $r$  è data da

$$\mathcal{I} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad p \mapsto (r^2/\|p\|^2)p.$$

Verifichiamo che  $\mathcal{I}$  è un'applicazione conforme, ossia il suo differenziale soddisfa

$$\|(\mathcal{I})_{*p}V_p\|^2 = \lambda^2(p)\|V_p\|^2 = \lambda^2(p)\|v\|^2,$$

equivalentemente

$$g_0((\mathcal{I})_{*p}V_p, (\mathcal{I})_{*p}W_p) = \lambda^2(p)g_0(V_p, W_p) = \lambda^2(p)g_0(v, w),$$

per ogni  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  e  $V_p = (p, v), W_p = (p, w) \in T_p\mathbb{R}^2$ , dove il coefficiente  $\lambda(p)$  è una funzione differenziabile positiva. Siccome

$$\mathcal{I}(p) = \frac{r^2}{\|p\|^2}p = \left( x' = \frac{r^2x}{x^2 + y^2}, y' = \frac{r^2y}{x^2 + y^2} \right),$$

allora

$$(\mathcal{I})_{*p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{r^2}{\|p\|^4} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} (\mathcal{I})_{*p} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \frac{r^2}{\|p\|^4} \begin{pmatrix} (y^2 - x^2)v_1 - 2xyv_2 \\ -2xyv_1 + (x^2 - y^2)v_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{r^2}{\|p\|^4} \left\{ \|p\|^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x(v_1x + v_2y) \\ 2y(v_2y + v_1x) \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$(\mathcal{I})_{*p}V_p = \frac{r^2}{\|p\|^4} \{ \|p\|^2v - 2g_0(v, p)p \}$$

e

$$\|(\mathfrak{I})_{*p}V_p\|^2 = \frac{r^4}{\|p\|^4}\|v\|^2.$$

Quindi  $\mathfrak{I}$  è un'applicazione conforme con coefficiente  $\lambda = r^2/\|p\|^2$ .

**Proposizione 6.5.** *L'inversione  $\mathfrak{I}(p) = (r^2/\|p\|^2)p$  definisce un'isometria del piano iperbolico  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Intanto  $\mathfrak{I}$  applica  $\mathbb{R}_+^2$  in  $\mathbb{R}_+^2$ . Inoltre, poiché  $\mathfrak{I}$  è conforme con coefficiente  $\lambda(p) = r^2/\|p\|^2$ , risulta:

$$\begin{aligned} g_{\mathfrak{I}(p)}((\mathfrak{I})_{*p}V_p, (\mathfrak{I})_{*p}W_p) &= \frac{1}{y^2(\mathfrak{I}(p))}g_0((\mathfrak{I})_{*p}V_p, (\mathfrak{I})_{*p}W_p) \\ &= \frac{\|p\|^4}{r^4y^2(p)}g_0((\mathfrak{I})_{*p}V_p, (\mathfrak{I})_{*p}W_p) \\ &= \frac{1}{y^2(p)}g_0(v, w) = g_p(V_p, W_p) \end{aligned}$$

per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^n$  e per ogni  $V_p = (p, v), W_p = (p, w) \in T_p\mathbb{R}_+^n$ .  $\square$

**Proposizione 6.6.** *Le seguenti applicazioni sono isometrie del piano iperbolico  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ .*

- 1)  $f_1 = \mathfrak{I} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, p = (x, y) \mapsto (r^2/\|p\|^2)p = (r^2/\|p\|^2)(x, y);$
- 2)  $f_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, p = (x, y) \mapsto (-x, y);$
- 3)  $f_3 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, p = (x, y) \mapsto (x + a, y);$
- 4)  $f_4 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, p = (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda = \text{cost} > 0.$

Con notazione complessa ( $z = x + iy$ ), abbiamo

$$f_1(z) = \mathfrak{I}(z) = r^2 \frac{z}{z\bar{z}} = r^2 \frac{1}{\bar{z}}; \quad f_2(z) = -\bar{z}; \quad f_3(z) = z + a; \quad f_4(z) = \lambda z.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La  $f_1$  è un'inversione, quindi un'isometria (applicando la Proposizione 6.5). Le applicazioni  $f_2, f_3, f_4$ , che sono rispettivamente una simmetria (rispetto all'asse  $y$ ), una traslazione (parallela all'asse  $x$ ) e una dilatazione, si vede facilmente che sono isometrie del piano iperbolico.  $\square$

*Le isometrie del semipiano di Poincaré sono applicazioni conformi.* Infatti, se  $f : (\mathbb{R}_+^2, g) \rightarrow (\mathbb{R}_+^2, g)$  è un'isometria per la metrica iperbolica, allora

$$g(V_p, W_p) = g(f_{*p}V_p, f_{*p}W_p) \Rightarrow g_0(f_{*p}V_p, f_{*p}W_p) = \frac{y^2(f(p))}{y^2(p)}g_0(V_p, W_p)$$

per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^2$  e per ogni  $V_p, W_p \in T_p\mathbb{R}_+^2$ . Quindi  $f$  è un'applicazione conforme.

Facciamo vedere ora che le **trasformazioni di Möbius** sono relative alle isometrie del piano iperbolico. Trasformazioni del tipo

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

sono dette *trasformazioni di Möbius*. Esse sono invertibili con  $f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{a - cz}$ .

Se  $c \neq 0$ ,

$$f(z) = \alpha + \frac{\beta}{(cz + d)}, \quad \text{dove } \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{e } \beta = \frac{bc - ad}{c}.$$

Se  $c = 0$ ,

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \text{dove } \alpha = \frac{a}{d} \quad \text{e } \beta = \frac{b}{d}.$$

Quindi ogni trasformazione di Möbius  $f(z)$  si può esprimere come composizione di trasformazioni di Möbius "semplici" del tipo:

$$\psi_1(z) = z + b, \quad b \in \mathbb{C} \quad (\text{traslazione}); \quad \psi_2(z) = e^{i\theta} z \quad (\text{rotazione});$$

$$\psi_3(z) = \rho z, \quad \rho > 0 \quad (\text{dilatazione}); \quad \psi_4(z) = 1/z.$$

Si noti che la trasformazione  $f(z) = az$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , è composizione di trasformazioni del tipo  $\psi_2$  e  $\psi_3$ . In particolare, le **trasformazioni di Möbius reali**

$$f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0,$$

in coordinate reali

$$z = (x, y) \longrightarrow \left( \frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + db}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right),$$

sono isometrie per  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ . Infatti, ogni trasformazione di Möbius reale si può esprimere come composizione di isometrie considerate nella Proposizione 6.6:

$$f_1 \text{ (inversione)}, \quad f_2 \text{ (simmetria)}, \quad f_3 \text{ (traslazione)}, \quad f_4 \text{ (dilatazione)}.$$

Per provare ciò procediamo nel seguente modo.

Se  $c = 0$ , la trasformazione diventa

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \text{dove } \alpha = a/d > 0 \quad \text{e } \beta = b/d,$$

la quale si può esprimere come composizione di una dilatazione e di una traslazione.

Per  $c \neq 0$ , quindi

$$f(z) = \alpha + \beta/(cz + d), \quad \text{dove } \alpha = a/c \quad \text{e } \beta = (bc - ad)/c,$$

applichiamo nell'ordine le seguenti isometrie: dilatazione, traslazione, simmetria, inversione, dilatazione, traslazione.

Se  $c > 0$ , e quindi  $\beta < 0$ , si considera la composizione

$$z \xrightarrow{f_4} cz \xrightarrow{f_3} cz + d \xrightarrow{f_2} -c\bar{z} - d \xrightarrow{f_1} \frac{1}{-cz - d} \xrightarrow{f_4} \frac{-\beta}{-cz - d} = \frac{\beta}{cz + d} \xrightarrow{f_3} \alpha + \frac{\beta}{cz + d}.$$

Se  $c < 0$ , e quindi  $\beta > 0$ , si considera la composizione

$$z \xrightarrow{f_4} -cz \xrightarrow{f_3} -cz - d \xrightarrow{f_2} c\bar{z} + d \xrightarrow{f_1} \frac{1}{cz + d} \xrightarrow{f_4} \frac{\beta}{cz + d} \xrightarrow{f_3} \alpha + \frac{\beta}{cz + d}.$$

Poiché la simmetria  $f_2 : z \rightarrow -\bar{z}$  è un'isometria del piano iperbolico, allora anche le trasformazioni di Möbius reali del tipo:

$$z \mapsto -\bar{z} \mapsto f(-\bar{z}) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d} = \frac{a_1\bar{z} + b}{c_1\bar{z} + d}, \quad a_1d - c_1b = bc - ad < 0,$$

sono isometrie per  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ .

Più precisamente, si dimostra il seguente teorema (cf. [25], p.141).

**Teorema 6.7.** (di Poincaré) *Le isometrie del piano iperbolico  $(\mathbb{R}_+^2, g)$  sono tutte e sole le trasformazioni di Möbius reali del tipo:*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0, \quad \text{oppure} \quad f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc < 0.$$

Siccome

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} \quad \text{e} \quad \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = \frac{\lambda a\bar{z} + \lambda b}{\lambda c\bar{z} + \lambda d} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0,$$

il gruppo delle isometrie del piano iperbolico  $\text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g)$  è dato da

$$\left\{ f : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1 \right\} \cup \left\{ f : z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc = -1 \right\}.$$

Consideriamo il seguente sottogruppo di  $GL(2, \mathbb{R})$ :

$$L(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : \det A = \pm 1 \right\}.$$

L'applicazione  $\Phi : L(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g)$  tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left( f : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \quad \text{se} \quad \det A = 1,$$

e

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left( f : z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right) \quad \text{se} \quad \det A = -1,$$

è un omomorfismo suriettivo con

$$\ker \Phi = \{ A : \Phi(A) = I \} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Di conseguenza, l'epimorfismo  $\Phi$  induce l'isomorfismo

$$\tilde{\Phi} : L(2, \mathbb{R}) / \{ \pm Id \} \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g), \quad [A] \rightarrow \Phi(A).$$

### Omogeneità del piano iperbolico.

Vogliamo vedere che, così come per il piano euclideo e la sfera canonica, anche il piano iperbolico  $(\mathbb{R}_+^2, g)$  è omogeneo, ovvero per ogni  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+^2$  esiste una  $f \in \text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g)$  tale che  $f(p_1) = p_2$ . Poniamo  $p_1 = (x_1, y_1)$  e  $p_2 = (x_2, y_2)$  e consideriamo la dilatazione  $f_4(p) = \lambda p$  con  $\lambda = (y_2/y_1) > 0$  e la traslazione  $f_3(p) = p + a = (x + a, y)$  con  $a = x_2 - (y_2/y_1)x_1$ . Allora  $f = f_3 \circ f_4$  è una isometria e

$$f(p_1) = f_3(f_4(p_1)) = f_3((y_2/y_1)x_1, y_2) = (x_2, y_2) = p_2.$$

### 6.3. Le geodetiche del semipiano di Poincaré

Il seguente teorema classifica tutte le geodetiche del piano iperbolico.

**Teorema 6.8.** *Le geodetiche massimali del piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$  sono tutte e sole le semirette parallele all'asse  $y$  e le semicirconferenze con centro sull'asse  $x$  (cf. Figura 2).*

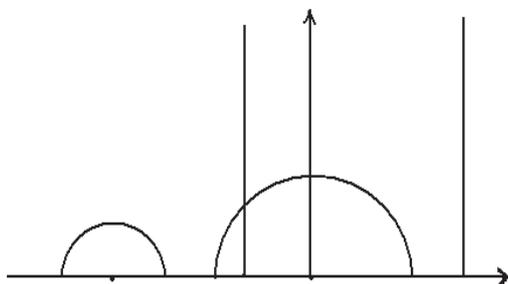


FIGURA 2

**DIMOSTRAZIONE.** Per determinare le geodetiche del piano iperbolico consideriamo le isometrie  $f_1, f_2$  e  $f_3$  di  $\mathbb{R}_+^2$  esaminate nella Proposizione 6.6. Applicando la Proposizione 5.66 (che naturalmente vale anche per domini riemanniani) all'isometria  $f_1$  (inversione), si ha che la semicirconferenza  $\gamma_1 : x^2 + y^2 = r^2, y > 0$  (di centro l'origine e raggio  $r$ ) è una geodetica di  $\mathbb{R}_+^2$ . Applicando la stessa Proposizione all'isometria  $f_2$  (simmetria), si ha che la semiretta  $\gamma_2 : y > 0, x = 0$  è una geodetica di  $\mathbb{R}_+^2$ . Ogni semiretta parallela all'asse  $y$ , cioè del tipo  $y > 0, x = a$ , è una geodetica di  $\mathbb{R}_+^2$  in quanto immagine di  $\gamma_2$  mediante un'isometria del tipo  $f_3$  (traslazione). Infine, ogni semicirconferenza di  $\mathbb{R}_+^2$  con centro  $(a, 0)$  e raggio  $r$  è una geodetica in quanto immagine di  $\gamma_1$  mediante un'isometria del tipo  $f_3$ . Le curve esaminate sono tutte e sole le geodetiche di  $\mathbb{R}_+^2$  in quanto, per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^2$  e per ogni  $V_p \in T_p\mathbb{R}_+^2$ , esiste una geodetica del tipo di prima passante per  $p$  e avente  $V_p$  come vettore tangente in  $p$  (cf. Figura 3).  $\square$

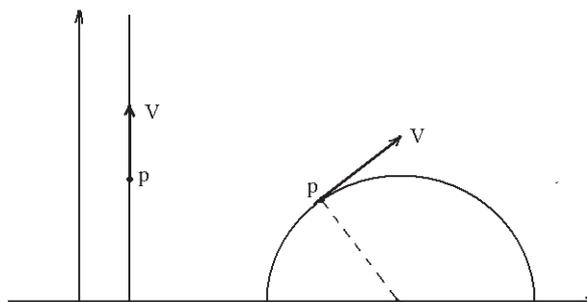


FIGURA 3

**Osservazione 6.9.** Il Teorema 6.8 determina le geodetiche del piano iperbolico come insiemi di punti. Dall'equazione (6.9), ottenuta nell'Esempio 6.1, segue che una curva differenziabile  $(x(t), y(t))$  del piano iperbolico è una curva geodetica se, e solo se, è soddisfatto il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$(6.9) \quad x''(t) - \frac{2}{y(t)}x'(t)y'(t) = 0, \quad y''(t) + \frac{1}{y(t)}(x'(t))^2 - \frac{1}{y(t)}(y'(t))^2 = 0.$$

Osserviamo che il semiasse positivo delle  $y$  parametrizzato da  $\gamma_1(t) = (0, e^t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è una curva geodetica inclusa la parametrizzazione, infatti soddisfa il sistema (6.9).

Inoltre, come già osservato, le trasformazioni di Möbius (reali), espresse in coordinate reali da

$$z = (x, y) \longrightarrow \left( \frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + db}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right),$$

sono isometrie per il piano iperbolico. In particolare, la trasformazione di Möbius  $\psi$  definita dai coefficienti  $a = c = d = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  trasforma la geodetica  $\gamma_1(t) = (0, e^t)$  nella geodetica

$$\gamma_2(t) = \psi(\gamma_1(t)) = \left( \frac{(e^{2t} - 1)}{(e^{2t} + 1)}, \frac{2e^t}{(e^{2t} + 1)} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

che è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio unitario. In effetti, anche la curva parametrizzata  $\gamma_2(t)$  soddisfa il sistema (6.9). Procedendo in questo modo, tutte le geodetiche del Teorema 6.8 si possono ottenere come curve geodetiche parametrizzate con il parametro  $t \in \mathbb{R}$ .

La Definizione 5.92 introdotta per le superfici si può considerare anche per i domini riemanniani. Quindi, un dominio riemanniano  $(D, g)$  si dice *geodeticamente completo*, se ogni sua geodetica  $\gamma : I \rightarrow D$  può essere estesa a una geodetica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow D$ . In particolare, per quanto osservato, il piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$  è un dominio riemanniano geodeticamente completo.

**Osservazione 6.10. (sulle geometrie non euclidee)**

Le curve geodetiche hanno su una superficie regolare, e piú in generale su una varietà riemanniana 2-dimensionale, un ruolo analogo a quello che hanno le rette nel piano. Il quinto postulato nella formulazione equivalente data dal matematico scozzese John Playfair (1748-1819): “*in un fissato piano euclideo, dati una retta e un punto non appartenente alla stessa retta, esiste una e una sola retta passante per il punto e che non incontra la retta data*” é anche chiamato **postulato delle parallele** o *postulato di Playfair*. La negazione di questo postulato, che ha portato alla scoperta delle *geometrie non euclidee*, diventa:

*in un fissato piano, dati una retta e un punto non appartenente alla stessa retta, esiste piú di una retta passante per il punto e che non incontra la retta data* (**postulato iperbolico**),

oppure

*in un fissato piano, dati una retta e un punto non appartenente alla stessa retta, non esistono rette passanti per il punto e che non incontrano la retta data* (**postulato ellittico**).

Nei primi anni del XIX secolo Gauss aveva intuito l'esistenza delle geometrie non euclidee (cf. Teorema 7.1), ma le sue idee sull'esistenza delle geometrie non euclidee rimasero nei suoi appunti e nelle lettere a qualcuno dei suoi corrispondenti scientifici. In effetti, la comparsa ufficiale di una geometria non euclidea, piú precisamente della geometria iperbolica, si ha nel 1829 per merito di Nikolaj Lobacevskij (1793-1856) e nel 1831 per merito di Janos Bolyai (1802-1860), i quali ottennero, indipendentemente l'uno dall'altro, i loro risultati sulle geometrie non euclidee.

Assumendo come “rette” del piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$  le sue geodetiche massimali, si ottiene un **modello di geometria non euclidea iperbolica**.

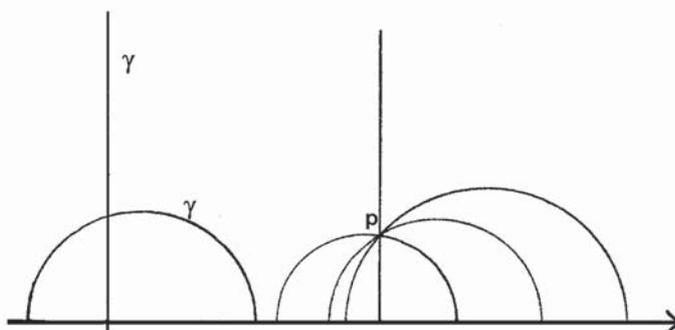


FIGURA 4

In questo caso, rispetto al caso euclideo, il postulato delle parallele perde

l'unicità: dati  $p \in \mathbb{R}_+^2$  e  $\gamma$  "retta" con  $p \notin \gamma$ , esistono infinite geodetiche per  $p$  che non incontrano  $\gamma$  (cf. Figura 4).

