

# Capitolo 6

## Principi del max-min. Teoria di Sturm-Liouville.

In questo capitolo diamo due importanti applicazioni del Teorema Spettrale [5.11.1](#).

### 6.1 Operatori positivi e Principi del max-min di Fischer-Courant. Metodo di Rayleigh-Ritz.

Le formule del max-min e del min-max (Fischer, in dimensione finita; Fischer-Courant, in uno spazio di Hilbert di dimensione infinita) esprimono utili caratterizzazioni variazionali degli autovalori  $\lambda_k$ , senza alcun riferimento ai precedenti autovalori e agli autovettori.

Premettiamo il seguente risultato.

**Proposizione 6.1.1.** *Sia  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert reale, separabile di dimensione infinita. Sia  $K : H \rightarrow H$  un operatore compatto, autoaggiunto e tale che  $(Ku, u) \geq 0$  per ogni  $u \in H$  (cioè,  $K$  è un operatore positivo su  $H$ ). Per un tale operatore  $K$ , lo spettro  $\sigma(K)$  è dato dall'unione*

$$\sigma(K) = \sigma_p(K) \cup \{0\},$$

con lo spettro puntuale  $\sigma_p(K)$  formato da una successione  $(\lambda_k)_k$  decrescente e infinitesima di autovalori positivi

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \lambda_{k+1} \geq \dots \geq 0,$$

contati con la loro molteplicità (cfr. Teorema [5.9.1](#)).

Sia  $(v_j)_j$  una base ortonormale di  $H$  formata da autovettori di  $K$  (cfr. Teorema 5.11.1), con  $v_j$  autovettore relativo all'autovalore  $\lambda_j$ .

Sia

$$E_k := \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

e, per ogni  $u \neq 0$ , sia

$$R(u) := \frac{(Ku, u)}{\|u\|^2}$$

il **quoziente di Rayleigh** di  $K$ .

Risulta:

(i) Per ogni  $k \geq 1$

$$\min_{u \in E_k \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k.$$

(ii) Per ogni  $k \geq 2$

$$\max_{u \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k$$

e

$$\max_{u \in H \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_1.$$

*Dimostrazione.*

(i) Sia  $u \in E_k \setminus \{0\}$ , con

$$u = \sum_{j=1}^k c_j v_j$$

e

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^k c_j^2.$$

Dal Teorema Spettrale in dimensione finita, si ha

$$Ku = \sum_{l=1}^k \lambda_l c_l v_l,$$

da cui

$$R(u) = \frac{\left( \sum_{l=1}^k \lambda_l c_l v_l, \sum_{j=1}^k c_j v_j \right)}{\|u\|^2} = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j c_j^2 \|v_j\|^2}{\|u\|^2} \geq \frac{\lambda_k \|u\|^2}{\|u\|^2} = \lambda_k.$$

In particolare,  $v_k \in E_k \setminus \{0\}$  e vale

$$R(v_k) = (Kv_k, v_k) = (\lambda_k v_k, v_k) = \lambda_k,$$

da cui otteniamo la tesi.

(ii) Siano  $k \geq 2$ ,  $E_{k-1}^\perp = \text{span} \{v_k, v_{k+1}, \dots\}$  e  $u \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}$ , con

$$u = \sum_{j=k}^{+\infty} c_j v_j$$

e

$$\|u\|^2 = \sum_{j=k}^{+\infty} c_j^2.$$

Dal Teorema di Hilbert-Schmidt 5.11.1, si ha

$$Ku = \sum_{l=k}^{+\infty} \lambda_l c_l v_l,$$

da cui

$$R(u) = \frac{\left( \sum_{l=k}^{+\infty} \lambda_l c_l v_l, \sum_{j=k}^{+\infty} c_j v_j \right)}{\|u\|^2} = \frac{\sum_{j=k}^{+\infty} \lambda_j c_j^2 \|v_j\|^2}{\|u\|^2} \leq \frac{\lambda_k \|u\|^2}{\|u\|^2} = \lambda_k.$$

In particolare,  $v_k \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}$  e vale

$$R(v_k) = (Kv_k, v_k) = (\lambda_k v_k, v_k) = \lambda_k,$$

da cui otteniamo la tesi.

Per  $k = 1$  la tesi è ovvia. □

**Teorema 6.1.2.** *Nelle stesse ipotesi e notazioni della precedente Proposizione 6.1.1, si ha:*

*Per ogni  $k \geq 1$ , sia  $\Sigma_k$  un sottospazio  $k$ -dimensionale di  $H$ ; allora risulta*

$$\min_{u \in \Sigma_k \setminus \{0\}} R(u) \leq \lambda_k \quad (\text{i})$$

e quindi vale la **formula di max-min relativa a  $R(u)$**

$$\boxed{\max_{\substack{\Sigma_k \subset H \\ \dim \Sigma_k = k}} \min_{u \in \Sigma_k \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k} \quad (\text{ii})$$

Inoltre:

Per ogni  $k \geq 2$ , sia  $\Sigma_{k-1}$  un sottospazio  $(k-1)$ -dimensionale di  $H$ ; allora risulta

$$\max_{u \in \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) \geq \lambda_k \quad (\text{iii})$$

e quindi, per ogni  $k \geq 1$ , vale **formula di min-max relativa a  $R(u)$**

$$\boxed{\min_{\substack{\Sigma_{k-1} \subset H \\ \dim \Sigma_{k-1} = k-1}} \max_{u \in \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k.} \quad (\text{iv})$$

*Dimostrazione.*

(i) Dimostriamo preliminarmente che, per ogni  $k \geq 2$ ,

$$\Sigma_k \cap E_{k-1}^\perp \neq \{0\}.$$

Sia  $\{e_1, \dots, e_k\}$  una base ortonormale di  $\Sigma_k$  e sia  $u \in \Sigma_k$ ,  $u = \sum_{j=1}^k a_j e_j$ . Vogliamo scegliere i coefficienti  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , in modo che risulti  $u \neq 0$  e  $u \perp E_{k-1}$ . Consideriamo il sistema lineare di equazioni omogenee

$$\begin{cases} (u, v_1) = \sum_{j=1}^k a_j (e_j, v_1) = 0 \\ \vdots \\ (u, v_{k-1}) = \sum_{j=1}^k a_j (e_j, v_{k-1}) = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema omogeneo di  $k-1$  equazioni in  $k$  incognite. Quindi,  $\Sigma_k \cap E_{k-1}^\perp \neq \{0\}$ . Per concludere la dimostrazione di (i) osserviamo che

$$\min_{u \in \Sigma_k \setminus \{0\}} R(u) \leq \min_{u \in \Sigma_k \cap E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) \leq \max_{u \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k$$

per il punto (ii) della Proposizione 6.1.1.

(ii) Segue da (i).

(iii) Dimostriamo preliminarmente che

$$E_k \cap \Sigma_{k-1}^\perp \neq \{0\}.$$

Sia  $u \in E_k$ ,  $u = \sum_{j=1}^k a_j v_j$  ( $Kv_j = \lambda_j v_j$ ). Vogliamo scegliere i coefficienti  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , in modo che risulti  $u \neq 0$  e  $u \perp \Sigma_{k-1}$ . Sia

$\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$  una base di  $\Sigma_{k-1}$  e consideriamo il sistema lineare di equazioni omogenee

$$\begin{cases} (u, e_1) = \sum_{j=1}^k a_j(v_j, e_1) = 0 \\ \vdots \\ (u, e_{k-1}) = \sum_{j=1}^k a_j(v_j, e_{k-1}) = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema omogeneo di  $k-1$  equazioni in  $k$  incognite. Quindi,  $E_k \cap \Sigma_{k-1}^\perp \neq \{0\}$ . Per concludere la dimostrazione di (iii) osserviamo che

$$\max_{u \in \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) \geq \max_{u \in E_k \cap \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) \geq \min_{u \in E_k \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k$$

per il punto (i) della Proposizione 6.1.1.

(iv) Segue da (iii). □

**Osservazione 6.1.3.** Nella Proposizione 6.1.1 gli autovalori  $\lambda_k$  sono ottenuti tramite formule ricorsive: occorre conoscere prima  $E_k$  per ottenere  $\lambda_k$  (cfr. (i)), oppure occorre conoscere prima  $E_{k-1}^\perp$  per ottenere  $\lambda_k$  (cfr. (ii)).

Invece, i Principi di max-min e di min-max (cfr. (ii) e (iv) nel Teorema 6.1.2) danno dirette formulazioni variazionali degli autovalori  $\lambda_k$  dell'operatore  $K$ .

La (ii) può essere usata per dare limitazioni dal basso per il  $k$ -esimo autovalore positivo. La (iv) può essere usata per dare limitazioni dall'alto per il  $k$ -esimo autovalore positivo.

Le dimostrazioni della Proposizione e del Teorema che seguono si ottengono con argomenti analoghi a quelli della Proposizione 6.1.1 e del Teorema 6.1.2, applicati alla funzione  $u \mapsto \frac{1}{R(u)}$ .

**Proposizione 6.1.4.** Nelle stesse ipotesi e notazioni della Proposizione 6.1.1, se  $\lambda_k > 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  (equivalentemente, se  $\ker(K) = \{0\}$ , per cui  $R(u) \neq 0$  per ogni  $u \neq 0$ ), risulta:

(i) Per ogni  $k \geq 1$

$$\max_{u \in E_k \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\lambda_k}.$$

(ii) Per ogni  $k \geq 2$

$$\min_{u \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\lambda_k}$$

e

$$\min_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\lambda_1}.$$

**Teorema 6.1.5.** *Nelle stesse ipotesi della Proposizione 6.1.4, valgono le seguenti affermazioni.*

Per ogni  $k \geq 1$ , risulta

$$\max_{u \in \Sigma_k \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} \geq \frac{1}{\lambda_k} \quad (\text{i})$$

e quindi vale la **formula di min-max relativa a  $\frac{1}{R(u)}$**

$$\boxed{\min_{\substack{\Sigma_k \subset H \\ \dim \Sigma_k = k}} \max_{u \in \Sigma_k \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\lambda_k}}. \quad (\text{ii})$$

Inoltre:

Per ogni  $k \geq 2$ , risulta

$$\min_{u \in \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} \leq \frac{1}{\lambda_k} \quad (\text{iii})$$

e quindi, per ogni  $k \geq 1$ , vale **formula di max-min relativa a  $\frac{1}{R(u)}$**

$$\boxed{\max_{\substack{\Sigma_{k-1} \subset H \\ \dim \Sigma_{k-1} = k-1}} \min_{u \in \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\lambda_k}}. \quad (\text{iv})$$

## 6.2 Problemi autoaggiunti agli autovalori in intervalli compatti

La soluzione di problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali può talvolta essere ricondotta alla soluzione di equazioni differenziali ordinarie contenenti un parametro e soggette a certe condizioni ai limiti.

Applicheremo ora il Teorema spettrale 5.11.1 a una classe di operatori differenziali ordinari del secondo ordine, contenenti un parametro, con condizioni ai limiti.

Sia  $[a, b]$  un intervallo reale e **compatto**. Consideriamo l'**equazione differenziale ordinaria del secondo ordine di Sturm-Liouville**

$$-h'' + qh - \mu h = f \quad \text{in } ]a, b[, \quad (6.1)$$

dove  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $q \in C^0([a, b], \mathbb{R})$  e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in L^2([a, b])$ ,<sup>1</sup> con le condizioni ai limiti

$$\begin{cases} (\mathcal{A}) & \alpha h(a) + \alpha_1 h'(a) = 0, \\ (\mathcal{B}) & \beta h(b) + \beta_1 h'(b) = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

dove  $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 \in \mathbb{R}$  e

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 > 0, \quad \beta^2 + \beta_1^2 > 0.$$

L'equazione (6.1) con le condizioni ai limiti (6.2) si chiama **sistema (regolare) di Sturm-Liouville**.<sup>2</sup>

Studieremo le soluzioni del sistema di Sturm-Liouville associando al sistema un particolare operatore integrale, compatto ed autoaggiunto.

Precisiamo l'ambiente funzionale, pertanto definiamo le classi di funzioni<sup>3</sup>

$$\mathcal{D}_a := \{h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}) : h' \text{ assolutamente continua,} \\ h'' \in L^2([a, b]), h \text{ soddisfa (6.2)(\mathcal{A})}\},$$

$$\mathcal{D}_b := \{h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}) : h' \text{ assolutamente continua,} \\ h'' \in L^2([a, b]), h \text{ soddisfa (6.2)(\mathcal{B})}\}$$

e poniamo

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b.$$

Osserviamo che  $\mathcal{D}$  è uno spazio vettoriale.

Definiamo l'operatore lineare (chiamato **operatore di Sturm-Liouville**)

$$\begin{aligned} L : \mathcal{D} &\rightarrow L^2([a, b]), \\ h &\mapsto L(h) := -h'' + qh. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Cfr., ad esempio, [7].

<sup>2</sup>Tali sistemi, contenenti un parametro  $\mu$ , si presentano in diversi problemi fisici quali, ad esempio, lo studio delle vibrazioni di una corda di lunghezza finita, fissata gli estremi (cfr. [7]), lo studio della conduzione termica, ecc. (cfr. anche in [17]: il metodo di separazione delle variabili, di Fourier).

<sup>3</sup>Cfr., ad esempio, Definizione 8.2.11 e Teorema 8.2.12 in [8].

Formuliamo ora il **problema di Sturm-Liouville**:

se  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $f \in L^2([a, b])$ , esiste  $h \in \mathcal{D}$  tale che  $(L - \mu I)(h) = f$ ? Equivalentemente, per quali  $\mu \in \mathbb{R}$  <sup>4</sup>  $f \in \text{Im}(L - \mu I)$ ?

*L'idea centrale è quella di risolvere il problema di Sturm-Liouville in termini della teoria degli operatori.* Però non possiamo considerare in questo contesto l'operatore di Sturm-Liouville  $L$ , in quanto  $L$ , come operatore differenziale, determina una perdita di regolarità quando si passa da  $h$  a  $L(h)$ .

Considereremo, allora, l'operatore inverso  $(L - \mu I)^{-1}$  (una volta garantita la sua esistenza); ovviamente, in quanto inverso di un operatore differenziale,  $(L - \mu I)^{-1}$  sarà un operatore integrale. È questo l'operatore idoneo per applicare il Teorema spettrale 5.11.1. La relazione tra lo spettro di un operatore e lo spettro del suo operatore inverso consentirà di risolvere il problema di Sturm-Liouville.

Iniziamo considerando il caso  $\mu = 0$  (equivalentemente, invece di  $q$ , consideriamo  $q - \mu$ ). Per definire  $L^{-1}$  (anche se solo su  $\text{Im}(L)$ ), occorre che  $L$  sia iniettivo. Pertanto, formuliamo la seguente

**Ipotesi (di Sturm-Liouville):**

$$\text{se } h \in \mathcal{D} \text{ e } L(h) = 0, \text{ allora } h = 0, \quad (\mathcal{S} - \mathcal{L})$$

(cioè, l'operatore  $L$  è iniettivo su  $\mathcal{D}$ , ovvero  $\ker L = \{0\}$ ). Tale ipotesi non è restrittiva (cfr. Osservazione 6.2.14).

