

UNIVERSITÀ DEL SALENTO  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA  
“ENNIO DE GIORGI”

**Michele Carriero**  
**Alessandro Carbotti**  
**Simone Cito**

ELEMENTI DI  
ANALISI FUNZIONALE LINEARE



**Quaderno 1/2021**  
**Università del Salento - Coordinamento SIBA**

# QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA “ENNIO DE GIORGI”  
UNIVERSITÀ DEL SALENTO

---

## Comitato di Redazione

Angela Albanese  
Francesco Catino  
Domenico Perrone

---

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi” della Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell’attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

- (1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
- (2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
- (3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all’approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 1/2021:

Università del Salento - Coordinamento SIBA

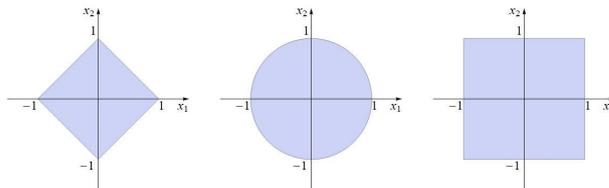
eISBN: 978-88-8305-173-9

Dipartimento di Matematica e Fisica  
“Ennio De Giorgi”  
Università del Salento

# Elementi di ANALISI FUNZIONALE LINEARE

*con Applicazioni alla teoria di Sturm-Liouville,  
all'Analisi Spettrale dell'operatore di Laplace,  
alla teoria dei Semigruppì contrattivi di operatori lineari*

Michele Carriero <sup>1</sup>  
Alessandro Carbotti  
Simone Cito



---

<sup>1</sup>michele.carriero@unisalento.it;  
alessandro.carbotti@unisalento.it;  
simone.cito@unisalento.it



# Prefazione

Queste note, preparate principalmente per gli Studenti di Matematica, di Fisica, di Ingegneria e di altre discipline scientifiche, riproducono (nei Capitoli da 1 a 5) una versione ampliata delle lezioni da me tenute nel Corso di Istituzioni di Analisi Superiore I, per la Laurea Magistrale in Matematica (Università del Salento).

L'intento principale è quello di esporre, per quanto possibile in modo chiaro, breve e autosufficiente, una introduzione al linguaggio e ai metodi dell'Analisi Funzionale Lineare, con particolare attenzione ai teoremi fondamentali della Geometria degli spazi di Banach, alla teoria degli operatori lineari limitati, autoaggiunti, compatti, alla Teoria di Fredholm e al Teorema Spettrale di Hilbert-Schmidt in spazi di Hilbert reali, separabili per operatori lineari, compatti e autoaggiunti (generalizzazione in spazi a dimensione infinita del classico risultato di Algebra Lineare, il Teorema Spettrale, che afferma che ogni matrice reale, simmetrica è diagonalizzabile).

Relativamente alla teoria presentata nei primi cinque capitoli, sono proposti diversi Esercizi (quasi tutti svolti).

Nel Capitolo 6 sono trattate alcune applicazioni del Teorema Spettrale di Hilbert-Schmidt: i Principi di Min-Max (di Courant) e Max-Min (di Fischer) per autovalori, la Teoria di Sturm-Liouville, illustrata con vari Esempi (svolti) di differenti problemi agli autovalori, e l'Analisi Spettrale dell'operatore di Laplace.

Il Capitolo 7 è dedicato alla teoria dei Semigrupperi contrattivi di operatori lineari, e all'importante Teorema di Hille-Yosida.

Allo scopo di illustrare come i risultati astratti di Analisi Funzionale possono essere applicati per risolvere problemi relativi alle Equazioni alle Derivate Parziali, nel Capitolo 8 è presentato, utilizzando il Teorema di Hille-Yosida, il metodo funzionale analitico alternativo (ai metodi sviluppati, ad esempio, in [5], [13], [2], [7]) per lo studio di due problemi (evolutivi) di Cauchy-Dirichlet relativi all'equazione del calore e all'equazione delle onde.

Anche relativamente alla teoria presentata negli ultimi tre capitoli 6-8, sono proposti alcuni Esercizi (in parte svolti).

In questa esposizione, l'introduzione all'Analisi Funzionale Lineare con al-

cune applicazioni è sviluppata partendo da tecniche e noti risultati classici sia dell'Algebra Lineare che dell'Analisi Reale *in spazi a dimensione finita*, per motivare e coerentemente sviluppare le possibili "estensioni" *in spazi a dimensione infinita*.

Non vi è la pretesa di aver esposto gli argomenti in modo completamente originale, la trattazione essendo largamente ispirata ai testi indicati in Bibliografia.