Inoltre, per ogni  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $p_1 \neq p_2$ , esiste una sola "retta" che li congiunge. Se il segmento che congiunge  $p_1, p_2$  è parallelo all'asse delle  $y$ , allora lo stesso segmento è l'arco geodetico che congiunge i due punti. Se il segmento che congiunge  $p_1, p_2$  non è parallelo all'asse delle  $y$ , allora l'arco geodetico che congiunge i due punti è dato dall'arco di semicirconferenza con centro sull'asse delle  $x$  e che passa per i due punti.

Un **modello di geometria non euclidea ellittica** è dato dal piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  il quale si ottiene dalla sfera  $\mathbb{S}^2$  identificando i punti antipodali, ossia  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2 / \{\pm I_d\}$  è una varietà differenziabile quoziente. Consideriamo la proiezione  $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2, p \mapsto [p]$ , che è un'applicazione di rivestimento. In effetti  $\mathbb{P}^2$  si può munire di una struttura di varietà riemanniana 2-dimensionale, dove la metrica riemanniana è indotta mediante la proiezione  $F$  dalla metrica canonica di  $\mathbb{S}^2$ . Di conseguenza  $F$  diventa un rivestimento riemanniano (e in particolare una isometria locale) per cui le geodetiche di  $\mathbb{P}^2$  sono tutte e sole le proiezioni delle geodetiche di  $\mathbb{S}^2$ .

Sia  $\gamma(t)$  una geodetica massimale di  $\mathbb{P}^2$ , allora esiste  $\tilde{\gamma}$  circonferenza di raggio massimo di  $\mathbb{S}^2$  tale che  $\gamma = F \circ \tilde{\gamma}$  e quindi

$$\gamma(t + \pi) = F \circ \tilde{\gamma}(t + \pi) = F(-\tilde{\gamma}(t)) = F(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t).$$

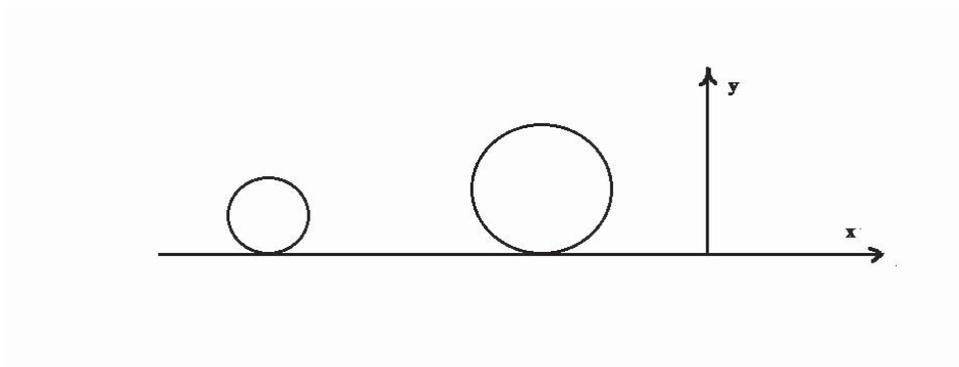
Pertanto, le geodetiche massimali di  $\mathbb{P}^2$  sono curve chiuse di periodo  $\pi$  (radiani). Inoltre, mentre due geodetiche massimali distinte  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$  di  $\mathbb{S}^2$  hanno due punti in comune, due geodetiche massimali distinte di  $\mathbb{P}^2$  hanno un solo punto in comune:  $\tilde{\gamma}_1 \cap \tilde{\gamma}_2 = \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2\} \implies \tilde{p}_1 = -\tilde{p}_2 \implies F(\tilde{p}_2) = F(\tilde{p}_1)$ .

Assumendo come "rette" del piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  le sue geodetiche massimali, si ottiene un modello di geometria non euclidea ellittica. Per quanto visto prima, dati  $p \in \mathbb{P}^2$  e  $\gamma_1$  "retta" di  $\mathbb{P}^2$  con  $p \notin \gamma_1$ , non esiste una "retta"  $\gamma_2$  tale che  $p \in \gamma_2$  e  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ , quindi vale il postulato delle parallele della geometria non euclidea ellittica. Inoltre, si noti che comunque si prendono due punti  $p, q \in \mathbb{P}^2, p \neq q$ , esiste un'unica "retta" che congiunge  $p$  e  $q$  (cioè non accade per la sfera  $\mathbb{S}^2$ ).

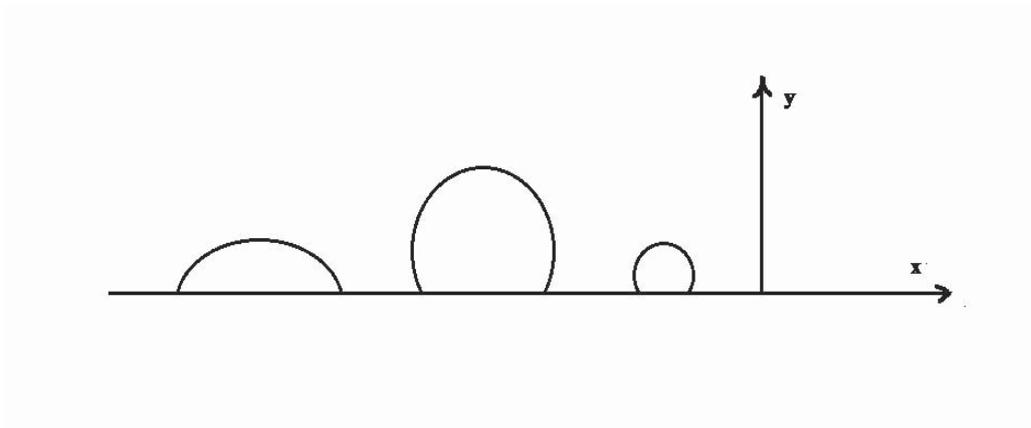
### Osservazione 6.11. Le curve magnetiche del piano iperbolico

Il concetto di curva magnetica introdotto nella Sezione 5.11, si può introdurre facilmente anche per un dominio riemanniano. Anche in questo caso, le curve magnetiche relative a un campo magnetico uniforme sono tutte e sole le curve  $\gamma(s)$  di curvatura geodetica  $k_g(s) = \mu$  (costante non nulla). In particolare, nel caso del semipiano di Poincaré  $(\mathbb{R}_+^2, g = (1/y^2)g_0)$ , le curve magnetiche relative al campo magnetico uniforme  $F = \mu\Omega$ ,  $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$ , dove  $\Omega = (1/y^2)dx \wedge dy$  è una 2-forma d'area per  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ , non sono sempre curve chiuse, quindi si ha una situazione diversa dai casi del piano euclideo e della sfera canonica. Tali curve sono archi, in generale non chiusi, di circonferenze euclidee (cf. A. Comtet, *On the Landau levels on the hyperbolic plane*, Ann. Phys., 173 (1987) 185–209). Più precisamente,

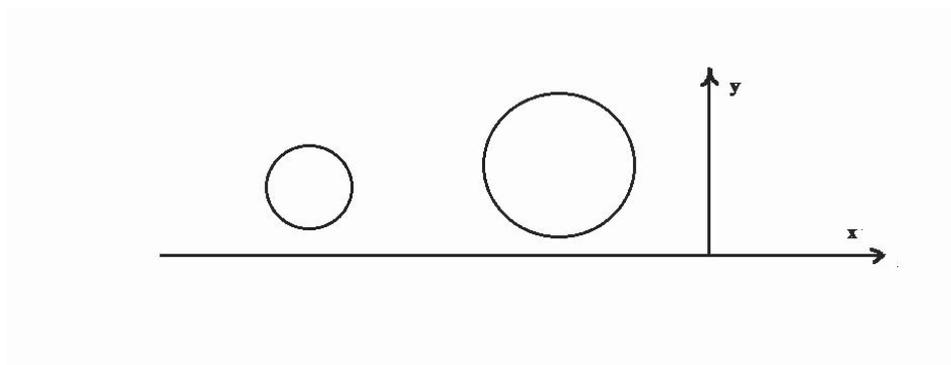
- Se  $|\mu| = 1$ , le curve magnetiche sono circonferenze tangenti all'asse  $x$  (in tal caso, le curve magnetiche sono dette *horocycles*).

FIGURA 5. Caso  $|\mu| = 1$ .

- Se  $0 < |\mu| < 1$ , le curve magnetiche sono archi di circonferenza che intersecano l'asse  $x$  con un angolo  $\vartheta = \vartheta(\mu) \neq (\pi/2)$ ,  $\vartheta(0) = (\pi/2)$  (caso curve geodetiche). Quindi, ogni tale arco interseca l'asse  $x$  in due punti. L'angolo di intersezione diminuisce con l'aumentare di  $|\mu|$ , diventando sempre più piccolo.

FIGURA 6. Caso  $0 < |\mu| < 1$ .

- Se  $|\mu| > 1$ , le curve magnetiche non toccano l'asse  $x$ , in queste caso sono circonferenze chiuse di raggio finito contenute in  $\mathbb{R}_+^2$ .

FIGURA 7. Caso  $|\mu| > 1$ .

#### 6.4. La distanza nel semipiano di Poincaré

Siano  $g$  la metrica iperbolica di Poincaré nel semipiano  $\mathbb{R}_+^2$  e  $d$  la corrispondente distanza iperbolica, ovvero la distanza riemanniana indotta da  $g$ . Vogliamo determinare in forma esplicita la distanza tra due arbitrari punti di  $\mathbb{R}_+^2$ . Distinguiamo due casi.

• **caso 1<sup>o</sup>** Siano  $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$  due punti di  $\mathbb{R}_+^2$  che appartengono a una semiretta parallela all'asse  $y$ , quindi  $x_1 = x_2 = a$ . In questo caso la geodetica che li congiunge è il segmento

$$\gamma_0(t) = t(p_2 - p_1) + p_1 = (a, y_1 + t(y_2 - y_1)), \quad t \in [0, 1], \quad \text{e } L(\gamma_0) = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|.$$

Infatti,  $\dot{\gamma}_0(t) = (0, y_2 - y_1)$ , per cui

$$\|\dot{\gamma}_0(t)\|_g = \frac{1}{y_1 + t(y_2 - y_1)}(y_2 - y_1), \quad (\text{assumendo } y_2 \geq y_1),$$

e quindi

$$L(\gamma_0) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_0(t)\|_g dt = [\ln(y_1 + t(y_2 - y_1))]_0^1 = \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Sia ora  $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [0, 1]$ , una generica curva differenziabile che congiunge  $p_1, p_2$  (si potrebbe considerare anche differenziabile a tratti). Allora,

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} dy = \ln \frac{y_2}{y_1} = L(\gamma_0). \end{aligned}$$

Ciò implica che la curva  $\gamma_0$  realizza la distanza tra  $p_1$  e  $p_2$ . Dunque, se  $p_1, p_2$  individuano una semiretta parallela all'asse  $y$ , con  $y_2, y_1 > 0$  arbitrari, abbiamo

$$d(p_1, p_2) = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|.$$

• **caso 2<sup>0</sup>**) Siano  $q_1, q_2$  due punti di  $\mathbb{R}_+^2$  che non appartengono a una semiretta parallela all'asse  $y$ . In questo caso, la geodetica passante per  $q_1, q_2$  è la semicirconfenza  $\gamma$  per  $q_1$  e  $q_2$ , con centro  $C_0(c, 0)$  sull'asse  $x$  e di raggio  $r$ . Quindi:

$$\gamma(t) = (c + r \cos t, r \sin t), \quad t \in ]0, \pi[,$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t) \quad \text{e} \quad \|\dot{\gamma}(t)\|_g = \frac{1}{\sin t}.$$

Posto  $q_1 = (c + r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  e  $q_2 = (c + r \cos \beta, r \sin \beta)$ , con  $\beta \geq \alpha$ , si ha:

$$L(\gamma(q_1, q_2)) = L(\gamma|_{[\alpha, \beta]}) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt = \left[ \ln \tan \frac{t}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} = \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2}.$$

Per  $\alpha, \beta \in ]0, \pi[$  arbitrari, si ha:

$$L(\gamma(q_1, q_2)) = \left| \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} \right|.$$

La trasformazione di Möbius (reale)

$$\begin{aligned} f_1 : z = x + iy &\mapsto f(z) = \frac{az - b}{az + b} \\ &= \left( \frac{a^2(x^2 + y^2) - b^2}{(ax + b)^2 + (ay)^2}, \frac{2aby}{(ax + b)^2 + (ay)^2} \right), \end{aligned}$$

con  $ab > 0$ , è una isometria del piano iperbolico che trasforma la semiretta  $\gamma_0(t) = (0, t)$ ,  $t > 0$ , nella semicirconfenza  $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 1, y > 0$ . L'omotetia

$$f_2 : z \mapsto f_2(z) = rz, \quad r > 0,$$

è una isometria che trasforma la semicirconfenza  $\gamma_1$  nella semicirconfenza  $\gamma_2 : x^2 + y^2 = r^2, y > 0$ . Infine, la traslazione

$$f_3 : z \mapsto f_3(z) = z + c$$

trasforma la semicirconfenza  $\gamma_2$  nella semicirconfenza  $\gamma : (x - c)^2 + y^2 = r^2, y > 0$ . Pertanto, l'isometria

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

trasforma la semiretta  $\gamma_0$  nella semicirconfenza  $\gamma$ , e quindi i punti  $p_1 = f^{-1}(q_1)$  e  $p_2 = f^{-1}(q_2)$  appartengono alla semiretta  $\gamma_0$  che è il semiasse delle  $y$ . Poichè le isometrie conservano lunghezze e distanze, e tenendo anche presente il caso 1<sup>0</sup>), si ha

$$L(\gamma(q_1, q_2)) = L(\gamma_0(p_1, p_2)) = d(p_1, p_2) = d(f^{-1}(q_1), f^{-1}(q_2)) = d(q_1, q_2).$$

Di conseguenza, nel caso 2<sup>0</sup>), si ottiene:

$$d(q_1, q_2) = \left| \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} \right|.$$

Usando le formule di bisezione:

$$\frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

e tenendo presente che

$$x_1 - c = r \cos \alpha, \quad x_2 - c = r \cos \beta, \quad y_1 = r \sin \alpha, \quad y_2 = r \sin \beta,$$

si ha

$$d(q_1, q_2) = \left| \ln \left( \frac{x_1 - c + r}{x_2 - c + r} \cdot \frac{y_2}{y_1} \right) \right|.$$

Infine, osserviamo che se  $p_1, p_2$  sono punti di una semicirconferenza concentrica con  $\gamma$ , con  $q_1, p_1, C_0$  allineati e  $q_2, p_2, C_0$  allineati, allora  $d(q_1, q_2) = d(p_1, p_2)$  (cf. Figura 8).

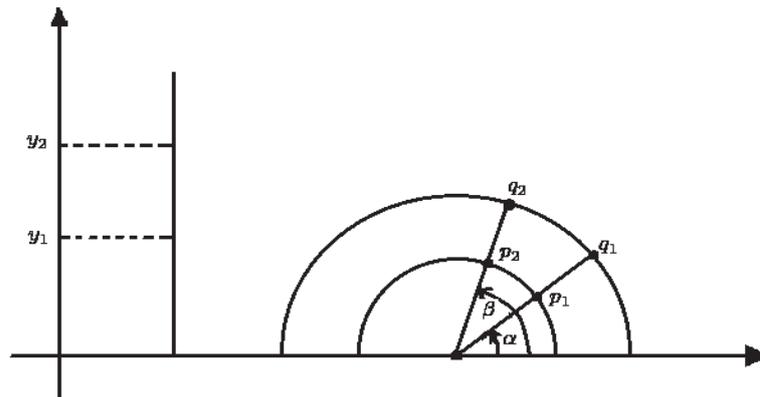


FIGURA 8.  $d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$ .