Il Lemma che segue, sulle equazioni differenziali ordinarie, afferma l'esistenza di soluzioni *non nulle* per certi problemi di Cauchy.

**Lemma 6.2.1.** *Se  $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha^2 + \alpha_1^2 > 0$  e  $\beta^2 + \beta_1^2 > 0$ , allora esistono funzioni reali  $h_a \in \mathcal{D}_a$  e  $h_b \in \mathcal{D}_b$  tali che  $L(h_a) = 0$  e  $L(h_b) = 0$  e  $h_a, h_b$  sono non identicamente nulle.*

<sup>4</sup>Si può obiettare che la richiesta " $\mu \in \mathbb{R}$ " sia restrittiva, e che invece si debba considerare  $\mu \in \mathbb{C}$ . Tuttavia, sia  $\mu$  un autovalore, con  $h \neq 0$  relativa autofunzione, del problema di Sturm-Liouville. Da  $L(h) = \mu h$ , si ha che

$$(L(h), h)_{L^2([a, b])} = \mu(h, h)_{L^2([a, b])}$$

e

$$(h, L(h))_{L^2([a, b])} = \bar{\mu}(h, h)_{L^2([a, b])}.$$

Poiché  $(L(h), h)_{L^2([a, b])} = (h, L(h))_{L^2([a, b])}$  (essendo il problema di Sturm-Liouville autoaggiunto, cfr. Osservazione 6.2.14(b)), risulta che  $(\mu - \bar{\mu})(h, h)_{L^2([a, b])} = 0$ . Essendo  $(h, h)_{L^2([a, b])} > 0$ , segue che  $\mu = \bar{\mu}$  e pertanto ogni autovalore deve essere necessariamente reale.



*Dimostrazione.* Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} L(h) = -h'' + qh = 0 & \text{in } [a, b] \\ h(a) = 1 \\ h'(a) = -\frac{\alpha}{\alpha_1} \end{cases} \quad (\alpha_1 \neq 0)$$

(se  $\alpha_1 = 0$  si considerano le condizioni  $h(a) = 0$  e  $h'(a) = 1$ ) ammette un'unica soluzione

$$h_a : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

non nulla (in virtù delle condizioni iniziali), tale che  $L(h_a) = 0$  e, inoltre,

$$\alpha h(a) + \alpha_1 h'(a) = \alpha + \alpha_1 \cdot \left(-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right) = 0,$$

per cui  $h_a \in \mathcal{D}_a$ . Allo stesso modo, si prova l'esistenza di  $h_b$ .  $\square$

Proviamo che  $h_a$  e  $h_b$  sono soluzioni linearmente indipendenti di  $L(h) = 0$ . Infatti, consideriamo il determinante Wronskiano di  $h_a$  e  $h_b$ :

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} h_a(x) & h_b(x) \\ h'_a(x) & h'_b(x) \end{pmatrix} = h_a(x)h'_b(x) - h'_a(x)h_b(x)$$

per ogni  $x \in [a, b]$ . Osservato che, per ogni  $x \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} W'(x) &= h'_a(x)h'_b(x) + h_a(x)h''_b(x) - h''_a(x)h_b(x) - h'_a(x)h'_b(x) \\ &= h_a(x)(q(x)h_b(x)) - h_b(x)(q(x)h_a(x)) = 0, \end{aligned}$$

risulta  $W(x) = \text{costante} = W(a)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

**Lemma 6.2.2.** *Assunta l'ipotesi (S - L), risulta  $W(a) \neq 0$  e quindi  $h_a$  e  $h_b$  sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione.* Se  $W(a) = 0$ , i vettori colonna della matrice  $W(a)$  sono linearmente dipendenti. Pertanto, esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$h_b(a) = ch_a(a), \quad h'_b(a) = ch'_a(a).$$

Allora,  $h_b \in \mathcal{D}_b \cap \mathcal{D}_a = \mathcal{D}$  e  $L(h_b) = 0$ . Dall'ipotesi (S - L), segue  $h_b = 0$ , in contraddizione con il precedente Lemma 6.2.1.  $\square$

Definiamo la **funzione di Green** per  $L$ :

$$\begin{aligned} G : [a, b] \times [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ G(x, y) &:= \begin{cases} \frac{1}{W(a)} h_a(x) h_b(y) & \text{se } a \leq x \leq y \leq b, \\ \frac{1}{W(a)} h_a(y) h_b(x) & \text{se } a \leq y \leq x \leq b. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3)$$

**Lemma 6.2.3.** *La funzione reale  $G(x, y)$  definita in (6.3) è continua sul compatto  $[a, b] \times [a, b]$  (e quindi ivi anche uniformemente continua) e*

$$G(x, y) = G(y, x).$$

*Dimostrazione.* Ovvio. □

**Proposizione 6.2.4.** *Assunta l'ipotesi ( $\mathcal{S} - \mathcal{L}$ ), sia  $G$  la funzione di Green per  $L$  definita in (6.3). L'operatore integrale*

$$\begin{aligned} K : L^2([a, b]) &\rightarrow L^2([a, b]) \\ f &\mapsto K(f), \end{aligned} \tag{6.4}$$

dove

$$[K(f)](x) = \int_a^b G(x, y)f(y) dy$$

per ogni  $x \in [a, b]$ , è un operatore lineare, compatto e autoaggiunto in  $L^2([a, b])$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f \in L^2([a, b])$ . È ben definita la funzione reale

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto g(x) := \int_a^b G(x, y)f(y) dy < +\infty. \end{aligned}$$

Proviamo che  $g \in L^2([a, b])$ . Infatti,

$$\begin{aligned} \int_a^b |g(x)|^2 dx &= \int_a^b \left| \int_a^b G(x, y)f(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_a^b \left( \int_a^b |G(x, y)f(y)| dy \right)^2 dx \quad (\text{dis. di Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \int_a^b \left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right) \|f\|_{L^2([a, b])}^2 dx \\ &= \|f\|_{L^2([a, b])}^2 \int_a^b \left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right) dx < +\infty \end{aligned}$$

e quindi  $g \in L^2([a, b])$  e

$$\|g\|_{L^2([a, b])} \leq \|f\|_{L^2([a, b])} \left( \int_a^b \left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right) dx \right)^{1/2}.$$

Si può quindi considerare l'operatore

$$K : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$$

definito ponendo, per ogni  $f \in L^2([a, b])$  e per ogni  $x \in [a, b]$ ,

$$[K(f)](x) := \int_a^b G(x, y)f(y) dy.$$

$K$  è ovviamente lineare e, da quanto dimostrato, è continuo e

$$\|K\|_{B(L^2([a, b]))} \leq \left( \int_a^b \left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right) dx \right)^{1/2}.$$

Proviamo ora che  $K$  è compatto. Dimostriamo dapprima che

$$K(L^2([a, b])) \subset C^0([a, b]; \mathbb{R}).$$

Siano, allora,  $f \in L^2([a, b])$  e  $(x_n)_n$  una successione di  $[a, b]$  convergente ad un certo  $x \in [a, b]$  e proviamo che

$$[K(f)](x_n) \rightarrow [K(f)](x).$$

Poiché  $G$  è uniformemente continua sul compatto  $[a, b] \times [a, b]$  (per il Lemma 6.2.3), fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $(s, t), (\bar{s}, \bar{t}) \in [a, b] \times [a, b]$ :

$$|s - \bar{s}| < \delta, \quad |t - \bar{t}| < \delta \implies |G(s, t) - G(\bar{s}, \bar{t})| < \varepsilon. \quad (6.5)$$

Considerato  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq \nu$  risulti  $|x_n - x| < \delta$ , si ha, in particolare, per ogni  $n \geq \nu$  e per ogni  $y \in [a, b]$

$$|G(x_n, y) - G(x, y)| < \varepsilon.$$

Per ogni  $n \geq \nu$ , la funzione  $G(x_n, \cdot) - G(x, \cdot)$  è continua sul compatto  $[a, b]$  e quindi  $G(x_n, \cdot) - G(x, \cdot) \in L^2([a, b])$ . Allora, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ogni  $n \geq \nu$ :

$$\begin{aligned} |[K(f)](x_n) - [K(f)](x)| &\leq \int_a^b |G(x_n, y) - G(x, y)| \cdot |f(y)| dy \\ &\leq \left( \int_a^b |G(x_n, y) - G(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \|f\|_{L^2([a, b])} \\ &\leq \varepsilon(b-a)^{1/2} \|f\|_{L^2([a, b])}. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$  è così provato che  $K(f) \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ .

Dimostriamo, infine, che  $K$  è un operatore compatto. Sia  $(f_n)_n$  una successione limitata di funzioni di  $L^2([a, b])$ , con  $\|f_n\|_{L^2([a, b])} < 1$ , e sia

$$M := \max_{(x, y) \in [a, b] \times [a, b]} |G(x, y)|.$$

Allora, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [a, b]$ , si ha

$$\begin{aligned} |[K(f_n)](x)| &\leq \int_a^b |G(x, y)| \cdot |f_n(y)| dy \quad (\text{dis. di Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \|f_n\|_{L^2([a, b])} \leq M(b-a)^{1/2} \end{aligned}$$

e quindi la successione  $(K(f_n))_n$  è equilimitata. Inoltre,  $(K(f_n))_n$  è uniformemente equicontinua. Infatti, sia  $\varepsilon > 0$  fissato e scegliamo  $\delta > 0$  e  $x, \bar{x}, y \in [a, b]$  tali che  $|x - \bar{x}| < \delta$ . Allora, dalla (6.5), risulta  $|G(x, y) - G(\bar{x}, y)| < \varepsilon$  e quindi

$$\begin{aligned} |[K(f_n)](x) - [K(f_n)](\bar{x})| &\leq \int_a^b |G(x, y) - G(\bar{x}, y)| \cdot |f_n(y)| dy \\ &\leq \left( \int_a^b |G(x, y) - G(\bar{x}, y)|^2 dy \right)^{1/2} \|f_n\|_{L^2([a, b])} \\ &\leq \varepsilon(b-a)^{1/2}. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ , risulta così provato che la successione  $(K(f_n))_n$  è uniformemente equicontinua.

Per il Teorema di Ascoli-Arzelà 3.4.3,  $(K(f_n))_n$  ammette una estratta  $(K(f_{n_k}))_k$  uniformemente convergente a una funzione  $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R}) \subset L^2([a, b])$ , per cui, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $k \geq \nu$ ,  $|[K(f_{n_k})](x) - f(x)| < \varepsilon$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Resta da provare che  $(K(f_{n_k}))_k$  converge a  $f$  anche in  $L^2([a, b])$ . Infatti, per ogni  $k \geq \nu$ , risulta

$$\begin{aligned} \|K(f_{n_k}) - f\|_{L^2([a, b])} &= \left( \int_a^b |[K(f_{n_k})](x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon(b-a)^{1/2}. \end{aligned}$$

Che l'operatore  $K$  sia autoaggiunto in  $L^2([a, b])$  (cioè che, per ogni  $f, g \in L^2([a, b])$ , si abbia  $(K(f), g)_{L^2([a, b])} = (f, K(g))_{L^2([a, b])}$ ) segue dal fatto che  $G$  è reale e che  $G(x, y) = G(y, x)$ .  $\square$

**Proposizione 6.2.5.** Assunta l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , l'operatore integrale  $K$ , definito in (6.4), verifica le seguenti proprietà:

- (i)  $Im(K) = \mathcal{D}$ ;
- (ii)  $L(K(f)) = f$  per ogni  $f \in L^2([a, b])$  (i.e.  $K$  è l'inverso destro di  $L$ );
- (iii)  $K(L(h)) = h$  per ogni  $h \in \mathcal{D}$  (i.e.  $K$  è l'inverso sinistro di  $L$ ).

*Dimostrazione.* Sia  $f \in L^2([a, b])$ ; posto  $K(f) =: h$ , proviamo dapprima che  $h \in \mathcal{D}$  (cioè  $\text{Im}(K) \subseteq \mathcal{D}$ ). Poniamo

$$H_a(x) := \frac{1}{W(a)} \int_a^x h_a(y) f(y) dy, \quad H_b(x) := \frac{1}{W(a)} \int_x^b h_b(y) f(y) dy.$$

Allora

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_a^b G(x, y) f(y) dy \\ &= \frac{1}{W(a)} \int_a^x h_a(y) h_b(x) f(y) dy + \frac{1}{W(a)} \int_x^b h_a(x) h_b(y) f(y) dy \\ &= H_a(x) h_b(x) + h_a(x) H_b(x). \end{aligned}$$

Derivando si ha

$$\begin{aligned} h' &= \frac{1}{W(a)} (h_a f) h_b + H_a h'_b + h'_a H_b + h_a \left( -\frac{1}{W(a)} h_b f \right) \\ &= H_a h'_b + h'_a H_b \quad \text{q.o. in } [a, b] \end{aligned}$$

(quindi,  $h$  è assolutamente continua in  $[a, b]$ ). Proviamo che risulta

$$h' = H_a h'_b + h'_a H_b$$

ovunque in  $[a, b]$ . Infatti, per ogni  $x \in [a, b]$ , poniamo

$$\phi(x) := H_a(x) h'_b(x) + h'_a(x) H_b(x), \quad \psi(x) := h(a) + \int_a^x \phi(y) dy.$$

Allora,  $h$  e  $\psi$  sono assolutamente continue,  $h(a) = \psi(a)$  e  $h'(x) = \psi'(x)$  q.o. in  $[a, b]$ . Pertanto  $h(x) = \psi(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Ma  $\psi$  ha derivata continua  $\phi$ , pertanto anche  $h$  ha derivata continua in  $[a, b]$ .

Derivando  $h' = H_a h'_b + h'_a H_b$ , si ha q.o. in  $[a, b]$

$$h'' = \frac{1}{W(a)} (h_a f) h'_b + H_a h''_b + h''_a H_b + h'_a \left( -\frac{1}{W(a)} h_b f \right);$$

poiché tutti gli addendi sono in  $L^2([a, b])$ , anche  $h'' \in L^2([a, b])$ . Poiché  $H_a(a) = 0$  e  $h_a \in \mathcal{D}_a$ , risulta

$$\begin{aligned} \alpha h(a) + \alpha_1 h'(a) &= \alpha h_a(a) H_b(a) + \alpha_1 h'_a(a) H_b(a) \\ &= [\alpha h_a(a) + \alpha_1 h'_a(a)] H_b(a) = 0. \end{aligned}$$

Quindi  $h \in \mathcal{D}_a$ . Analogamente, si prova che  $h \in \mathcal{D}_b$ . Pertanto  $h \in \mathcal{D}$  e in definitiva  $\text{Im}(K) \subseteq \mathcal{D}$ .

