Capitolo 1

Spazi di Banach

In questo capitolo richiameremo alcuni fatti noti sugli spazi vettoriali X normati, introducendo alcuni dei risultati fondamentali di teoria degli spazi di Banach. Tratteremo spazi vettoriali sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ e dei numeri complessi $\mathbb{C}$; quando tratteremo di X senza distinzione dei due casi, diremo che X è spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Indicheremo con $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare.

1.1 Alcuni richiami e definizioni

Definizione 1.1.1 (spazio vettoriale normato)**.** Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Una funzione

$$\|\cdot\| : X \to [0, +\infty[$$

si dice *norma* su X se soddisfa le condizioni

(N_1) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ (annullamento);

(N_2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in X$ (omogeneità);

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Inoltre, da 1.1.1(N_2) segue che $\|-x\| = \|x\|$ per ogni $x \in X$ e, da 1.1.1(N_3) si ha

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \quad \forall\, x, y \in X. \tag{1.1}$$

Uno spazio vettoriale dotato di una norma si dice *spazio vettoriale normato*.

Osserviamo che un sottospazio vettoriale Y di uno spazio vettoriale normato X è anch'esso uno spazio normato con norma indotta dalla restrizione della norma di X ad Y.

Nel seguito, quando necessario, per evidenziare la norma definita sullo spazio X, useremo il simbolo $\|\cdot\|_X$.

Esempio 1.1.2 (gli spazi $\mathbb{K}^N$). Lo spazio $\mathbb{R}$ è normato con la norma del valore assoluto e lo spazio $\mathbb{C}$ è normato con la norma del modulo. In generale, per ogni $N \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$, $\mathbb{K}^N$ è spazio normato con la *norma-p* $\|\cdot\|_p$ definita da

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^p\right)^{1/p} & \text{se } p \in [1, \infty[, \\ \max_{j=1,\dots,N} |x_j| & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

dove $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Osservazione 1.1.3. Uno spazio normato X è anche uno spazio metrico, con distanza

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to [0, +\infty[, \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) := \|x - y\|. \end{aligned}$$

È evidente che d soddisfa, per ogni $x, y, z \in X$

(D_1) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$;

(D_2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(D_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Inoltre, la distanza d è invariante per traslazione, positivamente omogenea e ogni palla aperta

$$B(x_0, r) := \{x \in X; d(x, x_0) < r\}$$

di centro $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$ è un insieme convesso. Infatti, (senza ledere la generalità, tenuto conto dell'invarianza per traslazioni) per ogni $x, y \in B(0, r)$ e $\vartheta \in [0, 1]$:

$$\|\vartheta x + (1 - \vartheta)y\| \leq \vartheta\|x\| + (1 - \vartheta)\|y\| < \vartheta r + (1 - \vartheta)r = r,$$

quindi $\vartheta x + (1 - \vartheta)y \in B(0, r)$.

Gli spazi normati di dimensione finita N su $\mathbb{K}$ sono omeomorfi a $\mathbb{K}^N$ dotato di una delle norme (equivalenti) descritte in 1.1.2 (cfr. Teorema 1.7.3 e Corollario 1.7.5).

Ma, generalmente, nelle applicazioni intervengono spazi normati di dimensione infinita.

Definizione 1.1.4 (vettori linearmente dipendenti e indipendenti, basi, dimensione finita e infinita)**.** Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. I vettori

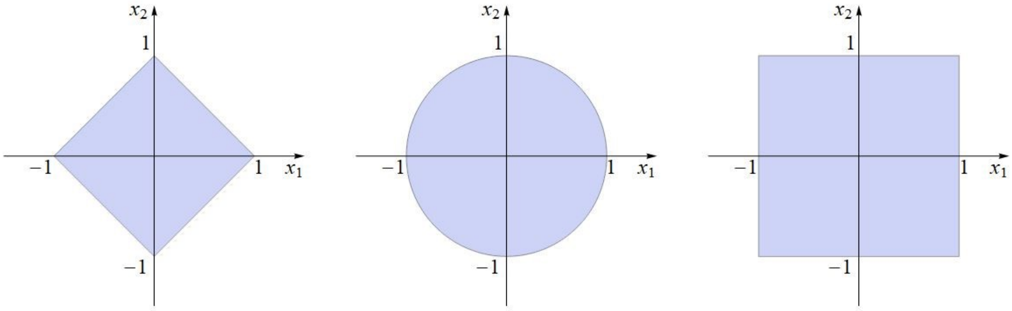

Figura 1.1: Da sinistra a destra, le palle unitarie in $\mathbb{R}^2$ rispetto alle norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$.

$x_1, \ldots, x_N \in X$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che

$$a_1 x_1 + \ldots + a_N x_N = 0.$$

I vettori $x_1, \ldots, x_N \in X$ si dicono *linearmente indipendenti* se non sono linearmente dipendenti. Perciò, per tali vettori,

$$a_1 x_1 + \ldots + a_N x_N = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = \ldots = a_N = 0.$$

Sia $A \subseteq X$ un insieme di vettori con infiniti elementi. I vettori di A si dicono linearmente indipendenti se, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e ogni k-pla $x_1, \ldots, x_k$ di vettori in A, $x_1, \ldots, x_k$ sono linearmente indipendenti.

Se nello spazio X si possono trovare N elementi linearmente indipendenti e se $N+1$ elementi qualsiasi sono linearmente dipendenti, si dice che lo spazio ha *dimensione finita* N. Se, invece, in X si può trovare un numero finito qualsiasi di vettori linearmente indipendenti, allora si dice che lo spazio X ha *dimensione infinita*.

Ogni sistema $u_1, \ldots, u_N$ di N vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale X di dimensione finita N si chiama *base* di X. Ogni vettore $x \in X$ può essere rappresentato univocamente come combinazione lineare dei vettori della base $u_1, \ldots, u_N$, cioè esiste un'unica N-pla $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{K}^N$ tale che

$$x = \sum_{i=1}^{N} a_i u_i.$$

Sia $M \subseteq X$; si definisce ***inviluppo lineare dell'insieme*** M, e si indica con **span M**, l'insieme di tutte le combinazioni lineari *finite* di vettori di M.

Esempio 1.1.5 (lo spazio $C^0([a,b];\mathbb{R})$). Per ogni intervallo compatto $[a,b] \subset \mathbb{R}$, indichiamo con $C^0([a,b];\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue su

$[a,b]$ a valori reali. $C^0([a,b];\mathbb{R})$, munito delle operazioni canoniche di somma tra funzioni e moltiplicazione di una funzione per un numero reale, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Osserviamo che $C^0([a,b];\mathbb{R})$ ha dimensione infinita, poiché esiste in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ l'insieme infinito di funzioni $t^j : j \in \mathbb{N}$, linearmente indipendenti in virtù del Principio d'Identità dei polinomi. Definiamo su $C^0([a,b];\mathbb{R})$ la seguente funzione non negativa

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : C^0([a,b];\mathbb{R}) &\to [0,+\infty[, \\ f &\mapsto \|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|. \end{aligned}$$

Tale funzione è ben posta, grazie al Teorema di Weierstrass su massimi e minimi di funzioni reali continue su compatti. Inoltre, da proprietà note di massimi e minimi di funzioni reali, possiamo osservare che $\|\cdot\|_\infty$ verifica le proprietà 1.1.1(N_1), (N_2) e (N_3). Pertanto essa è una norma su $C^0([a,b];\mathbb{R})$, detta anche *norma del massimo* (o *norma uniforme* o ancora *norma-*∞).

Definizione 1.1.6. Sia $A \subset X$.

Un punto $x_0 \in A$ è detto *punto interno* ad A se esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset A$. A è *aperto* se tutti i suoi punti sono interni.

L'*interno* di un insieme A, indicato con $\mathring{A}$, è il più grande insieme aperto contenuto in A.

Un punto $x_0 \in X$ è detto *punto di accumulazione* per A (x_0 non necessariamente appartiene ad A) se ogni palla $B(x_0, r)$ contiene almeno un punto di A diverso da x_0. $C \subseteq X$ è *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

La *chiusura* di un insieme A, indicata con $\overline{A}$, è il più piccolo insieme chiuso contenente A.

Definizione 1.1.7 (insieme denso in uno spazio normato e spazio separabile). Un sottoinsieme $S \subseteq X$ è *denso* in X se $\overline{S} = X$.

Uno spazio normato X è *separabile* se esiste un sottoinsieme numerabile denso in X.

Ad esempio, $\mathbb{R}$ è separabile, essendo l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali numerabile e denso in $\mathbb{R}$.

Definizione 1.1.8 (successione convergente). Sia X uno spazio normato. Una successione $(x_n)_n \subset X$ si dice convergente a $x \in X$ e si scrive $x_n \to x$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

cioè se la successione numerica $\|x_n - x\|$ è infinitesima.

Si prova che un insieme A è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le successioni convergenti $(x_n)_n \subset A$.

