

# Indice

<b>1</b>	<b>Spazi di Banach</b>	<b>11</b>
1.1	Alcuni richiami e definizioni . . . . .	11
1.2	Serie in uno spazio normato e teorema di completezza . . . . .	18
1.3	Spazio quoziente e completezza . . . . .	20
1.4	Esempi di spazi di Banach . . . . .	22
1.4.1	Lo spazio $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \ \cdot\ _\infty)$ . . . . .	22
1.4.2	Lo spazio $(l^\infty, \ \cdot\ _{l^\infty})$ . . . . .	23
1.4.3	Lo spazio $(l^p, \ \cdot\ _{l^p})$ ( $1 \leq p < \infty$ ) . . . . .	24
1.4.4	Gli spazi $(c_0, \ \cdot\ _{l^\infty})$ e $(c, \ \cdot\ _{l^\infty})$ . . . . .	29
1.5	Teorema del completamento di uno spazio normato . . . . .	31
1.6	Operatori lineari, limitati . . . . .	33
1.7	Norme equivalenti. Spazi a dimensione finita . . . . .	37
1.8	Insiemi compatti. Spazi localmente compatti. . . . .	40
<b>2</b>	<b>Spazi di Hilbert</b>	<b>43</b>
2.1	Spazi di Hilbert (Spazi con prodotto scalare) . . . . .	43
2.2	Proiezione su un convesso chiuso . . . . .	47
2.3	Duale di uno spazio di Hilbert. Teorema (di Riesz-Fréchet) di rappresentazione dei funzionali lineari e continui . . . . .	51
2.4	Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt . . . . .	54
2.5	Somme di Hilbert. Basi hilbertiane ortonormali (sistemi ortonormali completi) . . . . .	55
2.6	Basi ortonormali e Serie di Fourier complesse nello spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ , . . . . .	61
2.7	Operatori strettamente positivi e Teorema di invertibilità . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Spazio duale. Convergenze (sequenziali) debole e debole*</b>	<b>65</b>
3.1	Convergenze (sequenziali) debole, debole* e proprietà . . . . .	68
3.2	Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki . . . . .	71
3.3	Convergenza debole e compattezza debole in uno spazio di Hilbert: estensione del Teorema di Bolzano-Weierstrass. . . . .	75

3.4	Compattezza in spazi di funzioni continue: il Teorema di Ascoli-Arzelà . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Teoremi di estensione per funzionali lineari, lineari limitati e conseguenze</b>	<b>79</b>
4.1	Teoremi di Hahn-Banach (forma analitica) . . . . .	79
4.1.1	Alcune importanti conseguenze del Teorema di Hahn-Banach . . . . .	84
4.2	Le forme geometriche del teorema di Hahn-Banach: Separazione di insiemi convessi. . . . .	85
4.3	Riflessività. Compattezza debole in uno spazio riflessivo . . . . .	86
4.3.1	Dualità, separabilità e riflessività per spazi di successioni . . . . .	91
4.4	Teorema di Baire-Hausdorff . . . . .	100
4.5	Principio di uniforme limitatezza . . . . .	101
4.6	Teorema dell'applicazione aperta e di limitatezza dell'operatore inverso . . . . .	105
4.7	Teorema del grafico chiuso . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Teoria di Fredholm. Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt</b>	<b>111</b>
5.1	Operatori aggiunti e proprietà. Operatori autoaggiunti (simmetrici) su spazi di Hilbert reali . . . . .	111
5.2	Operatori compatti e proprietà . . . . .	114
5.3	Dai sistemi di equazioni algebriche lineari alla teoria di Fredholm . . . . .	124
5.4	Teoria di Fredholm . . . . .	125
5.5	Alternativa di Fredholm . . . . .	130
5.6	Dal teorema spettrale dell'Algebra Lineare al teorema spettrale di Hilbert-Schmidt . . . . .	131
5.6.1	Diagonalizzazione in dimensione finita . . . . .	131
5.7	Risolvente e spettro di un operatore lineare limitato . . . . .	132
5.8	Spettro di un operatore lineare compatto . . . . .	137
5.9	Limitazioni per lo spettro di un operatore lineare autoaggiunto . . . . .	139
5.10	Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt per operatori compatti autoaggiunti su spazi di Hilbert reali separabili . . . . .	143
5.10.1	Diagonalizzazione in dimensione infinita . . . . .	145
5.11	Esercizi proposti per i capitoli 1 – 5. . . . .	147
<b>6</b>	<b>Principi del max-min.</b>	
	<b>Teoria di Sturm-Liouville.</b>	<b>179</b>
6.1	Operatori positivi e Principi del max-min di Fischer-Courant. Metodo di Rayleigh-Ritz. . . . .	179
6.2	Problemi autoaggiunti agli autovalori in intervalli compatti . . . . .	184

6.2.1	Proprietà spettrali del sistema di Sturm-Liouville con condizioni omogenee di Dirichlet e caratterizzazione variazionale degli autovalori . . . . .	198
6.3	Esempi di problemi agli autovalori . . . . .	201
6.3.1	Approssimazioni . . . . .	210
6.4	Analisi spettrale dell'operatore di Laplace con condizione omogenea di Dirichlet . . . . .	212
6.5	Caratterizzazione variazionale degli autovalori . . . . .	218
6.6	Molteplicità e proprietà asintotiche degli autovalori dell'operatore di Laplace-Dirichlet . . . . .	219
6.7	Il riarrangiamento di Schwarz . . . . .	223
6.8	Teorema di Faber-Krahn . . . . .	225
6.9	Uno sguardo all'analisi spettrale dell'equazione biarmonica con condizioni omogenee di Dirichlet. . . . .	226
6.10	Conggettura di Rayleigh per la piastra fissa al bordo ("incastrata")	227
<b>7</b>	<b>Teoria dei Semigruppì di operatori lineari</b>	<b>229</b>
7.1	Semigruppì e semigruppì di contrazione: proprietà differenziali. Generatori. . . . .	229
7.2	Proprietà dei generatori . . . . .	233
7.3	Risolventi e proprietà . . . . .	235
7.4	Teorema (di Hille-Yosida) di esistenza (ed unicità) del semigruppì di contrazione generato da un operatore lineare . . . . .	238
<b>8</b>	<b>Applicazione a due prototipi dei problemi <i>evolutivi</i> relativi all'Equazione del calore e all'Equazione delle onde.</b>	<b>245</b>
8.1	Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore . . . . .	245
8.1.1	Esempio unidimensionale: conduzione termica in una barra con gli estremi fissi . . . . .	250
8.2	Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde . . . . .	251
8.2.1	Esempio unidimensionale: movimenti di una corda omogenea con gli estremi fissi . . . . .	256
8.3	Esercizi proposti per i Capitoli 6-8 . . . . .	256