Proviamo che  $L(K(f)) = f$ . Se  $h := K(f)$ ,

$$\begin{aligned} L(K(f)) &= L(h) = -h'' + qh \\ &= - \left[ \frac{1}{W(a)} h_a h_b' f + H_a h_b'' + h_a'' H_b - \frac{1}{W(a)} h_a' h_b f \right] + q [H_a h_b + h_a H_b] \\ &= [-h_b'' + q h_b] H_a + [-h_a'' + q h_a] H_b + \frac{1}{W(a)} [h_a' h_b - h_a h_b'] f = f \end{aligned}$$

poiché  $L(h_a) = L(h_b) = 0$  e  $W = h_a' h_b - h_a h_b' = W(a)$ . Risulta così provata (ii).

Se  $h \in \mathcal{D}$ , allora  $L(h) \in L^2([a, b])$  e  $K(L(h)) \in \mathcal{D}$ . Pertanto, per la prima parte della dimostrazione,  $L(K(L(h))) = L(h)$ . Allora

$$L(h - K(L(h))) = 0,$$

da cui, per l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , segue che  $h - K(L(h)) = 0$ , cioè  $K(L(h)) = h$  e quindi  $h \in \text{Im}(K)$ . Risulta così provata (iii) e, poiché  $\mathcal{D} \subseteq \text{Im}(K)$ , è anche completata la dimostrazione di (i).  $\square$

Visto il ruolo fondamentale svolto dall'operatore  $K$  nell'analisi spettrale di  $L$ , è conveniente enunciare in un unico teorema i risultati delle Proposizioni 6.2.4 e 6.2.5.

**Teorema 6.2.6.** *Assunta l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , l'operatore integrale  $K$ , definito in (6.4), verifica le seguenti proprietà:*

- (i)  $K$  è un operatore lineare, compatto e autoaggiunto in  $L^2([a, b])$ ;
- (ii)  $\text{Im}(K) = \mathcal{D}$ ;
- (iii)  $L(K(f)) = f$  per ogni  $f \in L^2([a, b])$ ;
- (iv)  $K(L(h)) = h$  per ogni  $h \in \mathcal{D}$ .

**Osservazione 6.2.7.** Dai punti (ii), (iii) e (iv) del Teorema 6.2.6 segue che  $K = L^{-1}$ .

**Osservazione 6.2.8.** Nel precedente Teorema 6.2.6 è manifesta l'idea principale, cioè il fatto che all'operatore inverso  $K = L^{-1}$  si può applicare, per il punto (i), il Teorema spettrale 5.11.1.

**Corollario 6.2.9.** *Assunta l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , se  $v \in L^2([a, b])$  e  $K(v) = \lambda v$  per qualche  $\lambda \neq 0$ , allora  $v \in \mathcal{D}$  e*

$$L(v) = \frac{1}{\lambda} v;$$

*inoltre, se  $v \in \mathcal{D}$  e  $L(v) = \frac{1}{\lambda} v$ , allora  $K(v) = \lambda v$  (cioè:  $\lambda \neq 0$  è un autovalore di  $K$  se e solo se  $\frac{1}{\lambda}$  è autovalore di  $L$ ).*

*Dimostrazione.* Segue dal Teorema 6.2.6. Infatti, per (ii) e (iii), da  $K(v) = \lambda v$  segue che  $v \in \mathcal{D}$  e

$$v = L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

e quindi  $L(v) = \frac{1}{\lambda}v$ .

Inoltre, se  $v \in \mathcal{D}$  e  $L(v) = \frac{1}{\lambda}v$ , allora, per (iv)

$$v = \frac{1}{\lambda}K(v)$$

e quindi  $K(v) = \lambda v$ . □

**Lemma 6.2.10.** *Assunta l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , se  $\lambda \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ , allora  $\dim(\ker(K - \lambda I)) = 1$  (cioè, ciascun autovalore  $\lambda \neq 0$  di  $K$  ha molteplicità 1).*

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che ci siano due funzioni linearmente indipendenti  $h_1, h_2 \in \ker(K - \lambda I)$ . Per il Corollario 6.2.9,  $h_1$  e  $h_2$  sono soluzioni dell'equazione

$$-h'' + \left(q - \frac{1}{\lambda}\right)h = 0.$$

Poiché questa è una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, ogni sua soluzione è combinazione lineare di  $h_1$  e  $h_2$ . Ma  $h_1, h_2 \in \mathcal{D}$ , quindi esse soddisfano le condizioni ai limiti (6.2). Tuttavia, possiamo determinare una soluzione di questa equazione soddisfacente condizioni iniziali nel punto  $a$  e pertanto non verificante le condizioni (6.2). Questa contraddizione mostra che non possono esserci in  $\ker(K - \lambda I)$  due funzioni  $h_1, h_2$  linearmente indipendenti. □

L'operatore inverso di  $L$ ,  $K = L^{-1}$ , è un ingrediente teorico nello studio del problema di Sturm-Liouville. Ora, convertiamo i precedenti risultati direttamente in termini di  $L$ . La stretta relazione che connette lo spettro di  $L$  e del suo inverso  $K$  (cfr. Corollario 6.2.9) permette di concludere l'analisi del problema di Sturm-Liouville, come provato nel seguente teorema.

**Teorema 6.2.11 (degli autovalori, di Sturm-Liouville).** *Assunta l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , esistono una successione reale  $(\mu_n)_n$  e una base ortonormale (sistema ortonormale completo)  $(v_n)_n$  di  $L^2([a, b])$  tali che:*

$$(a) \quad 0 < |\mu_1| < |\mu_2| < \dots \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |\mu_n| = +\infty;$$

(b)  $v_n \in \mathcal{D}$  e  $L(v_n) = \mu_n v_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (cioè  $v_n$  è autofunzione relativa all'autovalore  $\mu_n$  per l'operatore  $L$  in  $\mathcal{D}$ ); ogni autovalore  $\mu_n$  di  $L$  è semplice;

(c) se  $\mu \neq \mu_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , allora, per ogni  $f \in L^2([a, b])$ , esiste un'unica  $h \in \mathcal{D}$  tale che  $L(h) - \mu h = f$ ;

(d) se  $\mu = \mu_n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ , allora, per ogni  $f \in L^2([a, b])$ , le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(i) esiste  $h \in \mathcal{D}$  tale che  $L(h) - \mu h = f$ ;

(ii)  $(f, v_n)_{L^2([a, b])} = 0$ .

Se  $(f, v_n)_{L^2([a, b])} = 0$ , due qualunque soluzioni di  $L(h) - \mu h = f$  differiscono per un multiplo di  $v_n$ .

*Dimostrazione.* Per il punto (i) del Teorema 6.2.6, all'operatore integrale  $K$  possiamo applicare il Teorema spettrale 5.11.1. Pertanto, esistono una base numerabile e ortonormale  $(v_n)_n$  di  $L^2([a, b])$  formata da autovettori di  $K$  (base spettrale) e una successione di autovalori reali e distinti  $(\lambda_n)_n$ , con  $\lambda_n \neq 0$ ,  $\lambda_n \rightarrow 0$  e  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$  tali che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K(v_n) = \lambda_n v_n$ ,  $\dim(\ker(K - \lambda_n I)) = 1$  (per il Lemma 6.2.10) e, per ogni  $f \in L^2([a, b])$ ,

$$K(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (f, v_n)_{L^2([a, b])} v_n.$$

I punti (a) e (b) seguono, allora, dal Corollario 6.2.9 e dal Lemma 6.2.10. Infatti, per il Corollario 6.2.9, da  $K(v_n) = \lambda_n v_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , segue che  $v_n \in \mathcal{D}$  e  $L(v_n) = \frac{1}{\lambda_n} v_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Posto  $\mu_n := \frac{1}{\lambda_n}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , risulta (poiché  $\lambda_n \neq 0$ ,  $\lambda_n \rightarrow 0$ )

$$0 < |\mu_1| < |\mu_2| < \dots \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |\mu_n| = +\infty,$$

$L(v_n) = \mu_n v_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e, per il Lemma 6.2.10, essendo ogni autovalore  $\lambda_n$  di  $K$  semplice, risulta che anche ogni autovalore  $\mu_n$  di  $L$  è semplice.

Passiamo alla dimostrazione dei punti (c) e (d).

Se  $\mu \neq \mu_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{\mu} \notin \sigma_p(K)$ , cioè,  $\frac{1}{\mu}I - K$  è iniettivo. Poiché  $K$  è compatto,  $\frac{1}{\mu}I - K$  è anche suriettivo, per il Teorema 5.5.1(iv). In definitiva,  $\frac{1}{\mu}I - K$  è bigettivo. Pertanto, se  $f \in L^2([a, b])$ , esiste un'unica  $h \in L^2([a, b])$  tale che  $K(f) = \left(\frac{1}{\mu}I - K\right)(h)$ ; quindi  $h \in \mathcal{D}$  e  $f = L\left(\frac{h}{\mu}\right) - \mu\left(\frac{h}{\mu}\right)$ . Risulta così provato il punto (c).

Per provare il punto (d), supponiamo  $\mu = \mu_n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ ; sia allora  $f \in L^2([a, b])$  ed esista, per l'ipotesi (i) in (d),  $h \in \mathcal{D}$  tale che  $L(h) - \mu_n h = f$ . Allora, per il punto (iv) del Teorema 6.2.6 risulta

$$h - \mu_n K(h) = K(f)$$



Quindi

$$\begin{aligned} (K(f), v_n)_{L^2([a,b])} &= (h, v_n)_{L^2([a,b])} - \mu_n (K(h), v_n)_{L^2([a,b])} \\ &= (h, v_n)_{L^2([a,b])} - \mu_n (h, K(v_n))_{L^2([a,b])} \\ &= (h, v_n)_{L^2([a,b])} - \underbrace{\mu_n \lambda_n}_{=1} (h, v_n)_{L^2([a,b])} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto

$$0 = (K(f), v_n)_{L^2([a,b])} = (f, K(v_n))_{L^2([a,b])} = \lambda_n (f, v_n)_{L^2([a,b])},$$

dunque  $(f, v_n)_{L^2([a,b])} = 0$ . Risulta così provata l'implicazione (i)  $\implies$  (ii) del punto (d).

Viceversa, sia, per l'ipotesi (ii) in (d),  $(f, v_n)_{L^2([a,b])} = 0$ . Poiché

$$\ker(K - \lambda_n I) = \mathbb{C}v_n,$$

$K_1 := K|_{(\mathbb{C}v_n)^\perp}$  è un operatore lineare, compatto e autoaggiunto in  $(\mathbb{C}v_n)^\perp$  e  $\lambda_n \notin \sigma_p(K_1)$ . Pertanto,  $K_1 - \lambda_n I$  è iniettivo ed è anche suriettivo per il Teorema 5.5.1(iv). Dunque,  $\text{Im}(K_1 - \lambda_n I) = (\mathbb{C}v_n)^\perp$  e  $K_1 - \lambda_n I$  è bigettivo da  $(\mathbb{C}v_n)^\perp$  su  $(\mathbb{C}v_n)^\perp$ . Come nella dimostrazione del precedente punto (c), essendo per ipotesi  $(f, v_n)_{L^2([a,b])} = 0$  (quindi  $f \in (\mathbb{C}v_n)^\perp$ ), esiste un'unica  $h \in (\mathbb{C}v_n)^\perp$  tale che  $L(h) - \mu_n h = f$ . Risulta così provata l'implicazione (ii)  $\implies$  (i) del punto (d).

Osserviamo che anche  $h + cv_n$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) è una soluzione di  $L(h) - \mu_n h = f$ . Allora, se  $h_1$  e  $h_2$  sono due soluzioni, risulta  $h_1 - h_2 \in \ker(L - \mu_n I)$  e quindi  $h_1 - h_2 = cv_n$ , con  $c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Osservazione 6.2.12.** Dalla dimostrazione del punto (b) del teorema precedente, si evince che **gli autovalori di  $L$  sono i reciproci di quelli di  $K$ , mentre le autofunzioni di  $L$  sono le stesse di  $K$**  (e quindi gli autospazi associati hanno dimensione uno).

**Osservazione 6.2.13.** Dalla Osservazione 6.2.7, segue che, per il punto (c) del Teorema precedente 6.2.11, se  $\mu \neq \mu_n$  (cioè, se  $\mu$  non è autovalore di  $L$ ), si può rappresentare la soluzione  $h \in \mathcal{D}$  di  $L(h) - \mu h = f$  attraverso l'operatore integrale  $K$ . Se  $h_a \in \mathcal{D}_a$  e  $h_b \in \mathcal{D}_b$  sono due soluzioni linearmente indipendenti di  $L(h) - \mu h = 0$ , allora, per ogni  $f \in L^2([a, b])$  la funzione

$$h(x) = [K(f)](x) = \int_a^b G(x, y)f(y) dy$$

è l'unica soluzione del problema ai limiti per  $h \in \mathcal{D}$  e  $L(h) - \mu h = f$ .

In particolare, se  $\mu = 0$  non è autovalore di  $L$ , l'unica soluzione  $h \in \mathcal{D}$  di  $L(h) = f$  è data da

$$h := L^{-1}(f) = K(f),$$

cioè

$$h(x) = [K(f)](x) = \int_a^b G(x, y)f(y) dy$$

per ogni  $x \in [a, b]$ .

**Osservazione 6.2.14.** Cosa succede se l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$  non sussiste (cioè, se  $\ker L \neq \{0\}$ )? In questo caso è possibile trovare un numero reale  $c$  tale che  $\ker(L - cI) = \{0\}$ . Allora, il precedente Teorema 6.2.11 si applicherà ancora sostituendo  $q$  con  $q - c$ .

Per dimostrare quanto asserito, proviamo che

- (a) Se  $h, g \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ , con  $h', g'$  assolutamente continue e  $h'', g'' \in L^2([a, b])$ , allora vale la *formula di Green*

$$\int_a^b (h''g - hg'') dx = [h'(b)g(b) - h(b)g'(b)] - [h'(a)g(a) - h(a)g'(a)].$$

- (b) Se  $h, g \in \mathcal{D}$ , allora

$$(L(h), g)_{L^2([a, b])} = (h, L(g))_{L^2([a, b])}$$

(cioè  $L$  è simmetrico in  $\mathcal{D}$ ).

- (c) Se  $h, g \in \mathcal{D}$  e  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\mu_1 \neq \mu_2$ ,  $h \in \ker(L - \mu_1 I)$  e  $g \in \ker(L - \mu_2 I)$ , allora  $h \perp g$  (cioè  $(h, g)_{L^2([a, b])} = 0$ ).