Osservazione 1.1.9. Da (1.1) si ha

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\|,$$

quindi se il secondo membro è infinitesimo, lo è anche il primo. In altre parole, la norma è continua rispetto alla convergenza di successioni, ovvero se $x_n \to x$, allora $\|x_n\| \to \|x\|$.

Come nel caso di $\mathbb{R}^N$, continuano a valere i teoremi di unicità e linearità del limite.

Prima di introdurre la nozione di completezza negli spazi normati, richiamiamo i concetti di limitatezza e continuità.

Definizione 1.1.10 (limitatezza). Sia X uno spazio normato. Si dice che un *insieme* $A \subset X$ è *limitato* se esiste $M \geq 0$ tale che

$$\|x\| \leq M \quad \forall\, x \in A.$$

Si dice che una *successione* $(x_n)_n$ è *limitata* se esiste $M \geq 0$ tale che

$$\|x_n\| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Si dimostra che ogni successione convergente in uno spazio normato è anche limitata.

Definizione 1.1.11 (funzioni continue tra spazi normati)**.** Siano X e Y due spazi normati, $A \subset X$, $B \subset Y$ e $x_0 \in A$. Una funzione $f : A \to B$ si dice *continua in* x_0 se, per ogni successione $(x_n)_n \subset A$ convergente in X a x_0 si ha che la successione $(f(x_n))_n$ converge a $f(x_0)$ in Y, cioè

$$\|x_n - x_0\|_X \to 0 \;\Rightarrow\; \|f(x_n) - f(x_0)\|_Y \to 0.$$

Si dice che f è *continua in* A se è continua in x per ogni $x \in A$, cioè, in termini di ε e δ, per ogni $x \in A$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x' \in A, \|x' - x\|_X < \delta \;\Rightarrow\; \|f(x') - f(x)\|_Y < \varepsilon.$$

Definizione 1.1.12 (successione di Cauchy). Sia X uno spazio normato. Una successione $(x_n)_n \subset X$ si dice *di Cauchy* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \geq \nu$, risulta

$$\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

É evidente che ogni successione convergente è di Cauchy.

Proposizione 1.1.13 (proprietà delle successioni di Cauchy).
Sia $(x_n)_n$ una successione di Cauchy in uno spazio normato X. Valgono le seguenti proprietà:

(i) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|$ *esiste finito;*

(ii) $(x_n)_n$ *è limitata;*

(iii) se $(x_n)_n$ ha una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che converge ad un vettore $x \in X$, allora la successione $(x_n)_n$ converge a x;

(iv) esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ tale che

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \le \frac{1}{2^k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione.

(i) Per (1.1) risulta
$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \le \|x_n - x_m\|;$$
di conseguenza la successione di numeri reali $(\|x_n\|)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, quindi convergente.

(ii) La limitatezza di $(x_n)_n$ segue dal fatto che $(\|x_n\|)_n$ è convergente in $\mathbb{R}$ (punto (i) precedente), quindi limitata.

(iii) Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \ge \nu$, si abbia
$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2},$$
e sia $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $k \ge k_0$,
$$\|x_{n_k} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Scelto $k_1 > k_0$ tale che $n_{k_1} > \nu$, si ha, per ogni $n > n_{k_1}$
$$\|x_n - x\| \le \|x_n - x_{n_{k_1}}\| + \|x_{n_{k_1}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iv) Sia $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \ge n_1$
$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2}.$$
Successivamente, sia $n_2 > n_1$ tale che, per ogni $m, n \ge n_2$
$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^2}.$$
Così procedendo si consegue la tesi.

□

In Analisi, “ nella costruzione di oggetti con interessanti proprietà” attraverso passaggi al limite, occorrono spazi normati **completi** nel senso della definizione seguente.

Definizione 1.1.14 (Spazio di Banach). Uno spazio normato X è *completo* (è uno *spazio di Banach*) se ogni successione di Cauchy è convergente ad un $x \in X$.

Osservazione 1.1.15. Sia X uno spazio di Banach e sia X_0 un suo sottospazio. Si ha

$$(X_0 \;\text{ spazio di Banach}) \;\Leftrightarrow (X_0 \;\text{ sottospazio chiuso}).$$

Infatti, se X_0 è uno spazio di Banach e consideriamo $(x_n)_n \subset X_0$, $x_n \to x_0 \in X$, poiché $(x_n)_n$ è successione di Cauchy in X_0, essa converge verso un $y_0 \in X_0$. Dunque risulta $x_0 = y_0 \in X_0$ e pertanto X_0 è sottospazio chiuso, in quanto contiene il limite di una sua qualunque successione convergente.
Viceversa, sia X_0 sottospazio chiuso di X e $(x_n)_n \subset X_0$ una successione di Cauchy. Poiché X è uno spazio di Banach, esiste $\bar{x} \in X$ tale che $x_n \to \bar{x}$. Essendo X_0 sottospazio chiuso e $(x_n)_n \subset X_0$, allora anche $\bar{x} \in X_0$. Pertanto X_0 è uno spazio di Banach.

Osservazione 1.1.16. In generale, i passi da seguire per provare la completezza di uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$, sono tre:

(i) per un'arbitraria successione $(x_n)_n \subset X$ di Cauchy, individuare un “ipotetico” elemento x che ci si aspetta possa essere il limite di $(x_n)_n$;

(ii) provare che $x \in X$;

(iii) provare che $\|x_n - x\| \to 0$ per $n \to +\infty$.

1.2 Serie in uno spazio normato e teorema di completezza

Introduciamo la nozione di serie in uno spazio normato, di somma di una serie e di serie convergente.

Definizione 1.2.1. Sia X uno spazio normato e sia $(x_n)_n \subset X$. Definiamo successione delle somme parziali di $(x_n)_n$ la successione $(s_n)_n$ definita da

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Se $(s_n)_n$ converge in X, allora il suo limite si dice somma della serie di termine generale x_n e si indica con il consueto simbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

In tal caso si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ è convergente in X.

Osservazione 1.2.2. Viene da chiedersi se, sostituendo il valore assoluto con la norma, in uno spazio normato X la convergenza assoluta di una serie implichi la convergenza in X, ovvero se la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$$

implichi la convergenza in X della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Questo è vero in $\mathbb{K}$ in quanto $\mathbb{K}$ è completo; vedremo, nel successivo Teorema, che la completezza di X è condizione necessaria e sufficiente affinché la convergenza assoluta implichi la convergenza in X.

Teorema 1.2.3. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach e sia $(x_n)_n$ una successione di elementi di X. Se la serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$$

è convergente, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

è convergente in X.

Viceversa, se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato e ogni serie assolutamente convergente è convergente, allora X è spazio di Banach.

Dimostrazione. Sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach e sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ convergente. Proviamo che la successione $(s_n)_n$ delle somme parziali, definita da

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

è di Cauchy. Per ogni $m > n$ risulta

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\|.$$

Dunque, per il Criterio di Cauchy sulle serie a termini reali e per la completezza di X, $(s_n)_n$ converge alla somma della serie degli x_n.

Viceversa, sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato tale che ogni serie assolutamente convergente è anche convergente e proviamo che esso è completo. Sia $(x_n)_n$ di Cauchy in X e dimostriamone la convergenza. Per 1.1.13(iv), esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, risulti

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pertanto, la serie telescopica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right]$$

converge a $\overline{x} \in X$. Osservato che

$$\sum_{j=1}^{M} \left[x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\right] = x_{n_{M+1}} - x_{n_1},$$

ne segue che l'estratta $(x_{n_{k+1}})_k$ converge a $\overline{x} + x_{n_1}$; da 1.1.13(iii) otteniamo la convergenza di $(x_n)_n$, completando la dimostrazione. $\square$

Questo teorema fornisce, dunque, un utile criterio per stabilire se uno spazio normato sia completo o meno.

1.3 Spazio quoziente e completezza

Sia X_0 un sottospazio dello spazio vettoriale X. Consideriamo la collezione di sottoinsiemi

$$\{[x] := x + X_0; x \in X\}.$$

Gli insiemi $[x]$ si chiamano classi di equivalenza di X (modulo X_0); osserviamo che due classi di equivalenza $[x]$ e $[y]$ o coincidono o sono disgiunte. Infatti, supponendo che esista $z \in [x] \cap [y]$, si avrebbe $z - x \in X_0$ e $z - y \in X_0$, da cui, per la struttura lineare di X_0, otterremmo $y - x = (z - x) - (z - y) \in X_0$. Proviamo che in questa situazione $[x] = [y]$. Sia $a \in [x]$; allora $a - x \in X_0$ e, ancora per linearità, $a - y = (a - x) - (y - x) \in X_0$. Pertanto $a \in [y]$ e dunque $[x] \subseteq [y]$; provando in maniera analoga l'inclusione inversa si ottiene l'uguaglianza; in particolare, osserviamo che

$$[x] = [y] \ \Leftrightarrow\ x - y \in X_0.$$

Denotiamo con X/X_0 la collezione di tutte le classi di equivalenza $[x]$ (modulo X_0) e muniamola di una struttura lineare definendo in maniera naturale le operazioni

$$[x] + [y] := [x + y], \qquad a[x] := [ax].$$

Osserviamo che $[0] = X_0$ è lo zero di X/X_0, pertanto X/X_0 è uno spazio vettoriale, detto spazio quoziente di X rispetto a X_0.