Con questo *Quaderno* si vuole fornire a Dottorandi e Studenti una *trattazione-guida* su specifici argomenti di Analisi Funzionale di base, che possa essere utile e di orientamento per successivi approfondimenti su testi avanzati esistenti in letteratura.

È stato indispensabile il ruolo svolto dai Dottori (in Matematica) S. Cito e A. Carbotti, i quali, con competenza e impegno hanno con me realizzato questa veste tipografica, contribuendo anche criticamente alla esposizione degli argomenti qui trattati, sulla base dei miei appunti. A loro due esprimo la mia sincera gratitudine.

La redazione degli argomenti qui presentati è, pertanto, il risultato dell'impegno comune di noi tre, Simone, Alessandro e me.

Inutile sottolineare, comunque, che la responsabilità di ogni (possibile) errore è solo mia.

Ringrazio anticipatamente coloro i quali vorranno segnalarmi errori tipografici o di contenuto.

Lecce, marzo 2021

M. Carriero



Alla memoria di mia Madre e di mio Padre

M. Carriero

# Indice

<b>1</b>	<b>Spazi di Banach</b>	<b>11</b>
1.1	Alcuni richiami e definizioni . . . . .	11
1.2	Serie in uno spazio normato e teorema di completezza . . . . .	18
1.3	Spazio quoziente e completezza . . . . .	20
1.4	Esempi di spazi di Banach . . . . .	22
1.4.1	Lo spazio $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \ \cdot\ _\infty)$ . . . . .	22
1.4.2	Lo spazio $(l^\infty, \ \cdot\ _{l^\infty})$ . . . . .	23
1.4.3	Lo spazio $(l^p, \ \cdot\ _{l^p})$ ( $1 \leq p < \infty$ ) . . . . .	24
1.4.4	Gli spazi $(c_0, \ \cdot\ _{l^\infty})$ e $(c, \ \cdot\ _{l^\infty})$ . . . . .	29
1.5	Teorema del completamento di uno spazio normato . . . . .	31
1.6	Operatori lineari, limitati . . . . .	33
1.7	Norme equivalenti. Spazi a dimensione finita . . . . .	37
1.8	Insiemi compatti. Spazi localmente compatti. . . . .	40
<b>2</b>	<b>Spazi di Hilbert</b>	<b>43</b>
2.1	Spazi di Hilbert (Spazi con prodotto scalare) . . . . .	43
2.2	Proiezione su un convesso chiuso . . . . .	47
2.3	Duale di uno spazio di Hilbert. Teorema (di Riesz-Fréchet) di rappresentazione dei funzionali lineari e continui . . . . .	51
2.4	Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt . . . . .	54
2.5	Somme di Hilbert. Basi hilbertiane ortonormali (sistemi ortonormali completi) . . . . .	55
2.6	Basi ortonormali e Serie di Fourier complesse nello spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ , . . . . .	61
2.7	Operatori strettamente positivi e Teorema di invertibilità . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Spazio duale. Convergenze (sequenziali) debole e debole*</b>	<b>65</b>
3.1	Convergenze (sequenziali) debole, debole* e proprietà . . . . .	68
3.2	Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki . . . . .	71
3.3	Convergenza debole e compattezza debole in uno spazio di Hilbert: estensione del Teorema di Bolzano-Weierstrass. . . . .	75

3.4	Compattezza in spazi di funzioni continue: il Teorema di Ascoli-Arzelà . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Teoremi di estensione per funzionali lineari, lineari limitati e conseguenze</b>	<b>79</b>
4.1	Teoremi di Hahn-Banach (forma analitica) . . . . .	79
4.1.1	Alcune importanti conseguenze del Teorema di Hahn-Banach . . . . .	84
4.2	Le forme geometriche del teorema di Hahn-Banach: Separazione di insiemi convessi. . . . .	85
4.3	Riflessività. Compattezza debole in uno spazio riflessivo . . . . .	86
4.3.1	Dualità, separabilità e riflessività per spazi di successioni . . . . .	91
4.4	Teorema di Baire-Hausdorff . . . . .	100
4.5	Principio di uniforme limitatezza . . . . .	101
4.6	Teorema dell'applicazione aperta e di limitatezza dell'operatore inverso . . . . .	105
4.7	Teorema del grafico chiuso . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Teoria di Fredholm. Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt</b>	<b>111</b>
5.1	Operatori aggiunti e proprietà. Operatori autoaggiunti (simmetrici) su spazi di Hilbert reali . . . . .	111
5.2	Operatori compatti e proprietà . . . . .	114
5.3	Dai sistemi di equazioni algebriche lineari alla teoria di Fredholm . . . . .	124
5.4	Teoria di Fredholm . . . . .	125
5.5	Alternativa di Fredholm . . . . .	130
5.6	Dal teorema spettrale dell'Algebra Lineare al teorema spettrale di Hilbert-Schmidt . . . . .	131
5.6.1	Diagonalizzazione in dimensione finita . . . . .	131
5.7	Risolvente e spettro di un operatore lineare limitato . . . . .	132
5.8	Spettro di un operatore lineare compatto . . . . .	137
5.9	Limitazioni per lo spettro di un operatore lineare autoaggiunto . . . . .	139
5.10	Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt per operatori compatti autoaggiunti su spazi di Hilbert reali separabili . . . . .	143
5.10.1	Diagonalizzazione in dimensione infinita . . . . .	145
5.11	Esercizi proposti per i capitoli 1 – 5. . . . .	147
<b>6</b>	<b>Principi del max-min.</b>	
	<b>Teoria di Sturm-Liouville.</b>	<b>179</b>
6.1	Operatori positivi e Principi del max-min di Fischer-Courant. Metodo di Rayleigh-Ritz. . . . .	179
6.2	Problemi autoaggiunti agli autovalori in intervalli compatti . . . . .	184