- (d) Esiste un numero reale  $c$  tale che

$$\ker(L - cI) = \{0\}.$$

*Dimostrazione.*

- (a) Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b (h''g - hg'') dx &= [h'g]_a^b - \int_a^b h'g' dx - [g'h]_a^b + \int_a^b g'h' dx \\ &= [h'(b)g(b) - h(b)g'(b)] - [h'(a)g(a) - h(a)g'(a)]. \end{aligned}$$

- (b) La simmetria dell'operatore  $L$  in  $\mathcal{D}$  segue dal punto (a) e dalle condizioni ai limiti (6.2). Infatti

$$\begin{aligned} (h, L(g))_{L^2([a,b])} - (L(h), g)_{L^2([a,b])} &= \int_a^b (h''g - g''h) dx \\ &= [h'(b)g(b) - h(b)g'(b)] - [h'(a)g(a) - h(a)g'(a)] = 0 \end{aligned}$$

poiché, per ipotesi,  $h$  e  $g$  verificano (6.2).

- (c) Dall'ipotesi segue che

$$(L(h), g)_{L^2([a,b])} - \mu_1(h, g)_{L^2([a,b])} = 0$$

e

$$(L(g), h)_{L^2([a,b])} - \mu_2(g, h)_{L^2([a,b])} = 0;$$

pertanto, per il punto (b),

$$(\mu_2 - \mu_1)(h, g)_{L^2([a,b])} = 0,$$

da cui la tesi (essendo  $\mu_1 \neq \mu_2$ ).

- (d) Essendo il problema di Sturm-Liouville autoaggiunto,  $\sigma_p(L)$  è costituito da un insieme di numeri reali al più numerabile senza alcun punto di accumulazione al finito. Allora, è sufficiente prendere  $c \notin \sigma_p(L)$ .

□

**Osservazione 6.2.15.** Il Teorema 6.2.11 continua a valere se invece dell'equazione (6.1) si considera l'equazione

$$-(p(x)h'(x))' + (q(x) - \mu r(x))h(x) = f(x) \quad \text{in } ]a, b[ \quad (6.6)$$

(dove  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $p \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ ,  $p(x) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ ,  $q \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ ,  $r \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ ,  $r > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ ,  $f \in L^2([a, b])$ ) con le stesse condizioni ai limiti (6.2). Evidentemente, nell'equazione (6.1) risulta  $p(x) = r(x) = 1$  in  $[a, b]$ .

In (6.6) il parametro  $\mu$  compare non come autovalore dell'operatore  $L_{div.} := -(ph')' + q$ , ma piuttosto come autovalore dell'operatore  $\frac{1}{r}L_{div.}$ . Lo spazio di Hilbert sarà uno spazio  $L^2([a, b]; rdx)$ , dove la misura  $rdx$  è assolutamente continua rispetto a quella di Lebesgue con peso  $r$  e le autofunzioni risultano ortogonali in tale spazio.

**Osservazione 6.2.16.** Più in generale, per l'equazione (6.6) si possono considerare le condizioni ai limiti

$$\begin{cases} \alpha_{00}h(a) + \alpha_{01}h'(a) = \beta_{00}h(b) + \beta_{01}h'(b) \\ \alpha_{10}h(a) + \alpha_{11}h'(a) = \beta_{10}h(b) + \beta_{11}h'(b) \end{cases} \quad (6.7)$$

(in cui rientrano, ad esempio, le *condizioni di periodicità*  $h(a) = h(b)$ ,  $h'(a) = h'(b)$ ). Se

$$p(b) \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = p(a) \cdot \det \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} \\ \beta_{10} & \beta_{11} \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

l'equazione (6.6) con condizioni (6.7) è un problema autoaggiunto e vale ancora per tale sistema (regolare, di Sturm-Liouville) il Teorema degli autovalori, con l'unica variante che gli autospazi associati agli autovalori non nulli possono avere dimensione due (cfr. Esempio 6.3.7).

### 6.2.1 Proprietà spettrali del sistema di Sturm-Liouville con condizioni omogenee di Dirichlet e caratterizzazione variazionale degli autovalori

Sia  $q \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ ,  $q \geq 0$ ; consideriamo il seguente problema di Sturm-Liouville con condizioni omogenee di Dirichlet:

$$\begin{cases} L(h) = -h'' + qh = \mu h & \text{in } ]a, b[, \\ h(a) = 0, \\ h(b) = 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Dimostriamo che **tutti gli autovalori di (6.9) sono positivi**.

Se  $\mu$  è autovalore di  $L$  e  $h \neq 0$  la corrispondente autofunzione, si ha

$$h \in \mathcal{D}_{Dir} := \left\{ h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}); h' \in AC([a, b]; \mathbb{R}), \right. \\ \left. h'' \in L^2([a, b]), h(a) = h(b) = 0 \right\},$$

dove  $AC([a, b]; \mathbb{R})$  denota lo spazio delle funzioni assolutamente continue da  $[a, b]$  in  $\mathbb{R}$ , e

$$L(h) = -h'' + qh = \mu h \quad \text{in } ]a, b[. \quad (6.10)$$

Moltiplichiamo (6.10) per l'autofunzione  $h$  e integriamo tra  $a$  e  $b$ . Risulta

$$\int_a^b (-h'' + qh)h \, dx = \mu \int_a^b h^2 \, dx$$

e, poiché  $h(a) = h(b) = 0$ , si ha (integrando per parti)

$$\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx = \mu \int_a^b h^2 dx,$$

da cui

$$\mu = \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} > 0,$$

poiché  $q \geq 0$  e  $h$  non è costante (altrimenti  $h$  sarebbe identicamente zero). In particolare,  $\mu = 0$  non è autovalore.

Sono note molte **proprietà spettrali per il problema (6.9)**.

Ne menzioniamo alcune:

- (i) Ogni autovalore  $\mu_n$  ha molteplicità uno (cfr. Corollario 6.2.9 e Lemma 6.2.10).
- (ii) L'autofunzione  $v_n$  corrispondente a  $\mu_n$  possiede esattamente  $(n-1)$  zeri nell'intervallo **aperto**  $]a, b[$ ; in particolare, la prima autofunzione  $v_1$  ha segno costante in  $]a, b[$  (usualmente si assume  $v_1 > 0$  in  $]a, b[$ ), cfr. [18].
- (iii) Il rapporto  $\frac{\mu_n}{n^2}$  converge per  $n \rightarrow +\infty$  ad un limite positivo.

Al fine di esplicitare i Principi del minimo e di min-max per l'operatore  $L$ , rispettivamente tramite il punto (ii) della Proposizione 6.1.4 e i punti (ii) e (iv) del Teorema 6.1.5, premettiamo la seguente osservazione.

**Osservazione 6.2.17.** Lo spazio  $\mathcal{D}_{Dir}$ , col prodotto scalare di  $L^2([a, b])$ , è sottospazio chiuso di Hilbert di  $L^2([a, b])$ .

Muniamo, ora,  $\mathcal{D}_{Dir}$  anche del prodotto scalare

$$(h, g)_{\mathcal{D}_{Dir}} := (L(h), g)_{L^2([a, b])} = \int_a^b (h'g' + qhg) dx, \quad (6.11)$$

dove la seconda uguaglianza si ottiene integrando per parti, e indichiamo con  $|\cdot|_{\mathcal{D}_{Dir}}$  la norma indotta da tale prodotto scalare.

Anche rispetto a tale prodotto scalare, lo spazio  $\mathcal{D}_{Dir}$  è di Hilbert.

L'operatore lineare, compatto e autoaggiunto  $K$ , definito da (6.4), soddisfa l'uguaglianza

$$(K(h), g)_{\mathcal{D}_{Dir}} = (L(K(h)), g)_{L^2([a, b])} = (h, g)_{L^2([a, b])} = \int_a^b hg dx \quad (6.12)$$

per ogni  $h, g \in \mathcal{D}_{Dir}$ , dove abbiamo sfruttato il punto (ii) della Proposizione 6.2.5.

Il quoziente di Rayleigh di  $L$ , per ogni  $h \in \mathcal{D}_{Dir} \setminus \{0\}$  è il rapporto

$$\frac{(L(h), h)_{L^2([a,b])}}{\|h\|_{L^2([a,b])}^2} = \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} \quad (6.13)$$

Da (6.11) e (6.12), con la scelta  $g = h$ , deduciamo che il **reciproco del quoziente di Rayleigh di  $K$  in  $\mathcal{D}_{Dir}$  coincide col quoziente di Rayleigh di  $L$  in  $L^2([a, b])$** , cioè, per ogni  $h \in \mathcal{D}_{Dir} \setminus \{0\}$ :

$$\frac{|h|_{\mathcal{D}_{Dir}}^2}{(K(h), h)_{\mathcal{D}_{Dir}}} = \frac{(L(h), h)_{L^2([a,b])}}{\|h\|_{L^2([a,b])}^2} \left( = \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} \right). \quad (6.14)$$

Inoltre, per il Corollario 6.2.9,  $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$  ( $\mu_n > 0$ ) è autovalore di  $L$  e  $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} > 0$  è autovalore di  $K$ .

In virtù della precedente osservazione, i **Principi del minimo** per gli autovalori del problema (6.9) seguono dal punto (ii) della Proposizione 6.1.4, tenendo conto di (6.14). Pertanto, il primo autovalore di  $L$  è dato da

$$\mu_1 = \min_{h \in \mathcal{D}_{Dir} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} \right\};$$

inoltre, per ogni  $n \geq 2$ ,

$$\mu_n = \min \left\{ \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} : h \in \mathcal{D}_{Dir} \setminus \{0\}, \right. \\ \left. \int_a^b h v_1 dx = 0, \dots, \int_a^b h v_{n-1} dx = 0 \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} : h \in \mathcal{D}_{Dir} \setminus \{0\}, h \in (\text{span} \{v_1, \dots, v_{n-1}\})^\perp \right\}$$

dove  $v_j$  è l'autofunzione relativa all'autovalore  $\mu_j$  per ogni  $j = 1, \dots, n-1$ .

Sempre in virtù dell'Osservazione 6.2.17, i **Principi del min-max** e **del max-min** di Fischer-Courant per gli autovalori del problema (6.9) si ottengono applicando i punti (ii) e (iv) del Teorema 6.1.5, tenendo conto di (6.14). Pertanto, per ogni  $n \geq 1$ , risulta

$$\begin{aligned} \mu_n &= \min_{\substack{\Sigma_n \subset \mathcal{D}_{Dir} \\ \dim \Sigma_n = n}} \max_{h \in \Sigma_n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} \right\} \\ &= \max_{\substack{\Sigma_{n-1} \subset \mathcal{D}_{Dir} \\ \dim \Sigma_{n-1} = n-1}} \min_{h \in \Sigma_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} \right\}. \end{aligned}$$

### 6.3 Esempi di problemi agli autovalori

**Esempio 6.3.1 (condizioni ai limiti di Dirichlet omogenee).** Consideriamo l'operatore  $L(h) = -h''$  in  $[0, 1]$  con condizioni omogenee di Dirichlet negli estremi, cioè il problema ai limiti<sup>5</sup>

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = h(1) = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

Abbiamo già provato nella Sezione 6.2.1 che risulta  $\mu > 0$ . Inoltre, l'integrale generale dell'equazione  $-h'' - \mu h = 0$  è  $h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x)$ . Per le condizioni ai limiti

$$h(0) = c_1 = 0, \quad h(1) = c_2 \sin(\sqrt{\mu}) = 0,$$

<sup>5</sup>Col metodo di separazione delle variabili, se consideriamo la conduzione termica in una barra con gli estremi fissi

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } ]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \end{cases}$$

posto  $u(x, t) := h(x)v(t)$ , la funzione  $h$  della sola variabile spaziale  $x$  soddisfa il problema (6.15).

con  $c_2 \neq 0$ , e quindi  $\sin(\sqrt{\mu}) = 0$ , ossia  $\mu_n = \pi^2 n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e le autofunzioni sono  $v_n(x) = \sin(n\pi x)$ , che costituiscono un sistema ortogonale completo in  $L^2([0, 1])$  (ortonormale, considerando le funzioni  $\sqrt{2}v_n$ ), di cui gli zeri sono in  $x = 0, x = 1$  e, se  $n \geq 2$ , anche in  $x_k = \frac{k}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Per il Teorema 6.2.11(d), se  $\mu = \pi^2 n^2$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ , per ogni  $f \in L^2([0, 1])$  il problema

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = f & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = h(1) = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni non nulle se e solo se  $(f, v_n)_{L^2([0,1])} = \int_0^1 \sin(n\pi x) f(x) dx = 0$ .

Per il Teorema 6.2.11(c), se  $\mu \neq \pi^2 n^2$ , il problema in esame ha un'unica soluzione per ogni  $f \in L^2([0, 1])$ . In particolare,  $\mu = 0$  non è autovalore; allora, per ogni  $f \in L^2([0, 1])$ , l'unica soluzione di

$$\begin{cases} h'' = f & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = h(1) = 0 \end{cases}$$

è data da (cfr. Osservazione 6.2.13)

$$h(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \quad \text{per ogni } x \in [0, 1],$$

dove la funzione di Green per  $L$ , essendo

$$h_0(x) = x, \quad h_1(x) = 1 - x, \quad W(x) = -1,$$

è data da

$$G(x, y) = \begin{cases} -x(1-y) & \text{se } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ -y(1-x) & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$$

pertanto

$$h(x) = -(1-x) \int_0^x y f(y) dy - x \int_x^1 (1-y) f(y) dy.$$

**Osservazione 6.3.2.** Per lo stesso operatore differenziale dell'esempio precedente, gli autovalori variano con le specifiche condizioni ai limiti imposte.

**Esempio 6.3.3 (condizioni ai limiti di Neumann omogenee).** Consideriamo l'operatore  $L(h) = -h''$  in  $[0, \pi]$  con condizioni omogenee di Neumann



negli estremi, cioè il problema ai limiti<sup>6</sup>

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, \pi[ \\ h'(0) = h'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

Gli autovalori  $\mu$  risultano tutti non negativi ( $\mu \geq 0$ ; se  $\mu < 0$ , allora non avremmo soluzioni non nulle). Le autofunzioni si trovano risolvendo l'equazione differenziale  $-h'' - \mu h = 0$ , il cui integrale generale è

$$h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x).$$

Derivando si ottiene

$$h'(x) = -c_1 \sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}x),$$

da cui, imponendo le condizioni al contorno, si ha

$$h'(0) = c_2 \sqrt{\mu} = 0 \implies c_2 = 0$$

e, poiché  $c_1 \neq 0$  (affinché sia  $h \neq 0$ ), si ha

$$h'(\pi) = -c_1 \sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0 \implies \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0 \implies \sqrt{\mu}\pi = 0, \pi, 2\pi, \dots,$$

perciò

$$\mu_n = (n-1)^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

In particolare, per  $\mu_1 = 0$ , le autofunzioni sono le funzioni costanti non nulle (ad esempio,  $v_1(x) = 1$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ) e, per ogni  $n \geq 2$ ,  $v_n(x) = \cos((n-1)x)$ , di cui gli zeri sono  $x_k = \frac{(2k-1)\pi}{2(n-1)}$ , con  $k = 1, \dots, n-1$ .