### 6.5. L'iperboloide e il modello di Poincaré nel disco

**6. 5-1. L'iperboloide  $H^2$ .** Consideriamo su  $\mathbb{R}^3$  il prodotto scalare di Minkowski, ossia la forma bilineare simmetrica  $q_0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$q_0(p, p') = xx' + yy' - zz'.$$

$q_0$  è un prodotto scalare che non è definito positivo, la sua segnatura è  $(2, 1)$  quindi è un prodotto scalare di tipo lorentziano. Poniamo

$$H^2 = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : q_0(p, p) = -1, \quad z > 0\}.$$

$H^2$  è una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , precisamente è la falda superiore dell'iperboloide di equazione:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

**Proposizione 6.12.** *La prima forma fondamentale su  $H^2$ , indotta dal prodotto scalare di Minkowski  $q_0$ , ha segnatura  $(2, 0)$ , equivalentemente il prodotto scalare indotto sulla stessa superficie è definito positivo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $V_p = (p, v) \in T_p H^2$  e sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $H^2$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_p$ . Poiché  $\gamma(t) \in H^2$  per ogni  $t$ , ossia  $q_0(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = -1$ , derivando si ha  $q_0(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ , e quindi per  $t = 0$  abbiamo  $q_0(p, v) = 0$ , ossia  $T_p H^2 \subset p^\perp$  (rispetto al prodotto scalare di Minkowski). D'altronde  $\dim T_p H^2 = 2 = \dim p^\perp$ , pertanto

$$T_p H^2 = p^\perp = \{V_p = (p, v) : v \in \mathbb{R}^3, q_0(v, p) = 0\}.$$

Poiché  $q_0(p, p) = -1$ , esiste una base  $v_0, v_1, v_2$  di  $\mathbb{R}^3$  con  $v_0 = p, q_0(v_1, v_1) = q_0(v_2, v_2) = 1$  e  $q_0(v_i, v_j) = 0$  per  $i \neq j$ . Ciò segue dal fatto che l'indice di una forma quadratica non dipende dalla base scelta (Teorema di Sylvester). Quindi,  $\{V_1 = (p, v_1), V_2 = (p, v_2)\}$  è una base  $q_0$ -ortonormale di  $T_p H^2$ . Di conseguenza, il prodotto scalare su  $T_p H^2$ , indotto dal prodotto scalare di Minkowski, è definito positivo.  $\square$

Indichiamo con  $g_H$  la prima forma fondamentale, equivalentemente la metrica riemanniana, sull'iperboloide  $H^2$  indotta dal prodotto scalare di Minkowski. In tal caso, chiameremo  $(H^2, g_H)$  l'**iperboloide di Minkowski**. Per  $(H^2, g_H)$ , ovvero per l'iperboloide  $H^2$  come superficie regolare di  $(\mathbb{R}^3, q_0)$ , la derivata covariante di campi vettoriali  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , con  $\gamma$  curva differenziabile di  $H^2$ , è definita come nella Definizione 5.36

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)^\top,$$

dove ora  $\left(\frac{dV}{dt}\right)^\top$  denota la proiezione ortogonale di  $dV/dt$ , ossia di  $V'(t)$ , su  $T_{\gamma(t)} H^2$ , rispetto al prodotto scalare di Minkowski  $q_0$ . In particolare, valgono le equazioni (5.12), (5.13) (5.14), dove nell'equazione di Gauss (5.12) e nella (5.14) il prodotto scalare euclideo è sostituito da quello di Minkowski. Possiamo quindi definire anche per l'iperboloide  $(H^2, g_H)$  di Minkowski il parallelismo e le curve geodetiche. Quindi, una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $(H^2, g_H)$  è detta curva geodetica se il campo tangente  $V(t) = \dot{\gamma}(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$ , ovvero

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0.$$

**Proposizione 6.13.** *Le curve geodetiche dell'iperboloide di Minkowski  $(H^2, g_H)$  sono tutte e sole le curve (rami di iperboli) di  $H^2$  intersezioni con i piani di  $\mathbb{R}^3$  passanti per l'origine.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per determinare le geodetiche di  $(H^2, g_H)$  procediamo come per le geodetiche della sfera canonica  $S^2$ . Sia  $\mathcal{C}$  la curva di  $H^2$  intersezione con un piano  $E^2$  passante per l'origine. Siano  $p$  un punto di  $\mathcal{C}$  e  $v$  un vettore tangente in  $p$  a  $\mathcal{C}$ . Allora  $V_p = (p, v) \in T_p H^2 = p^\perp$ , dove  $\perp$  è considerata rispetto a  $q_0$ . In particolare possiamo prendere  $v$  unitario, quindi  $q_0(p, v) = 0$  e  $q_0(v, v) = 1$ . Consideriamo la curva parametrizzata

$$\gamma(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da  $\gamma(0) = p \in H^2$  e

$$\begin{aligned} q_0(\gamma(t), \gamma(t)) &= (\cosh^2 t)q_0(p, p) + (\sinh^2 t)q_0(v, v) + 2(\sinh t \cosh t)q_0(p, v) \\ &= -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1, \end{aligned}$$

segue che  $\gamma$  è una curva di  $H^2$ . Dunque,  $\gamma(t)$  è una curva di  $H^2 \cap E^2$  e quindi è una parametrizzazione del ramo di iperbole  $\mathcal{C}$ . Il campo tangente  $\dot{\gamma}(t)$  e l'accelerazione estrinseca  $\ddot{\gamma}(t)$  sono dati da

$$\dot{\gamma}(t) = (\sinh t)p + (\cosh t)v, \quad \ddot{\gamma}(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v = \gamma(t).$$

Quindi  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}$ , proiezione  $q_0$ -ortogonale di  $\ddot{\gamma}(t)$  su  $T_{\gamma(t)}H^2 = \gamma(t)^\perp$ , è data da  $(\ddot{\gamma}(t))^\top = 0$ . Pertanto,  $\gamma(t)$  è una geodetica di  $H^2$ .

Viceversa, se  $\sigma(t)$  è una geodetica di  $H^2$  parametrizzata a velocità unitaria, con  $\sigma(0) = p$  e  $\dot{\sigma}(0) = V_p = (p, v)$ , allora  $p$  e  $v$ , pensati entrambi come vettori, sono  $q_0$ -ortogonali (in quanto  $V_p \in T_p H^2 = p^\perp$ ) con  $q_0(v, v) = 1$  e  $q_0(p, p) = -1$ . Il ramo di iperbole  $\gamma(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v$  (che è contenuta in  $H^2$ ) soddisfa le stesse condizioni iniziali  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_p$  della geodetica  $\sigma(t)$ . Pertanto, applicando il teorema di esistenza e unicità per le curve geodetiche, abbiamo che  $\sigma$  ha sostegno contenuto nel sostegno di  $\gamma$ .  $\square$

**6. 5-2. Il modello di Poincaré nel disco unitario.** Consideriamo il disco unitario

$$\Delta^2 = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|p\|^2 = x^2 + y^2 < 1\}.$$

Sia  $p_0 = (0, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ . L'applicazione

$$f : H^2 \rightarrow \Delta^2, p \mapsto f(p) = \text{retta}(pp_0) \cap \mathbb{R}^2,$$

dove  $\mathbb{R}^2$  è il piano  $z = 0$  di  $\mathbb{R}^3$ , è detta *proiezione stereografica iperbolica* (cf. Figura 9). Con facili calcoli si trova:

$$f(x, y, z) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

Chiaramente  $f(p) \in \Delta^2$  in quanto:  $\|f(p)\|^2 = \frac{z-1}{z+1} < 1$  per ogni  $p \in H^2$ . Inoltre, usando il prodotto scalare di Minkowski  $q_0$ , si ha

$$q_0(p - p_0, p - p_0) = x^2 + y^2 - (z+1)^2 = -2(1+z) \quad \forall p = (x, y, z) \in H^2,$$

e quindi l'applicazione  $f$  si può esprimere anche con

$$f(p) = p_0 - \frac{2(p - p_0)}{q_0(p - p_0, p - p_0)} \quad \forall p \in H^2.$$

L'applicazione  $f$  è invertibile e la sua inversa è l'applicazione

$$\bar{f} = f^{-1} : \Delta^2 \rightarrow H^2, \quad p \mapsto f^{-1}(p) = \text{retta}(pp_0) \cap H^2,$$

quindi

$$p \mapsto \bar{f}(p) = f^{-1}(p) = \left( \frac{2x}{1 - \|p\|^2}, \frac{2y}{1 - \|p\|^2}, \frac{1 + \|p\|^2}{1 - \|p\|^2} \right).$$

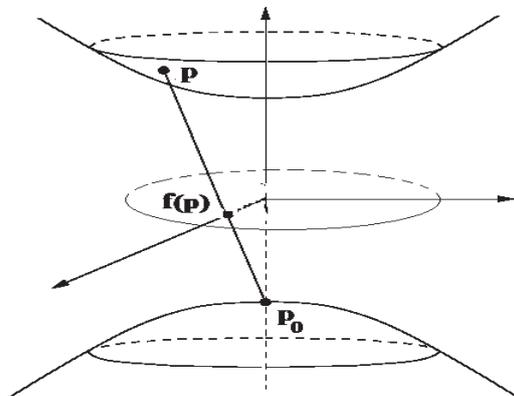


FIGURA 9. La proiezione stereografica iperbolica.

Mediante la proiezione stereografica iperbolica  $\bar{f}$  possiamo definire nel dominio  $\Delta^2$  una metrica riemanniana iperbolica  $h$  ponendo

$$h(V_p, W_p) := g_H(\bar{f}_{*p}V_p, \bar{f}_{*p}W_p) = q_0(\bar{f}_{*p}V_p, \bar{f}_{*p}W_p)$$

per ogni  $p \in \Delta^2$  e  $V_p, W_p \in T_p\Delta^2 = T_p\mathbb{R}^2$ . Si può provare che i coefficienti della metrica  $h$  sono dati da:

$$(6.10) \quad h_{11} = h_{22} = \frac{4}{(1 - (x^2 + y^2))^2}, \quad h_{12} = h_{21} = 0.$$

Di conseguenza, a posteriori, possiamo dire che la *proiezione stereografica iperbolica*  $f$  è una *isometria tra*  $(H^2, g_H)$  e  $(\Delta^2, h)$ .

Ora consideriamo l'inversione rispetto alla circonferenza di centro  $p_0 = (0, -1)$  e  $r = \sqrt{2}$ , che indichiamo con  $\tilde{f}$ . Allora, dalla (6.8), si ha

$$\tilde{f} : p = (x, y) \mapsto \tilde{f}(p) = (0, -1) + \frac{2}{\|p - p_0\|^2}(x, y + 1)$$

e poiché  $\|p - p_0\|^2 = \|p\|^2 + 2y + 1 = x^2 + (y + 1)^2$ , si ha

$$\tilde{f} : p = (x, y) \mapsto \left( \frac{2x}{\|p - p_0\|^2}, \frac{1 - \|p\|^2}{\|p - p_0\|^2} \right).$$

Osserviamo che il disco  $\Delta^2$  e il semipiano  $\mathbb{R}_+^2$  sono entrambi contenuti in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$ . Dall'espressione di  $\tilde{f}$  segue che

$$\forall p \in \Delta^2 : \tilde{f}(p) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}(p)\|^2 &= \frac{4x^2 + 1 + \|p\|^4 - 2\|p\|^2}{\|p - p_0\|^4} = \frac{(1 + \|p\|^2)^2 - 4y^2}{(1 + \|p\|^2 + 2y)^2} \\ &= \frac{1 + \|p\|^2 - 2y}{1 + \|p\|^2 + 2y} < 1 \quad \text{per } y > 0.\end{aligned}$$

Quindi,

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^2 : \tilde{f}(p) \in \Delta^2.$$

Di conseguenza,  $\tilde{f} = \tilde{f}|_{\Delta^2} : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ ,

$$(6.11) \quad \tilde{f} : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) = \left( \frac{2x}{x^2 + (y+1)^2}, \frac{1 - (x^2 + y^2)}{x^2 + (y+1)^2} \right),$$

è un diffeomorfismo con inverso  $\tilde{f}^{-1} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Delta^2$  che ha la stessa espressione analitica di  $\tilde{f}$ .

**Proposizione 6.14.** *Il diffeomorfismo  $\tilde{f} : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  definito dalla (6.11) è una isometria tra il modello iperbolico di Poincaré nel disco  $\Delta^2$  e il modello iperbolico di Poincaré nel semipiano  $\mathbb{R}_+^2$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per provare che  $\tilde{f} : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  è una isometria tra i due modelli di Poincaré, basta verificare, applicando la (6.1), che

$$(g_{ij})_p = (J(\tilde{f}))^t (\bar{g}_{ij})_{\tilde{f}(p)} J(\tilde{f}),$$

dove  $J(\tilde{f})$  è la matrice jacobiana di  $\tilde{f}$ ,  $(g_{ij})_p$  la matrice dei coefficienti della metrica iperbolica del disco nel punto  $p$ , e  $(\bar{g}_{ij})_{\tilde{f}(p)}$  la matrice dei coefficienti della metrica iperbolica del semipiano  $\mathbb{R}_+^2$  nel corrispondente punto  $\tilde{f}(p)$ . Siccome  $\tilde{f}(x, y)$  è data dalla (6.11), allora

$$J(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{pmatrix} = J(\tilde{f})^t.$$

dove

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(y+1)^2 - 2x^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-4x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Inoltre,

$$(\bar{g}_{ij})_{\tilde{f}(p)} = \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{[x^2 + (y+1)^2]^2}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} & 0 \\ 0 & \frac{[x^2 + (y+1)^2]^2}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} \end{pmatrix},$$

e

$$(g_{ij})_p = \begin{pmatrix} \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{[1 - (x^2 + y^2)]^2} \end{pmatrix}.$$

Pertanto, un semplice calcolo mostra che  $(g_{ij})_p = (J(\tilde{f}))^t(\bar{g}_{ij})_{\tilde{f}(p)}J(\tilde{f})$ . □

**Esempio 6.15.** Le geodetiche del disco iperbolico  $\Delta^2$  sono tutti e soli i diametri e gli archi di circonferenza che incontrano ortogonalmente il bordo  $\partial\Delta^2$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $H^2$  la falda superiore dell'iperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ . Consideriamo la proiezione stereografica iperbolica

$$f : H^2 \rightarrow \Delta^2, p \mapsto f(p) = \text{retta}(pp_0) \cap (\text{piano } z = 0) = \text{retta}(pp_0) \cap \Delta^2,$$

dove  $p_0 = (0, 0, -1)$ . Abbiamo osservato che  $f$  è un'isometria tra i due modelli iperbolici, quindi le geodetiche di  $\Delta^2$  sono tutte e sole le immagini tramite  $f$  delle geodetiche di  $H^2$ . Se  $\gamma$  è una geodetica di  $H^2$  data da  $H^2 \cap E^2$ , dove  $E^2$  è un piano contenente l'asse  $z$ , allora la sua proiezione  $f(\gamma)$  su  $\Delta^2$  è chiaramente un diametro. Negli altri casi si ottengono invece archi di circonferenza che incontrano ortogonalmente  $\partial\Delta^2$ . □

## CAPITOLO 7

### Il Teorema di Gauss-Bonnet

La caratteristica di Eulero-Poincarè (invariante topologico) e la curvatura (invariante metrico) sono due nozioni a priori molto distanti tra loro. Il Teorema di Gauss-Bonnet, il più elegante teorema di geometria differenziale globale, evidenzia un sorprendente legame tra le due nozioni. In questo capitolo diamo una presentazione di tale teorema nel caso delle superfici connesse compatte di  $\mathbb{R}^3$ .

#### 7.1. Il Teorema locale di Gauss-Bonnet

Iniziamo col ricordare il seguente teorema (che otterremo come caso particolare di un teorema più generale).

**Teorema 7.1** (elegantissimo di Gauss, 1827). *Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione locale di  $M$ . Se  $T$  è un triangolo geodetico (cf. Figura 1),  $T \subset \varphi(D)$ , di vertici  $A, B, C$ , allora*

$$\int_T K(p) d\sigma = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi,$$

dove  $K(p)$  è la curvatura gaussiana di  $M$  in  $p$ ,  $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv$  è l'elemento d'area di  $M$  e  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  denotano le misure (in radianti) degli angoli interni al triangolo  $T$ .

In particolare, se  $K$  è costante su  $M$ ,  $K(p) = K_0$  per ogni  $p \in M$ , abbiamo

$$K_0 \text{ area}(T) = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi,$$

dove per  $K_0 = 1$  otteniamo esattamente la formula trovata da Albert Girard nel 1629 per un triangolo geodetico sulla sfera unitaria.

Se  $K_0 = 0$  ( $M$  è localmente isometrica a un piano Euclideo), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi \quad (\text{fatto ben noto della geometria euclidea}).$$

Se  $K_0 > 0$  ( $M$  è localmente isometrica ad una sfera di raggio  $\sqrt{1/K_0}$ ), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \pi.$$

Se  $K_0 < 0$  ( $M$  è localmente isometrica ad una pseudo-sfera), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < \pi.$$

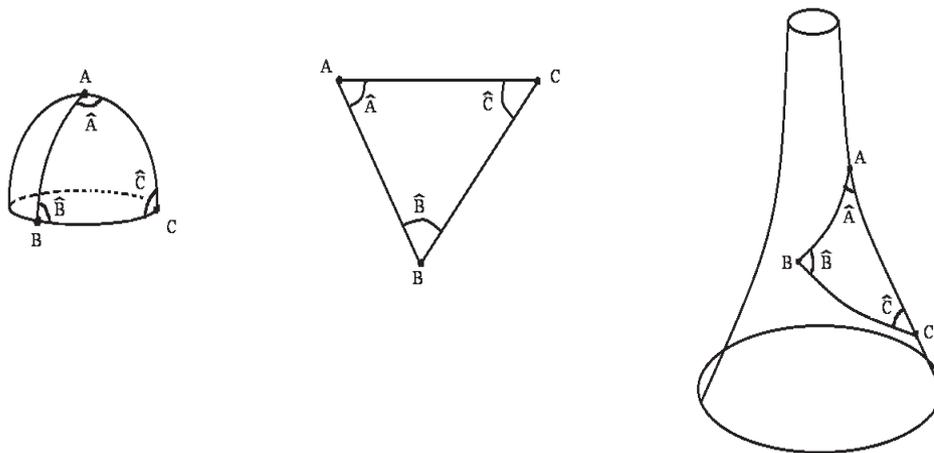


FIGURA 1. Triangoli geodetici

Al tempo di Gauss uno dei problemi fondamentali della geometria era la “questione delle parallele”, iniziata al tempo di Euclide e conclusasi solo con l’avvento delle geometrie non euclidee. Si trattava di decidere se il quinto postulato della geometria euclidea (cf. Osservazione 6.10), fosse indipendente dagli altri postulati della geometria di Euclide. Ben presto si stabilì che il quinto postulato è equivalente al fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a  $\pi$  (radianti). Dunque, la scoperta di Gauss faceva intravedere l’esistenza di geometrie diverse da quella euclidea e quindi di una geometria sulle superfici senza riferimento allo spazio ambiente.

L’estensione del Teorema (elegantissimo) di Gauss, al caso di una regione limitata da una curva chiusa semplice (non geodetica) è dovuta a Bonnet (1848). Prima di enunciare tale estensione diamo due definizioni.

**Definizione 7.2.** Sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  un’applicazione continua dall’intervallo chiuso  $[a, b]$  su una superficie regolare  $M$  di  $\mathbb{R}^3$ . Diciamo che  $\alpha$  è una curva semplice, chiusa e regolare a tratti se:

- (1) per  $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in [a, b]: \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ .
- (2)  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .
- (3) esiste una suddivisione  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$  di  $[a, b]$  per cui  $\alpha$  è differenziabile e regolare in ogni intervallo  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, k$ .

I punti  $\alpha(t_i)$  si dicono *vertici* di  $\alpha$ . Dalla regolarità a tratti segue che, per ogni vertice  $\alpha(t_i)$  esiste il limite sinistro:  $\lim_{t \rightarrow t_i^-} \dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}_-(t_i) \neq 0$  ed il limite destro:  $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}_+(t_i) \neq 0$ . Supponiamo ora che la superficie  $M$  sia orientata e sia  $N$  un fissato campo unitario normale alla superficie. Indichiamo con  $|\theta_i|$ ,  $0 < |\theta_i| \leq \pi$ , l’angolo determinato da  $\dot{\alpha}_-(t_i)$  e  $\dot{\alpha}_+(t_i)$ . Se  $|\theta_i| \neq \pi$

(ossia,  $\alpha(t_i)$  non è una cuspidale), assegniamo a  $\theta_i$  il segno del determinante di  $(\dot{\alpha}_-(t_i), \dot{\alpha}_+(t_i), N)$  e quindi il segno di  $\theta_i$  è determinato dall'orientazione di  $M$ . L'angolo con segno  $\theta_i$ ,  $-\pi < \theta_i < \pi$ , si dice *angolo esterno* nel vertice  $\alpha(t_i)$ . L'angolo  $\psi_i = \pi - \theta_i$  si dice *angolo interno* nel vertice  $\alpha(t_i)$ . Nel caso in cui il vertice  $\alpha(t_i)$  sia una cuspidale, cioè  $|\theta_i| = \pi$ , la scelta del segno di  $\theta_i$  avviene come segue: dalla regolarità a tratti segue che esiste un numero  $\delta > 0$  tale che il determinante di  $(\dot{\alpha}(t_i - \varepsilon), \dot{\alpha}(t_i + \varepsilon), N)$  non cambi segno per ogni  $0 < \varepsilon < \delta$ , quindi assegniamo a  $\theta_i$  il segno di tale determinante.