6.2.1	Proprietà spettrali del sistema di Sturm-Liouville con condizioni omogenee di Dirichlet e caratterizzazione variazionale degli autovalori . . . . .	198
6.3	Esempi di problemi agli autovalori . . . . .	201
6.3.1	Approssimazioni . . . . .	210
6.4	Analisi spettrale dell'operatore di Laplace con condizione omogenea di Dirichlet . . . . .	212
6.5	Caratterizzazione variazionale degli autovalori . . . . .	218
6.6	Molteplicità e proprietà asintotiche degli autovalori dell'operatore di Laplace-Dirichlet . . . . .	219
6.7	Il riarrangiamento di Schwarz . . . . .	223
6.8	Teorema di Faber-Krahn . . . . .	225
6.9	Uno sguardo all'analisi spettrale dell'equazione biarmonica con condizioni omogenee di Dirichlet. . . . .	226
6.10	Conggettura di Rayleigh per la piastra fissa al bordo ("incastrata")	227
<b>7</b>	<b>Teoria dei Semigruppì di operatori lineari</b>	<b>229</b>
7.1	Semigruppì e semigruppì di contrazione: proprietà differenziali. Generatori. . . . .	229
7.2	Proprietà dei generatori . . . . .	233
7.3	Risolventi e proprietà . . . . .	235
7.4	Teorema (di Hille-Yosida) di esistenza (ed unicità) del semigruppì di contrazione generato da un operatore lineare . . . . .	238
<b>8</b>	<b>Applicazione a due prototipi dei problemi <i>evolutivi</i> relativi all'Equazione del calore e all'Equazione delle onde.</b>	<b>245</b>
8.1	Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore . . . . .	245
8.1.1	Esempio unidimensionale: conduzione termica in una barra con gli estremi fissi . . . . .	250
8.2	Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde . . . . .	251
8.2.1	Esempio unidimensionale: movimenti di una corda omogenea con gli estremi fissi . . . . .	256
8.3	Esercizi proposti per i Capitoli 6-8 . . . . .	256



# Capitolo 1

## Spazi di Banach

In questo capitolo richiameremo alcuni fatti noti sugli spazi vettoriali  $X$  normati, introducendo alcuni dei risultati fondamentali di teoria degli spazi di Banach. Tratteremo spazi vettoriali sul campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$  e dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ ; quando tratteremo di  $X$  senza distinzione dei due casi, diremo che  $X$  è spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ . Indicheremo con  $+$  e  $\cdot$  le usuali operazioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare.

### 1.1 Alcuni richiami e definizioni

**Definizione 1.1.1** (spazio vettoriale normato). Sia  $X$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ . Una funzione

$$\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty[$$

si dice *norma* su  $X$  se soddisfa le condizioni

$$(N_1) \quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ (annullamento);}$$

$$(N_2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X \text{ (omogeneità);}$$

$$(N_3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X \text{ (disuguaglianza triangolare).}$$

Inoltre, da 1.1.1( $N_2$ ) segue che  $\|-x\| = \|x\|$  per ogni  $x \in X$  e, da 1.1.1( $N_3$ ) si ha

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in X. \quad (1.1)$$

Uno spazio vettoriale dotato di una norma si dice *spazio vettoriale normato*.

Osserviamo che un sottospazio vettoriale  $Y$  di uno spazio vettoriale normato  $X$  è anch'esso uno spazio normato con norma indotta dalla restrizione della norma di  $X$  ad  $Y$ .

Nel seguito, quando necessario, per evidenziare la norma definita sullo spazio  $X$ , useremo il simbolo  $\|\cdot\|_X$ .