**Esempio 6.3.4 (condizioni ai limiti miste Dirichlet-Neumann).** Consideriamo l'operatore  $L(h) = -h''$  in  $[0, 1]$  con condizioni miste Dirichlet-

---

<sup>6</sup>Col metodo di separazione delle variabili, se consideriamo la conduzione termica in una barra con gli estremi isolati in modo che non ci sia flusso termico

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } ]0, \pi[, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \end{cases}$$

posto  $u(x, t) := h(x)v(t)$ , la funzione  $h$  della sola variabile spaziale  $x$  soddisfa il problema (6.16).

Neumann negli estremi, cioè il problema ai limiti<sup>7</sup>

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = 0 \\ h'(1) = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

Questo problema ha soluzioni *non nulle* solo se

$$\mu_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

e le autofunzioni sono

$$v_n(x) = \sin \left[ \left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) x \right],$$

che costituiscono un sistema ortogonale completo in  $L^2([0, 1])$ . Per il Teorema 6.2.11(d), se  $\mu = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ , per ogni  $f \in L^2([0, 1])$  il problema

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = f & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = 0 \\ h'(1) = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni non nulle se e solo se

$$(f, v_n)_{L^2([0,1])} = \int_0^1 \sin \left[ \left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) x \right] \cdot f(x) dx = 0;$$

mentre, per il Teorema 6.2.11(c), se  $\mu \neq \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), il problema

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = f & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = 0 \\ h'(1) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione per ogni  $f \in L^2([0, 1])$ . In particolare,  $\mu = 0$  non è autovalore; allora, per ogni  $f \in L^2([0, 1])$ , l'unica soluzione di

$$\begin{cases} h'' = f & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = h'(1) = 0 \end{cases}$$

<sup>7</sup>Col metodo di separazione delle variabili, se consideriamo la conduzione termica in una barra con l'estremo 0 fisso e l'estremo 1 isolato in modo che non ci sia flusso termico

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } ]0, \pi[, \\ u(0, t) = u_x(1, t) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \end{cases}$$

posto  $u(x, t) := h(x)v(t)$ , la funzione  $h$  della sola variabile spaziale  $x$  soddisfa il problema (6.17).

è data da

$$h(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \quad \text{per ogni } x \in [0, 1],$$

dove la funzione di Green per  $L$ , essendo, per ogni  $x \in [0, 1]$ ,

$$h_0(x) = x, \quad h_1(x) = 1, \quad W(x) = -1,$$

è data da

$$G(x, y) = \begin{cases} -x & \text{se } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ -y & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$$

pertanto

$$h(x) = - \int_0^x y f(y) dy - x \int_x^1 f(y) dy.$$

**Esempio 6.3.5 (condizioni ai limiti miste Dirichlet-Robin).** Consideriamo l'operatore  $L(h) = -h''$  in  $[0, \pi]$  con condizioni miste Dirichlet-Robin negli estremi, cioè il problema ai limiti<sup>8</sup>

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, \pi[ \\ h(0) = 0 \\ h(\pi) + h'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

Consideriamo separatamente i casi in cui il parametro  $\mu$  è negativo, nullo o positivo.

Se  $\mu < 0$ , non ci sono soluzioni diverse da zero al problema, dunque non ci sono autovalori negativi.

Se  $\mu = 0$ , l'equazione differenziale si riduce a  $h'' = 0$ , da cui si ha

$$h(x) = c_1 x + c_2.$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ottiene che l'unica soluzione del problema è  $h = 0$ , pertanto  $\mu = 0$  non è autovalore.

Se  $\mu > 0$ , l'equazione differenziale  $-h'' - \mu h = 0$  ha integrale generale dato da

$$h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x).$$

<sup>8</sup>Col metodo di separazione delle variabili, se consideriamo la conduzione termica in una barra con l'estremo 0 fisso e l'estremo  $\pi$  parzialmente isolato

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } ]0, \pi[, \\ u(0, t) = u(\pi, t) + u_x(\pi, t) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \end{cases}$$

posto  $u(x, t) := h(x)v(t)$ , la funzione  $h$  della sola variabile spaziale  $x$  soddisfa il problema (6.18).

Imponendo la prima condizione ai limiti si ha

$$0 = h(0) = c_1$$

da cui, imponendo  $h(x) \neq 0$  si ha  $c_2 \neq 0$ ; derivando, si ottiene

$$h'(x) = c_2 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}x)$$

e, imponendo la seconda condizione, si ha

$$0 = h(\pi) + h'(\pi) = c_2 \sin(\sqrt{\mu}\pi) + c_2 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}\pi).$$

Quindi  $\mu$  è autovalore se e solo se è soluzione dell'equazione trascendente

$$\tan(\sqrt{\mu}\pi) = -\sqrt{\mu}.$$

Questa equazione non è risolubile elementarmente, ma graficamente si osserva che essa ha un'infinità numerabile di soluzioni positive (autovalori)  $(\mu_n)_n$  tali che

$$n - \frac{1}{2} < \sqrt{\mu_n} < n \quad (n \in \mathbb{N})$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\mu_n} - \left( n - \frac{1}{2} \right) \right) = 0$$

e le autofunzioni sono

$$v_n(x) = \sin(\sqrt{\mu_n}x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**Esempio 6.3.6 (condizioni ai limiti miste Neumann-Robin).** Consideriamo l'operatore  $L(h) = -h''$  in  $[0, 1]$  con condizioni miste Neumann-Robin negli estremi, cioè il problema ai limiti<sup>9</sup>

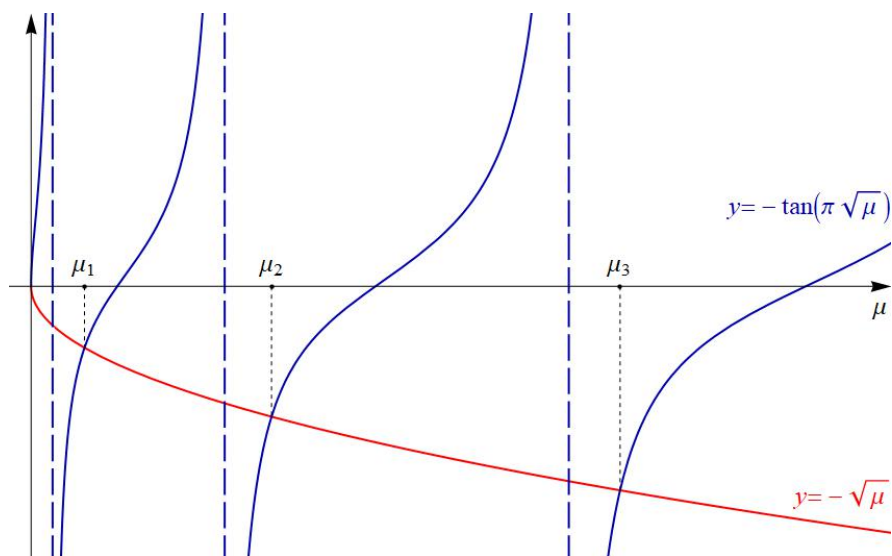
$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, 1[ \\ h'(1) = 0 \\ h(0) - h'(0) = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

Consideriamo separatamente i casi in cui il parametro  $\mu$  è negativo, nullo o positivo.

<sup>9</sup>Col metodo di separazione delle variabili, se consideriamo la conduzione termica in una barra con l'estremo 1 totalmente isolato e con una condizione di tipo Robin nel primo estremo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } ]0, 1[, \\ u_x(1, t) = u(0, t) - u_x(0, t) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \end{cases}$$

posto  $u(x, t) := h(x)v(t)$ , la funzione  $h$  della sola variabile spaziale  $x$  soddisfa il problema (6.19).



**Figura 6.1:** Risoluzione grafica dell'equazione  $\tan(\sqrt{\mu}\pi) = -\sqrt{\mu}$  per l'individuazione degli autovalori  $\mu_n$ . Gli asintoti verticali sono le rette di equazione  $\mu = (n - \frac{1}{2})^2$ , le intersezioni con l'asse  $\mu$  sono i punti con ascissa  $n^2$ : dal grafico si può dedurre anche la relazione  $n - \frac{1}{2} < \sqrt{\mu_n} < n$ .

Se  $\mu < 0$ , non ci sono soluzioni diverse da zero al problema, dunque non ci sono autovalori negativi.

Se  $\mu = 0$ , l'equazione differenziale si riduce a  $h'' = 0$ , da cui si ha

$$h(x) = c_1x + c_2.$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ottiene che l'unica soluzione del problema è  $h = 0$ , pertanto  $\mu = 0$  non è autovalore.

Se  $\mu > 0$ , l'equazione differenziale  $-h'' - \mu h = 0$  ha integrale generale dato da

$$h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x).$$

Imponendo la seconda condizione ai limiti si ha

$$0 = h(0) - h'(0) = c_1 - c_2\sqrt{\mu}$$

da cui (osserviamo che né  $c_1$  né  $c_2$  può essere zero, altrimenti, se una delle due costanti fosse nulla lo sarebbe anche l'altra, e quindi avremmo  $h(x) = 0$ )

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Imponendo la prima condizione, si ha

$$0 = h'(1) = -c_1\sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}) + c_2\sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}),$$

da cui otteniamo

$$\tan \sqrt{\mu} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

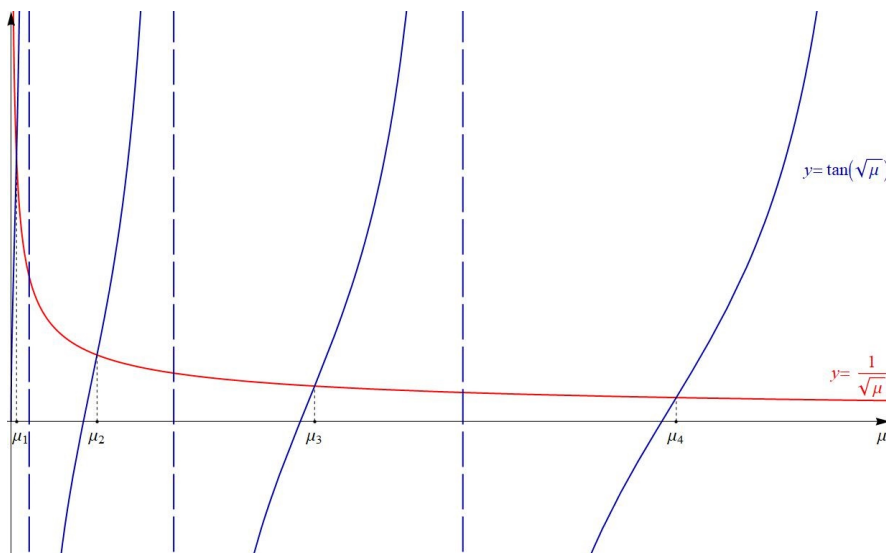
Quindi  $\mu$  è autovalore se e solo se è soluzione dell'equazione trascendente

$$\tan \sqrt{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Questa equazione non è risolvibile elementarmente, ma graficamente si osserva che essa ha un'infinità numerabile di soluzioni positive (autovalori)  $(\mu_n)_n$  tali che

$$(n-1)\pi < \sqrt{\mu_n} < \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n \in \mathbb{N})$$

e le autofunzioni sono



**Figura 6.2:** Risoluzione grafica dell'equazione  $\tan \sqrt{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$  per l'individuazione degli autovalori  $\mu_n$ . Gli asintoti verticali sono le rette di equazione  $\mu = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$ , le intersezioni con l'asse  $\mu$  sono i punti con ascissa  $n^2 \pi^2$ : dal grafico si può dedurre anche la relazione  $(n-1)\pi < \sqrt{\mu_n} < \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ .

$$v_n(x) = \sin(\sqrt{\mu_n}x) + \sqrt{\mu_n} \cos(\sqrt{\mu_n}x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \sin(\sqrt{\mu_n}x) + \sqrt{\mu_n} \cos(\sqrt{\mu_n}x) = \sin(\sqrt{\mu_n}x) + \cot(\sqrt{\mu_n}) \cos(\sqrt{\mu_n}x) \\ &= \frac{\cos(\sqrt{\mu_n}(1-x))}{\sin \sqrt{\mu_n}}. \end{aligned}$$

**Esempio 6.3.7 (condizioni ai limiti periodiche).** <sup>10</sup> Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]-\pi, \pi[, \\ h(-\pi) = h(\pi), \\ h'(-\pi) = h'(\pi). \end{cases}$$

La condizione (6.8) è soddisfatta.

Consideriamo separatamente i casi in cui il parametro  $\mu$  è negativo, nullo o positivo.

Se  $\mu < 0$ , non ci sono soluzioni non nulle al problema, dunque non esistono autovalori negativi.

Se  $\mu = 0$ , l'equazione differenziale si riduce a  $h'' = 0$ , da cui si ha

$$h(x) = c_1 x + c_2.$$

Imponendo la prima condizione ai limiti si ottiene

$$h(-\pi) = -c_1\pi + c_2 = h(\pi) = c_1\pi + c_2 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow h(x) = c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

è così soddisfatta anche la seconda condizione ai limiti, per cui  $\mu = 0$  è autovalore semplice il cui autospazio è lo spazio delle funzioni costanti non nulle in  $]-\pi, \pi[$ .

Se  $\mu > 0$ , l'integrale generale dell'equazione differenziale  $-h'' - \mu h = 0$  è

$$h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x).$$

Imponendo la prima condizione ai limiti si ottiene

$$h(-\pi) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}\pi) - c_2 \sin(\sqrt{\mu}\pi) = h(\pi) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}\pi)$$

da cui si ha

$$c_2 \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0.$$

Imponendo, ora, la seconda condizione ai limiti si ottiene

$$h'(-\pi) = c_1 \sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}\pi) + c_2 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}\pi)$$

<sup>10</sup>Un esempio interessante di problema di Sturm-Liouville periodico in  $[0, \pi]$  è il seguente

$$\begin{cases} -h'' + qh - \mu h = 0 & \text{in } ]0, \pi[, \\ h(0) = h(\pi), \\ h'(0) = h'(\pi), \end{cases}$$

introdotta da G.W. Hill per lo studio sul movimento della Luna. Per semplicità, qui tratteremo il problema sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$  con  $q = 0$ .

$$= h'(\pi) = -c_1\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\pi) + c_2\sqrt{\mu}\cos(\sqrt{\mu}\pi)$$

da cui si ha

$$c_1 \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0.$$

Poiché  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ , risulta  $\sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0$ , quindi  $\sqrt{\mu}\pi = n\pi$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , da cui

$$\mu_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dunque le autofunzioni per  $\mu_n$  sono

$$v_n(x) = c_1 \cos(nx) + c_2 \sin(nx)$$

con  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ ;  $\cos(nx)$  e  $\sin(nx)$  sono due autofunzioni linearmente indipendenti associate al medesimo autovalore  $\mu_n$ , pertanto gli autospazi associati a  $\mu_n \neq 0$  hanno tutti dimensione due.