Proposizione 1.3.1. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e sia X_0 un sottospazio chiuso di X. Allora lo spazio quoziente X/X_0 è normato con*

$$\|[x]\|_{X/X_0} = \inf_{y\in X_0} \|x - y\|_X = \inf_{y\in X_0} \|x + y\|_X = \inf_{z\in[x]} \|z\|_X. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Proviamo che (1.2) è una norma su X/X_0 (per brevità ometteremo lo spazio di riferimento al pedice, laddove non necessario).

(N_1) Se $\|[x]\| = 0$, allora esiste una successione $y_n \in X_0$ tale che $y_n \to x$. Ma allora, poiché X_0 è chiuso, $x \in X_0$, cioè $[x] = [0]$.

(N_2) (1.2) è omogenea poiché X_0 è spazio vettoriale.

(N_3) Per provare la disuguaglianza triangolare, considerati $x, y \in X$ e fissato $\varepsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo inferiore esistono $z_1, z_2 \in X_0$ tali che

$$\|x + z_1\| \le \|[x]\| + \varepsilon, \qquad \|y + z_2\| \le \|[y]\| + \varepsilon.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\|[x] + [y]\| = \inf_{z\in X_0} \|x + y + z\| &\le \|x + y + z_1 + z_2\| \\ &\le \|x + z_1\| + \|y + z_2\| \le \|[x]\| + \|[y]\| + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, si ha la disuguaglianza triangolare.

Da (N_1), (N_2), (N_3) segue che (1.2) è una norma su X/X_0. □

Teorema 1.3.2. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia X_0 un sottospazio chiuso di X. Allora lo spazio quoziente X/X_0, munito della norma (1.2), è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. In virtù della precedente Proposizione 1.3.1, è sufficiente provare che X/X_0 munito della norma quoziente è completo. Sia $(Y_n)_n$ una successione di Cauchy in X/X_0. Per 1.1.13(iii), è sufficiente provare che esiste una sottosuccessione convergente in X/X_0. Per 1.1.13(iv), passando ad una sottosuccessione (senza perdere di generalità, ancora indicata con $(Y_n)_n$) per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\|Y_{n+1} - Y_n\| \le \frac{1}{2^n}.$$

Sia $y_1 \in Y_1$ e prendiamo $z_2 \in Y_2 - Y_1$ tale che

$$\|z_2\|_X \le 2\|Y_2 - Y_1\|_{X/X_0}.$$

Posto $y_2 := y_1 + z_2$, risulta

$$\|y_2 - y_1\|_X \le 2\|Y_2 - Y_1\|_{X/X_0},$$

con $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$. Con questo procedimento si ottiene una successione $(y_n)_n$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in Y_n$ e

$$\|y_{n+1} - y_n\|_X \le 2\|Y_{n+1} - Y_n\|_{X/X_0}.$$

Per $m \in \mathbb{N}$ t.c. $m - 1 > n$, si ha

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|_X &= \left\| \sum_{k=n}^{m-1} (y_{k+1} - y_k) \right\|_X \le \sum_{k=n}^{m-1} \|y_{k+1} - y_k\|_X \\ &\le 2 \sum_{k=n}^{m-1} \|Y_{k+1} - Y_k\|_{X/X_0} \le \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

L'ultimo membro tende a zero per n che tende a $+\infty$, quindi $(y_n)_n$ è di Cauchy nello spazio completo X e dunque converge a qualche $y_0 \in X$. Posto $Y_0 := [y_0]$, si ha

$$\begin{aligned} \|Y_n - Y_0\|_{X/X_0} &= \|[y_n] - [y_0]\|_{X/X_0} = \|[y_n - y_0]\|_{X/X_0} \\ &\le \|y_n - y_0\|_X \to 0, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

1.4 Esempi di spazi di Banach

In questa sezione presenteremo alcuni spazi di Banach noti. Esamineremo nel dettaglio soprattutto spazi di dimensione infinita, ma per completezza forniamo anche il seguente esempio.

Esempio 1.4.1. $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p)$ è spazio di Banach per ogni $p \in [1, +\infty]$.

1.4.1 Lo spazio $(C^0([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Abbiamo visto che $(C^0([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato di dimensione infinita. Proviamone la completezza.

Proposizione 1.4.2. *$(C^0([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $(f_n)_n \subset C^0([a,b];\mathbb{R})$ una successione di Cauchy rispetto alla norma della *convergenza uniforme* $\|\cdot\|_\infty$. Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall\, m, n \geq \nu,$$

cioè, per come è definita $\|\cdot\|_\infty$,

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \forall\, m, n \geq \nu. \tag{1.3}$$

Ciò significa che, per ogni $t \in [a,b]$ fissato, la successione numerica $(f_n(t))_n$ è di Cauchy, dunque convergente in $\mathbb{R}$. In altre parole, esiste $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t) \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, facendo tendere m all'infinito in (1.3), grazie alla continuità del valore assoluto, per $n \geq \nu$ si ha

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Dunque $(f_n)_n$ converge a f in norma-infinito e $f \in C^0([a,b];\mathbb{R})$, essendo il limite uniforme delle funzioni continue f_n. Ciò prova la completezza di $(C^0([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ e quindi che è uno spazio di Banach. □

Osservazione 1.4.3. Se E è spazio metrico e K è un sottoinsieme compatto di E (cfr. Sezione 1.8), allora si prova in maniera analoga che $(C^0(K;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

Nelle successive sottosezioni presenteremo esempi di spazi vettoriali che hanno come elementi delle successioni in $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. Poiché dovremo considerare successioni di tali vettori, per chiarezza utilizzeremo la seguente notazione: con l'intero all'apice tra parentesi indicizzeremo la successione di vettori nello spazio normato, con quello al pedice indicizzeremo ciascun vettore (successione) della successione. In altre parole, l'oggetto $x_n^{(k)}$ rappresenterà l'n-simo termine del k-esimo vettore (ovvero successione) $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_n$ della successione $(x^{(k)})_k \subset \mathbb{K}^\mathbb{N}$.

1.4.2 Lo spazio $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$

Definizione 1.4.4. Definiamo *spazio* ℓ^∞ *delle successioni limitate* l'insieme

$$\ell^\infty := \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$

che, con le usuali operazioni di somma (termine a termine) tra successioni e prodotto per uno scalare è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (sottospazio proprio di $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$). Consideriamo ora la funzione

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\ell^\infty} &: \ell^\infty \to [0, +\infty[, \\ x &= (x_n)_n \mapsto \|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|. \end{aligned}$$

Essa è ben definita su ℓ^∞ e, in virtù delle proprietà dell'estremo superiore e del valore assoluto, essa è una norma su ℓ^∞.

Lo spazio normato appena definito è anche completo, come si prova nella seguente proposizione.

Proposizione 1.4.5. $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ *è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $(x^{(k)})_k \subset \ell^\infty$ una successione di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$; risulta

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \|x^{(k)} - x^{(m)}\|_{\ell^\infty} \le \varepsilon \quad \forall\, k, m \ge \nu$$

cioè, per come è definita la norma $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \sup_n |x_n^{(k)} - x_n^{(m)}| \le \varepsilon \quad \forall\, k, m \ge \nu. \tag{1.4}$$

Pertanto, fissato $n \in \mathbb{N}$, la successione $(x_n^{(k)})_k$ è di Cauchy nello spazio completo $\mathbb{K}$, quindi converge ad un certo x_n per k che tende all'infinito. Posto $x := (x_n)_n$, proviamo che $x \in \ell^\infty$. Poiché, per ogni $j \in \mathbb{N}$, $|x_j^{(k)} - x_j| \to 0$ per $k \to +\infty$, scegliendo k sufficientemente grande si ha

$$|x_j| \le |x_j^{(k)} - x_j| + |x_j^{(k)}| \le 1 + \|x^{(k)}\|_{\ell^\infty} < C,$$

essendo $\left(\|x^{(k)}\|_{\ell^\infty}\right)_k$ limitata in virtù di 1.1.13(ii); pertanto $\sup_j |x_j| < +\infty$, quindi $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$.

Rimane da provare che $\|x^{(k)} - x\|_{\ell^\infty} \to 0$ per $k \to +\infty$. Facendo tendere $m \to +\infty$ in (1.4) si ha, fissato $\varepsilon > 0$, Rimane da provare che $\|x^{(k)} - x\|_{\ell^\infty} \to 0$ per $k \to +\infty$. Facendo tendere $m \to +\infty$ in (1.4) si ha, fissato $\varepsilon > 0$,

$$|x_n^{(k)} - x_n| \le \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \ge \nu(\varepsilon),$$

cioè

$$\|x^{(k)} - x\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^{(k)} - x_n| \le \varepsilon \quad \forall\, k \ge \nu(\varepsilon),$$

da cui la tesi. □

1.4.3 Lo spazio $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ $(1 \le p < \infty)$

Definizione 1.4.6. Sia $1 \le p < +\infty$; definiamo *insieme ℓ^p delle successioni di potenza p-esima sommabile* l'insieme

$$\ell^p := \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

Consideriamo ora la funzione

$$\begin{aligned} &\|\cdot\|_{\ell^p} : \ell^p \to [0, +\infty[, \\ &x = (x_n)_n \mapsto \|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Essa è ben definita su ℓ^p e verifica le proprietà 1.1.1(N_1) (banalmente) e (N_2) (se $x \in \ell^p$, anche $\lambda x \in \ell^p$, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$).