**Esempio 1.1.2 (gli spazi  $\mathbb{K}^N$ ).** Lo spazio  $\mathbb{R}$  è normato con la norma del valore assoluto e lo spazio  $\mathbb{C}$  è normato con la norma del modulo. In generale, per ogni  $N \in \mathbb{N}$  e  $p \in [1, \infty]$ ,  $\mathbb{K}^N$  è spazio normato con la *norma-p*  $\|\cdot\|_p$  definita da

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^p\right)^{1/p} & \text{se } p \in [1, \infty[, \\ \max_{j=1, \dots, N} |x_j| & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

dove  $x = (x_1, \dots, x_N)$ .

**Osservazione 1.1.3.** Uno spazio normato  $X$  è anche uno spazio metrico, con distanza

$$d: X \times X \rightarrow [0, +\infty[, \\ (x, y) \mapsto d(x, y) := \|x - y\|.$$

È evidente che  $d$  soddisfa, per ogni  $x, y, z \in X$

$$(D_1) \quad d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y;$$

$$(D_2) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(D_3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Inoltre, la distanza  $d$  è invariante per traslazione, positivamente omogenea e ogni palla aperta

$$B(x_0, r) := \{x \in X; d(x, x_0) < r\}$$

di centro  $x_0 \in X$  e raggio  $r > 0$  è un insieme convesso. Infatti, (senza ledere la generalità, tenuto conto dell'invarianza per traslazioni) per ogni  $x, y \in B(0, r)$  e  $\vartheta \in [0, 1]$ :

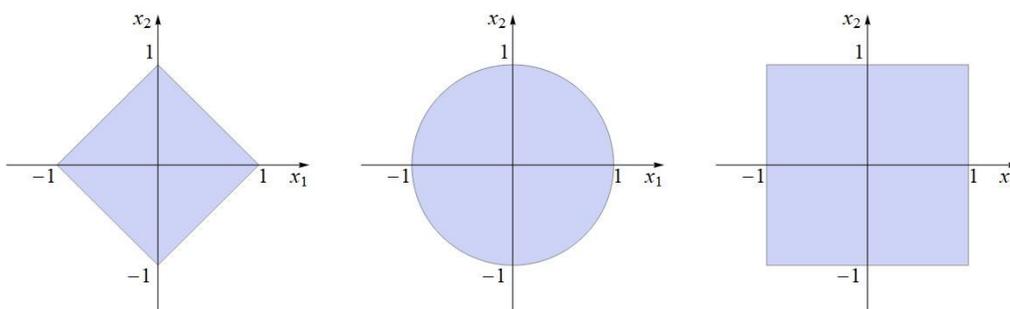
$$\|\vartheta x + (1 - \vartheta)y\| \leq \vartheta\|x\| + (1 - \vartheta)\|y\| < \vartheta r + (1 - \vartheta)r = r,$$

quindi  $\vartheta x + (1 - \vartheta)y \in B(0, r)$ .

Gli spazi normati di dimensione finita  $N$  su  $\mathbb{K}$  sono omeomorfi a  $\mathbb{K}^N$  dotato di una delle norme (equivalenti) descritte in 1.1.2 (cfr. Teorema 1.7.3 e Corollario 1.7.5).

Ma, generalmente, nelle applicazioni intervengono spazi normati di dimensione infinita.

**Definizione 1.1.4** (vettori linearmente dipendenti e indipendenti, basi, dimensione finita e infinita). Sia  $X$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ . I vettori



**Figura 1.1:** Da sinistra a destra, le palle unitarie in  $\mathbb{R}^2$  rispetto alle norme  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  e  $\|\cdot\|_\infty$ .

$x_1, \dots, x_N \in X$  si dicono *linearmente dipendenti* se esistono  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{K}$  non tutti nulli tali che

$$a_1x_1 + \dots + a_Nx_N = 0.$$

I vettori  $x_1, \dots, x_N \in X$  si dicono *linearmente indipendenti* se non sono linearmente dipendenti. Perciò, per tali vettori,

$$a_1x_1 + \dots + a_Nx_N = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_N = 0.$$

Sia  $A \subseteq X$  un insieme di vettori con infiniti elementi. I vettori di  $A$  si dicono linearmente indipendenti se, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e ogni  $k$ -pla  $x_1, \dots, x_k$  di vettori in  $A$ ,  $x_1, \dots, x_k$  sono linearmente indipendenti.

Se nello spazio  $X$  si possono trovare  $N$  elementi linearmente indipendenti e se  $N + 1$  elementi qualsiasi sono linearmente dipendenti, si dice che lo spazio ha *dimensione finita*  $N$ . Se, invece, in  $X$  si può trovare un numero finito qualsiasi di vettori linearmente indipendenti, allora si dice che lo spazio  $X$  ha *dimensione infinita*.