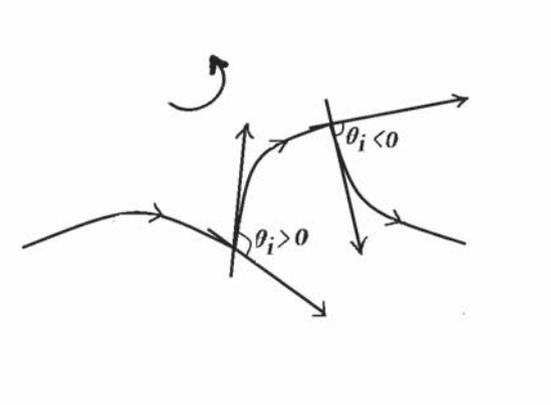


FIGURA 2. Il segno degli angoli esterni.

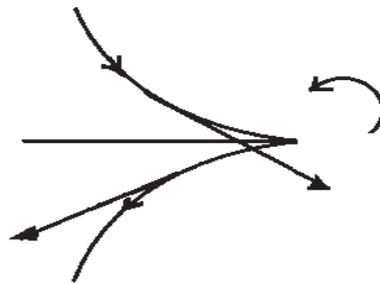


FIGURA 3. Punto cuspidale con  $\theta_i = -\pi$ .

Sia ora  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione di  $M$ , compatibile con l'orientazione di  $M$ . Possiamo assumere che  $D$  sia omeomorfo ad un disco aperto del piano. Sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow \varphi(D) \subset M$  una curva semplice, chiusa, regolare a tratti, con vertici  $\alpha(t_i)$  e angoli esterni  $\theta_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ . Siano  $\phi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni differenziabili che misurino l'angolo positivo formato da  $\varphi_u$  e  $\dot{\alpha}(t)$ , per ogni  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  (cf.[9], p. 250). Allora, con una dimostrazione di natura

topologica si ha (cf.[9], p. 267)

$$(7.1) \quad \sum_{i=0}^k (\phi_i(t_{i+1}) - \phi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi$$

dove il segno dipende dall'orientazione di  $\alpha$ .

**Definizione 7.3.** *Sia  $M$  una superficie orientata. Una regione  $R$  di  $M$  si dice che è una regione semplice se  $R$  è omeomorfa ad un disco e il suo bordo  $\partial R$  è il sostegno di una curva parametrizzata  $\alpha : I \rightarrow M$  semplice, chiusa e regolare a tratti. Diciamo che  $\alpha$  è orientata positivamente se un osservatore, con verso e direzione di  $N$ , che percorre tale curva lascia in ogni istante la regione delimitata da essa alla sua sinistra (cf. Figura 4).*

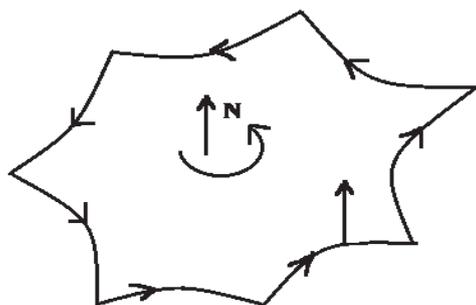


FIGURA 4. Regione semplice con bordo orientato positivamente.

**Esempi 7.4.** Consideriamo le regioni semplici  $R_1$  (disco di raggio  $r$  del piano  $\mathbb{R}^2$ ) ed  $R_2$  (semisfera di  $\mathbb{S}^2(r)$ ) come in Figura 5.



FIGURA 5. Regioni semplici con bordo regolare.

In entrambi i casi il bordo è una circonferenza  $\gamma(s)$  di raggio  $r$ , che parametrizziamo con l'ascissa, quindi il bordo è una curva chiusa semplice regolare.

Si noti che questa situazione è differente di quella considerata nel Teorema 7.1 dove il bordo è regolare a tratti e quindi presenta dei vertici. Nel caso di  $R_1$  la curvatura gaussiana  $K = 0$  ( $M = \mathbb{R}^2$ ) e la curvatura geodetica di  $\gamma$  è  $k_g = 1/r$ . Quindi abbiamo

$$\int_0^{2\pi r} k_g(s) ds + \iint_{R_1} K d\sigma = 2\pi.$$

Nel caso di  $R_2$ , la curvatura gaussiana  $K = 1/r^2$  ( $M = \mathbb{S}^2(r)$ ) e la curvatura geodetica di  $\gamma$  è  $k_g = 0$  (le circonferenze di raggio massimo sono curve geodetiche). Tuttavia, siccome la semisfera di raggio  $r$  ha area  $2\pi r^2$ , abbiamo sempre lo stesso risultato

$$\int_0^{2\pi r} k_g(s) ds + \iint_{R_2} K d\sigma = 2\pi.$$

Di seguito diamo una prima formulazione (locale) del **Teorema di Gauss-Bonnet per regioni semplici con bordo regolare**, che generalizza la situazione degli esempi precedenti.

**Teorema 7.5.** *Sia  $M$  una superficie regolare orientata di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $(D, \varphi)$  una sua parametrizzazione locale, con  $D \subset \mathbb{R}^2$  omeomorfo ad un disco aperto e  $\varphi$  compatibile con l'orientazione di  $M$ . Sia  $R \subset \varphi(D)$  una regione semplice ed  $\alpha : I \rightarrow \varphi(D)$  una curva regolare, semplice, chiusa ed orientata positivamente, parametrizzata con l'ascissa curvilinea e con  $\partial R = \alpha(I)$ . Allora, se  $L \in \mathbb{R}^+$  è la lunghezza di  $\alpha$ , si ha*

$$\int_0^L k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma = 2\pi,$$

dove  $k_g(s)$  è la curvatura geodetica di  $\alpha$  e  $K$  è la curvatura gaussiana.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{X, Y\}$  la base ortonormale ottenuta ortonormalizzando la base  $\{\varphi_u, \varphi_v\}$  in modo tale che le terne  $(X, Y, N)$  e  $(\varphi_u, \varphi_v, N)$  siano concordi. Lungo la curva  $\alpha : I \rightarrow \varphi(D)$ , definiamo la funzione angolo  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che il versore tangente  $\dot{\alpha}$  soddisfi:

$$\dot{\alpha}(s) = \cos \phi(s)X(s) + \sin \phi(s)Y(s),$$

quindi  $\phi(s)$  è l'angolo positivo formato da  $\varphi_u$  e  $\dot{\alpha}(t)$ . Allora:

$$N \wedge \dot{\alpha} = N \wedge ((\cos \phi)X + (\sin \phi)Y) = (-\sin \phi)X + (\cos \phi)Y$$

e

$$\ddot{\alpha} = \phi'((-\sin \phi)X + (\cos \phi)Y) + (\cos \phi)X' + (\sin \phi)Y'.$$

Quindi, sostituendo nella (5.16), per la curvatura geodetica si ha

$$\begin{aligned} k_g &= (N \wedge \dot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha} = \phi'(-(\sin \phi)X + (\cos \phi)Y) \cdot (-(\sin \phi)X + (\cos \phi)Y) \\ &\quad + (-(\sin \phi)X + (\cos \phi)Y) \cdot ((\cos \phi)X' + (\sin \phi)Y'), \end{aligned}$$

da cui

$$(7.2) \quad k_g = \phi' - (X \cdot Y').$$

Siccome  $\alpha$  è una curva chiusa, semplice, regolare e orientata positivamente, dalla (7.1) abbiamo  $\phi(L) - \phi(0) = 2\pi$ . Quindi, integrando la (7.2), si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^L k_g ds &= \int_0^L \phi'(s) ds - \int_0^L (X \cdot Y')(s) ds \\ &= \phi(L) - \phi(0) - \int_0^L (X \cdot Y')(s) ds \\ &= 2\pi - \int_0^L (X \cdot Y')(s) ds, \end{aligned}$$

dove  $Y' = u'Y_u + v'Y_v$  in quanto  $Y(s) = Y(u(s), v(s))$ . Ora, ricordiamo che se  $f(u, v)$  e  $g(u, v)$  sono funzioni differenziabili in una regione semplice  $D \subset \mathbb{R}^2$ , il cui bordo è dato dalla curva  $\gamma(s) = (u(s), v(s))$  regolare a tratti, allora per il Teorema di Gauss-Green si ha

$$(7.3) \quad \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( f \frac{du}{ds} + g \frac{dv}{ds} \right) ds = \iint_D \left( \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) dudv.$$

Applicando tale Teorema, facendo anche uso della Proposizione 5.26, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^L (X \cdot Y')(s) ds &= \int_0^L (X \cdot (u'Y_u + v'Y_v)) ds \\ &= \int_\alpha \left( (X \cdot Y_u) \frac{du}{ds} + (X \cdot Y_v) \frac{dv}{ds} \right) ds \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left( (X \cdot Y_v)_u - (X \cdot Y_u)_v \right) dudv \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left( (X_u \cdot Y_v) + (X \cdot Y_{vu}) - (X_v \cdot Y_u) - (X \cdot Y_{uv}) \right) dudv \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left( (X_u \cdot Y_v) - (X_v \cdot Y_u) \right) dudv \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(R)} K \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= \iint_R K d\sigma. \end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

Nel piano ogni curva chiusa, semplice e regolare, delimita una regione omeomorfa a un disco, allora dal Teorema 7.5 segue il seguente

**Corollario 7.6.** *Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare, semplice e chiusa del piano, parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Se  $L \in \mathbb{R}^+$  è la lunghezza di  $\alpha$ , allora*

$$\int_0^L k_g(s) ds = 2\pi.$$

Si noti che il Corollario 7.6 non si applica al caso del cilindro circolare retto (pur avendo curvatura gaussiana nulla) in quanto per il cilindro esistono curve chiuse semplici regolari che non delimitano una regione omeomorfa a un disco come richiesto nel Teorema 7.5. Lo stesso Teorema 7.5 può essere esteso al caso in cui la curva  $\alpha : I \rightarrow M$  sia solo regolare a tratti.

**Teorema 7.7. (Teorema locale di Gauss-Bonnet)**

*Sia  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione locale di una superficie orientata  $M$ , dove  $D \subset \mathbb{R}^2$  è omeomorfo ad un disco aperto e  $\varphi$  è compatibile con l'orientazione di  $M$ . Siano  $R \subset \varphi(D)$  una regione semplice di  $M$  ed  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva regolare a tratti tale che  $\partial R = \alpha(I)$ . Supponiamo che  $\alpha$  sia orientata positivamente e parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea, inoltre siano  $\alpha(s_1), \dots, \alpha(s_k), \theta_1, \dots, \theta_k$  rispettivamente i vertici e gli angoli esterni nei vertici di  $\alpha$ . Allora:*

$$\sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi,$$

equivalentemente

$$(7.4) \quad \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma - \sum_{i=1}^k \psi_i = -(k-2)\pi,$$

dove  $k_g(s)$  è la curvatura geodetica degli archi regolari di  $\alpha$ , e  $\psi_i = \pi - \theta_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) sono gli angoli interni.

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione si ottiene ripercorrendo quella del Teorema 7.5. Sia  $\{X, Y\}$  la solita base ortonormale ottenuta applicando il metodo di Gram-Schmidt alla base  $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ . Sia  $\mathcal{J}$  il sottoinsieme finito di  $I$  i cui elementi corrispondono ai vertici di  $\alpha(I)$ . Lungo ogni arco regolare di  $\alpha$  consideriamo la funzione angolo, quindi abbiamo la funzione  $\phi : I \setminus \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che il versore tangente  $\dot{\alpha}$  soddisfi:

$$\dot{\alpha}(s) = \cos \phi(s) X(s) + \sin \phi(s) Y(s).$$

In questo caso la (7.2) vale per ogni arco regolare di  $\alpha$ . Integrando lungo tutti gli archi e sommando, si ottiene

$$\sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} k_g(s) ds = \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} \phi' ds - \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} (X \cdot Y') ds.$$

Allora, applicando la (7.3) e la Proposizione 5.26, si ha

$$\sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} (X \cdot Y') ds = \iint_R K d\sigma.$$

Infine, siccome  $\alpha$  è orientata positivamente, applicando la (7.1) si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} \phi' ds &= \sum_{i=1}^k (\phi_i(b_i) - \phi_i(a_i)) \\ &= 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i \\ &= 2\pi - \sum_{i=1}^k (\pi - \psi_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \psi_i - (k-2)\pi, \end{aligned}$$

dove  $\psi_i = \pi - \theta_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) sono gli angoli *interni* nei vertici di  $\alpha$ . Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**Osservazione 7.8.** Una immediata conseguenza della formula (7.4) è il Teorema (elegantissimo) di Gauss. Infatti, considerando un triangolo geodetico,  $k = 3$  e il termine con la curvatura geodetica è nullo.

## 7.2. Il Teorema globale di Gauss-Bonnet

**Definizione 7.9.** Sia  $M$  una superficie regolare. Una regione  $R \subset M$  si dice regione regolare se  $R$  è un compatto e la sua frontiera  $\partial R$  è unione finita di curve chiuse e regolari a tratti che non si intersecano fra loro.

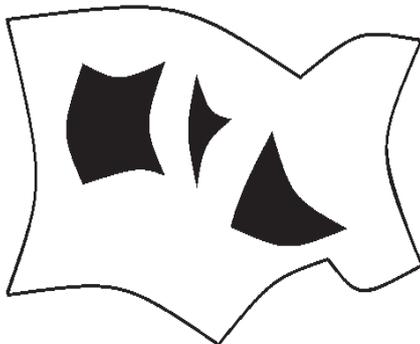


FIGURA 6. Regione regolare.

Una regione semplice che ha tre soli vertici con angoli esterni  $\theta_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , si dice *triangolo*.

**Definizione 7.10.** Una triangolazione di una regione regolare  $R \subset M$  è una famiglia finita  $\mathfrak{T}$  di triangoli  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tali che:

- (1)  $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$ .
- (2) se  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ , allora  $T_i \cap T_j$  o è uno spigolo comune a  $T_i$  e  $T_j$  oppure è un vertice comune a  $T_i$  e  $T_j$ .

Ricordiamo ora dei risultati di natura topologica, necessari per lo studio del Teorema di Gauss-Bonnet.

**Proprietà 1:**

Ogni regione regolare  $R$  di una superficie regolare ammette una triangolazione.

**Definizione 7.11.** Assegnata una triangolazione  $\mathfrak{T}$  di una regione regolare  $R$  di una superficie regolare  $M$ , indichiamo con  $F$  il numero di triangoli, con  $S$  il numero degli spigoli e con  $V$  il numero dei vertici di tale triangolazione. Il numero:

$$\chi(R) = F - S + V,$$

che non dipende dalla particolare triangolazione considerata, si dice *caratteristica di Eulero-Poincarè di  $R$* . La stessa definizione di caratteristica di Eulero-Poincarè vale anche, più in generale, per ogni superficie triangolabile di  $\mathbb{R}^3$ .

Si noti che la caratteristica di Eulero-Poincarè di uno spazio topologico triangolabile è un invariante topologico. In particolare, una regione semplice  $R$  è omeomorfa a un disco e quindi a un triangolo, pertanto la sua caratteristica di Eulero-Poincarè è  $\chi(R) = 1 - 3 + 3 = 1$ .

**Proprietà 2:**

Siano  $M$  una superficie regolare orientata e  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  una famiglia di parametrizzazioni compatibili con l'orientazione della stessa superficie. Sia  $R$  una regione regolare di  $M$ . Allora, esiste una triangolazione  $\mathfrak{T}$  di  $R$  tale che ogni triangolo  $T \in \mathfrak{T}$  è contenuto in un intorno coordinato della famiglia di parametrizzazioni assegnata. Inoltre, se il bordo di un triangolo  $T \in \mathfrak{T}$  è orientato positivamente, i triangoli adiacenti ad esso determinano un'orientazione opposta sugli spigoli in comune.

Una prima formulazione del Teorema globale di Gauss-Bonnet è la seguente.

**Teorema 7.12. (Teorema di Gauss-Bonnet per regioni regolari)**  
Sia  $R$  una regione regolare di una superficie regolare orientata  $M$  con bordo  $\partial R$  orientato positivamente. Siano  $\{\alpha_i(s)\}_{i=1, \dots, n}$  le curve, parametrizzate con

l'ascissa curvilinea, che costituiscono il bordo  $\partial R$ , e siano  $\{\theta_j\}_{j=1,\dots,p}$  tutti gli angoli esterni delle curve  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Allora,

$$(7.5) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^p \theta_j = 2\pi \chi(R).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per la Proprietà 2 possiamo considerare una triangolazione  $\mathfrak{T}$  della regione  $R$  tale che ogni triangolo  $T_j$  sia contenuto in un intorno coordinato di una famiglia di parametrizzazioni, compatibile con l'orientazione di  $M$ . Orientiamo positivamente il bordo di ogni triangolo di  $\mathfrak{T}$ , questa orientazione è compatibile con quella del bordo, inoltre induce orientazioni opposte sui lati che sono in comune fra triangoli adiacenti (cf. Figura 7).

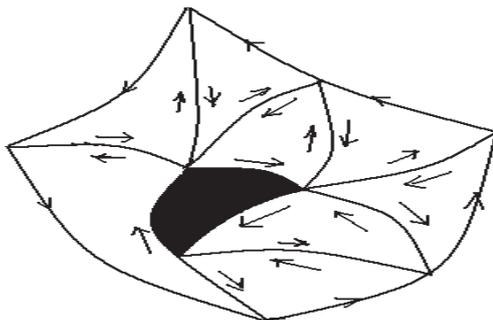


FIGURA 7. Una triangolazione.