Osserviamo che possiamo esprimere ℓ^p nel seguente modo:

$$\ell^p := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_{\ell^p} < +\infty \right\}.$$

Per provare che ℓ^p è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ va verificata la chiusura rispetto alla somma tra successioni, che non è immediata. Per dimostrare ciò e che $\|\cdot\|_{\ell^p}$ verifica 1.1.1(N_3) (e quindi è una norma su ℓ^p), sono necessarie alcune disuguaglianze.

Proposizione 1.4.7 (disuguaglianza di Young). *Siano $p, p' \in]1, +\infty[$ e tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Risulta

$$|a \cdot b| \le \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Dimostrazione. La (1.5) è banale se $a = 0$ oppure $b = 0$. Siano allora $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo che l'applicazione $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è funzione reale concava; pertanto

$$\log\left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'} \right) \ge \frac{1}{p}\log(|a|^p) + \frac{1}{p'}\log\left(|b|^{p'}\right) = \log|a \cdot b|,$$

da cui, applicando la funzione esponenziale al primo e secondo membro, si ha la tesi. $\square$

Proposizione 1.4.8 (disuguaglianza discreta di Hölder). *Siano* $p, p' \in]1, +\infty[$ *e tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Se $x = (x_n)_n \in \ell^p$ *e* $y = (y_n)_n \in \ell^{p'}$, *allora* $xy = (x_n y_n)_n \in \ell^1$ *e*

$$\|xy\|_{\ell^1} \leq \|x\|_{\ell^p} \cdot \|y\|_{\ell^{p'}}, \tag{1.6}$$

cioè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|^{p'}\right)^{1/p'}$$

Dimostrazione. La (1.6) è banale se $x = 0$ oppure $y = 0$. Siano, allora, $x \in \ell^p \setminus \{0\}$ e $y \in \ell^{p'} \setminus \{0\}$; pertanto $\|x\|_{\ell^p} > 0$ e $\|y\|_{\ell^{p'}} > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$x_n^* := \frac{x_n}{\|x\|_{\ell^p}}, \quad y_n^* := \frac{y_n}{\|y\|_{\ell^{p'}}}.$$

Per la disuguaglianza di Young (1.5)

$$|x_n^* \cdot y_n^*| \leq \frac{1}{p}|x_n^*|^p + \frac{1}{p'}|y_n^*|^{p'} = \frac{1}{p}\frac{|x_n|^p}{\|x\|_{\ell^p}^p} + \frac{1}{p'}\frac{|y_n|^{p'}}{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}}$$

da cui, sommando su n, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n|}{\|x\|_{\ell^p}\|y\|_{\ell^{p'}}} &\leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p}{\|x\|_{\ell^p}^p} + \frac{1}{p'}\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|^{p'}}{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}} = \frac{1}{p}\frac{\|x\|_{\ell^p}^p}{\|x\|_{\ell^p}^p} + \frac{1}{p'}\frac{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}}{\|y\|_{\ell^{p'}}^{p'}} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_{\ell^p}\|y\|_{\ell^{p'}},$$

da cui $xy \in \ell^1$ e $\|xy\|_{\ell^1} \leq \|x\|_{\ell^p}\|y\|_{\ell^{p'}}$. □

Osservazione 1.4.9. Se in (1.6) si ha $p = p' = 2$, essa prende il nome di *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*, in analogia al caso degli spazi normati euclidei $\mathbb{R}^N$.

Osserviamo inoltre che, se $p = 1$ e $p' = +\infty$, (1.6) continua a valere. Infatti, se $x = (x_n)_n \in \ell^1$ e $y = (y_n)_n \in \ell^\infty$, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|y\|_{\ell^\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = \|x\|_{\ell^1}\|y\|_{\ell^\infty};$$

da cui $xy \in \ell^1$ e $\|xy\|_{\ell^1} \leq \|x\|_{\ell^1}\|y\|_{\ell^\infty}$.

La seguente disuguaglianza, dimostrata in ℓ^p, risulta essere valida anche negli spazi finito-dimensionali $\mathbb{K}^N$ e permette di dimostrare che $\|\cdot\|_p$ è una norma.

Proposizione 1.4.10 (disuguaglianza discreta di Minkowski). *Sia* $p \in [1, +\infty]$ *e siano* $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell^p$. *Allora* $x + y = (x_n + y_n)_n \in \ell^p$ *e*

$$\|x + y\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}, \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Per $p = 1$, la tesi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|$$

segue dalla disuguaglianza triangolare per il valore assoluto (rispettivamente, per il modulo) in $\mathbb{R}$ (rispettivamente, in $\mathbb{C}$).

Per $p = +\infty$, la tesi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n|$$

segue dalla disuguaglianza triangolare per il valore assoluto (rispettivamente, per il modulo) in $\mathbb{R}$ (rispettivamente, in $\mathbb{C}$) e dalla subadditività dell'estremo superiore.

Consideriamo allora il caso $1 < p < +\infty$. Si ha

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_{\ell^p}^p &= \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{p-1} \left(|x_n| + |y_n|\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{p-1}|x_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{p-1}|y_n| \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{(p-1)p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \\
&+ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{(p-1)p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|^p\right)^{1/p}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder (1.6) ad entrambi gli addendi. Poiché

$$p' = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1},$$

si ha $(p-1)p' = p$. Da (1.8) si ottiene

$$\|x+y\|_{\ell^p}^p \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p'} (\|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}) = \|x+y\|_{\ell^p}^{p-1} (\|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}),$$

da cui, dividendo primo e ultimo membro per $\|x+y\|_{\ell^p}^{p-1}$, si ottiene la tesi. $\square$

Osservazione 1.4.11. Dalla disuguaglianza di Minkowski, segue che ℓ^p è spazio vettoriale, più precisamente che è un sottospazio proprio di $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Infatti, per ogni $x, y \in \ell^p$, la somma $x+y$ è tale che $\|x+y\|_{\ell^p} < +\infty$, pertanto $x+y \in \ell^p$. Quindi ℓ^p è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Inoltre la disuguaglianza (1.7) rappresenta la disuguaglianza triangolare per $\|\cdot\|_{\ell^p}$ (proprietà 1.1.1(N_3) della norma); dunque $\|\cdot\|_{\ell^p}$ è una norma su ℓ^p.

Lo spazio normato $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ è anche completo, come si prova nella seguente proposizione.

Proposizione 1.4.12. *Per ogni* $p \in [1, +\infty[$, $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ *è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $(x^{(k)})_k \subset \ell^p$ una successione di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{\ell^p}$; risulta

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \|x^{(k)} - x^{(m)}\|_{\ell^p} \leq \varepsilon \quad \forall\, k, m \geq \nu$$

cioè, per come è definita la norma $\|\cdot\|_{\ell^p}$,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(m)}|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall\, k, m \geq \nu. \tag{1.9}$$

In particolare, si ha

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(m)}| \leq \varepsilon \quad \forall\, k, m \geq \nu.$$

Allora, fissato $n \in \mathbb{N}$, la successione $(x_n^{(k)})_k$ è di Cauchy nello spazio completo $\mathbb{K}$, quindi converge ad un certo x_n per k che tende all'infinito. Posto $x := (x_n)_n$, proviamo che $x \in \ell^p$ e che $\lim_{k\to+\infty} \|x^{(k)} - x\|_{\ell^p} = 0$.

Fissato $M \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{n=1}^{M} |x_n|^p = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{M} |x_n^{(k)}|^p \leq \lim_{k\to+\infty} \|x^{(k)}\|_{\ell^p}^p \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x^{(k)}\|_{\ell^p}^p < C,$$

essendo $\left(\|x^{(k)}\|_{\ell^p}\right)_k$ limitata in virtù di 1.1.13(ii); pertanto, per l'arbitrarietà di $M \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty,$$

quindi $x = (x_n)_n \in \ell^p$.