**Esempio 6.3.8.** Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -h'' + h' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, 1[, \\ h(0) = h(1) = 0. \end{cases}$$

Si tratta di un problema di Dirichlet omogeneo, ma è diverso dai problemi considerati finora a causa del termine  $h'$  presente nell'equazione.

Moltiplichiamo l'equazione per una funzione  $\varphi$  da determinare in modo da presentare il primo membro *in forma di divergenza*, cioè nella forma  $-(\varphi h)'$ . Otteniamo

$$-\varphi h'' + \varphi h' - \mu \varphi h = 0$$

e raggiungiamo lo scopo se il coefficiente di  $-h''$  è uguale alla derivata del coefficiente di  $-h''$ , cioè se  $-\varphi = \varphi'$ . Scegliamo, allora,  $\varphi(x) = e^{-x}$  (questo procedimento, almeno nel caso unidimensionale, è di carattere generale, cfr. [18]). Il problema proposto si riscrive nella forma

$$\begin{cases} -(e^{-x}h)' - \mu(e^{-x}h) = 0 & \text{in } ]0, 1[, \\ h(0) = h(1) = 0. \end{cases}$$

Per poter applicare la teoria sviluppata in precedenza e affinché le autofunzioni costituiscano un sistema ortogonale, occorre sostituire all'usuale prodotto scalare in  $L^2([0, 1])$  il prodotto scalare definito da

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(x)v(x)e^{-x}dx,$$



la cui norma è equivalente a quella di  $L^2([0, 1])$ , come è assicurato dalla disuguaglianza  $e^{-1} < e^{-x} < 1$  per ogni  $x \in ]0, 1[$ . Per il calcolo effettivo degli autovalori e delle autofunzioni conviene comunque riferirsi alla prima equazione differenziale, i cui coefficienti sono costanti. Procedendo in maniera analoga ai precedenti esempi, gli autovalori e le autofunzioni sono, rispettivamente

$$\mu_n = n^2\pi^2 + \frac{1}{4}, \quad v_n(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin(n\pi x), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Osserviamo che, per  $n \neq m$ , risulta

$$\begin{aligned} \langle v_m, v_n \rangle &= \int_0^1 e^{\frac{x}{2}} \sin(n\pi x) \cdot e^{\frac{x}{2}} \sin(m\pi x) \cdot e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 \sin(n\pi x) \cdot \sin(m\pi x) dx = 0. \end{aligned}$$

**Osservazione 6.3.9.** Altri problemi agli autovalori si incontrano anche per determinare lo spettro puntuale (i.e. gli autovalori) di operatori compatti ed autoaggiunti in spazi di Hilbert (cfr., ad esempio, gli esercizi n. 35, 36, 37 e 38 nella sezione 5.11 del Cap. 5).

### 6.3.1 Approssimazioni

Negli esempi di problemi agli autovalori studiati nella sezione precedente, abbiamo agevolmente determinato l'integrale generale dell'equazione a coefficienti costanti  $L(h) = -h'' - \mu h = 0$ . Tuttavia, possiamo riscontrare che, imponendo le condizioni ai limiti del problema, in alcuni casi abbiamo potuto determinare esattamente gli autovalori  $\mu_n$  (e quindi le rispettive autofunzioni  $v_n$ ), mentre in alcuni altri esempi (in presenza di equazioni trascendenti) abbiamo potuto stimare solo limitazioni inferiori e superiori per gli autovalori  $\mu_n$ .

Limitiamoci ora a considerare il primo autovalore  $\mu_1$ , che risulta essere il più interessante nelle applicazioni.

Partiamo dalla considerazione che, in generale, il quoziente di Rayleigh  $R(\cdot)$  non può essere usato per valutare

$$\mu_1 = \min_{u \in \text{span}\{v_1\} \setminus \{0\}} R(u),$$

perché  $\mu_1$  è noto solo se lo è  $v_1$ .

Allora, per ottenere una "buona stima" di  $\mu_1$ , l'idea è quella di valutare il quoziente di Rayleigh  $R(\cdot)$  per una opportuna funzione  $v$  (non nulla, che non necessariamente verifichi l'equazione, ma che soddisfi le condizioni ai limiti assegnate nello specifico problema considerato e sia senza zeri nell'intervallo

aperto fissato) tale che il valore  $R(v)$  possa portare il quoziente di Rayleigh “più prossimo” al suo valore minimo (cioè  $\mu_1$ ).

Possiamo ragionevolmente aspettarci che quanto più  $R(v)$  è “vicino” a  $\mu_1$ , tanto più la funzione scelta  $v$  sarà “vicina” all’autofunzione  $v_1$ .

Diamo alcuni Esempi.

**Esempio (1).**

Nell’esempio 6.3.1 abbiamo provato che  $\mu_1 = \pi^2$ .

Per vedere come questo valore è confermato dal metodo esposto prima, scegliamo la funzione  $v(x) = x(1-x)$ , che soddisfa le condizioni ai limiti e non ha zeri in  $]0,1[$ . Otteniamo

$$R(v) = \frac{\int_0^1 (1-2x)^2 dx}{\int_0^1 (x-x^2)^2 dx} = 10,$$

che è una buona approssimazione del valore (esatto)  $\pi^2 = 9,8596\dots$

**Esempio (2).**

Nell’esempio 6.3.5 abbiamo ottenuto per  $\mu_1$  solo la stima  $\frac{1}{4} < \mu_1 < 1$ .

Per trovare una migliore approssimazione del primo autovalore di questo problema, scegliamo la funzione

$$v(x) = \begin{cases} 2 \sin x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 1 + \sin x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \end{cases}$$

che soddisfa le condizioni ai limiti e non ha zeri in  $]0, \pi[$ . Risulta

$$R(v) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x)^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \sin x)^2 dx} = 0,5237 < 1.$$

Evidentemente  $0,25 < 0,5237 < 1$ , coerentemente con le limitazioni note per  $\mu_1$ .

**Esempio (3).**

Nell’esempio 6.3.6 abbiamo ottenuto per  $\mu_1$  solo la stima  $0 < \mu_1 < \frac{\pi^2}{4}$ .

Per trovare una migliore approssimazione del primo autovalore di questo problema, scegliamo la funzione  $v(x) = 2\pi + 4 \sin(\frac{\pi}{2}x)$  che soddisfa le condizioni

ai limiti e non ha zeri in  $]0, 1[$ . Risulta

$$R(v) = \frac{\int_0^1 4\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx}{\int_0^1 [2\pi + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)]^2 dx} = 0,2483 < \frac{\pi^2}{4} = 2,4649\dots$$

## 6.4 Analisi spettrale dell'operatore di Laplace con condizione omogenea di Dirichlet

Nella sezione 6.3 abbiamo considerato il problema di determinare la soluzione di una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine assegnate per essa delle condizioni negli estremi del suo intervallo di definizione.

Passiamo ora a considerare il problema analogo per l'operatore di Laplace (prototipo degli operatori alle derivate parziali di tipo "ellittico") con condizione omogenea di Dirichlet.

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un aperto limitato,<sup>11</sup> e consideriamo il problema agli autovalori per l'operatore di Laplace<sup>12</sup> con condizione omogenea di Dirichlet su  $\partial\Omega$ .

**Problema 1.** Esistono  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $h \neq 0$  tali che

$$\begin{cases} -\Delta h = \mu h & \text{in } \Omega \\ h = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad ? \quad (\mathcal{D}_1)$$

Poiché

$$-\int_{\Omega} (\Delta h)v \, dx = \mu \int_{\Omega} hv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

integrando per parti il primo membro, si può riformulare il Problema 1 in forma variazionale:

<sup>11</sup>L'ambiente funzionale è lo spazio di Sobolev  $H_0^1(\Omega)$ , notazione usata per indicare lo spazio  $H_0^{1,2}(\Omega)$ . Per gli spazi di Sobolev cfr., ad esempio, [5], [6] e [7].

<sup>12</sup>L'operatore di Laplace  $\Delta$  è definito da

$$\Delta := \operatorname{div} \nabla = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

(traccia della matrice Hessiana).

**Problema 2.** Esistono  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $h \neq 0$  tali che

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \, dx = \mu \int_{\Omega} h v \, dx & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ h \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad ? \quad (\mathcal{D}_2)$$

La funzione  $h \neq 0$  (quando esiste) è una autofunzione relativa all'autovalore  $\mu$ .

**Osservazione 6.4.1.** Da  $(\mathcal{D}_2)$ , preso  $v = h$  abbiamo

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla h \, dx = \mu \int_{\Omega} h^2 \, dx$$

e quindi

$$\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx = \mu \int_{\Omega} h^2 \, dx,$$

sicché

$$\mu = \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx}{\int_{\Omega} h^2 \, dx};$$

pertanto, gli autovalori  $\mu$  di  $(\mathcal{D}_2)$  (e  $(\mathcal{D}_1)$ ) sono reali positivi.

Consideriamo l'**operatore di Laplace-Dirichlet**

$$-\Delta : D(-\Delta) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

dove  $D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .

**Definizione 6.4.2.** L'inverso dell'operatore di Laplace-Dirichlet è l'operatore  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  definito per ogni  $f \in L^2(\Omega)$  da:

$K(f) \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  è l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla (K(f)) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ K(f) \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Equivalentemente,  $K(f)$  è la soluzione variazionale del problema con condizione omogenea su  $\partial\Omega$

$$\begin{cases} -\Delta (K(f)) = f & \text{in } \Omega, \\ K(f) = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Risulta quindi

$$(-\Delta) \circ K = I_{L^2(\Omega)}$$

$(-\Delta(K(f)) = f$  per ogni  $f \in L^2(\Omega)$ ), cioè  $K$  è l'inverso destro di  $-\Delta$ .

**Teorema 6.4.3.** *L'operatore  $K = (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  verifica le seguenti proprietà:*

- (i)  $K$  è un operatore lineare e continuo;
- (ii)  $K$  è autoaggiunto in  $L^2(\Omega)$ ;
- (iii)  $K$  è compatto da  $L^2(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ ;
- (iv)  $K$  è definito positivo.

*Dimostrazione.*

- (i) Siano  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Dalla definizione di  $K$  risulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(K(f_1)) \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} f_1 v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla(K(f_2)) \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} f_2 v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Prendendo una combinazione lineare delle due precedenti uguaglianze si ha

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla(c_1 K(f_1) + c_2 K(f_2)) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (c_1 f_1 + c_2 f_2) v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c_1 K(f_1) + c_2 K(f_2) \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Per l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet, si ha

$$K(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 K(f_1) + c_2 K(f_2),$$

cioè la linearità di  $K$ .

Proviamo che  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  è continuo. Nella definizione di  $K$ , prendendo  $v = K(f) \in H_0^1(\Omega)$ , risulta

$$\int_{\Omega} |\nabla(K(f))|^2 \, dx = \int_{\Omega} f K(f) \, dx. \quad (6.20)$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\int_{\Omega} |\nabla(K(f))|^2 \, dx \leq \left( \int_{\Omega} f^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} (K(f))^2 \, dx \right)^{1/2}. \quad (6.21)$$

Per la disuguaglianza di Poincaré<sup>13</sup>

$$\left( \int_{\Omega} (K(f))^2 dx \right)^{1/2} \leq C(\Omega, N, 2) \left( \int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 dx \right)^{1/2} \quad (6.22)$$

Da (6.21) e (6.22) si ottiene

$$\int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 dx \leq C(\Omega, N, 2) \left( \int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Quindi

$$\left( \int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 dx \right)^{1/2} \leq C(\Omega, N, 2) \left( \int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2}, \quad (6.23)$$

che, tenuto conto di (6.22), dà

$$\left( \int_{\Omega} (K(f))^2 dx \right)^{1/2} \leq C^2(\Omega, N, 2) \left( \int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2}. \quad (6.24)$$

Pertanto, per ogni  $f \in L^2(\Omega)$

$$\|K(f)\|_{L^2(\Omega)} \leq C^2(\Omega, N, 2) \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

ed è così provato che  $K$  è un operatore lineare e continuo da  $L^2(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ .

Inoltre, da (6.23) e (6.24) deduciamo che per ogni  $f \in L^2(\Omega)$

$$\|K(f)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\Omega, N, 2) \sqrt{1 + C^2(\Omega, N, 2)} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6.25)$$

(ii) Proviamo ora che  $K$  è operatore autoaggiunto in  $L^2(\Omega)$ , cioè, per ogni  $f, g \in L^2(\Omega)$ :

$$(K(f), g)_{L^2(\Omega)} = (f, K(g))_{L^2(\Omega)}.$$

Dalla definizione di  $K(f)$  e  $K(g)$  abbiamo

$$\int_{\Omega} \nabla (K(f)) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} \nabla (K(g)) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} g v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

<sup>13</sup>Cfr., ad esempio, [2], Theorem 5.3.1.

Scelto  $v = K(g) \in H_0^1(\Omega)$  nella prima uguaglianza e  $v = K(f) \in H_0^1(\Omega)$  nella seconda uguaglianza, otteniamo

$$\int_{\Omega} \nabla (K(f)) \cdot \nabla (K(g)) \, dx = \int_{\Omega} f K(g) \, dx = (f, K(g))_{L^2(\Omega)},$$

$$\int_{\Omega} \nabla (K(g)) \cdot \nabla (K(f)) \, dx = \int_{\Omega} g K(f) \, dx = (g, K(f))_{L^2(\Omega)}.$$

Quindi, dall'uguaglianza dei primi membri, segue

$$(f, K(g))_{L^2(\Omega)} = (g, K(f))_{L^2(\Omega)} = (K(f), g)_{L^2(\Omega)},$$

per cui  $K$  è autoaggiunto in  $L^2(\Omega)$ .

- (iii) Proviamo che  $K$  è compatto da  $L^2(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ . Sia  $B$  un insieme limitato in  $L^2(\Omega)$ . Da (6.25), poiché  $K$  è operatore lineare e continuo da  $L^2(\Omega)$  in  $H_0^1(\Omega)$ , l'insieme  $K(B)$  è limitato in  $H_0^1(\Omega)$ .

Essendo  $\Omega$  limitato, per il Teorema di compattezza di Rellich-Kondrakov<sup>14</sup> concludiamo che  $K(B)$  è relativamente compatto in  $L^2(\Omega)$ .

- (iv) Da (6.20) si ha per ogni  $f \in L^2(\Omega)$

$$(K(f), f)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 \, dx \geq 0,$$

cioè  $K$  è un operatore positivo.

Inoltre, se  $(K(f), f)_{L^2(\Omega)} = 0$  allora  $\nabla (K(f)) = 0$ , cioè  $K(f)$  è localmente costante. Poiché  $K(f) \in H_0^1(\Omega)$ , segue che  $K(f) = 0$ . Per la definizione di  $K(f)$ ,  $K(f) = 0$  significa  $\int_{\Omega} f v \, dx = 0$  per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ . In virtù della densità di  $H_0^1(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ , concludiamo che  $f = 0$ .