Applicando il Teorema 7.7 (Teorema locale di Gauss-Bonnet) al generico triangolo  $T_j$  della triangolazione  $\mathfrak{T}$ , si ha

$$(7.6) \quad \int_{\partial T_j} k_g(s) ds + \iint_{T_j} K d\sigma + \sum_{k=1}^3 \theta_{j_k} = 2\pi,$$

dove  $\theta_{j_1}, \theta_{j_2}, \theta_{j_3}$  sono gli angoli esterni del triangolo  $T_j$ . Indichiamo con  $F$  il numero di triangoli  $T_j$  della triangolazione  $\mathfrak{T}$ . Se  $(u_j, v_j)$  sono i parametri della parametrizzazione che contiene  $T_j$ , dalla definizione di integrale (cf.(3.22)) si ha

$$\iint_R K d\sigma = \sum_{j=1}^F \iint_{T_j} K(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j.$$

Quindi, il secondo membro non dipende dalla triangolazione  $\mathfrak{T}$  di  $R$  o dalla famiglia di parametrizzazioni scelta. D'altronde, sommando le  $F$  formule (7.6), tenendo anche conto del fatto che sui lati interni le somme degli integrali

della curvatura geodetica sono nulle (triangoli adiacenti inducono orientazioni opposte sul lato in comune), si ottiene

$$(7.7) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi F.$$

Se indichiamo gli angoli interni del triangolo  $T_j$  con

$$\psi_{jk} = \pi - \theta_{jk},$$

si ottiene

$$(7.8) \quad \sum_{j,k} \theta_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k} \psi_{jk}.$$

Detti  $E$  e  $V$  rispettivamente il numero complessivo dei lati e dei vertici della triangolazione  $\mathfrak{T}$ , introduciamo la seguente notazione:

$E_e$  = numero dei lati della triangolazione che si trovano sul bordo  $\partial R$ ,

$E_i$  = numero dei lati interni della triangolazione,

$V_e$  = numero dei vertici della triangolazione che si trovano sul bordo  $\partial R$ ,

$V_i$  = numero dei vertici interni della triangolazione.

Siccome il bordo  $\partial R$  è costituito da poligoni (curvilinei), si ha  $E_e = V_e$ . Inoltre, ogni triangolo ha tre lati, ogni lato interno è comune a due triangoli, e ogni lato sul bordo è lato di un solo triangolo, per cui vale la seguente formula:

$$3F = 2E_i + E_e.$$

Quindi, da (7.8), si ha:

$$(7.9) \quad \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \psi_{jk}.$$

Notiamo che i vertici che si trovano sul bordo possono anche essere vertici dei poligoni curvilinei che costituiscono  $\partial R$ , allora poniamo

$$V_e = V_{ec} + V_{et},$$

dove  $V_{ec}$  è il numero di vertici dei poligoni curvilinei che costituiscono il bordo e  $V_{et}$  è il numero dei rimanenti vertici della triangolazione  $\mathfrak{T}$ . Siccome la somma degli angoli interni attorno ad ogni vertice interno è  $2\pi$ , e la somma degli angoli interni nei vertici che si trovano su  $\partial R$  è  $\pi$  diminuito del corrispondente angolo esterno, dalla (7.9) otteniamo

$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{j=1}^p (\pi - \theta_j).$$

Addizionando e sottraendo all'espressione precedente  $\pi E_e$ , e tenendo presente che  $E_e = V_e$ ,  $E = E_i + E_e$ ,  $V = V_i + V_e$  e  $V_e = V_{ec} + V_{et}$ , si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{et} - \sum_{j=1}^p (\pi - \theta_j) \\ &= 2\pi E - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_{j=1}^p \theta_j \\ &= 2\pi E - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_e + \sum_{j=1}^p \theta_j \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{j=1}^p \theta_j. \end{aligned}$$

Mettendo assieme i risultati ottenuti nella (7.7), abbiamo

$$\sum_i \int_{\alpha_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^p \theta_j = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(R).$$

□

**Osservazione 7.13.** Il termine a sinistra della formula (7.5) non dipende dalla triangolazione considerata, di conseguenza la caratteristica di Eulero-Poincarè  $\chi(R)$  non dipende dalla triangolazione considerata come d'altronde era stato già osservato.

Sia  $\mathcal{P}$  un  $n$ -poligono geodetico di una superficie regolare orientata  $M$ , ossia  $\mathcal{P}$  è omeomorfo a un disco il cui bordo  $\partial\mathcal{P}$  è costituito da  $n$ -archi geodetici. In particolare  $\mathcal{P}$  è omeomorfo a poligono triangolare (quindi,  $F = 1, S = 3, V = 3$ ), per cui  $\chi(\mathcal{P}) = 1$ . Inoltre, gli angoli interni nei vertici di  $\mathcal{P}$  sono dati da  $\psi_i = \pi - \theta_i$ , per cui  $\sum_{i=1}^n \theta_i = n\pi - \sum_{i=1}^n \psi_i$ . Pertanto, dal Teorema 7.12, si ha

**Corollario 7.14.** *Sia  $\mathcal{P}$  un  $n$ -poligono geodetico di una superficie regolare orientata  $M$  e siano  $\psi_i$  gli angoli interni nei vertici di  $\mathcal{P}$ . Allora,*

$$\iint_R K d\sigma + (n - 2)\pi = \sum_{i=1}^n \psi_i.$$

In particolare, come conseguenza del Corollario 7.14, per  $n = 3$ , si ottiene il Teorema 7.1 (elegantissimo di Gauss).

Una superficie regolare connessa compatta  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  è orientabile (cf., ad esempio, Samelson [24]). Inoltre, tale superficie si può considerare come una regione regolare priva di bordo. Allora, dal Teorema 7.12 segue il Teorema di Gauss-Bonnet per superfici connesse compatte di  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 7.15** (di Gauss-Bonnet). *Sia  $M$  una superficie regolare connessa compatta di  $\mathbb{R}^3$ . Allora,*

$$\iint_M K d\sigma = 2\pi\chi(M),$$

dove  $\chi(M)$  denota la caratteristica di Eulero-Poincaré di  $M$ . In particolare, la curvatura totale  $\int_M K d\sigma$  è un invariante topologico.

**Osservazione 7.16.** Il Teorema 7.15 (di Gauss-Bonnet) vale nella stessa formulazione anche per varietà riemanniane compatte orientabili di dimensione 2. Tale teorema è stato poi generalizzato da S.S. Chern (Ann. of Math. 45 (2) (1944), 747-752) per varietà riemanniane compatte orientabili di dimensione pari  $n \geq 2$ . Si noti che per  $n > 2$  la formula che si ottiene dipende sempre dalla curvatura ma in una forma notevolmente più complicata (in [21] p. 302-309, si possono trovare le formule per  $n = 4$  e  $n = 6$ ).

### 7.3. Applicazioni del Teorema di Gauss-Bonnet

La sfera  $\mathbb{S}^2$  è una superficie connessa compatta di  $\mathbb{R}^3$ . Una triangolazione (geodetica) di  $\mathbb{S}^2$  è data dalla seguente Figura 8.

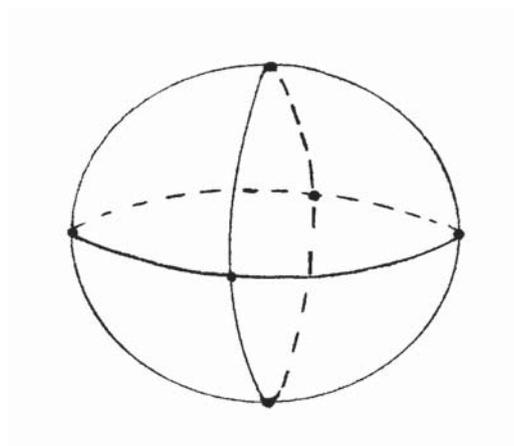


FIGURA 8. Una triangolazione geodetica di  $\mathbb{S}^2$

Tale triangolazione ha  $F = 8, S = 12, V = 6$ . Quindi, la caratteristica di Eulero-Poincaré della sfera  $\chi(\mathbb{S}^2) = F - S + V = 2$ .

Il Teorema di Gauss-Bonnet è veramente sorprendente, esso mette in stretta relazione due invarianti a priori molto distanti tra loro: “la caratteristica di Eulero-Poincaré” (invariante topologico) e “la curvatura di Gauss” (invariante metrico). Come conseguenza, la curvatura totale  $\iint_M K d\sigma$  non cambia se “deformiamo” la superficie. Ad esempio, per entrambe le superfici in Figura 9 si ha

$$\iint_M K d\sigma = 4\pi.$$

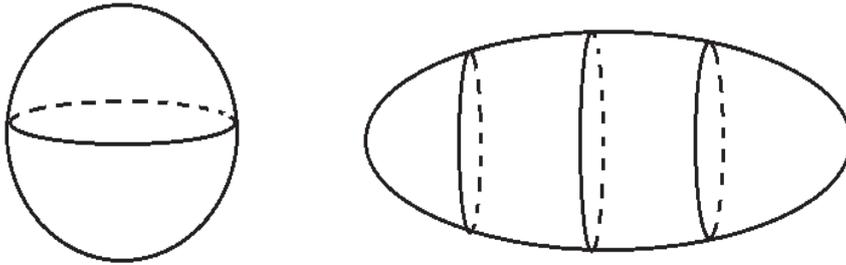


FIGURA 9

Ora ricordiamo il seguente teorema di classificazione.

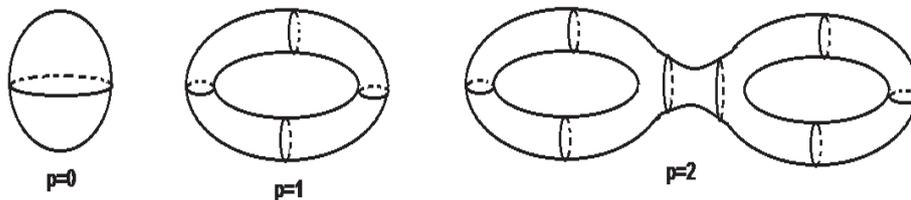
**Teorema 7.17.** (cf., ad esempio, [15], [19]) *Una superficie astratta connessa compatta (quindi non necessariamente superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ ), ossia una varietà differenziabile connessa compatta di dimensione 2, è omeomorfa (equivalentemente, diffeomorfa) a una delle seguenti superfici connesse compatte*

$$A) M = \mathbb{S}^2 \# p\mathbb{T}^2, p \in \mathbb{N}, p \geq 0,$$

$$B) M = \mathbb{S}^2 \# q\mathbb{P}^2, q \in \mathbb{N}, q \geq 1,$$

dove  $\mathbb{T}^2$  è la superficie torica,  $\mathbb{P}^2$  è il piano proiettivo e  $\#$  denota la somma connessa tra superfici. Gli interi  $p$  e  $q$  rappresentano il genere della superficie.

Per  $p = 0$ :  $M = \mathbb{S}^2$ , per  $p = 1$ :  $M = \mathbb{S}^2 \# \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , e per  $p = 2$ :  $M = \mathbb{S}^2 \# 2\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  (bi-toro). In generale, una superficie connessa compatta del tipo A) e di genere  $p$  è omeomorfa a una sfera con  $p$ -manici (detta anche ciambella con  $p$ -buchi o  $p$ -toro).

FIGURA 10.  $p$ -toro,  $p = 0, 1, 2$ .

Nel caso delle superfici del tipo B), per  $q = 1$ ,  $M = \mathbb{S}^2 \# \mathbb{P}^2$  è omeomorfa al piano proiettivo, e per  $q = 2$  la superficie  $M = \mathbb{S}^2 \# 2\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$  è un modello topologico della bottiglia di Klein. Se consideriamo una superficie torica  $\mathbb{T}^2$

simmetrica rispetto all'origine, allora il quoziente  $\mathbb{T}^2/\{\pm I\}$  è un altro modello topologico della bottiglia di Klein.

Si noti che il concetto di orientabilità vale anche per le superfici astratte (cf. Osservazione 6.2). Si può provare che le superfici del tipo A) sono **superfici connesse compatte orientabili** di genere  $p \geq 0$ , e le superfici del tipo B) sono **superfici connesse compatte non orientabili** di genere  $q \geq 1$ . In particolare, due superfici connesse compatte entrambe orientabili, o entrambe non orientabili, sono omeomorfe se, e solo se, hanno lo stesso genere. Inoltre, per  $M$  superficie connessa compatta orientabile di genere  $p$  si ha

$$\chi(M) = 2 - 2p \leq 2;$$

per  $M$  superficie connessa compatta non orientabile di genere  $q$  si ha

$$\chi(M) = 2 - q \leq 1.$$

Quindi, la caratteristica di Eulero-Poincarè  $\chi(M)$  determina la configurazione topologica di  $M$ : due superfici connesse, compatte  $M, M'$  entrambe orientabili, o entrambe non orientabili, sono omeomorfe se, e solo se,  $\chi(M) = \chi(M')$ .

Siccome come osservato in precedenza una superficie regolare connessa compatta di  $\mathbb{R}^3$  è orientabile [24], dal Teorema 7.17 (di classificazione delle superfici connesse compatte astratte) si ottiene il seguente risultato di natura topologica, che fornisce una classificazione delle superfici connesse compatte di  $\mathbb{R}^3$

**Teorema 7.18.** *Una superficie regolare connessa compatta di  $\mathbb{R}^3$  è orientabile, quindi omeomorfa a una sfera con  $p$ -manici (ossia a un  $p$ -toro). e la sua caratteristica di Eulero-Poincarè è data da*

$$\chi(M) = 2 - 2p \leq 2.$$

In particolare la caratteristica di Eulero-Poincarè  $\chi(M)$  di una superficie regolare connessa compatta  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  determina la configurazione topologica di  $M$ . Di conseguenza, dal Teorema 7.15 di Gauss-Bonnet la curvatura totale  $\iint_M K d\sigma = 2\pi\chi(M)$  determina la configurazione topologica di  $M$ .

Più precisamente, dal Teorema 7.15 di Gauss-Bonnet, segue il seguente

**Corollario 7.19.** *Sia  $M$  una superficie regolare connessa compatta di  $\mathbb{R}^3$ . Allora,*

$$\int_M K d\sigma > 0 \iff M \text{ è omeomorfa alla sfera } \mathbb{S}^2;$$

$$\int_M K d\sigma = 0 \iff M \text{ è omeomorfa alla superficie torica } \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1;$$

$$\int_M K d\sigma < 0 \iff M \text{ è omeomorfa a un } p\text{-toro, con } p > 1.$$

In particolare, se una superficie regolare connessa compatta ha curvatura gaussiana  $K \geq 0$  e positiva in almeno un punto, allora essa è omeomorfa a una sfera;

Inoltre, se  $M$  ha curvatura gaussiana costante  $K_0$ , il genere  $p$  della superficie è dato da :

$$p = 1 - \frac{K_0 \text{vol}(M)}{4\pi}.$$

Dal Teorema 4.61 e dal Teorema di Gauss-Bonnet si ottiene il seguente risultato

**Corollario 7.20.** (Teorema di Liebmann) *La sfera è la sola superficie regolare connessa compatta di  $\mathbb{R}^3$  con curvatura gaussiana costante.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $M$  una superficie connessa compatta regolare di  $\mathbb{R}^3$  con curvatura gaussiana costante  $K_0$ . Il Teorema 4.61 implica che la costante  $K_0 > 0$ . Allora, dal Teorema di Gauss-Bonnet segue che  $2\pi\chi(M) > 0$ , ossia  $4\pi(1-p) > 0$  e quindi  $p = 0$ . Pertanto,  $M$  è una sfera.  $\square$

I risultati successivi mostrano come il Teorema (locale) di Gauss-Bonnet possa essere applicato al fine di trarre delle conclusioni sulle geodetiche di una superficie.

**Corollario 7.21.** *Sia  $M$  una superficie (connessa) regolare orientabile di  $\mathbb{R}^3$  con curvatura gaussiana  $K \leq 0$ . Allora, due geodetiche  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  uscenti da uno stesso punto  $p \in M$  non possono incontrarsi in un altro punto  $q \in M$ , diverso da  $p$ , in modo da costituire il bordo di una regione semplice  $R$  di  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo per assurdo che esistano due geodetiche  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che si incontrino in due punti distinti in modo da formare una regione semplice  $R$  (cf. Figura 11).

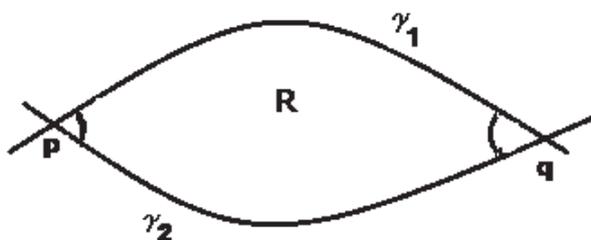


FIGURA 11

Applicando la (7.4) del Teorema 7.7, e tenendo conto che  $R$  è una regione poligonale di due lati con  $\sum_{i=1}^2 \int_{a_i}^{b_i} k_g ds = 0$  (in quanto  $\gamma_1, \gamma_2$  sono geodetiche)

si avrebbe:

$$\iint_R K d\sigma = \psi_1 + \psi_2,$$

dove  $\psi_1, \psi_2$  sono gli angoli interni di  $R$ . Siccome  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  non possono essere tangenti fra loro (per l'unicità della geodetica uscente da un punto con un fissato vettore tangente), si ha  $\psi_i > 0, i = 1, 2$ . D'altronde  $K \leq 0$ , pertanto si avrebbe una contraddizione.  $\square$

Con riferimento alla dimostrazione del Corollario 7.21, quando  $\psi_1 = \psi_2 = \pi$  (ossia  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ), l'unione di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  è una geodetica chiusa e semplice. Quindi: *su una superficie regolare orientabile la cui curvatura gaussiana è negativa o nulla non esiste alcuna geodetica chiusa e semplice che sia bordo di una regione semplice.*

Infine, ricordiamo che una superficie si dice semplicemente connessa se è connessa per archi e ogni curva chiusa semplice continua racchiude una regione omeomorfa a un disco. Combinando il Teorema 5.93 (di Hopf-Rinow) e il Corollario 7.21, si ottiene il seguente risultato.

**Teorema 7.22.** *Su una superficie regolare  $M$  geodeticamente completa, orientabile, semplicemente connessa e con curvatura gaussiana non positiva, comunque si considerano due punti distinti esiste un'unica geodetica che li congiunge.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome  $M$  è geodeticamente completa, dal Teorema 5.93 (di Hopf-Rinow) segue che comunque prendiamo due punti  $p, q \in M$  esiste una geodetica  $\gamma(p, q)$  che li congiunge. D'altronde, la curvatura gaussiana  $K \leq 0$  ed  $M$  è semplicemente connessa, per cui dal Corollario 7.21 segue che la geodetica  $\gamma(p, q)$  è unica.  $\square$



## Il Teorema di Lancret sulla sfera $\mathbb{S}^3$

Il concetto di elica generalizzata fu trasferito, per la prima volta, in ambito riemanniano da Hayden [12]. In tale articolo, un'elica generalizzata viene definita come una curva per la quale un campo vettoriale lungo essa, parallelo secondo Levi-Civita, forma angoli costanti con tutti i vettori del riferimento di Frenet. Tuttavia, questa definizione sembra essere molto restrittiva. Più recentemente Barros [1] propone una definizione di elica generalizzata (o elica di Lancret) su una varietà riemanniana 3-dimensionale semplicemente connessa di curvatura sezionale costante  $c$  ( $c = 0, +1, -1$ ) sostituendo la fissata direzione (nella Definizione 2.39) con un campo vettoriale di Killing, inoltre dimostra un Teorema di Lancret per questo tipo di “eliche”. Per  $c = 0$  si ritrova il classico Teorema di Lancret per le curve di  $\mathbb{R}^3$  (cf. Teorema 2.42). Per  $c \neq 0$ , il caso più interessante è quello della sfera unitaria ( $c = +1$ ). In questo capitolo diamo una presentazione autocontenuta e dettagliata, con strumenti “elementari”, del Teorema di Lancret nel caso della sfera unitaria 3-dimensionale.