Ogni sistema  $u_1, \dots, u_N$  di  $N$  vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale  $X$  di dimensione finita  $N$  si chiama *base* di  $X$ . Ogni vettore  $x \in X$  può essere rappresentato univocamente come combinazione lineare dei vettori della base  $u_1, \dots, u_N$ , cioè esiste un'unica  $N$ -pla  $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{K}^N$  tale che

$$x = \sum_{i=1}^N a_i u_i.$$

Sia  $M \subseteq X$ ; si definisce *inviluppo lineare dell'insieme*  $M$ , e si indica con  $\text{span } M$ , l'insieme di tutte le combinazioni lineari *finite* di vettori di  $M$ .

**Esempio 1.1.5 (lo spazio  $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ ).** Per ogni intervallo compatto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , indichiamo con  $C^0([a, b]; \mathbb{R})$  l'insieme delle funzioni continue su

$[a, b]$  a valori reali.  $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ , munito delle operazioni canoniche di somma tra funzioni e moltiplicazione di una funzione per un numero reale, è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Osserviamo che  $C^0([a, b]; \mathbb{R})$  ha dimensione infinita, poiché esiste in  $C^0([a, b]; \mathbb{R})$  l'insieme infinito di funzioni  $t^j : j \in \mathbb{N}$ , linearmente indipendenti in virtù del Principio d'Identità dei polinomi. Definiamo su  $C^0([a, b]; \mathbb{R})$  la seguente funzione non negativa

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : C^0([a, b]; \mathbb{R}) &\rightarrow [0, +\infty[, \\ f &\mapsto \|f\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|. \end{aligned}$$

Tale funzione è ben posta, grazie al Teorema di Weierstrass su massimi e minimi di funzioni reali continue su compatti. Inoltre, da proprietà note di massimi e minimi di funzioni reali, possiamo osservare che  $\|\cdot\|_\infty$  verifica le proprietà 1.1.1( $N_1$ ), ( $N_2$ ) e ( $N_3$ ). Pertanto essa è una norma su  $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ , detta anche *norma del massimo* (o *norma uniforme* o ancora *norma- $\infty$* ).

In maniera analoga, dato un insieme compatto  $K$  di uno spazio metrico, si può definire lo spazio vettoriale  $C^0(K; \mathbb{R})$  delle funzioni reali continue su  $K$  munito della norma del massimo.

La distanza  $d(x, y) = \|x - y\|_X$  determina una topologia sullo spazio vettoriale  $X$ .

**Definizione 1.1.6.** Sia  $A \subset X$ .

Un punto  $x_0 \in A$  è detto *punto interno* ad  $A$  se esiste  $r > 0$  tale che  $B(x_0, r) \subset A$ .  $A$  è *aperto* se tutti i suoi punti sono interni.

L'*interno* di un insieme  $A$ , indicato con  $\overset{\circ}{A}$ , è il più grande insieme aperto contenuto in  $A$ .

Un punto  $x_0 \in X$  è detto *punto di accumulazione* per  $A$  ( $x_0$  non necessariamente appartiene ad  $A$ ) se ogni palla  $B(x_0, r)$  contiene almeno un punto di  $A$  diverso da  $x_0$ .  $C \subseteq X$  è *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

La *chiusura* di un insieme  $A$ , indicata con  $\overline{A}$ , è il più piccolo insieme chiuso contenente  $A$ .

**Definizione 1.1.7 (insieme denso in uno spazio normato e spazio separabile).** Un sottoinsieme  $S \subseteq X$  è *denso* in  $X$  se  $\overline{S} = X$ .

Uno spazio normato  $X$  è *separabile* se esiste un sottoinsieme numerabile denso in  $X$ .

Ad esempio,  $\mathbb{R}$  è separabile, essendo l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei razionali numerabile e denso in  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 1.1.8 (successione convergente).** Sia  $X$  uno spazio normato. Una successione  $(x_n)_n \subset X$  si dice convergente a  $x \in X$  e si scrive  $x_n \rightarrow x$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

cioè se la successione numerica  $\|x_n - x\|$  è infinitesima.

Si prova che un insieme  $A$  è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le successioni convergenti  $(x_n)_n \subset A$ .

**Osservazione 1.1.9.** Da 1.1 si ha

$$\left| \|x_n\| - \|x\| \right| \leq \|x_n - x\|,$$

quindi se il secondo membro è infinitesimo, lo è anche il primo. In altre parole, la norma è continua rispetto alla convergenza di successioni, ovvero se  $x_n \rightarrow x$ , allora  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ .

Come nel caso di  $\mathbb{R}^N$ , continuano a valere i teoremi di unicità e linearità del limite.

Prima di introdurre la nozione di completezza negli spazi normati, richiamiamo i concetti di limitatezza e continuità.