□

**Corollario 6.4.4.** *Il numero reale  $\mu > 0$  è un autovalore dell'operatore di Laplace-Dirichlet se e solo se  $\frac{1}{\mu}$  è un autovalore di  $K = (-\Delta)^{-1}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mu > 0$  un autovalore dell'operatore di Laplace-Dirichlet, pertanto esiste  $h \in H_0^1(\Omega)$ ,  $h \neq 0$ , tale che

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \, dx = \mu \int_{\Omega} h v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

<sup>14</sup>Cfr., ad esempio, [2], Theorem 5.3.3.

Per la definizione di  $K = (-\Delta)^{-1}$ , ciò è equivalente a

$$h = K(\mu h).$$

Per la linearità di  $K$ , usando il fatto che  $\mu > 0$ , deduciamo che

$$K(h) = \frac{1}{\mu}h,$$

cioè  $\frac{1}{\mu}$  è un autovalore di  $K = (-\Delta)^{-1}$ .  $\square$

**Teorema 6.4.5 (Esistenza di una base Hilbertiana di autofunzioni dell'operatore di Laplace-Dirichlet).** *Esistono una successione reale  $(\mu_n)_n$  e una base di Hilbert (sistema ortonormale completo)  $(v_n)_n$  di  $L^2(\Omega)$  tali che*

$$(a) \quad 0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty;$$

$$(b) \quad v_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \text{ e } -\Delta v_n = \mu_n v_n \text{ in } \Omega \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.^{15}$$

*Dimostrazione.*

(a) Per i punti (i), (ii) e (iii) del Teorema 6.4.3, possiamo applicare il Teorema 5.11.1 all'operatore  $K$ . Esiste quindi una base Hilbertiana  $(v_n)_n$  di  $L^2(\Omega)$  tale che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  è una autofunzione di  $K$ . Precisamente

$$K(v_n) = \lambda_n v_n$$

con  $(\lambda_n)_n$  successione di numeri reali positivi (per (iv) del Teorema 6.4.3) che decresce a zero per  $n \rightarrow +\infty$ . Per il Corollario 6.4.4, deduciamo che  $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$  è un autovalore dell'operatore di Laplace-Dirichlet,

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty,$$

e  $v_n$  è una corrispondente autofunzione.

Quindi, per la linearità dell'operatore  $K$ ,

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \mu_n v_n & \text{in } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove la soluzione  $v_n$  è da intendersi in senso variazionale, cioè  $v_n \in H_0^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} \nabla v_n \cdot \nabla v \, dx = \mu_n \int_{\Omega} v_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

<sup>15</sup>Ciascun autovalore di  $-\Delta$ ,  $\mu_n$ , è ripetuto un numero di volte uguale alla sua molteplicità, che è finita.



(b) Dai risultati di regolarità<sup>16</sup>  $v_n \in H^2(\omega)$  per ogni  $\omega \subset\subset \Omega$  ( $\omega$  a chiusura compatta contenuta in  $\Omega$ ). Ragionando analogamente, segue che  $v_n \in H^4(\omega)$  per ogni  $\omega \subset\subset \Omega$  e, allo stesso modo,  $v_n \in H^6(\omega)$  per ogni  $\omega \subset\subset \Omega$ , e così via. Pertanto  $v_n \in \bigcap_{m \geq 1} H^m(\omega)$  per ogni  $\omega \subset\subset \Omega$ . Di conseguenza,  $v_n \in C^\infty(\omega)$  per ogni  $\omega \subset\subset \Omega$ , cioè  $v_n \in C^\infty(\Omega)$ .

□

## 6.5 Caratterizzazione variazionale degli autovalori

Al fine di esplicitare i Principi del minimo e di min-max per l'operatore di Laplace-Dirichlet tramite il punto (ii) della Proposizione 6.1.4 e i punti (ii) e (iv) del Teorema 6.1.5, premettiamo la seguente osservazione.

**Osservazione 6.5.1.** Essendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aperto limitato, per la disuguaglianza di Poincaré le norme  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  e  $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$  sono equivalenti. Pertanto, per ogni  $h, g \in H_0^1(\Omega)$ , posto

$$(h, g)_{H_0^1(\Omega)} := (\nabla h, \nabla g)_{L^2(\Omega)} = (-\Delta h, g)_{L^2(\Omega)}, \quad (6.26)$$

risulta

$$(K(h), g)_{H_0^1(\Omega)} = (-\Delta K(h), g)_{L^2(\Omega)} = (h, g)_{L^2(\Omega)}. \quad (6.27)$$

Il quoziente di Rayleigh di  $-\Delta$ , per ogni  $h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$  è il rapporto

$$\frac{(-\Delta h, h)_{L^2(\Omega)}}{\|h\|_{L^2(\Omega)}^2} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx}.$$

Da (6.26) e (6.27), con la scelta  $g = h$ , deduciamo che

$$\frac{\|h\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{(K(h), h)_{H_0^1(\Omega)}} = \frac{(-\Delta h, h)_{L^2(\Omega)}}{\|h\|_{L^2(\Omega)}^2}, \quad (6.28)$$

cioè il reciproco del quoziente di Rayleigh di  $K$  in  $H_0^1(\Omega)$  coincide col quoziente di Rayleigh di  $-\Delta$  in  $L^2(\Omega)$ . Inoltre, ricordiamo che per il Corollario 6.4.4  $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$  è autovalore di  $-\Delta$  e  $\lambda_n$  è autovalore di  $K$ .

<sup>16</sup>Cfr., ad esempio, [5], Theorem 9.26.

In virtù della precedente osservazione, i **Principi del minimo** per gli autovalori  $\mu_n > 0$  del Problema  $(\mathcal{D}_2)$  seguono dal punto (ii) della Proposizione 6.1.4, tenuto conto di (6.28).

Pertanto, il primo autovalore di  $-\Delta$  è dato da

$$\mu_1 = \min_{h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} \right\};$$

inoltre, per ogni  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \mu_n &= \min \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} : h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} h v_1 dx = 0, \dots, \int_{\Omega} h v_{n-1} dx = 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} : h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, \right. \\ &\quad \left. h \in (\text{span} \{v_1, \dots, v_{n-1}\})^\perp \right\}, \end{aligned}$$

dove  $v_j$  è l'autofunzione relativa all'autovalore  $\mu_j$  per ogni  $j = 1, \dots, n-1$ .

Ancora in virtù della precedente osservazione, i **Principi del min-max e del max-min** di Fischer-Courant per gli autovalori  $\mu_n > 0$  del Problema  $(\mathcal{D}_2)$  seguono dai punti (ii) e (iv) del Teorema 6.1.5, tenendo conto di (6.28).

Pertanto, per ogni  $n \geq 1$ , risulta

$$\begin{aligned} \mu_n &= \max_{\substack{\Sigma_{n-1} \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_{n-1} = n-1}} \min_{h \in \Sigma_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} \right\} \\ &= \min_{\substack{\Sigma_n \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_n = n}} \max_{h \in \Sigma_n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} \right\}. \end{aligned}$$

Nel seguito, quando necessario, indicheremo  $\mu_n$  con  $\mu_n(\Omega)$  per specificare l'aperto  $\Omega$  sul quale saranno considerati gli autovalori.

## 6.6 Molteplicità e proprietà asintotiche degli autovalori dell'operatore di Laplace-Dirichlet

Valgono i seguenti risultati.

**Teorema 6.6.1.** *Sia  $\Omega$  un aperto, limitato, connesso e regolare di  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ).*

- (i) *Il primo autovalore  $\mu_1$  dell'operatore di Laplace-Dirichlet ha molteplicità uguale a uno ( $\mu_1$  è semplice); l'autospazio relativo a  $\mu_1$  è generato da una funzione  $v_1 \in H_0^1(\Omega)$  tale che  $v_1 > 0$  in  $\Omega$ . Gli autovalori diversi da  $\mu_1$  possono avere molteplicità maggiore di uno.<sup>17</sup>*
- (ii) *Ogni autofunzione  $v_j$  corrispondente all'autovalore  $\mu_j > \mu_1$  ha segno non costante in  $\Omega$ .*
- (iii) *(Weyl, 1911) Esistono due costanti positive  $a_\Omega$  e  $b_\Omega$ , dipendenti solo da  $\Omega$ , tali che, per ogni  $n \geq 1$*

$$a_\Omega n^{2/N} \leq \mu_n \leq b_\Omega n^{2/N}.$$

*Dimostrazione.*

- (i) Supponiamo, per assurdo,<sup>18</sup> che  $h_1$  e  $h_2$  siano due autofunzioni linearmente indipendenti appartenenti all'autospazio  $E_{\mu_1}$  relativo all'autovalore  $\mu_1$ .

Poiché  $\Omega$  è regolare,  $h_1$  e  $h_2$  sono funzioni regolari e ha senso considerare i loro valori in ogni punto  $x \in \Omega$ . Siano, allora,  $x_1, x_2 \in \Omega$  tali che

$$\alpha_1 h_1(x_1) + \alpha_2 h_2(x_1) = 0,$$

$$\alpha_1 h_1(x_2) + \alpha_2 h_2(x_2) \neq 0$$

<sup>17</sup>Cfr., ad esempio, [2], Remark 8.5.1.

<sup>18</sup>Per una dimostrazione alternativa cfr. [5], Theorem 6.13 (Krein-Rutman) e Problem 41.

per qualche  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

Poiché  $h_1, h_2 \in E_{\mu_1}$ , anche  $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \in E_{\mu_1}$  e  $w := |\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2| \in E_{\mu_1}$ .<sup>19</sup> La funzione  $w$  soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} w \in E_{\mu_1} & (\text{cioè } -\Delta w = \mu_1 w \text{ in } \Omega), \\ w \geq 0, \\ w(x_1) = 0, \\ w(x_2) \neq 0. \end{cases}$$

Dall'equazione  $-\Delta w = \mu_1 w$ , essendo  $w \geq 0$  e  $\mu_1 > 0$ , deduciamo che

$$\begin{cases} -\Delta w \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ w(x_1) = 0, & x_1 \in \Omega. \end{cases}$$

Il Principio del massimo forte di Hopf<sup>20</sup> implica che  $w \equiv 0$  in  $\Omega$ , in contraddizione con  $w(x_2) \neq 0$ ,  $x_2 \in \Omega$ . Pertanto la dimensione di  $E_{\mu_1}$  è uno.

Ancora per il Principio del massimo forte, presa una funzione  $h \in E_{\mu_1} \setminus \{0\}$ , posto  $v_1 := |h|$ , risulta  $v_1 \in E_{\mu_1}$  e  $v_1 > 0$ .<sup>21</sup>

- (ii) Poiché  $\mu_j \neq \mu_1$ , risulta  $E_{\mu_j} \perp E_{\mu_1}$  e  $\int_{\Omega} v_j(x) v_1(x) dx = 0$ . Poiché  $v_1 > 0$  in  $\Omega$ , necessariamente  $v_j$  cambia segno in  $\Omega$ .
- (iii) Per brevità, per la dimostrazione di (iii), diretta conseguenza dei Principi di max-min di Fischer-Courant, rinviando, ad esempio, a [2], Theorem 8.5.2.

□

<sup>19</sup>Per il Principio del minimo, le autofunzioni  $h \in E_{\mu_1}, h \neq 0$ , sono le soluzioni del problema di minimo  $\min_{h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} \right\}$ . Di conseguenza, da questa formula, anche  $|h| \in E_{\mu_1}$ , perché  $|h| \in H_0^1(\Omega)$  e il quoziente di Rayleigh per  $h$  è uguale al quoziente di Rayleigh per  $|h|$ .

<sup>20</sup>Cfr., ad esempio, [5], Theorem 9.36 (Hopf) e Corollary 9.37.

<sup>21</sup>Si può provare la tesi anche nel seguente modo. Sia  $v_1 \in E_{\mu_1} \setminus \{0\}$ . Poiché anche  $|v_1| \in E_{\mu_1} \setminus \{0\}$  e  $\dim(E_{\mu_1}) = 1$ ,  $v_1$  e  $|v_1| > 0$  sono linearmente dipendenti; ne deduciamo che o  $v_1 \equiv |v_1| > 0$  oppure  $v_1 \equiv -|v_1| < 0$ ; in ogni caso,  $v_1$  è di segno costante in  $\Omega$ .

**Osservazione 6.6.2.** Evidenziamo il fatto che, in dimensione  $N \geq 2$ , il primo autovalore  $\mu_1$  dell'operatore di Laplace-Dirichlet, su un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  **aperto, limitato, regolare e connesso**, ha la notevole proprietà di essere semplice, mentre gli altri autovalori possono avere molteplicità maggiore di 1. Inoltre, l'autofunzione  $v_1$  è l'unica ad avere segno costante in  $\Omega$ .

**Osservazione 6.6.3.** L'ipotesi topologica " **$\Omega$  connesso**" nel Teorema 6.6.1 non può essere eliminata. Per mostrare ciò, forniamo un esempio di insieme aperto, limitato, regolare, ma non connesso,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , il cui primo autovalore relativo all'operatore di Laplace-Dirichlet  $\mu_1(\Omega)$  non è semplice.<sup>22</sup>

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  l'unione di due cerchi uguali e disgiunti, ad esempio dei cerchi di raggio unitario con centri  $(-2, 0)$  e  $(2, 0)$ .<sup>23</sup>

$$\Omega = B_1((-2, 0)) \cup B_1((2, 0)).$$

Sia  $v \in H_0^1(\Omega)$  un'autofunzione per  $\mu_1(\Omega)$ . Allora,  $v$  può avere supporto in un solo cerchio oppure in entrambi.

Se il supporto di  $v$  è contenuto in un solo cerchio, ad esempio  $\text{spt}(v) \subseteq B_1((-2, 0))$ , consideriamo la funzione definita da

$$\tilde{v}(x_1, x_2) := v(-x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in B_1((2, 0)).$$

Osserviamo che  $\tilde{v}$  realizza lo stesso quoziente di Rayleigh di  $v$ , cioè

$$R(\tilde{v}) = R(v) = \mu_1(\Omega),$$

pertanto anche  $\tilde{v}$  è autofunzione per  $\mu_1(\Omega)$  e risulta

$$(v, \tilde{v})_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Dunque,  $v$  e  $\tilde{v}$  risultano ortogonali e dunque linearmente indipendenti.

Se, invece,  $\text{spt}(v) \cap B_1((-2, 0)) \neq \emptyset$  e  $\text{spt}(v) \cap B_1((2, 0)) \neq \emptyset$ , consideriamo le due funzioni  $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$  definite da

$$\begin{aligned} v_1(x) &:= \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in B_1((-2, 0)) \\ 0 & \text{se } x \in B_1((2, 0)) \end{cases}, \\ v_2(x) &:= \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in B_1((2, 0)) \\ 0 & \text{se } x \in B_1((-2, 0)) \end{cases}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

<sup>22</sup>Per comprendere come trovare facilmente esempi di questo fenomeno, forniamo un esempio di insieme aperto, limitato, regolare, ma non connesso  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  avente primo autovalore  $\mu_1(\Omega)$  di molteplicità due. L'argomento presentato è facilmente replicabile in dimensione qualsiasi e permette di costruire, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , un insieme aperto, limitato, regolare, ma non connesso  $\Omega$  avente primo autovalore con molteplicità  $k$ .