### 8.1. Apparato di Frenet per curve di $\mathbb{S}^3$

Indichiamo con  $\mathbb{S}^3$  la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\mathbb{S}^3 = \{p = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Molti concetti della teoria delle superfici di  $\mathbb{R}^3$  si possono estendere in modo del tutto analogo al caso di  $\mathbb{S}^3$  che è una ipersuperficie di  $\mathbb{R}^4$ .

Una **curva differenziabile**  $\gamma$  di  $\mathbb{S}^3$  è un'applicazione differenziabile

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4, t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)),$$

ossia è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^4$  che assume valori nella sfera  $\mathbb{S}^3$ . Un vettore  $V_p \in T_p \mathbb{R}^4$ ,  $p \in \mathbb{S}^3$ , si dice **vettore tangente** in  $p$  alla sfera  $\mathbb{S}^3$  se esiste  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3$  curva differenziabile di  $\mathbb{S}^3$  ed esiste  $t_0 \in I$  tali che

$$\gamma(t_0) = p \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(t_0) = V_p.$$

Indichiamo con  $T_p \mathbb{S}^3$  l'insieme di tutti i vettori tangenti in  $p$  alla sfera  $\mathbb{S}^3$ , e con  $\xi_p$  il campo vettoriale definito da

$$\xi_p = (x_1(p), x_2(p), x_3(p), x_4(p))_p \equiv p \quad \text{per ogni } p \in \mathbb{S}^3.$$

$\xi$ , che nella teoria delle superfici è stato indicato con  $N$ , è un **campo vettoriale unitario normale** alla sfera  $\mathbb{S}^3$ .

**Proposizione 8.1.** *Risulta*

$$T_p \mathbb{S}^3 = \xi_p^\perp = p^\perp.$$

Quindi,  $T_p \mathbb{S}^3$  è un sottospazio vettoriale 3-dimensionale di  $T_p \mathbb{R}^4$ , che viene detto **spazio tangente** in  $p$  alla sfera  $\mathbb{S}^3$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $V_p \in T_p \mathbb{S}^3$ ,  $V_p = (p, v)$ , allora esiste una curva differenziabile  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$  di  $\mathbb{S}^3$  tale che  $\gamma(t_0) = p$  e  $\dot{\gamma}(t_0) = V_p$ , quindi  $x'_i(t_0) = v^i$  per ogni  $i = 1, \dots, 4$ . Siccome  $\gamma(t) \in \mathbb{S}^3$ , abbiamo

$$\sum_{i=1}^4 x_i(t)^2 = 1 \text{ e derivando si ha } \sum_{i=1}^4 x'_i(t)x_i(t) = 0,$$

per cui

$$\sum_{i=1}^4 x'_i(t_0)x_i(t_0) = 0, \quad \text{ossia} \quad \sum_{i=1}^4 v^i x_i(p) = 0.$$

Quindi,

$$V_p \cdot \xi_p = 0 \quad \text{da cui segue che} \quad V_p \in \xi_p^\perp.$$

Viceversa, sia  $V_p \in \xi_p^\perp$ ,  $V_p = (p, v)$ ,  $v \neq 0$ , e quindi  $v \cdot p = 0$ . Posto  $\lambda = \|v\| > 0$  e  $v_1 = v/\lambda$ , consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (\cos \lambda t)p + (\sin \lambda t)v_1.$$

Si vede facilmente che  $\gamma$  è una curva di  $\mathbb{S}^3$  e soddisfa  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_p$ . Pertanto,  $V_p \in T_p \mathbb{S}^3$ .  $\square$

Data una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $\mathbb{S}^3$ ,  $t \in I$ , sia  $V(t)$  un campo vettoriale (tangente a  $\mathbb{S}^3$ ) differenziabile lungo  $\gamma$ , ossia

$$V(t) = (V^1(t), V^2(t), V^3(t), V^4(t))_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)} \mathbb{S}^3$$

con  $V^i(t)$  funzioni differenziabili. La **derivata covariante** di  $V(t)$  è il campo vettoriale (tangente a  $\mathbb{S}^3$ ) differenziabile lungo  $\gamma$  definito da

$$\frac{DV}{dt} := (V'(t))^\top = V'(t) - (V'(t) \cdot \xi_{\gamma(t)})\xi_{\gamma(t)} = V'(t) - (V'(t) \cdot \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t),$$

e quindi  $DV/dt$  è definito dall'*equazione di Gauss*. Se indichiamo con  $\mathfrak{X}(\gamma)$  lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali (tangenti a  $\mathbb{S}^3$ ) differenziabili lungo  $\gamma$ , è facile verificare che l'operatore  $D/dt$  è un endomorfismo di  $\mathfrak{X}(\gamma)$ . Inoltre, per ogni  $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$  e per ogni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile, valgono le proprietà

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}(fV) &= f'(t)V + f \frac{DV}{dt}, \\ (V \cdot W)' &= \frac{DV}{dt} \cdot W + V \cdot \frac{DW}{dt}. \end{aligned}$$

Ora, sia  $\gamma(s)$  una curva regolare di  $\mathbb{S}^3$  parametrizzata a velocità unitaria. Quindi, il **campo tangente** lungo  $\gamma$ , che indichiamo con  $T(s)$ , è unitario:

$$T(s) = \dot{\gamma}(s), \quad \|T(s)\| = \|\dot{\gamma}(s)\| = 1.$$

**Definizione 8.2.** *La funzione*

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \kappa(s) := \left\| \frac{DT}{ds} \right\| \geq 0,$$

è detta **curvatura** della curva  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{S}^3$ .

Supponiamo che  $\gamma(s)$  sia un arco di curva regolare a velocità unitaria e con curvatura  $\kappa(s) > 0$  per ogni  $s \in I$ . Siccome  $T(s) \cdot T(s) = 1$ , allora abbiamo  $(DT/ds) \cdot T(s) = 0$  e quindi  $(DT/ds) \perp T(s)$ . Il campo vettoriale

$$N(s) := \frac{1}{\|DT/ds\|} \frac{DT}{ds} \in \mathfrak{X}(\gamma),$$

detto **campo normale principale** lungo  $\gamma$ , è un campo vettoriale unitario ortogonale a  $T(s)$ . Il **campo binormale** lungo  $\gamma$  è il campo vettoriale unitario  $B \in \mathfrak{X}(\gamma)$  ortogonale a  $T(s)$  ed  $N(s)$  e orientato in modo tale che

$$\det(\xi_{\gamma(s)}, T(s), N(s), B(s)) = +1,$$

ossia orientato in modo tale che  $(\xi_{\gamma(s)}, T(s), N(s), B(s))$  sia una base ortonormale positiva di  $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^4$ . In particolare,

$$(T(s), N(s), B(s))$$

è una base ortonormale lungo  $\gamma$  di  $T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^3$  che viene detta **riferimento di Frenet** (o *triedro di Frenet*) della curva  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{S}^3$ . Una curva regolare  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{S}^3$  parametrizzata a velocità unitaria e con curvatura  $\kappa(s) > 0$ , la diremo **curva di Frenet** di  $\mathbb{S}^3$ .

**Definizione 8.3.** *La funzione torsione di una curva di Frenet  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{S}^3$ , è la funzione*

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \tau(s) = -\frac{DB}{ds} \cdot N(s) = B(s) \cdot \frac{DN}{ds},$$

L'insieme

$$\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$$

si chiama **apparato di Frenet** della curva  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{S}^3$ . Le corrispondenti *formule di Frenet* sono date da :

$$\begin{cases} \frac{DT}{ds} = & \kappa(s) N(s), \\ \frac{DN}{ds} = & -\kappa(s) T(s) & +\tau(s) B(s), \\ \frac{DB}{ds} = & -\tau(s) N(s). \end{cases}$$

Queste formule si dimostrano, usando le proprietà della derivata covariante, esattamente come per le curve di Frenet di  $\mathbb{R}^3$ .

**Osservazione 8.4.** Una curva differenziabile  $\gamma(t)$  della sfera  $\mathbb{S}^3$  si dice che è una **curva geodetica** se la sua accelerazione intrinseca  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ . In modo equivalente,  $\gamma(t)$  è una curva geodetica se il campo vettoriale  $\dot{\gamma}(t)$  è parallelo al campo normale  $\xi_{\gamma(t)}$ . Quindi, come per la sfera  $\mathbb{S}^2$ , anche per la sfera  $\mathbb{S}^3$  si vede che le sue geodetiche sono tutte e sole le circonferenze di raggio massimo (opportunamente parametrizzate).

## 8.2. Eliche generalizzate e Teorema di Lancret sulla sfera $\mathbb{S}^3$

Sia  $\gamma(s)$ ,  $s \in I$ , una curva di Frenet della sfera  $\mathbb{S}^3$ , e sia  $\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$  il corrispondente apparato di Frenet. Consideriamo una **variazione** della curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3$ , cioè un'applicazione differenziabile

$$H : I \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}^3, (s, r) \mapsto H(s, r) = \gamma_r(s),$$

con  $H(s, 0) = \gamma_0(s) = \gamma(s)$ . Il campo vettoriale

$$V(s) = \left( \frac{\partial H(s, r)}{\partial r} \right) (s, 0) = \left( \frac{d}{dr} \gamma_r(s) \right) \Big|_{r=0} = \dot{\gamma}_s(0) \in T_{H(s, 0)} \mathbb{S}^3 = T_{\gamma(s)} \mathbb{S}^3$$

è il *campo variazionale* di  $H$ . Indichiamo con  $v(s, r)$  la velocità scalare, con  $\kappa(s, r)$  la curvatura e con  $\tau(s, r)$  la torsione della curva  $\gamma_r(s)$ .

Seguendo [18] (e anche [1]), introduciamo la seguente

**Definizione 8.5.** Un **campo vettoriale**  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  si dice **di Killing** se, considerata una  $V$ -variazione di  $\gamma$ , ovvero una variazione avente  $V(s)$  come campo variazionale, risulta

$$\left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \left( \frac{\partial \kappa^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \left( \frac{\partial \tau^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0.$$

Tale definizione è ben posta, cioè non dipende dalla particolare variazione considerata. Infatti, come provato in [18], cf. anche [1], risulta (omettendo il parametro  $s$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \left( \frac{DV}{ds} \cdot T \right) v = 0, \\ \left( \frac{\partial \kappa^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 2\kappa \left( \frac{D^2V}{ds^2} \cdot N \right) - 4\kappa^2 \left( \frac{DV}{ds} \cdot T \right) + 2\kappa(V \cdot N) = 0, \\ \left( \frac{\partial \tau^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \frac{2\tau}{\kappa} \left( \frac{D^3V}{ds^3} \cdot B \right) - \frac{2\kappa'\tau}{\kappa^2} \left( \left( \frac{D^2V}{ds^2} + V \right) \cdot B \right) \\ \quad + \frac{2\tau(1 + \kappa^2)}{\kappa} \left( \frac{DV}{ds} \cdot B \right) - 2\tau^2 \left( \frac{DV}{ds} \cdot T \right) = 0. \end{array} \right.$$

dove  $v, \kappa, \tau$  sono velocità scalare, curvatura e torsione della curva  $\gamma(s)$ . Pertanto, tenendo anche conto che  $\gamma(s)$  è di Frenet e quindi  $\kappa(s) > 0$ , un campo vettoriale  $V(s)$  è di Killing lungo  $\gamma$  se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$(8.1) \quad \frac{DV}{ds} \cdot T = 0,$$

$$(8.2) \quad \left( \frac{D^2V}{ds^2} \cdot N \right) + (V \cdot N) = 0,$$

$$(8.3) \quad \tau \left( \frac{D^3V}{ds^3} \cdot B \right) - \frac{\kappa' \tau}{\kappa} \left( \frac{D^2V}{ds^2} + V \right) \cdot B + \tau(1 + \kappa^2) \left( \frac{DV}{ds} \cdot B \right) = 0.$$

**Osservazione 8.6.** Si noti che  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  è di Killing se, e solo se,  $V$  è la restrizione a  $\gamma$  di un campo vettoriale di Killing definito su  $\mathbb{S}^3$ . Questo risultato è dovuto a J. Langer e D.A. Singer [17] (cf. anche [1], Lemma 1). In particolare, il campo vettoriale

$$(8.4) \quad U = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

si vede facilmente che è tangente a  $\mathbb{S}^3$ , inoltre è di Killing (cf., ad esempio, [21] p.281-282). Quindi,  $U$  è di Killing lungo ogni curva  $\gamma$  di  $\mathbb{S}^3$ .

Quella che segue è la definizione di elica generalizzata proposta in [1].

**Definizione 8.7.** Una curva di Frenet  $\gamma(s)$  della sfera  $\mathbb{S}^3$  è detta **elica generalizzata** (o elica di Lancret) di  $\mathbb{S}^3$  se esiste un campo vettoriale differenziabile  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  che è di Killing, di lunghezza costante (che assumiamo uguale a 1) e forma un angolo costante  $\vartheta$  ( $\neq 0, \pi$ ) con  $T(s) = \dot{\gamma}(s)$ . Il campo vettoriale  $V(s)$  è detto **asse dell'elica generalizzata**  $\gamma$ .

Prima di enunciare il Teorema di Lancret per le suddette curve, proviamo alcuni risultati preliminari che permettono di semplificare la dimostrazione del Teorema principale.

**Proposizione 8.8.** Sia  $\gamma(s)$  un'elica generalizzata della sfera  $\mathbb{S}^3$  e sia  $V$  un asse di  $\gamma$ . Allora

$$(8.5) \quad V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s),$$

dove  $\vartheta$  denota l'angolo tra  $V(s)$  e  $T(s)$ . Inoltre, curvatura e torsione sono legate da  $\kappa(s) \cos \vartheta - \tau(s) \sin \vartheta = \text{cost.}$ , equivalentemente

$$(8.6) \quad \tau(s) = a\kappa(s) + b,$$

dove  $a = \cotg \vartheta$  e  $b$  sono costanti.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  il riferimento di Frenet lungo  $\gamma$ . Allora, omettendo di scrivere il parametro  $s$ , abbiamo

$$V = (V \cdot T)T + (V \cdot N)N + (V \cdot B)B.$$

Siccome  $V \cdot T = \text{cost.} = \cos \vartheta$ , derivando e usando la prima formula di Frenet, abbiamo

$$0 = (V \cdot T)' = \frac{DV}{ds} \cdot T + V \cdot \frac{DT}{ds} = \frac{DV}{ds} \cdot T + \kappa(V \cdot N).$$

D'altrone per la (8.1) si ha  $\frac{DV}{ds} \cdot T = 0$ , per cui  $V \cdot N = 0$  e quindi

$$V = \cos \vartheta T + (V \cdot B)B \text{ dove } V \cdot B = \sin \vartheta \text{ in quanto } \|V\| = 1.$$

Ora derivando la (8.5) e usando le formule di Frenet, otteniamo

$$(8.7) \quad \frac{DV}{ds} = (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)N.$$

Derivando la (8.7), si ha

$$\frac{D^2V}{ds^2} = (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta) \frac{DN}{ds} + (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)'N$$

e quindi, usando la seconda formula di Frenet, otteniamo

$$(8.8) \quad \begin{aligned} \frac{D^2V}{ds^2} = & -\kappa(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)T + \tau(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)B \\ & + (\kappa' \cos \vartheta - \tau' \sin \vartheta)N. \end{aligned}$$

Sostituendo la (8.8) nella (8.2), otteniamo

$$(\kappa' \cos \vartheta - \tau' \sin \vartheta) = 0.$$

Pertanto,

$$\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta = \text{cost.} = a_0,$$

e quindi  $\tau = a\kappa + b$  con  $a = \cotg \vartheta$  e  $b = -a_0/\sin \vartheta$ .  $\square$

**Proposizione 8.9.** *Se  $\gamma(s)$  è un'elica generalizzata della sfera  $\mathbb{S}^3$  con torsione  $\tau = 0$ , allora  $\kappa(s)$  è costante e  $\gamma$  è una curva di qualche sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  di  $\mathbb{S}^3$  e in questo caso  $V(s) = B(s)$  è asse per  $\gamma$ .*

*Viceversa, se  $\gamma(s)$  è una curva di Frenet di  $\mathbb{S}^3$  contenuta in qualche sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  di  $\mathbb{S}^3$ , allora  $\gamma(s)$  è un'elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$  con torsione  $\tau = 0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla (8.6), se  $\tau = 0$  si ottiene subito che la curvatura  $\kappa$  è costante. Siccome  $\tau = 0$ , dalla terza formula di Frenet si ottiene  $DB/ds = 0$ , ovvero  $B(s)$  è parallelo lungo  $\gamma$ . Quindi, dalla definizione di  $DB/ds$  si ha

$$B'(s) = (B'(s) \cdot \xi_{\gamma(s)})\xi_{\gamma(s)}.$$

D'altronde,  $B(s) \cdot \xi_{\gamma(s)} = 0$  implica

$$B'(s) \cdot \xi_{\gamma(s)} = -B(s) \cdot \xi'_{\gamma(s)} = -B(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = -B(s) \cdot T(s) = 0.$$

Quindi,  $B'(s) = 0$  ossia  $B(s)$  è parallelo lungo  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^4$  per cui  $B(s) = (b)_{\gamma(s)}$ ,  $b \in \mathbb{R}^4$ . Inoltre, siccome  $B(s)$  è tangente a  $\mathbb{S}^3$ , si ha

$$(8.9) \quad b \cdot \gamma(s) = B(s) \cdot \gamma(s) = B(s) \cdot \xi_{\gamma(s)} = 0.$$

Se indichiamo con  $E^3$  lo spazio euclideo 3-dimensionale per l'origine e ortogonale al vettore  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ , ovvero  $E^3 : \sum_{i=1}^4 b_i x_i = 0$ , allora la (8.9)

ci dice che la curva  $\gamma(s)$  è contenuta nella sfera 2-dimensionale  $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$ . Inoltre, il campo vettoriale lungo  $\gamma$  definito da  $V(s) = B(s) = b_{\gamma(s)}$  soddisfa  $\|V\| = 1$  e  $\vartheta(V, T) = \pi/2$ . Infine, le derivate covariante di  $V$  nulle e la torsione  $\tau = 0$  implicano che (8.1), (8.2) e (8.3) sono soddisfatte. Quindi,  $V(s) = B(s)$  è asse per  $\gamma(s)$ .