**Definizione 1.1.10 (limitatezza).** Sia  $X$  uno spazio normato. Si dice che un insieme  $A \subset X$  è *limitato* se esiste  $M \geq 0$  tale che

$$\|x\| \leq M \quad \forall x \in A.$$

Si dice che una *successione*  $(x_n)_n$  è *limitata* se esiste  $M \geq 0$  tale che

$$\|x_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si dimostra che ogni successione convergente in uno spazio normato è anche limitata.

**Definizione 1.1.11 (funzioni continue tra spazi normati).** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi normati,  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$  e  $x_0 \in A$ . Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice *continua in*  $x_0$  se, per ogni successione  $(x_n)_n \subset A$  convergente in  $X$  a  $x_0$  si ha che la successione  $(f(x_n))_n$  converge a  $f(x_0)$  in  $Y$ , cioè

$$\|x_n - x_0\|_X \rightarrow 0 \Rightarrow \|f(x_n) - f(x_0)\|_Y \rightarrow 0.$$

Si dice che  $f$  è *continua in*  $A$  se è continua in  $x$  per ogni  $x \in A$ , cioè, in termini di  $\varepsilon$  e  $\delta$ , per ogni  $x \in X$ ,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x' \in X, \|x' - x\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x') - f(x)\|_Y < \varepsilon.$$

**Definizione 1.1.12 (successione di Cauchy).** Sia  $X$  uno spazio normato. Una successione  $(x_n)_n \subset X$  si dice *di Cauchy* se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $m, n \geq \nu$ , risulta

$$\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

È evidente che ogni successione convergente è di Cauchy.

**Proposizione 1.1.13 (proprietà delle successioni di Cauchy).**

*Sia  $(x_n)_n$  una successione di Cauchy in uno spazio normato  $X$ . Valgono le seguenti proprietà:*

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$  esiste finito;
- (ii)  $(x_n)_n$  è limitata;
- (iii) se  $(x_n)_n$  ha una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k$  che converge ad un vettore  $x \in X$ , allora la successione  $(x_n)_n$  converge a  $x$ ;
- (iv) esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$  tale che

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Dimostrazione.*

- (i) Per 1.1, risulta

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\|;$$

di conseguenza la successione di numeri reali  $(\|x_n\|)_n$  è di Cauchy in  $\mathbb{R}$ , quindi convergente.

- (ii) La limitatezza di  $(x_n)_n$  segue dal fatto che  $(\|x_n\|)_n$  è convergente in  $\mathbb{R}$  (punto (i) precedente), quindi limitata.

- (iii) Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $m, n \geq \nu$ , si abbia

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e sia  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $k \geq k_0$ ,

$$\|x_{n_k} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Scelto  $k_1 > k_0$  tale che  $n_{k_1} > \nu$ , si ha, per ogni  $n > n_{k_1}$

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_{k_1}}\| + \|x_{n_{k_1}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iv) Sia  $n_1 \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $m, n \geq n_1$

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2}.$$

Successivamente, sia  $n_2 > n_1$  tale che, per ogni  $m, n \geq n_2$

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^2}.$$

Così procedendo si consegue la tesi.

□

In Analisi, “nella costruzione di oggetti con interessanti proprietà” attraverso passaggi al limite, occorrono spazi normati **completi** nel senso della definizione seguente.

**Definizione 1.1.14 (Spazio di Banach).** Uno spazio normato  $X$  è *completo* (è uno *spazio di Banach*) se ogni successione di Cauchy è convergente ad un  $x \in X$ .

**Osservazione 1.1.15.** Sia  $X$  uno spazio di Banach e sia  $X_0$  un suo sottospazio. Si ha

$$(X_0 \text{ spazio di Banach}) \Leftrightarrow (X_0 \text{ sottospazio chiuso}).$$

Infatti, se  $X_0$  è uno spazio di Banach e consideriamo  $(x_n)_n \subset X_0$ ,  $x_n \rightarrow x_0 \in X$ , poiché  $(x_n)_n$  è successione di Cauchy in  $X_0$ , essa converge verso un  $y_0 \in X_0$ . Dunque risulta  $x_0 = y_0 \in X_0$  e pertanto  $X_0$  è sottospazio chiuso, in quanto contiene il limite di una sua qualunque successione convergente.

Viceversa, sia  $X_0$  sottospazio chiuso di  $X$  e  $(x_n)_n \subset X_0$  una successione di Cauchy. Poiché  $X$  è uno spazio di Banach, esiste  $\bar{x} \in X$  tale che  $x_n \rightarrow \bar{x}$ . Essendo  $X_0$  sottospazio chiuso e  $(x_n)_n \subset X_0$ , allora anche  $\bar{x} \in X_0$ . Pertanto  $X_0$  è uno spazio di Banach.