<sup>23</sup>La posizione reciproca dei due cerchi disgiunti non lede la generalità della dimostrazione; le componenti connesse di  $\Omega$  possono anche trovarsi a distanza 0, in questo esempio con condizione omogenea di Dirichlet.

Dalla relazione algebrica

$$\frac{a+b}{c+d} \geq \min \left\{ \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right\} \quad \forall a, b, c, d > 0,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} R(u) &= \mu_1(\Omega) = R(v) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2 dx} \\ &= \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_1|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v_2|^2 dx}{\int_{\Omega} v_1^2 dx + \int_{\Omega} v_2^2 dx} \\ &\geq \min \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_1|^2 dx}{\int_{\Omega} v_1^2 dx}, \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_2|^2 dx}{\int_{\Omega} v_2^2 dx} \right\} = \min\{R(v_1), R(v_2)\}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

In altre parole, almeno una tra le funzioni test  $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$  realizza un quoziente di Rayleigh minore o uguale di  $R(v) = \mu_1(\Omega) = \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} R(u)$ . Ne segue, allora, che entrambe le funzioni test  $v_1$  e  $v_2$  sono autofunzioni per  $\mu_1(\Omega)$ : se fosse  $v_1$  a realizzare il minimo in (6.30), allora essa sarebbe autofunzione, ma lo sarebbe anche  $v - v_1 = v_2$  (o viceversa). In ogni caso, le funzioni  $v_1$  e  $v_2$  sono autofunzioni per  $\mu_1(\Omega)$ , sono linearmente indipendenti e, come la coppia  $(v, \tilde{v})$  del caso precedente, sono ortogonali.

In entrambi i casi, è possibile trovare due autofunzioni linearmente indipendenti, pertanto l'autovalore  $\mu_1(\Omega)$  ha molteplicità maggiore o uguale a due.

Proviamo, infine, che la molteplicità di  $\mu_1(\Omega)$  è esattamente due e che, in particolare,

$$\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) = \mu_1(B_1((-2, 0))) = \mu_1(B_1((2, 0))). \quad (6.31)$$

Osserviamo che, scegliendo  $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$  come in (6.29), tenuto conto che ciascuna funzione ha supporto in un solo cerchio, si ha

$$\begin{aligned} \min\{R(v_1), R(v_2)\} &= \min \left\{ \frac{\int_{B_1((-2,0))} |\nabla v_1|^2 dx}{\int_{B_1((-2,0))} v_1^2 dx}, \frac{\int_{B_1((2,0))} |\nabla v_2|^2 dx}{\int_{B_1((2,0))} v_2^2 dx} \right\} \\ &\geq \mu_1(B_1((-2, 0))) = \mu_1(B_1((2, 0))), \end{aligned} \quad (6.32)$$

dunque entrambe le funzioni realizzano un quoziente di Rayleigh maggiore o uguale del primo autovalore di ciascuna componente connessa. Di conseguenza, da (6.30) e (6.32), si ha che

$$\mu_1(\Omega) \geq \mu_1(B_1((-2, 0))) = \mu_1(B_1((2, 0))). \quad (6.33)$$

Viceversa, consideriamo gli autospazi

$$E_1 \subset H_0^1(B_1((-2, 0))), \quad E_2 \subset H_0^1(B_1((2, 0)))$$

relativi, rispettivamente, agli autovalori (uguali)  $\mu_1(B_1((-2, 0)))$  e  $\mu_1(B_1((2, 0)))$  dei cerchi. Per il Teorema 6.6.1, si ha che

$$\dim(E_1) = \dim(E_2) = 1,$$

poiché ciascuno dei due insiemi è connesso. Siano ora  $h_1 \in E_1$  e  $h_2 \in E_2$ ; poiché  $\mu_1(B_1((-2, 0))) = \mu_1(B_1((2, 0)))$ , si ha

$$\frac{\int_{B_1((-2,0))} |\nabla h_1|^2 dx}{\int_{B_1((-2,0))} h_1^2 dx} = \frac{\int_{B_1((2,0))} |\nabla h_2|^2 dx}{\int_{B_1((2,0))} h_2^2 dx},$$

pertanto esiste  $\alpha > 0$  tale che

$$\begin{aligned} \int_{B_1((-2,0))} |\nabla h_1|^2 dx &= \alpha \int_{B_1((2,0))} |\nabla h_2|^2 dx, \\ \int_{B_1((-2,0))} h_1^2 dx &= \alpha \int_{B_1((2,0))} h_2^2 dx. \end{aligned}$$

Dunque, estendendo  $h_1 \in E_1$  e  $h_2 \in E_2$  a zero sul resto di  $\Omega$ , la funzione  $h \in H_0^1(\Omega)$  definita da  $h := h_1 + h_2$  realizza su  $\Omega$  un quoziente di Rayleigh tale che

$$\begin{aligned} \mu_1(\Omega) &= \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} R(u) \leq R(h) = R(h_1 + h_2) \\ &= \frac{\int_{B_1((-2,0))} |\nabla h_1|^2 dx + \int_{B_1((2,0))} |\nabla h_2|^2 dx}{\int_{B_1((-2,0))} h_1^2 dx + \int_{B_1((2,0))} h_2^2 dx} \\ &= \frac{(1 + \alpha) \int_{B_1((2,0))} |\nabla h_2|^2 dx}{(1 + \alpha) \int_{B_1((2,0))} h_2^2 dx} \\ &= \mu_1(B_1((2, 0))) = \mu_1(B_1((-2, 0))). \end{aligned} \quad (6.34)$$

In definitiva, mettendo insieme (6.33) e (6.34) si ottiene

$$\mu_1(\Omega) = \mu_1(B_1((-2, 0))) = \mu_1(B_1((2, 0))).$$

Per concludere, mostriamo che la molteplicità di  $\mu_1(\Omega)$  è due e quindi che  $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$ . Osserviamo che ogni autofunzione  $v \in H_0^1(\Omega)$  può essere ottenuta come combinazione lineare di due funzioni linearmente indipendenti, ciascuna delle quali, ristretta alla componente connessa su cui il supporto non è vuoto, è autofunzione relativa alla stessa componente connessa di  $\Omega$ . Viceversa, ogni combinazione lineare di due autofunzioni relative alle componenti connesse di  $\Omega$ ,  $h_1 \in E_1, h_2 \in E_2$  (estese a zero al resto di  $\Omega$ ), è autofunzione per  $\mu_1(\Omega)$ . Ne deduciamo che l'autospazio relativo a  $\mu_1(\Omega)$  è somma diretta degli autospazi unidimensionali  $E_1$  ed  $E_2$  (o meglio, dei sottospazi di  $H_0^1(\Omega)$  ad essi isomorfi e mutuamente ortogonali, ottenuti estendendo le autofunzioni a zero sul resto di  $\Omega$ ) e dunque la molteplicità di  $\mu_1(\Omega)$  è due e quindi vale (6.31).

## 6.7 Il riarrangiamento di Schwarz

Il riarrangiamento di Schwarz è lo strumento principale usato da G. Faber e E. Krahn per provare il notevole teorema che porta il loro nome.

**Definizione 6.7.1.** Sia  $u$  una funzione misurabile non-negativa definita su un insieme misurabile  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , nulla su  $\partial\Omega$ . Denotiamo con

$$\Omega(c) := \{x \in \Omega : u(x) \geq c\}$$

i suoi insiemi di livello. **Il riarrangiamento di Schwarz** di  $u$  è la funzione  $u^*$  definita su

$$\Omega^* := \text{la palla centrata nell'origine, avente lo stesso volume di } \Omega$$

da

$$u^*(x) = \sup\{c \in \mathbb{R} : x \in \Omega^*(c)\}.$$

In altre parole,  $u^*$  è costruita a partire da  $u$  riarrangiando gli insiemi di livello di  $u$  in palle aventi lo stesso volume.

Per costruzione, sono evidenti le seguenti proprietà di  $u^*$  :

- $u^*$  è radialmente simmetrica, non-crescente come funzione di  $|x|$ ;
- $\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega^*} u^*$ ;
- $u$  e  $u^*$  hanno insiemi di livello della stessa misura.



Vale il seguente risultato:

**Teorema 6.7.2.** *Sia  $\Omega$  un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e  $u$  una funzione misurabile non-negativa definita su  $\Omega$  e nulla su  $\partial\Omega$ ; sia  $\varphi$  una funzione misurabile da  $\mathbb{R}^+$  in  $\mathbb{R}$ . Allora,*

$$\int_{\Omega} \varphi(u(x)) dx = \int_{\Omega^*} \varphi(u^*(x)) dx.$$

Un risultato più profondo è il seguente, che esprime una relazione tra gli integrali dei gradienti di  $u$  e di  $u^*$ . La dimostrazione si basa sulla classica disuguaglianza isoperimetrica (cfr., ad esempio, [13]).

**Teorema 6.7.3** (Disuguaglianza di Pólya-Szegő). *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e  $u$  una funzione non-negativa,  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Allora,*

$$u^* \in H_0^1(\Omega^*)$$

e

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

## 6.8 Teorema di Faber-Krahn

Per evidenziare la dipendenza del primo autovalore  $\mu_1$  rispetto a  $\Omega$ , indichiamo con  $\mu_1(\Omega)$  il primo autovalore di Laplace-Dirichlet relativo all'aperto limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ .

Sussiste il seguente risultato (già congetturato da Rayleigh).

**Teorema 6.8.1 (di Faber-Krahn).** <sup>24</sup> *Se  $\text{Vol}(\Omega) = \text{Vol}(B)$ , dove  $B$  è la palla di  $\mathbb{R}^N$ , allora*

$$\mu_1(\Omega) \geq \mu_1(B),$$

e l'uguaglianza vale se e solo se  $\Omega = B$  q.o..

Quindi,

$$\mu_1(B) = \min\{\mu_1(\Omega); \Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^N, \text{Vol}(\Omega) = \text{Vol}(B)\}$$

(cioè, tra tutti gli aperti limitati di  $\mathbb{R}^N$  aventi lo stesso volume,  $\mu_1$  assume il minimo quando l'aperto è una palla, a meno di un insieme di misura nulla).

<sup>24</sup>Provato indipendentemente da Faber nel 1923 e da Krahn nel 1925

*Dimostrazione.* La dimostrazione classica usa il riarrangiamento di Schwarz. Sia  $\Omega$  un aperto limitato avente lo stesso volume di  $B =: \Omega^*$ . Sia  $v_1$  l'autofunzione relativa a  $\mu_1(\Omega)$  e  $v_1^*$  il suo riarrangiamento di Schwarz. Risulta, rispettivamente, per i Teoremi 6.7.2 e 6.7.3:

$$\int_{\Omega^*} v_1^*(x)^2 dx = \int_{\Omega} v_1(x)^2 dx$$

e

$$\int_{\Omega^*} |\nabla v_1^*(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla v_1(x)|^2 dx.$$

Allora,

$$\mu_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla v_1^*(x)|^2 dx}{\int_{\Omega^*} v_1^*(x)^2 dx}$$

e (per il Principio del minimo)

$$\mu_1(\Omega) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_1(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} v_1(x)^2 dx}.$$

Ne segue la tesi. □

Nel caso  $N = 2$ , il teorema di Faber-Krahn afferma essenzialmente che, *tra tutti i tamburi di uguale area, quello di forma circolare ha il tono più basso.*

## 6.9 Uno sguardo all'analisi spettrale dell'equazione biarmonica con condizioni omogenee di Dirichlet.

Sia  $\Delta^2 := \Delta \circ \Delta$  l'operatore biarmonico in  $\mathbb{R}^N$  (se  $N = 2$ :

$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$ ). Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un aperto limitato e consideriamo il problema agli autovalori per l'equazione biarmonica con condizioni omogenee di Dirichlet:

**Problema 1'.** Esistono  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $h \neq 0$  tali che

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 h = \mu h & \text{in } \Omega \\ h = |\nabla h| = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad ? \quad (6.35)$$

Questo problema può essere riformulato in forma variazionale.

**Problema 2'.** Esistono  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $h \neq 0$  tali che

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \Delta h \Delta v \, dx = \mu \int_{\Omega} h v \, dx & \forall v \in H_0^2(\Omega) \\ h \in H_0^2(\Omega) \end{cases} \quad ? \quad (6.36)$$

Il primo autovalore di (6.35) è definito da

$$\mu_{2,1}(\Omega) = \min_{h \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|h\|_{H_0^2(\Omega)}^2}{\|h\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Diversamente dalle proprietà valide per  $\mu_1$  e  $v_1$  (cfr. Teorema 6.6.1), il primo autovalore  $\mu_{2,1}(\Omega)$  è semplice e la corrispondente autofunzione ha segno costante solo se  $\Omega = B$ , ma, in generale, ciò è falso per  $\Omega \neq B$ . Sussistono infatti i seguenti risultati.<sup>25</sup>

**Teorema 6.9.1.** *Se  $\Omega = B$ , allora il primo autovalore  $\mu_{2,1}(B)$  è semplice e la corrispondente autofunzione  $v_1$  ha segno costante.*

**Teorema 6.9.2.** *Per  $\Omega = (0, 1)^2$  il problema (6.35) ha una autofunzione relativa all'autovalore  $\mu_{2,1}(\Omega)$  di segno non costante.*

## 6.10 Congettura di Rayleigh per la piastra fissa al bordo (“incastrata”)

Un risultato simile al Teorema 6.8.1 di Faber-Krahn era congetturato da Rayleigh nel 1894, relativamente alla minimizzazione del primo autovalore  $\mu_{2,1}$  su aperti a misura fissata. Vale il seguente risultato.<sup>26</sup>

**Teorema 6.10.1.** *(Nadirashvili-Ashbaugh-Benguria) In dimensione  $N = 2$  o  $N = 3$  la palla  $B$  è l'unico minimo del primo autovalore  $\mu_{2,1}$  della piastra “incastrata” tra gli aperti limitati di assegnata misura. Risulta*

$$\mu_{2,1}(\Omega) \geq \mu_{2,1}(B)$$

se  $N = 2$  o  $N = 3$ , con l'uguaglianza se e solo se  $\Omega = B$  q.o.

<sup>25</sup>Cfr., ad esempio, F. Gazzola, H.C. Grunau, G. Sweers: *Polyharmonic boundary value problems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2010), Theorem 3.7, Theorem 3.8.

<sup>26</sup> Per la dimostrazione cfr., ad esempio, ibidem, Theorem 3.13, o Cap. 11 in [13].

Della congettura di Rayleigh è un problema aperto la dimostrazione della validità della relazione  $\mu_{2,1}(\Omega) \geq \mu_{2,1}(B)$  in ogni spazio  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 4$ .