Proviamo ora il viceversa. Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet di  $\mathbb{S}^3$  contenuta in qualche sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  di  $\mathbb{S}^3$ . Allora,  $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$  dove  $E^3$  è un iperpiano di  $\mathbb{R}^4$  per l'origine. Sia  $b$  un vettore unitario di  $\mathbb{R}^4$  ortogonale a  $E^3$ . Siccome  $\gamma(s) \in E^3$ , abbiamo  $\gamma(s) \cdot b = 0$  e quindi  $T(s) \cdot b = \dot{\gamma}(s) \cdot b = 0$  e  $(DT/ds) \cdot b = 0$ . Di conseguenza i campi vettoriali  $T(s)$  e  $N(s)$  sono entrambi ortogonali a  $b$ . D'altronde, da  $\gamma(s) \cdot b = 0$  segue che  $b_{\gamma(s)} \in T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^3$ , per cui il campo binormale  $B(s)$  sarà parallelo a  $b_{\gamma(s)}$ . Pertanto possiamo assumere, cambiando verso a  $b$  se necessario, che  $B(s) = b_{\gamma(s)}$ . Allora,  $B'(s) = 0$  e quindi  $(DB/ds) = 0$  da cui segue che la torsione  $\tau(s) = 0$ . Pertanto, la curva  $\gamma(s)$  è un'elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$  con torsione  $\tau = 0$ . Inoltre, come prima si vede che  $V(s) = B(s)$  è asse per  $\gamma(s)$ .  $\square$

**Proposizione 8.10.** *Sia  $\gamma(s)$  un'elica generalizzata della sfera  $\mathbb{S}^3$  con torsione  $\tau \neq 0$ . Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti.*

- 1) *La torsione  $\tau(s)$  è costante.*
- 2) *La curvatura  $\kappa(s)$  è costante.*
- 3) *Il rapporto  $\tau(s)/\kappa(s)$  è costante*
- 4) *Esiste  $V(s)$  asse per  $\gamma$  che è parallelo lungo  $\gamma$ , ovvero*

$$\frac{DV}{ds} = 0.$$

*Inoltre, se  $\gamma(s)$  è una curva di Frenet della sfera  $\mathbb{S}^3$  con torsione e curvatura costanti non nulle, allora  $\gamma(s)$  è un'elica generalizzata (che viene detta semplicemente **elica** di  $\mathbb{S}^3$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla (8.6) sappiamo che  $\tau = a\kappa + b$  con  $a, b$  costanti. Di conseguenza, si ottiene che le condizioni 1), 2) e 3) sono equivalenti.

3)  $\implies$  4). Assumiamo  $\tau/\kappa$  costante, equivalentemente  $\tau$  e  $\kappa$  costanti, e consideriamo lungo l'elica  $\gamma$  il campo vettoriale

$$(8.10) \quad V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s), \text{ dove } \vartheta \text{ è definito da } \cotg \vartheta = \tau/\kappa.$$

Per come definito  $V$  soddisfa le seguenti proprietà:  $\|V\| = 1$  e  $V \cdot T = \cos \vartheta$ . Inoltre,  $V$  è parallelo, infatti derivando e usando le formule di Frenet abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{DV}{ds} &= \cos \vartheta (\kappa N) + \sin \vartheta (-\tau N) = (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta) N \\ &= \sin \vartheta (\kappa \cotg \vartheta - \tau) N = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, siccome  $DV/ds = 0$ ,  $V$  è di Killing lungo  $\gamma$ , cioè soddisfa (8.1), (8.2) e (8.3) tenendo anche conto che  $\kappa$  è costante e quindi  $\kappa' = 0$ . Pertanto  $V(s)$  è asse per l'elica  $\gamma$ .

4)  $\implies$  3). Sia  $V(s)$ , con  $DV/ds = 0$ , asse per  $\gamma$ . Allora dalla (8.3) (una delle condizioni che definisce  $V$  di Killing) si ottiene che  $\tau \kappa' = 0$ . Siccome  $\tau \neq 0$ , otteniamo  $\kappa$  costante che è equivalente alla condizione  $\tau/\kappa$  costante. Infine, per provare l'ultima parte, basta osservare che se una curva di Frenet ha curvatura e torsione costanti non nulle, il campo vettoriale  $V$  definito dalla (8.10) è di Killing, e quindi la curva è un'elica generalizzata.  $\square$

Il seguente teorema, che è il Teorema di Lancret sulla sfera  $\mathbb{S}^3$ , classifica le eliche generalizzate di  $\mathbb{S}^3$ . La presente formulazione è un pò più dettagliata rispetto alla formulazione data in [1] (cf. Teorema 3).

**Teorema 8.11.** *Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet di  $\mathbb{S}^3$ . Allora,  $\gamma(s)$  è un'elica generalizzata se e solo se vale una delle seguenti proprietà.*

1) *La torsione  $\tau = 0$  e  $\gamma$  è una curva di qualche sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  di  $\mathbb{S}^3$ .*

2) *La torsione  $\tau$  e la curvatura  $\kappa$  sono costanti non nulle, in tal caso*

$$\tau = a\kappa + b \quad \text{con } a, b \text{ costanti.}$$

3) *La torsione  $\tau$  e la curvatura  $\kappa$  non sono costanti, in tal caso*

$$\tau(s) = a\kappa(s) \pm 1, \quad \text{dove } a = \cotg \vartheta \text{ è costante.}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma(s)$  un'elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$  e sia  $V(s)$  un asse di  $\gamma$ . Dalla Proposizione 8.8 e sua dimostrazione, sappiamo che vale la (8.8) e  $(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta) = a_0 = -b \sin \vartheta$  è costante. Allora, la stessa (8.8) diventa

$$\begin{aligned} \frac{D^2V}{ds^2} &= -\kappa(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)T + \tau(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)B \\ &= b\kappa \sin \vartheta T - b\tau \sin \vartheta B, \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{D^2V}{ds^2} + V = (b\kappa \sin \vartheta + \cos \vartheta)T + (-b\tau \sin \vartheta + \sin \vartheta)B.$$

Derivando  $D^2V/ds^2$  e usando le formule di Frenet, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{D^3V}{ds^3} &= b\kappa' \sin \vartheta T + b\kappa^2 \sin \vartheta N - b\tau' \sin \vartheta B + b\tau^2 \sin \vartheta N \\ &= b\kappa' \sin \vartheta T + b \sin \vartheta (\kappa^2 + \tau^2)N - b\tau' \sin \vartheta B. \end{aligned}$$

Sostituendo tutte le informazioni trovate in (8.3), si ottiene

$$-b\tau\tau' \sin \vartheta + \frac{\kappa'}{\kappa} \tau^2 b \sin \vartheta - \frac{\kappa'}{\kappa} \tau \sin \vartheta = 0$$

e quindi

$$(8.11) \quad \tau \sin \vartheta \left( b(\kappa' \tau - \kappa \tau') - \kappa' \right) = 0.$$

Se  $\tau = 0$ , allora  $\gamma$  è un'elica del tipo di quella considerata nella Proposizione 8.9 e quindi otteniamo la 1). Se  $\tau \neq 0$ , la (8.11) diventa

$$(8.12) \quad b(\kappa' \tau - \kappa \tau') - \kappa' = 0.$$

Dalla (8.6) abbiamo  $\tau = a\kappa + b$  e quindi  $\tau' = a\kappa'$  dove  $a = \cotg\vartheta$  è costante. Sostituendo quest'ultima nella (8.12), si ottiene

$$\kappa'(b^2 - 1) = 0.$$

Se  $\kappa' = 0$ , allora  $\kappa$  e  $\tau = a\kappa + b$  sono costanti. In tal caso abbiamo la 2).

Se  $\kappa' \neq 0$ , allora  $b = \pm 1$  e quindi  $\tau = a\kappa \pm 1$ . In tal caso abbiamo la 3).

Viceversa, ogni curva di Frenet  $\gamma$  che soddisfi una delle proprietà elencate in 1), 2), 3) è un'elica generalizzata. Se  $\gamma$  soddisfa la proprietà 1), allora il risultato segue dalla Proposizione 8.9. Se  $\gamma$  soddisfa la proprietà 2), allora il risultato segue dall'ultima parte della Proposizione 8.10. Infine, se  $\gamma$  soddisfa la 3), quindi  $\tau = a\kappa \pm 1$ , basta considerare  $V(s) = \cos\vartheta T(s) + \sin\vartheta B(s)$ , dove  $\vartheta$  è definito da  $\cotg\vartheta = a$  e verificare che tale  $V$  è asse per la curva. Infatti,  $\|V\| = 1$  e  $V \cdot T = \cos\vartheta$  (costante). Inoltre, siccome  $\kappa \cos\vartheta - \tau \sin\vartheta = -b \sin\vartheta$  è costante, dove  $b = \pm 1$ , derivando  $V$  si ottiene

$$\frac{DV}{ds} = -b \sin\vartheta N, \quad \frac{D^2V}{ds^2} = b\kappa \sin\vartheta T - b\tau \sin\vartheta B$$

e

$$\frac{D^3V}{ds^3} = b\kappa' \sin\vartheta T + b \sin\vartheta (\kappa^2 + \tau^2) N - b\tau' \sin\vartheta B.$$

Quindi, si vede che (8.1), (8.2), (8.3) sono soddisfatte. In particolare, per la (8.3) si ottiene  $-\tau \sin\vartheta (\tau' \kappa b - \tau b \kappa' + \kappa') = 0$  in quanto  $\tau = a\kappa + b$ ,  $\tau' = a\kappa'$  e  $b^2 = 1$ .  $\square$

### 8.3. Modelli di eliche sulla sfera $\mathbb{S}^3$

Consideriamo la seguente curva di  $\mathbb{S}^3$ :

$$(8.13) \quad \gamma(t) = (\cos\alpha \cos at, \cos\alpha \sin at, \sin\alpha \cos bt, \sin\alpha \sin bt), \quad t \in \mathbb{R},$$

dove  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a, b \geq 0$  che soddisfano le condizioni

$$(8.14) \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad \text{e} \quad a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = 1.$$

Determiniamo la curvatura di  $\gamma$  come curva di  $\mathbb{S}^3$ . Siccome

$$\dot{\gamma}(t) = (-a \cos\alpha \sin at, a \cos\alpha \cos at, -b \sin\alpha \sin bt, b \sin\alpha \cos bt),$$

abbiamo  $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = 1$  e quindi il versore tangente

$$T(t) = \dot{\gamma}(t).$$

Inoltre,

$$\ddot{\gamma}(t) = (-a^2 \cos\alpha \cos at, -a^2 \cos\alpha \sin at, -b^2 \sin\alpha \cos bt, -b^2 \sin\alpha \sin bt),$$

e

$$\ddot{\gamma}(t) \cdot N_{\gamma(t)} = \ddot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t) = \dots = -a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha = -1.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\frac{DT}{dt} &= \ddot{\gamma}(t) - (\ddot{\gamma}(t) \cdot N_{\gamma(t)})N_{\gamma(t)} \\ &= \ddot{\gamma}(t) - (\ddot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t))\gamma(t) = \ddot{\gamma}(t) + \gamma(t) \\ &= \left( (1-a^2)\cos\alpha\cos at, (1-a^2)\cos\alpha\sin at, (1-b^2)\sin\alpha\cos bt, \right. \\ &\quad \left. (1-b^2)\sin\alpha\sin bt \right)\end{aligned}$$

e quindi la curvatura

$$\kappa^2(t) = \|DT/dt\|^2 = (1-a^2)^2\cos^2\alpha + (1-b^2)^2\sin^2\alpha.$$

Siccome la condizione  $a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = 1$  è equivalente a

$$(a^2-1)\cos^2\alpha = (1-b^2)\sin^2\alpha,$$

otteniamo  $\kappa^2 = (a^2-1)(1-b^2)$  e quindi

$$\kappa = \sqrt{(a^2-1)(1-b^2)} \text{ (costante).}$$

Adesso distinguiamo le differenti situazioni che si possono avere in corrispondenza dei valori che possono assumere i parametri  $a, b$ .

- Se  $\mathbf{a}=\mathbf{1}$ , la condizione (8.14) diventa  $\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = 1$  che implica  $b = 1$ . In tal caso la curvatura è nulla e la curva  $\gamma$  è definita da

$$\gamma(t) = (\cos\alpha\cos t, \cos\alpha\sin t, \sin\alpha\cos t, \sin\alpha\sin t)$$

la quale è contenuta nel piano  $E^2$  (passante per origine) di  $\mathbb{R}^4$ , piano che ha equazioni:  $x_1 = (\operatorname{tg}\alpha)x_3$ ,  $x_2 = (\operatorname{tg}\alpha)x_4$ . Allora  $\gamma = E^2 \cap \mathbb{S}^3$  è una circonferenza di raggio massimo di  $\mathbb{S}^3$ , dunque una **curva geodetica** di  $\mathbb{S}^3$  (cf. Osservazione (8.4)). Stessa conclusione per  $a = b$ , infatti dalla (8.14) segue  $a = b = 1$ .

- Nel seguito assumiamo  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , e quindi  $\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{1}$ , e determiniamo la torsione di  $\gamma$ . Il campo normale è definito da  $N = (1/\kappa)(DT/dt)$ , e quindi derivando  $DT/dt$  abbiamo

$$\begin{aligned}\kappa N'(t) &= (DT/dt)' \\ &= \left( -a(1-a^2)\cos\alpha\sin at, a(1-a^2)\cos\alpha\cos at, \right. \\ &\quad \left. -b(1-b^2)\sin\alpha\sin bt, b(1-b^2)\sin\alpha\cos bt \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa N'(t) \cdot \gamma(t) &= -a(1-a^2)\cos^2\alpha\sin at\cos at + a(1-a^2)\cos^2\alpha\cos at\sin at \\ &\quad - b(1-b^2)\sin^2\alpha\sin bt\cos bt + b(1-b^2)\sin^2\alpha\cos bt\sin bt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dunque,

$$\frac{DN}{dt} = N'(t) - (N'(t) \cdot \gamma(t))\gamma(t) = N'(t).$$

Dalla seconda formula di Frenet  $\frac{DN}{dt} = -\kappa T(t) + \tau(t)B(t)$ , abbiamo

$$\tau^2 = \left\| \frac{DN}{dt} + \kappa T(t) \right\|^2 = \|N'(t) + \kappa T(t)\|^2$$

e quindi

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \|N'(t)\|^2 + 2\kappa(N'(t) \cdot T(t)) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 + 2\kappa\left(\frac{DN}{dt} \cdot T(t)\right) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - 2\kappa\left(N(t) \cdot \frac{DT}{dt}\right) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - 2\kappa^2 + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - \kappa^2. \end{aligned}$$

D'altronde, dall'espressione di  $\kappa N'(t)$  si ottiene

$$\begin{aligned} \kappa^2 \|N'(t)\|^2 &= a^2(1-a^2)^2 \cos^2 \alpha + b^2(1-b^2)^2 \sin^2 \alpha \\ &= \dots = (a^2 + b^2 - 1)\kappa^2. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\tau^2 = \|N'(t)\|^2 - \kappa^2 = (a^2 + b^2 - 1) - (a^2 - 1)(1 - b^2)$$

e quindi,

$$\tau^2 = a^2 b^2 \text{ (costante).}$$

Dunque, abbiamo quanto segue.

- (i) Per  $\mathbf{a}=\mathbf{0}$  e  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , (più precisamente  $b^2 = 1/\sin^2 \alpha = 1 + \cotg^2 \alpha > 1$ ),  
la torsione  $\tau = 0$  e la curvatura  $\kappa = \sqrt{b^2 - 1} > 0$ .

In tal caso la curva  $\gamma$  definita dalla (8.13) diventa

$$\gamma(t) = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha \cos bt, \sin \alpha \sin bt)$$

la quale è una curva piana, e il piano  $E^2$  che la contiene ha equazioni  $x_1 = \cos \alpha$ ,  $x_2 = 0$ . Quindi,  $\gamma$  è contenuta nella sfera  $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$ , dove  $E^3$  è l'iperpiano di equazione  $x_2 = 0$ . Tale curva è un esempio di elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$  del tipo 1) nel Teorema 8.11. Analogamente per  $a \neq 0$  e  $b = 0$ .

(j) Per  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0,1}$  e  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0,1}$  la curva  $\gamma(t)$  definita dalla (8.13) è un esempio di elica generalizzata con **curvatura e torsione costanti non nulle** date da

$$\kappa = \sqrt{(a^2 - 1)(1 - b^2)} \quad \text{e} \quad \tau^2 = a^2 b^2.$$

Quindi, in questo caso otteniamo modelli di eliche sulla sfera  $\mathbb{S}^3$ , ossia esempi di eliche di  $\mathbb{S}^3$  del tipo 2) nel Teorema 8.11. Inoltre, in questo caso ritroviamo l'esempio enunciato in [11] p.240.

Infine, osserviamo che il campo vettoriale  $U$  definito dalla (8.4) è un campo vettoriale di Killing su  $\mathbb{S}^3$  (cf. Osservazione 8.6), per cui

$$U(t) = U_{\gamma(t)} = (-\cos \alpha \operatorname{sen} at, \cos \alpha \cos at, -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} bt, \operatorname{sen} \alpha \cos bt)$$

è di Killing lungo la nostra curva  $\gamma$ . Inoltre,  $\|U(t)\|^2 = 1$  e  $U(t)$  forma un angolo costante con  $\gamma(t)$ , più precisamente

$$\cos \vartheta = U(t) \cdot T(t) = a \cos^2 \alpha + b \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{cost}.$$

Pertanto,  $U(t)$  è un asse per l'elica  $\gamma(t)$ .