**Osservazione 1.1.16.** In generale, i passi da seguire per provare la completezza di uno spazio normato  $(X, \|\cdot\|)$ , sono tre:

- (i) per un'arbitraria successione  $(x_n)_n \subset X$  di Cauchy, individuare un “ipotetico” elemento  $x$  che ci si aspetta possa essere il limite di  $(x_n)_n$ ;
- (ii) provare che  $x \in X$ ;
- (iii) provare che  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

## 1.2 Serie in uno spazio normato e teorema di completezza

Introduciamo la nozione di serie in uno spazio normato, di somma di una serie e di serie convergente.

**Definizione 1.2.1.** Sia  $X$  uno spazio normato e sia  $(x_n)_n \subset X$ . Definiamo successione delle somme parziali di  $(x_n)_n$  la successione  $(s_n)_n$  definita da

$$s_n := \sum_{j=1}^n x_j.$$

Se  $(s_n)_n$  converge in  $X$ , allora il suo limite si dice somma della serie di termine generale  $x_n$  e si indica con il consueto simbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

In tal caso si dice che la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  è convergente in  $X$ .

**Osservazione 1.2.2.** Viene da chiedersi se, sostituendo il valore assoluto con la norma, in uno spazio normato  $X$  la convergenza assoluta di una serie implichi la convergenza in  $X$ , ovvero se la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$$

implichi la convergenza in  $X$  della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Questo è vero in  $\mathbb{K}$  in quanto  $\mathbb{K}$  è completo; vedremo, nel successivo Teorema, che la completezza di  $X$  è condizione necessaria e sufficiente affinché la convergenza assoluta implichi la convergenza in  $X$ .

**Teorema 1.2.3.** *Sia  $(X, \|\cdot\|)$  spazio di Banach e sia  $(x_n)_n$  una successione di elementi di  $X$ . Se la serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$$

è convergente, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

è convergente in  $X$ .

Viceversa, se  $(X, \|\cdot\|)$  è uno spazio normato e ogni serie assolutamente convergente è convergente, allora  $X$  è spazio di Banach.

*Dimostrazione.* Sia  $(X, \|\cdot\|)$  spazio di Banach e sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$  convergente.

Proviamo che la successione  $(s_n)_n$  delle somme parziali, definita da

$$s_n := \sum_{j=1}^n x_j,$$

è di Cauchy. Per ogni  $m > n$  risulta

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^m x_j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^m \|x_j\|.$$

Dunque, per il Criterio di Cauchy sulle serie a termini reali e per la completezza di  $X$ ,  $(s_n)_n$  converge alla somma della serie degli  $x_n$ .

Viceversa, sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato tale che ogni serie assolutamente convergente è anche convergente e proviamo che esso è completo. Sia  $(x_n)_n$  di Cauchy in  $X$  e dimostriamone la convergenza. Per 1.1.13(iv), esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k$  tale che, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , risulti

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pertanto, la serie telescopica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]$$

converge a  $\bar{x} \in X$ . Osservato che

$$\sum_{j=1}^M [x_{n_{j+1}} - x_{n_j}] = x_{n_{M+1}} - x_{n_1},$$

ne segue che l'estratta  $(x_{n_{k+1}})_k$  converge a  $\bar{x} + x_{n_1}$ ; da 1.1.13(iii) otteniamo la convergenza di  $(x_n)_n$ , completando la dimostrazione.  $\square$

Questo teorema fornisce, dunque, un utile criterio per stabilire se uno spazio normato sia completo o meno.

### 1.3 Spazio quoziente e completezza

Sia  $X_0$  un sottospazio dello spazio vettoriale  $X$ . Consideriamo la collezione di sottoinsiemi

$$\{[x] := x + X_0; x \in X\}.$$

Gli insiemi  $[x]$  si chiamano classi di equivalenza di  $X$  (modulo  $X_0$ ); osserviamo che due classi di equivalenza  $[x]$  e  $[y]$  o coincidono o sono disgiunte. Infatti, supponendo che esista  $z \in [x] \cap [y]$ , si avrebbe  $z - x \in X_0$  e  $z - y \in X_0$ , da cui, per la struttura lineare di  $X_0$ , otterremmo  $y - x = (z - x) - (z - y) \in X_0$ . Proviamo che in questa situazione  $[x] = [y]$ . Sia  $a \in [x]$ ; allora  $a - x \in X_0$  e, ancora per linearità,  $a - y = (a - x) - (y - x) \in X_0$ . Pertanto  $a \in [y]$  e dunque  $[x] \subseteq [y]$ ; provando in maniera analoga l'inclusione inversa si ottiene l'uguaglianza; in particolare, osserviamo che

$$[x] = [y] \Leftrightarrow x - y \in X_0.$$

Denotiamo con  $X/X_0$  la collezione di tutte le classi di equivalenza  $[x]$  ( modulo  $X_0$ ) e muniamola di una struttura lineare definendo in maniera naturale le operazioni

$$[x] + [y] := [x + y], \quad a[x] := [ax].$$

Osserviamo che  $[0] = X_0$  è lo zero di  $X/X_0$ , pertanto  $X/X_0$  è uno spazio vettoriale, detto spazio quoziente di  $X$  rispetto a  $X_0$ .