Rimane da provare che $\|x^{(k)} - x\|_{\ell^p} \to 0$ per $k \to +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, da (1.9) risulta, per ogni $M \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{M} |x_n^{(k)} - x_n^{(m)}|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall\, k, m \geq \nu(\varepsilon).$$

Facendo tendere $m \to +\infty$ si ha

$$\sum_{n=1}^{M} |x_n^{(k)} - x_n|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall\, k \geq \nu(\varepsilon).$$

Per l'arbitrarietà di M, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall\, k \geq \nu(\varepsilon),$$

cioè $\|x^{(k)} - x\|_{\ell^p} \leq \varepsilon$, il che prova la convergenza di $x^{(k)}$ a x in ℓ^p, concludendo la dimostrazione. $\square$

Osservazione 1.4.13. Confrontando tra loro le norme ℓ^p, con $p \in [1, +\infty[$, si ha:

Se $s > r$, allora $\|x\|_{\ell^s} \leq \|x\|_{\ell^r}$ e quindi sussiste l'immersione continua $\ell^r \hookrightarrow \ell^s$.

Infatti,

$$\left| \frac{x_n}{\|x\|_{\ell^r}} \right| \leq 1$$

e quindi

$$\left| \frac{x_n}{\|x\|_{\ell^r}} \right|^s \leq \left| \frac{x_n}{\|x\|_{\ell^r}} \right|^r,$$

da cui sommando segue la tesi.

1.4.4 Gli spazi $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ e $(c, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$

In questa sezione esamineremo due interessanti sottospazi di $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$. Per provarne la completezza, non agiremo in maniera diretta come nelle precedenti sezioni, ma sfrutteremo la caratterizzazione fornita nell'Osservazione 1.1.15: un sottospazio di uno spazio completo è completo se e solo se esso è chiuso.

Definizione 1.4.14. Si dice *spazio delle successioni infinitesime di* $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ l'insieme

$$c_0 := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \right\};$$

si dice *spazio delle successioni convergenti di* $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ l'insieme

$$c := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \text{esiste finito } \lim_{n\to+\infty} x_n \right\}.$$

Gli insiemi c_0 e c, muniti delle usuali operazioni di somma tra successioni e prodotto per uno scalare sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.

Osservazione 1.4.15. Osserviamo che $c_0 \subset c \subset \ell^\infty$ e che le inclusioni sono strette; in particolare, $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ e $(c, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ sono sottospazi normati di $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$.

I due spazi normati appena introdotti risultano essere completi.

Proposizione 1.4.16. $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ *è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. In virtù di 1.1.15, è sufficiente dimostrare che $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ è un sottospazio chiuso dello spazio di Banach $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$.

Sia $(x^{(k)})_k$ una successione in c_0 convergente ad un qualche $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$. Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $k \geq \nu_1(\varepsilon)$, si ha

$$\|x^{(k)} - x\|_{\ell^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10}$$

Fissato $k \in \mathbb{N}$, la successione $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_n \in c_0$ è infinitesima; in particolare, per $k \geq \nu_1(\varepsilon)$, esiste $\nu_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu_2(\varepsilon)$ si ha

$$|x_n^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.11}$$

Posto $\nu(\varepsilon) := \max\{\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)\}$, per ogni $n, k \geq \nu(\varepsilon)$ sono valide sia (1.10), sia (1.11), perciò

$$|x_n| \leq |x_n - x_n^{(k)}| + |x_n^{(k)}| \leq \|x^{(k)} - x\|_{\ell^\infty} + |x_n^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

il che prova che $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ e quindi che $x \in c_0$. □

Proposizione 1.4.17. *$(c, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. In virtù di 1.1.15, è sufficiente dimostrare che $(c, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ è un sottospazio chiuso dello spazio di Banach $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$.

Sia $(x^{(k)})_k$ una successione in c convergente ad un qualche $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$. Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $k \geq \nu_1(\varepsilon)$, si ha

$$\|x^{(k)} - x\|_{\ell^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.12}$$

Fissato $k \in \mathbb{N}$, la successione numerica $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_n \in c$ è convergente in $\mathbb{K}$, quindi è di Cauchy in $\mathbb{K}$; in particolare, per $k \geq \nu_1(\varepsilon)$, esiste $\nu_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $i, j \geq \nu_2(\varepsilon)$ si ha

$$|x_i^{(k)} - x_j^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.13}$$

Posto $\nu(\varepsilon) := \max\{\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)\}$, per ogni $i, j, k \geq \nu(\varepsilon)$ sono valide sia (1.12), sia (1.13), perciò

$$\begin{aligned} |x_i - x_j| &\leq |x_i - x_i^{(k)}| + |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}| + |x_j - x_j^{(k)}| \\ &\leq 2\|x^{(k)} - x\|_{\ell^\infty} + |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ciò prova che la successione numerica $x = (x_n)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{K}$, pertanto essa converge, cioè $x \in c$. □

1.5 Teorema del completamento di uno spazio normato

Per uno spazio normato non completo esiste un **procedimento di completamento** per colmare questo gap e renderlo completo. Sussiste il seguente teorema:

Teorema 1.5.1. *Sia $(X, \|.\|)$ uno spazio normato. Allora esiste uno spazio normato completo $\hat{X}$ e un operatore lineare*

$$T : X \to \hat{X}$$

tale che:

(i) $\|Tx\|_{\hat{X}} = \|x\|_X$ *per ogni $x \in X$ (isometria, iniettiva);*

(ii) $\overline{TX} = \hat{X}$ *(l'immagine di X tramite T è densa in $\hat{X}$)*

Dimostrazione. Sia E lo spazio vettoriale che ha per elementi le successioni di Cauchy $\overline{x} = (x_n)_n$ di elementi di X. Introduciamo in E la seguente relazione di equivalenza $\cong$, assumendo per definizione che $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sono $\cong$ equivalenti,

$$(x_n)_n \cong (y_n)_n :\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\|_X = 0. \tag{1.14}$$

Consideriamo lo spazio vettoriale (verificare) quoziente $\hat{X} := E/\cong$ e indichiamo con $[\overline{x}]_\cong$ i suoi elementi ($[\overline{x}]_\cong$ non dipende dal particolare rappresentante $\overline{x} = (x_n)_n \in E$ scelto per definirlo).
Definiamo in $\hat{X}$ la norma (verificare)

$$\|[\overline{x}]_\cong\|_{\hat{X}} := \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|_X$$

dove $(x_n)_n$ è un qualunque rappresentante della classe di equivalenza $[\overline{x}]_\cong \in \hat{X}$. Il limite precedente esiste finito, poiché la successione $(x_n)_n$ è di Cauchy e, dalla disuguaglianza

$$|\|x_{n+k}\|_X - \|x_n\|_X| \leq \|x_{n+k} - x_k\|_X,$$

segue che la successione $(\|x_n\|_X)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, quindi convergente.

Sia $T : X \to \hat{X}$ l'operatore definito da $Tx = [\overline{x}]_\cong$, dove $\overline{x}$ è la successione costante $\overline{x} = (x, x, \ldots, x, \ldots)$. Ovviamente la successione $\overline{x}$ è di Cauchy e

$$\|Tx\|_{\hat{X}} = \|[\overline{x}]_\cong\|_{\hat{X}} = \|x\|_X,$$

cioè $T : X \to \hat{X}$ verifica (i).

Per concludere la dimostrazione proviamo che:

(1) TX è denso in $\hat{X}$;

(2) $\hat{X}$ è uno spazio completo.

(1) Sia $\overline{x} = (x_n)_n \in E$ e sia $\epsilon > 0$. Poiché $\overline{x}$ è di Cauchy, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|x_n - x_m\|_X < \epsilon$ per ogni $m, n \geq \nu$.
Sia $n \geq \nu$ e definiamo la successione costante $\overline{x}_n \in E$ ponendo $\overline{x}_n = (x_n, x_n, \cdots, x_n, \cdots)$, cioè $[\overline{x}_n]_\cong = Tx_n \in TX$.
Allora

$$\big\|[\overline{x}]_\cong - \underbrace{[\overline{x}_n]_\cong}_{=Tx_n}\big\|_{\hat{X}} = \lim_{m\to+\infty} \| \underbrace{(\overline{x} - \overline{x}_n)_m}_{\substack{m\text{-esimo termine di} \\ \overline{x} - \overline{x}_n}} \|_X = \lim_{m\to+\infty} \|x_m - x_n\|_X \leq \epsilon.$$

Pertanto, ogni $[\overline{x}]_\cong \in \hat{X}$ è approssimabile con elementi di TX.

(2) Consideriamo una successione di Cauchy $([\overline{x}^{(n)}]_{\cong})_n \subset \hat{X}$.
Sia $\epsilon > 0$ e sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, se $m, n \geq \nu$, allora

$$\|[\overline{x}^{(n)}]_{\cong} - [\overline{x}^{(m)}]_{\cong}\|_{\hat{X}} < \epsilon.$$

Per quanto provato in (1), per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \to 0$ e $x_n \in X$ tale che $\|[\overline{x}^{(n)}]_{\cong} - Tx_n\|_{\hat{X}} < \epsilon_n$.