**Osservazione 8.12.** La costruzione di eliche generalizzate del tipo 3) nel Teorema 8.11 è meno elementare, essa richiede nozioni più delicate. Tuttavia, diamo un'idea di massima del procedimento che si può seguire. Intanto, introduciamo brevemente quelli che vengono detti cilindri e tori di Hopf (cf. l'articolo di U. Pinkall [22] per dettagli). Consideriamo la sfera unitaria  $\mathbb{S}^3$  e la sfera  $\mathbb{S}^2(1/2)$  di raggio  $1/2$ . Sia  $\pi : \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$  l'applicazione definita da

$$\pi : (z_1, z_2) \mapsto \left( \frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2), z_1 \bar{z}_2 \right)$$

nota col nome di **fibrato di Hopf**. Se  $p_0$  è un fissato punto di  $\mathbb{S}^2(1/2)$ , la fibra  $\pi^{-1}(p_0)$  è una circonferenza di  $\mathbb{S}^3$ . Se consideriamo una curva  $\beta(t)$  della sfera  $\mathbb{S}^2(1/2)$ , l'immagine inversa  $M_\beta = \pi^{-1}(\beta)$  è una superficie piatta di  $\mathbb{S}^3$  che viene detta *cilindro di Hopf* su  $\beta$ . In particolare, se  $\beta(t)$  è una curva chiusa, allora la superficie  $M_\beta$  è isometrica a un toro piatto ed è detta *toro di Hopf*. Quando  $\beta(t)$  è una circonferenza con curvatura geodetica  $\kappa_g$ , il toro di Hopf  $M_\beta$  ha curvatura media costante  $H = \kappa_g/2$ . In particolare, se  $\beta(t)$  è una geodetica di  $\mathbb{S}^2(1/2)$ , il toro di Hopf  $M_\beta$  è un *toro minimale di Clifford*.

Seguendo [1] (cf. Teoremi 4,5, p.1508) e [3], ogni elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$ , e quindi anche quelle del tipo 3) nel Teorema 8.11, si può ottenere come geodetica di un cilindro di Hopf  $M_\beta$  su una opportuna curva  $\beta$  di  $\mathbb{S}^2(1/2)$ . E' interessante notare l'analogia di questo risultato col fatto che le curve di Lancret di  $\mathbb{R}^3$  si possono caratterizzare come le geodetiche di un cilindro retto su una curva piana (cf. Esempio 5.74).

**Esercizio 8.13.** Si consideri il modello di elica su  $\mathbb{S}^3$  dato dalla curva  $\gamma(t)$  definita dalla (8.13), con  $a \neq b, a > 0, b > 0$ . Posto  $z_1(t) = (\cos \alpha)e^{iat}$  e  $z_2(t) = (\operatorname{sen} \alpha)e^{ibt}$ , si può scrivere  $\gamma(t) = (z_1(t), z_2(t))$ , dove  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ .

Determinare una curva  $\beta_0$  della sfera  $\mathbb{S}^2(1/2)$  tale che il cilindro di Hopf  $M_{\beta_0}$  contenga l'elica  $\gamma$ . Dire se esiste un valore di  $\alpha$  per cui  $M_{\beta_0}$  è un toro di Clifford.

**Esercizio 8.14.** Per  $a \in ]0, 1[$ , si consideri la curva

$$\begin{aligned}\gamma_a(t) &= \frac{a}{a^2 + 1} \left( (1/a) e^{iat}, e^{i(t/a)} \right) \\ &= \frac{a}{a^2 + 1} \left( (1/a) \cos at, (1/a) \operatorname{sen} at, \cos (t/a), \operatorname{sen} (t/a) \right), t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Osservato che  $\gamma_a$  è una curva di  $\mathbb{S}^3$ , si determini curvatura e torsione. Inoltre, se  $\gamma_a$  è un'elica di  $\mathbb{S}^3$ , rispondere alle stesse domande dell'esercizio precedente dove il ruolo di  $\alpha$  è svolto dal parametro  $a$ .



## Bibliografia

- [1] M. Barros, *General Helices and a Theorem of Lancret*, Proc. Amer. Math. Soc. 125, no. 5 (1997), 1503–1509.
- [2] M. Barros, J. L. Cabrerizo, M. Fernández and A. Romero, *The Gauss-Landau-Hall problem on Riemannian surfaces*, J. Math. Phys. 46 (2005), 112905.
- [3] M. Barros and A. Ferrández, *A conformal variational approach for helices in nature*, J. Math. Phys. 50 (2009), 103529.
- [4] M. Barros and A. Romero, *Magnetic vortices*, Europhys. Lett. 77 (2007) 34002, 5 pp.
- [5] V. Branding and W. Rossman, *Magnetic geodesics on surfaces with singularities*, Pacific Journal of Mathematics for Industry (2017) 9:3.
- [6] J. L. Cabrerizo, *Magnetic fields in 2D and 3D sphere*, J. Nonlinear Math. Phys. 52, No 3 (2013), 440–450.
- [7] R. Caddeo e A. Gray, *Lezioni di Geometria Differenziale su Curve e Superfici*, vol. I, II, C.U.E.C., 2001.
- [8] R. Caddeo e P. Piu, *Eliche su superfici di rotazione: vecchie e nuove*, Geom. Struc. on Riem. Man.-Bari, Rend. Sem. Mat. Univ e Polit. Torino, vol. 73/1, 3-4 (2016), 17–31.
- [9] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [10] S. L. Drută-Romaniuc and M. I. Munteanu, *Magnetic curves corresponding to Killing magnetic fields in  $E^3$* , J. Math. Phys. 52 (2011) 11, 113506:1–11.
- [11] H. Gluck, *Geodesics in the unit tangent bundle of a round sphere*, L’Enseignement Mathématique, t.34 (1988), 233–246.
- [12] H. A. Hayden, *On a generalized helix in a Riemannian  $n$ -space*, Proc. London Math. Soc., vol. 32 (1931), 37–45.
- [13] P. Herreros, *Scattering boundary rigidity in the presence of a magnetic field*, Comm. Anal. Geom. vol 20, no 3 (2012), 501–528.
- [14] I. Koenderink, *Solid shape*, MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- [15] C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980.
- [16] W. Kühnel, *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*, AMS, Student Mathematical Library v.16, 2002.
- [17] J. Langer and D. A. Singer, *Knotted elastic curves in  $\mathbb{R}^3$* , J. London Math. Soc. (2) 30 (1984), no. 3, 512–520.
- [18] J. Langer and D. A. Singer, *The total squared curvature of closed curves*, J. Differential Geometry, 20, (1984), 1–22.
- [19] W. Massey, *Algebraic topology: An introduction*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [20] B. O’Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, London, 1970.
- [21] D. Perrone, *Un’introduzione alla Geometria Riemanniana*, Aracne editrice, Roma, 2011.
- [22] U. Pinkall, *Hopf tori in  $S^3$* , Invent. Math. 81 (1985), 379–386.
- [23] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag London Ltd., London, 2001.

- [24] H. Samelson, Orientability of hypersurfaces in  $\mathbb{R}^n$ , Proc. Amer. Math. Soc. 22(1969), 301–302.
- [25] S. Stahl, The Poincaré Half-Plane, Jones and Bartlett Publisher, Boston-London, 1993.
- [26] D.J. Struik, Lectures on Classical Differential Geometry, Dover, New-York, 1988.
- [27] M. Villa, *Breve cenno sulla geometria non euclidea secondo l'indirizzo differenziale*, Repertorio di Matematiche Ed. Cedam, Padova, (1971), 127-131.

## Indice analitico

- algebra di Lie, 16
- angolo convesso tra curve, 123
- apparato di Frenet, 41, 45, 293
- applicazione affine, 22
- applicazione di Gauss, 166
- applicazione differenziabile tra superfici, 109
- approssimazione quadratica, 170
- area della superficie di una sfera, 126
- area della variazione, 157
- area di una regione limitata, 126
- area di una superficie torica, 127
- ascissa curvilinea, 9
- asse, 295
- atlante differenziabile, 253
  
- cambiamento di parametri, 106, 116
- cambiamento regolare di parametro, 7
- campo binormale, 36, 293
- campo di vettori, 13
- campo di vettori accelerazione, 29
- campo di vettori velocità, 29
- campo magnetico, 78, 83, 241
- campo magnetico uniforme, 244, 263
- campo normale principale, 35, 293
- campo tangente, 35, 292
- campo variazionale, 237
- campo vettoriale di Darboux, 64
- campo vettoriale di Killing, 82, 294
- campo vettoriale differenziabile lungo  $\gamma$ , 198
- campo vettoriale normale, 129
- campo vettoriale normale a  $S^3$ , 291
- campo vettoriale parallelo, 31, 200
- campo vettoriale tangente, 119
- caratteristica di Eulero-Poincarè, 281
- carta locale, 87
- catenaria, 49, 52, 159, 190
- catenoide, 125, 159, 190
  
- cerchio osculatore, 38
- cicloide, 51
- cilindro circolare, 113
- cilindro circolare retto, 124, 132, 148, 151, 230
- cilindro di Hopf, 302
- cilindro generalizzato, 96, 224
- cilindro parabolico, 170
- cilindro quadrico, 99
- cilindro retto su una curva piana, 224
- classificazione affine delle quadriche, 98
- classificazione proiettiva delle quadriche, 98
- coefficienti della prima forma fondamentale, 121
- coefficienti della seconda forma fondamentale, 144, 145
- coefficienti della seconda forma fondamentale, 148
- coefficienti di Christoffel, 146–148, 199, 223, 226
- connessione euclidea, 208
- connessione di Levi-Civita, 208, 216, 252, 254
- connessione lineare, 17, 208, 242, 252, 254
- connessione lineare euclidea, 17
- cono generalizzato, 96
- cono quadrico, 99
- cono rotondo, 90, 188
- coordinate geografiche, 91
- coordinate isoterme, 123, 151, 194
- coordinate polari, 124, 221
- coseno iperbolico, 4
- costruzione di eliche cilindriche, 62
- curva algebrica, 5
- curva asintotica, 162, 163
- curva centrale, 51
- curva chiusa periodica, 6
- curva chiusa semplice, 6

- curva di Frenet, 36, 293
- curva evoluta, 51
- curva geodetica, 200, 251, 294, 300
- curva integrale, 15
- curva magnetica, 78, 242
- curva minimale, 229, 240
- curva principale, 149
- curva proiezione ortogonale (di un'elica), 58
- curva regolare, 3
- curva semplice, 6
- curva sezione normale, 160
- curvatura, 35, 37, 41, 293
- curvatura di Gauss-Riemann, 250, 252, 254, 255
- curvatura gaussiana, 150, 151, 193, 194, 215, 216, 218, 219, 277
- curvatura geodetica, 161, 201, 244, 247, 251, 277
- curvatura media, 150
- curvatura normale, 159
- curvature principali, 148
- curve asintotiche, 198
- curve congruenti, 67
- curve coordinate, 111
- curve di Lancret, 57
- curve di Salkowski, 73
- curve geodetiche, 220, 235
- curve geodetiche dell'iperboloide di Minkowski, 268
- curve magnetiche, 241, 244
- curve magnetiche del piano euclideo, 245
- curve magnetiche del piano iperbolico, 263
- curve magnetiche della sfera canonica, 245
- curve principali, 166
- curve su una superficie, 111
  
- derivata covariante, 198, 292
- derivata covariante (euclidea), 17
- derivata covariante seconda, 219
- derivata direzionale, 12, 118
- derivato di una campo vettoriale, 30
- derivazione, 13, 14, 119, 120
- diffeomorfismo, 109
- differenziale, 19, 117, 119, 213
- differenziale di 1-forme, 77
- differenziale di 2-forme, 77
- differenziale di un'isometria di  $\mathbb{R}^n$ , 22
- differenziale esterno, 76, 77
  
- dilatazione, 73, 191
- direzioni asintotiche, 162
- direzioni principali, 148
- distanza euclidea, 182
- distanza intrinseca, 181, 182
- distanza iperbolica, 265
- distanza sulla sfera, 183
- divergenza, 18
- divergenza su superfici regolari, 210
- dominio riemanniano, 249
- dominio riemanniano geodeticamente completo, 261
  
- elemento di lunghezza d'arco, 124
- elemento di volume, 27
- elica cilindrica, 55, 61
- elica circolare, 5, 53, 61
- elica di  $\mathbb{S}^3$ , 297
- elica di Lancret, 295
- elica generalizzata, 55
- elica generalizzata (o elica di Lancret), 291
- elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$ , 295
- eliche cilindriche, 224
- elicoide, 125, 158, 163, 190
- ellisse, 4, 7, 50, 52
- ellissoide, 100
- energia di una curva, 235
- equazione di Gauss, 199, 208, 292
- equazione di Lorentz, 242
- equazioni canoniche metriche, 103
  
- fibrazione di Hopf, 302
- forma d'area, 135, 138, 241, 254
- forma differenziale, 76, 133, 254
- formula della variazione prima, 237
- formula di Koszul, 208
- formule di Frenet, 41, 45, 202, 293
- forza di Lorentz, 78, 242
- funzionale di Landau-Hall, 243
- funzionale energia, 236
  
- genere, 286
- geodetica massimale, 204
- geodetiche del cilindro circolare retto, 223
- geodetiche del disco iperbolico, 272
- geodetiche del piano iperbolico, 260
- geodetiche della sfera canonica, 222
- geodetiche di un cilindro generalizzato, 224
- geodetiche di una superficie di rotazione, 225

- geodetiche radiali, 234  
 gradiente, 14  
 gradiente su superfici regolari, 209  
 gruppo delle isometrie, 186
- hessiano, 214
- immagine sferica (di una curva), 60  
 insieme dei campi vettoriali  
 differenziabili, 13  
 integrale rispetto all'elemento d'area, 127  
 invariante intrinseco, 184  
 invarianti di una quadrica, 102  
 inversione rispetto a una circonferenza,  
 255, 256, 270  
 iperbole, 4, 50, 52  
 iperboloide, 100, 267  
 iperboloide di Minkowski, 268  
 isometria, 22, 23, 25, 27, 32, 67, 69, 184  
 isometria lineare, 22  
 isometrie del piano iperbolico, 257, 259  
 isometrie della sfera canonica, 186
- linea di curvatura, 149  
 linea principale, 149  
 linee di curvatura, 149, 198  
 lunghezza d'arco, 8, 122
- matrice associata al differenziale, 20  
 matrice associata alla quadrica, 98  
 metrica riemanniana, 249, 253  
 modelli di eliche su  $S^3$ , 299  
 modello di geometria non euclidea, 262  
 modello di Poincaré nel disco, 269
- nastro di Möbius, 130
- omogeneità del piano iperbolico, 259  
 omogeneità della sfera, 187  
 omotetia, 191  
 operatore di Weingarten, 142  
 operatore di Laplace, 18  
 operatore di Laplace-Beltrami, 212  
 operatore forma, 142, 144, 145, 215  
 orientabilità, 254  
 orientazione, 25, 129
- palla geodetica, 234  
 parabola, 4, 49, 52  
 paraboloide, 101  
 paraboloide ellittico, 170  
 paraboloide iperbolico, 170  
 parametrizzazione locale, 87
- parametro ammissibile, 205  
 parentesi di Lie, 16, 120  
 parentesi di Lie di campi vettoriali, 16  
 passo di un'elica circolare, 54  
 pendenza, 55  
 piano iperbolico, 254  
 piano normale, 38  
 piano osculatore, 37, 38  
 piano rettificante, 38  
 piano tangente, 113, 115  
 prima forma fondamentale, 121  
 prodotto esterno, 134  
 prodotto misto, 27  
 prodotto scalare (di campi vettoriali), 17  
 prodotto scalare di Minkowski, 267  
 prodotto vettoriale, 26  
 proiezione stereografica iperbolica, 269,  
 270  
 pseudo-sfera di Beltrami, 175, 255  
 punti ombelicali, 198  
 punto critico, 239  
 punto ellittico, 150, 170  
 punto iperbolico, 150, 170  
 punto ombelicale, 149  
 punto parabolico, 170  
 punto planare, 150
- quadrica, 97, 172  
 quadriche degeneri, 99, 103  
 quadriche generali, 103  
 quadriche speciali, 103  
 questione delle parallele, 274
- regione regolare, 281  
 regione semplice, 276  
 regioni semplici, 277  
 relazione di Clairaut, 226  
 retta tangente, 3  
 riferimento di Frenet, 36, 202, 244, 293  
 riflessione, 24, 223  
 rotazione, 24
- seconda forma fondamentale, 144  
 segno di una isometria, 24  
 semipiano di Poincaré, 254, 255  
 seno iperbolico, 4  
 sfera, 90, 107, 113, 151, 194, 218, 230,  
 287  
 simboli di Christoffel, 146  
 simboli di Christoffel, 200, 251  
 spazio tangente, 292  
 spirale (di un'elica circolare), 54

- spirale logaritmica, 10
- struttura complessa, 47, 136, 138, 202, 241
- struttura complessa antisimmetrica, 136
- struttura complessa ortogonale, 136
- superfici cilindriche, 93
- superfici congruenti, 197
- superfici connesse compatte non orientabili, 287
- superfici connesse compatte orientabili, 287
- superfici di livello, 92, 132
- superfici semplici, 90
- superficie a una sola faccia, 133
- superficie torica, 113
- superficie astratta, 252, 253
- superficie connessa compatta, 285
- superficie di rotazione, 94, 112, 124, 133, 147, 150, 152, 247
- superficie geodeticamente completa, 234
- superficie immersa, 88
- superficie minimale, 156–158
- superficie orientabile, 128, 129
- superficie quadrica, 97
- superficie regolare, 87
- superficie rigata, 96, 153
- superficie rigata sviluppabile, 153
- superficie semplice, 133
- superficie sferica, 132
- superficie torica, 95, 156, 228, 287
- superficie tubolare, 153, 228
  
- tensore covariante di ordine 2, 134
- tensore di curvatura, 216, 219
- tensore di curvatura di Riemann, 217
- teorema della funzione inversa, 21
- teorema di Gauss-Bonnet, 285
- teorema di Hopf-Rinow, 289
- teorema di Lancret, 57
- teorema di Lancret sulla sfera  $\mathbb{S}^3$ , 298
- teorema di Liebmann, 288
- teorema di Meusnier, 159
- teorema egregium di Gauss, 191
- teorema egregium di Gauss, 193, 217
- teorema elegantissimo di Gauss, 273
- teorema locale di Gauss-Bonnet, 279
- terza forma fondamentale, 144
- toro di Hopf, 302
- torsione, 39, 41, 203, 293
- torsione geodetica, 203
- trasformazione affine, 22, 25, 254
- trasformazione ortogonale, 22
- trasformazioni di Möbius reali, 258
- trattrice, 52, 176
- triedro di Darboux, 161, 203
- tubo, 154
  
- variazione di una curva, 236
- variazione normale, 156
- varietà differenziabile, 253
- varietà riemanniana, 254
- velocità scalare, 9
- vettore gradiente, 11
- vettore tangente, 291
- vettore tangente a una superficie, 113
- vettore velocità, 2
- vettori principali, 148
- vettori tangenti coordinati, 112