Allora, la successione $\overline{x}^{(0)} = (x_n)_n$ è di Cauchy in X. Infatti, per ogni $n, m \geq \nu$, si ha

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|_X &= \|Tx_n - Tx_m\|_{\hat{X}} \\
&\leq \|Tx_n - [\overline{x}^{(n)}]_{\cong}\|_{\hat{X}} + \|[\overline{x}^{(n)}]_{\cong} - [\overline{x}^{(m)}]_{\cong}\|_{\hat{X}} + \|[\overline{x}^{(m)}]_{\cong} - Tx_m\|_{\hat{X}} \\
&< \epsilon_n + \epsilon + \epsilon_m.
\end{aligned}$$

Perciò, $\overline{x}^{(0)} = (x_n)_n \in E$ e $[\overline{x}^{(0)}]_{\cong} = \lim_{n \to +\infty} [\overline{x}^{(n)}]_{\cong}$; infatti, per ogni $n \geq \nu$ risulta

$$\begin{aligned}
\|[\overline{x}^{(0)}]_{\cong} - [\overline{x}^{(n)}]_{\cong}\|_{\hat{X}} &\leq \|[\overline{x}^{(n)}]_{\cong} - Tx_n\|_{\hat{X}} + \|Tx_n - [\overline{x}^{(0)}]_{\cong}\|_{\hat{X}} \\
&\leq \epsilon_n + \lim_{m \to +\infty} \|x_n - (\overline{x}^{(0)})_m\|_X \\
&= \epsilon_n + \lim_{m \to +\infty} \|x_n - x_m\|_X \\
&\leq \epsilon_n + \lim_{m \to +\infty} (\epsilon_n + \epsilon + \epsilon_m) = 2\epsilon_n + \epsilon,
\end{aligned}$$

da cui, per l'arbitrarietà di ϵ, si ha la convergenza di $([\overline{x}^{(n)}]_{\cong})_n$ a $[\overline{x}^{(0)}]_{\cong}$ in $\hat{X}$ e quindi la completezza di $\hat{X}$.

$\square$

Osservazione 1.5.2. $\hat{X}$ (**completamento di X**) è unico a meno di isometrie.

Osservazione 1.5.3. È utile confrontare il precedente teorema con la costruzione dei numeri reali dai numeri razionali.
Per una guida, cfr., ad esempio, il Teorema $A5.24$ nel libro di E. Acerbi, G. Buttazzo, Primo Corso di Analisi Matematica, Pitagora Ed. Bologna (1997).

Osservazione 1.5.4. Esempi di completamento verranno dati nel paragrafo 5.12, Osservazioni 5.12.1 e 5.12.2.

1.6 Operatori lineari, limitati

Definizione 1.6.1 (operatore lineare, dominio, codominio, nucleo). Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati sul campo $\mathbb{K}$. Un *operatore lineare* T è un'applicazione da un sottospazio $D(T) \subseteq X$ a valori in Y tale che

$$T(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 T x_1 + c_2 T x_2$$

per ogni $x_1, x_2 \in D(T)$ ed ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

Il sottospazio $D(T) \subseteq X$ si dice *dominio* di T; il sottospazio

$$\mathrm{Im}(T) := \{Tx : x \in D(T)\} \subseteq Y$$

si dice *codominio* di T o immagine di T; il sottospazio

$$\ker(T) := \{x \in D(T) : Tx = 0\} \subseteq D(T) \subseteq X$$

si dice *nucleo* di T.

Osservazione 1.6.2. Risulta, come nel caso finito-dimensionale:

$$T \text{ iniettivo } \Leftrightarrow \ker(T) = \{0\}\,.$$

Nota importante. D'ora in avanti, a meno che non sia specificato diversamente, considereremo operatori lineari $T : X \to Y$ definiti sull'intero spazio X, cioè con $D(T) = X$.

Definizione 1.6.3 (operatore limitato). Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *limitato* se

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y < +\infty. \tag{1.15}$$

Osservazione 1.6.4 (espressioni equivalenti di $\|T\|$ per operatori lineari limitati). Si può dimostrare che

$$\begin{aligned}\|T\| &:= \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \\ &= \inf\{M > 0 : \forall\, x \in X \ \|Tx\|_Y \le M\|x\|_X\}\,.\end{aligned}$$

Il seguente teorema fornisce una importante caratterizzazione degli operatori lineari limitati.

Teorema 1.6.5 (continuità degli operatori lineari limitati). *Un operatore lineare $T : X \to Y$ è limitato se e solo se esso è continuo.*

Dimostrazione. Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare limitato; per ogni $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, dalla linearità di T si ha

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_Y = \|T(x_1 - x_2)\|_Y = \|x_1 - x_2\|_X \left\| T\left(\frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|_X}\right)\right\|_Y \\ \leq \|x_1 - x_2\|_X \|T\|,$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo utilizzato la definizione di $\|T\|$ in (1.15) e il fatto che il vettore $\frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|_X}$ abbia norma unitaria in X. Quindi, T è uniformemente Lipschitziano su X con costante di Lipschitz $\|T\|$, pertanto esso è continuo in X.

Viceversa, sia $T : X \to Y$ un operatore lineare e continuo in X (equivalentemente, T è continuo in $0 = 0_X$). Pertanto, esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|x\|_X \leq \delta$, allora $\|Tx\|_Y \leq 1$. In particolare, per ogni $x \in X$ tale che $\|x\|_X \leq 1$ risulta $\|\delta x\|_X \leq \delta$, quindi $\|T(\delta x)\|_Y \leq 1$. Per omogeneità della norma e linearità di T, per ogni $x \in X$ tale che $\|x\|_X \leq 1$ si ha

$$\delta \|Tx\|_Y = \|\delta \cdot Tx\|_Y = \|T(\delta x)\|_Y \leq 1,$$

da cui

$$\|Tx\|_Y \leq \frac{1}{\delta} \quad \forall\, x \in X,\ \|x\|_X \leq 1.$$

Passando all'estremo superiore e richiamando la definizione di $\|T\|$ in (1.15), otteniamo $\|T\| \leq 1/\delta$, il che prova la limitatezza di T. $\square$

Alla luce di questo teorema, parleremo indifferentemente di operatore lineare limitato o continuo. Nel seguito, indicheremo con $\boldsymbol{B(X;Y)}$ l'insieme degli operatori lineari limitati $T : X \to Y$. Se $X = Y$, invece di $B(X;X)$ potremo scrivere semplicemente $B(X)$.

Osservazione 1.6.6. Per ogni $T_1, T_2 \in B(X;Y)$ ed ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$, la combinazione lineare $c_1T_1 + c_2T_2$ definita da

$$(c_1T_1 + c_2T_2)(x) := c_1T_1x + c_2T_2x \quad \forall\, x \in X$$

è ancora un operatore lineare limitato. Pertanto $B(X;Y)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Teorema 1.6.7 (Spazio di Banach degli operatori lineari limitati). *Lo spazio $B(X;Y)$ è uno spazio normato, munito della norma (norma operatoriale)*

$$\|\cdot\|_{B(X;Y)} : B(X;Y) \to [0, +\infty[, \\ T \mapsto \|T\|_{B(X;Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Inoltre, se Y è uno spazio di Banach, allora $B(X;Y)$ è uno spazio di Banach.

Osservazione 1.6.8. Per ogni $T \in B(X;Y)$ ed ogni $x \in X$, vale la seguente disuguaglianza

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{B(X;Y)}\|x\|_X. \tag{1.16}$$

Dimostrazione del Teorema 1.6.7. Osserviamo che, per ogni $T \in B(X;Y)$, $\|T\|_{B(X;Y)} = \|T\| < +\infty$, dove $\|T\|$ è stata introdotta in (1.15), pertanto $\|\cdot\|_{B(X;Y)}$ è ben definita su $B(X;Y)$. Verifichiamo che essa soddisfa le proprietà 1.1.1 (N_1), (N_2) e (N_3).

(N_1) Se $T = 0$ è l'operatore nullo, allora $Tx = 0$ per ogni $x \in X$, dunque $\|T\|_{B(X;Y)} = 0$. Se, invece, T non è l'operatore nullo, allora, per qualche $x \in X \setminus \{0\}$, si ha $Tx \neq 0$, da cui

$$T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) = \frac{1}{\|x\|_X} \cdot Tx \neq 0,$$

per cui l'estremo superiore che definisce $\|T\|_{B(X;Y)}$ è strettamente positivo.

(N_2) Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha, per l'omogeneità dell'estremo superiore:

$$\|\lambda T\|_{B(X;Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\lambda Tx\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = |\lambda|\|T\|_{B(X;Y)}.$$

(N_3) Siano $T_1, T_2 \in B(X;Y)$; per ogni $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned}\|(T_1+T_2)x\|_Y &= \|T_1x + T_2x\|_Y \leq \|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y \\ &\leq \|T_1\|_{B(X;Y)} + \|T_2\|_{B(X;Y)}.\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore sui vettori $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$ al primo membro, otteniamo la disuguaglianza triangolare per $\|\cdot\|_{B(X;Y)}$.

Dunque $\|\cdot\|_{B(X;Y)}$ è una norma su $B(X;Y)$.

Sia ora Y di Banach e proviamo che $B(X;Y)$ è uno spazio di Banach. Sia $(T_n)_n$ una successione di Cauchy in $B(X;Y)$; per ogni $x \in X$ si ha

$$\limsup_{m,n\to+\infty} \|T_mx - T_nx\|_Y \leq \limsup_{m,n\to+\infty} \|T_m - T_n\|_{B(X;Y)}\|x\|_X = 0,$$

dove, nella maggiorazione, abbiamo usato la (1.16). Ciò prova che la successione $(T_nx)_n$ (con $x \in X$ fissato) è di Cauchy in Y. Poiché Y è completo, la successione $(T_nx)_n$ converge ad un (unico) elemento $Tx \in Y$. Consideriamo l'applicazione

$$T : X \to Y, \quad x \mapsto Tx.$$

Essa è ben posta per il teorema di unicità del limite ed è lineare poiché ogni $T_n : X \to Y$ è lineare. Proviamo che $T \in B(X;Y)$ e che $\|T_n - T\|_{B(X;Y)} \to 0$. Poiché $(T_n)_n$ è di Cauchy, possiamo scegliere $M \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $\|T_n - T_M\|_{B(X;Y)} \leq 1$ per ogni $n \geq M$. Pertanto, per ogni $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y = \lim_{n\to+\infty} \|T_n x\|_Y &\leq \|T_M x\|_Y + \limsup_{n\to+\infty} \|T_n - T_M\|_{B(X;Y)} \|x\|_X \\ &\leq \|T_M\|_{B(X;Y)} + 1 < +\infty, \end{aligned}$$

da cui segue che $\|T\|_{B(X;Y)} < +\infty$ e quindi $T \in B(X;Y)$. Per concludere, mostriamo che T_n converge a T in $\|\cdot\|_{B(X;Y)}$. Sia $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$; poiché $(T_n x)_n$ è di Cauchy in Y, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, m \geq n \geq \nu(\varepsilon) : \ \|T_m x - T_n x\|_Y \leq \varepsilon.$$

Per $m \to +\infty$ otteniamo che

$$\forall\, n \geq \nu(\varepsilon) : \ \|Tx - T_n x\|_Y \leq \varepsilon,$$

da cui, passando all'estremo superiore su x, si ottiene $\|T - T_n\|_{B(X;Y)} \leq \varepsilon$, il che completa la dimostrazione. □

Osservazione 1.6.9. Il teorema 1.6.7 fornisce anche un criterio per riconoscere se uno spazio Y è di Banach o meno. Infatti, se per una successione di Cauchy in $B(X;Y)$ risulta che essa non converge ad un elemento di $B(X;Y)$, allora Y non può essere di Banach.

Esempio 1.6.10 (di operatore lineare limitato: **operatore integrale**). Consideriamo il seguente operatore lineare

$$\begin{aligned} T : (C^0([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) &\to (C^0([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty), \\ f &\mapsto Tf, \end{aligned}$$

dove Tf è definita da

$$(Tf)(x) := \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a,b].$$

L'operatore lineare T è limitato; infatti, per ogni $f \in C^0([a,b];\mathbb{R})$ ed ogni $x \in [a,b]$, si ha

$$|(Tf)(x)| = \left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|\, dt \leq \|f\|_\infty (b-a),$$

da cui, passando all'estremo superiore su $x \in [a,b]$, otteniamo

$$\|Tf\|_\infty \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Ne segue che $\|T\| \leq b - a < +\infty$. In particolare, considerando $f \equiv 1$, si deduce che $\|T\| = b - a$.

Non tutti gli operatori lineari tra spazi normati sono continui. Esaminiamo, a tal proposito, l'operatore di derivazione $T = \frac{d}{dt}$.

Esempio 1.6.11 (di operatore lineare non limitato: **operatore di derivazione**)**.** Sia X lo spazio delle funzioni reali continue e limitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, munito della norma

$$\|f\|_X := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Consideriamo l'operatore di derivazione $T = \frac{d}{dt}$ definito da

$$Tf := f'.$$

Il suo dominio naturale (dominio massimale) $D(T)$ è il sottospazio proprio di X delle funzioni reali continue e limitate con derivata prima continua e limitata. Osserviamo che l'operatore lineare T *non* è limitato (quindi non è continuo). Per esempio, le funzioni $f_n(t) := \sin(nt)$ sono uniformemente limitate: $\|f_n\|_X = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Tuttavia, la successione delle derivate $Tf_n = f_n'$ non è limitata, perché $f_n'(t) = n\cos(nt)$ e quindi $\|f_n'\|_X = n$.

1.7 Norme equivalenti. Spazi a dimensione finita

Definizione 1.7.1 (**norme equivalenti**)**.** Sia X uno spazio vettoriale. *Due norme* $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ su X si dicono *equivalenti* se esistono due costanti $C, c > 0$ tali che

$$c\|x\|' \leq \|x\|'' \leq C\|x\|' \quad \forall x \in X. \tag{1.17}$$

L'importanza di questo concetto risiede nel fatto che norme equivalenti su uno stesso spazio X inducono la stessa topologia su X e quindi inducono le stesse successioni di Cauchy e le stesse successioni convergenti, cioè se $(x_n)_n \subset X$ è convergente o di Cauchy rispetto ad una norma $\|\cdot\|'$ su X, essa è convergente o di Cauchy rispetto ad una qualsiasi altra norma $\|\cdot\|''$ equivalente a $\|\cdot\|'$.

Osservazione 1.7.2. Su $\mathbb{K}^N$ tutte le norme $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, +\infty]$, sono equivalenti tra di loro.

In generale, uno spazio X a dimensione infinita può avere norme non equivalenti. Consideriamo, ad esempio, lo spazio dei polinomi in una variabile reale nell'intervallo $[0, 1]$, munito delle due norme definite da

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad \|f\|_{L^1([0,1])} := \int_0^1 |f(t)|\,dt \quad (f \in X).$$

Le norme (verificare per esercizio che anche $\|\cdot\|_{L^1([0,1])}$ soddisfa le proprietà di una norma) $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_{L^1([0,1])}$ non sono equivalenti.

Consideriamo la successione di monomi $(f_n)_n \subset X$ definita da

$$f_n(t) := t^n, \quad t \in [0,1].$$

Osserviamo che $\|f_n\|_\infty = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\|f_n\|_{L^1([0,1])} \to 0$ per $n \to +\infty$. Pertanto, f_n converge a $0 \in X$ in $(X, \|\cdot\|_{L^1([0,1])})$, ma non può convergere a zero in $(X, \|\cdot\|_\infty)$.

Ci chiediamo se, considerando un qualunque spazio X a dimensione finita N su $\mathbb{K}$ e munendolo di una qualsiasi norma, ci si possa ricondurre, mediante omeomorfismi, ad uno spazio $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p)$. In altre parole, ci chiediamo se oltre a sussistere un isomorfismo lineare tra X e $\mathbb{K}^N$, i due spazi siano anche topologicamente equivalenti, indipendentemente dalla norma (e quindi dalla topologia) di cui li abbiamo muniti in partenza.

Teorema 1.7.3 (Ogni spazio normato a dimensione finita N su $\mathbb{K}$ è omeomorfo a $\mathbb{K}^N$). *Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio normato a dimensione finita N su $\mathbb{K}$ e sia $\{u_1, \ldots, u_N\}$ una base di X. Allora*

1. *X è completo e quindi è uno spazio di Banach;*
2. *L'operatore definito da*

$$\Lambda : \mathbb{K}^N \to X,$$
$$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \mapsto \Lambda\alpha := \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_N u_N$$

è lineare, bigettivo e limitato. Inoltre, l'operatore inverso $\Lambda^{-1} : X \to \mathbb{K}^N$ è anche limitato.

Dimostrazione.

1. L'operatore lineare Λ è bigettivo, poiché $\{u_1, \ldots, u_N\}$ è una base di X; inoltre, l'operatore inverso $\Lambda^{-1} : X \to \mathbb{K}^N$ è lineare e ben definito (per l'unicità della rappresentazione di un vettore di X rispetto ad una sua base fissata).

2. Osservato che, per ogni $\alpha \in \mathbb{K}^N$, si ha

$$\|\Lambda\alpha\|_X \leq \sum_{k=1}^{N} \|\alpha_k u_k\|_X \leq \|\alpha\|_{\mathbb{K}^N} \sum_{k=1}^{N} \|u_k\|_X,$$

si deduce che Λ è limitato, quindi continuo, da $\mathbb{K}^N$ in X, con $\|\Lambda\| \leq \sum_{k=1}^{N} \|u_k\|_X$.

3. Proviamo ora che anche Λ^{-1} è limitato. Se non lo fosse, esisterebbe una successione $(x_n)_n$ in X con $\|x_n\|_X \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tale che $\|\Lambda^{-1}x_n\|_{\mathbb{K}^N} \to +\infty$. Consideriamo i vettori normalizzati

$$x_n^* := \frac{\Lambda^{-1}x_n}{\|\Lambda^{-1}x_n\|_{\mathbb{K}^N}} \in \mathbb{K}^N.$$

Risulta $\|x_n^*\|_{\mathbb{K}^N} = 1$ e

$$\|\Lambda x_n^*\|_X = \frac{\|\Lambda\Lambda^{-1}x_n\|_X}{\|\Lambda^{-1}x_n\|_{\mathbb{K}^N}} = \frac{\|x_n\|_X}{\|\Lambda^{-1}x_n\|_{\mathbb{K}^N}} \to 0.$$

Poiché $(x_n^*)_n$ è limitata nello spazio completo $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_{\mathbb{K}^N})$, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k}^*)_k$ convergente a $x^* \in \mathbb{K}^N$. Chiaramente

$$\|x^*\|_{\mathbb{K}^N} = \lim_{k\to+\infty} \|x_{n_k}^*\|_{\mathbb{K}^N} = 1$$

e, poiché Λ è continuo,

$$\Lambda x^* = \lim_{k\to+\infty} \Lambda x_{n_k}^* = \lim_{k\to+\infty} \frac{x_{n_k}}{\|\Lambda^{-1}x_{n_k}\|_{\mathbb{K}^N}} = 0.$$

Ciò implica che $\ker\Lambda \neq \{0\}$, il che contraddice l'iniettività di Λ. Pertanto Λ^{-1} è necessariamente limitato, quindi continuo.

4. Per provare che $(X, \|\cdot\|_X)$ è completo, sia $(x_n)_n \subset X$ una successione di Cauchy. Allora, $(\Lambda^{-1}x_n)_n$ definisce una successione di Cauchy nello spazio completo $\mathbb{K}^N$; pertanto essa converge ad un certo $y \in \mathbb{K}^N$. Poiché Λ è continuo, la successione $(x_n)_n$ converge a $\Lambda y \in X$, provando la completezza di $(X, \|\cdot\|_X)$ e terminando la dimostrazione.

□

Osservazione 1.7.4. Osserviamo che, in virtù dell'arbitrarietà della norma scelta sullo spazio X e del fatto che tutte le norme su $\mathbb{K}^N$ sono equivalenti, segue che la limitatezza di Λ e Λ^{-1} è valida per qualsiasi scelta delle norme su X e su $\mathbb{K}^N$.

Corollario 1.7.5. *In uno spazio vettoriale a dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.*

Dimostrazione. Siano $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ due norme sullo spazio vettoriale X di dimensione finita N. Sia $\{u_1, \dots, u_N\}$ una base di X e sia $\Lambda : \mathbb{K}^N \to X$ come nel precedente Teorema 1.7.3. Osserviamo che, sempre per il Teorema 1.7.3, Λ e Λ^{-1} sono operatori lineari e limitati rispetto a ciascuna delle due norme su X. Allora, esistono delle costanti reali positive C_1, C_2, c_1, c_2 tali che, per ogni $x \in X$, si ha

$$c_1\|\Lambda^{-1}x\|_{\mathbb{K}^N} \leq \|x\|' \leq C_1\|\Lambda^{-1}x\|_{\mathbb{K}^N}$$

e

$$c_2\|\Lambda^{-1}x\|_{\mathbb{K}^N} \leq \|x\|'' \leq C_2\|\Lambda^{-1}x\|_{\mathbb{K}^N}$$

(per le disuguaglianze a sinistra abbiamo sfruttato la limitatezza e bigettività di Λ, esprimendo i vettori di $\mathbb{K}^N$ nella forma $\Lambda^{-1}x$). Ne segue che $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ sono equivalenti. □

1.8 Insiemi compatti. Spazi localmente compatti.

Definizione 1.8.1 (ricoprimento aperto; insieme compatto, relativamente compatto, precompatto, sequenzialmente compatto). Sia X uno spazio topologico e sia $K \subseteq X$. Una collezione di sottoinsiemi di X aperti $\{A_j : j \in J\}$ tale che $K \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$ si chiama un *ricoprimento aperto* di K. L'insieme di indici J può essere finito o infinito.

Un insieme $K \subseteq X$ si dice ***compatto*** se da ogni ricoprimento aperto $\{A_j : j \in J\}$ di K si può estrarre un sottoricoprimento finito, cioè una sottofamiglia $\{A_j : j \in F\}$, con $F \subseteq J$ finito, che sia ancora un ricoprimento aperto di K.

Un insieme $S \subseteq X$ si dice ***relativamente compatto*** se la sua chiusura $\overline{S}$ è compatta.

Un insieme $S \subseteq X$ si dice ***precompatto*** se, per ogni $\varepsilon > 0$, esso si può ricoprire con un numero finito di palle di raggio ε.

Alle precedenti definizioni si affianca la seguente, inerente gli spazi normati.

Definizione 1.8.2 (spazio localmente compatto). Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio normato. X si dice *localmente compatto* se la palla chiusa unitaria

$$\overline{B(0,1)} = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$$

è compatta.

Teorema 1.8.3 (sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^N$). *Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^N$ è compatto se e solo se S è chiuso e limitato.*

Teorema 1.8.4 (caratterizzazioni equivalenti della compattezza). *Sia E uno spazio metrico. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) E è compatto;

(ii) E è precompatto e completo;

(iii) Da ogni successione $(x_n)_n$ di punti di E si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto limite $x \in E$ (sequenziale compattezza).

Il classico ***Teorema di Bolzano-Weierstrass*** afferma che

Ogni successione limitata di $\mathbb{K}^N$ ammette una sottosuccessione convergente.

In altre parole, il Teorema di Bolzano-Weierstrass garantisce la compattezza di ogni palla chiusa di $\mathbb{K}^N$. Il prossimo teorema (di **F. Riesz**) mostra che questa proprietà di compattezza è vera per ogni spazio normato a dimensione finita e **non è vera** in alcuno spazio a dimensione infinita, e quindi caratterizza gli spazi a dimensione finita.

Teorema 1.8.5 (gli spazi normati localmente compatti hanno dimensione finita).
Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio normato completo. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) X ha dimensione finita;

(ii) X è localmente compatto.

Dimostrazione. Supponiamo vera (i) e proviamo che vale (ii), cioè che la palla chiusa unitaria $\overline{B(0,1)}$ di X è compatta. Sia $N \in \mathbb{N}$ la dimensione di X. In virtù del Teorema 1.7.3, è stabilito un omeomorfismo $\Lambda : \mathbb{K}^N \to X$ con inverso $\Lambda^{-1} : X \to \mathbb{K}^N$ limitato. Poiché $\overline{B(0,1)}$ è chiusa e limitata in X, lo è anche la sua immagine omeomorfa

$$K := \Lambda^{-1}(\overline{B(0,1)}) \subset \mathbb{K}^N.$$

L'insieme K (chiuso e limitato) è compatto in $\mathbb{K}^N$. Pertanto, $\overline{B(0,1)} = \Lambda(K)$ risulta compatto in X, essendo immagine continua del compatto K, il che dimostra che vale (ii).

Viceversa, assumiamo X localmente compatto e proviamo che esso ha dimensione finita. Per ipotesi, $\overline{B(0,1)}$ è compatta in X e, per il Teorema 1.8.4, essa è precompatta; pertanto esiste un numero finito di palle aperte $B(p_i, 1/2)$, $i = 1, \dots, n$, centrate nei punti p_i e con raggio $1/2$, tali che

$$\overline{B(0,1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(p_i, 1/2). \qquad (1.18)$$

Consideriamo il sottospazio di dimensione finita

$$V := \text{span}\,\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq X.$$

Osserviamo che V è chiuso in X, in quanto, per il Teorema 1.7.3 ogni spazio normato a dimensione finita è completo. Proviamo che $V = X$, il che implicherà che X ha dimensione finita. Procediamo per assurdo, supponendo che $X \neq V$; sotto questa ipotesi, consideriamo $x \in X \setminus V$ e poniamo

$$\rho := d(x, V) = \inf_{y \in V} \|y - x\|_X.$$

Osserviamo che $\rho > 0$ poiché V è chiuso e $x \notin V$. Pertanto, per le proprietà dell'estremo inferiore, esiste un vettore $v \in V$ tale che

$$\rho \leq \|x - v\|_X \leq \frac{3}{2}\rho. \tag{1.19}$$

Consideriamo il vettore unitario

$$z := \frac{x - v}{\|x - v\|_X} \in \overline{B(0,1)}. \tag{1.20}$$

Da (1.18), deduciamo che esiste un punto p_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, tale che

$$\|z - p_j\|_X < \frac{1}{2}. \tag{1.21}$$

Allora, da (1.20), risulta

$$x = v + \|x - v\|_X z = v + \|x - v\|_X p_j + \|x - v\|_X (z - p_j).$$

Poiché $v + \|x - v\|_X p_j \in V$ e $x \notin V$, necessariamente $\|x - v\|_X (z - p_j) \notin V$, pertanto si ottiene

$$\|x - v\|_X \|z - p_j\|_X \geq d(x, V) = \rho,$$

Quindi, da (1.21), $\|x - v\|_X \geq 2\rho$, in contraddizione con (1.19). Possiamo concludere che $X = V$ e dunque X ha dimensione finita. $\square$