**Proposizione 1.3.1.** *Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato e sia  $X_0$  un sottospazio chiuso di  $X$ . Allora lo spazio quoziente  $X/X_0$  è normato con*

$$\|[x]\|_{X/X_0} = \inf_{y \in X_0} \|x - y\|_X = \inf_{y \in X_0} \|x + y\|_X = \inf_{z \in [x]} \|z\|_X. \quad (1.2)$$

*Dimostrazione.* Proviamo che 1.2 è una norma su  $X/X_0$  (per brevità ometteremo lo spazio di riferimento al pedice, laddove non necessario).

( $N_1$ ) Se  $\|[x]\| = 0$ , allora esiste una successione  $y_n \in X_0$  tale che  $y_n \rightarrow x$ . Ma allora, poiché  $X_0$  è chiuso,  $x \in X_0$ , cioè  $[x] = [0]$ .

( $N_2$ ) 1.2 è omogenea poiché  $X_0$  è spazio vettoriale.

( $N_3$ ) Per provare la disuguaglianza triangolare, considerati  $x, y \in X$  e fissato  $\varepsilon > 0$ , per le proprietà dell'estremo inferiore esistono  $z_1, z_2 \in X_0$  tali che

$$\|x + z_1\| \leq \|[x]\| + \varepsilon, \quad \|y + z_2\| \leq \|[y]\| + \varepsilon.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \|[x] + [y]\| &= \inf_{z \in X_0} \|x + y + z\| \leq \|x + y + z_1 + z_2\| \\ &\leq \|x + z_1\| + \|y + z_2\| \leq \|[x]\| + \|[y]\| + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , si ha la disuguaglianza triangolare.

Da  $(N_1)$ ,  $(N_2)$ ,  $(N_3)$  segue che 1.2 è una norma su  $X/X_0$ .  $\square$

**Teorema 1.3.2.** *Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach e sia  $X_0$  un sottospazio chiuso di  $X$ . Allora lo spazio quoziente  $X/X_0$ , munito della norma 1.2, è uno spazio di Banach.*

*Dimostrazione.* In virtù della precedente Proposizione 1.3.1, è sufficiente provare che  $X/X_0$  munito della norma quoziente è completo. Sia  $(Y_n)_n$  una successione di Cauchy in  $X/X_0$ . Per 1.1.13(iii), è sufficiente provare che esiste una sottosuccessione convergente in  $X/X_0$ . Per 1.1.13(iv), passando ad una sottosuccessione (senza perdere di generalità, ancora indicata con  $(Y_n)_n$ ) per ogni  $n \in \mathbb{N}$  risulta

$$\|Y_{n+1} - Y_n\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Sia  $y_1 \in Y_1$  e prendiamo  $z_2 \in Y_2 - Y_1$  tale che

$$\|z_2\|_X \leq 2\|Y_2 - Y_1\|_{X/X_0}.$$

Posto  $y_2 := y_1 + z_2$ , risulta

$$\|y_2 - y_1\|_X \leq 2\|Y_2 - Y_1\|_{X/X_0},$$

con  $y_1 \in Y_1$  e  $y_2 \in Y_2$ . Con questo procedimento si ottiene una successione  $(y_n)_n$  tale che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_n \in Y_n$  e

$$\|y_{n+1} - y_n\|_X \leq 2\|Y_{n+1} - Y_n\|_{X/X_0}.$$

Per  $m \in \mathbb{N}$  t.c.  $m - 1 > n$ , si ha

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|_X &= \left\| \sum_{k=n}^{m-1} (y_{k+1} - y_k) \right\|_X \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|y_{k+1} - y_k\|_X \\ &\leq 2 \sum_{k=n}^{m-1} \|Y_{k+1} - Y_k\|_{X/X_0} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

L'ultimo membro tende a zero per  $n$  che tende a  $+\infty$ , quindi  $(y_n)_n$  è di Cauchy nello spazio completo  $X$  e dunque converge a qualche  $y_0 \in X$ . Posto  $Y_0 := [y_0]$ , si ha

$$\begin{aligned} \|Y_n - Y_0\|_{X/X_0} &= \|[y_n] - [y_0]\|_{X/X_0} = \|[y_n - y_0]\|_{X/X_0} \\ &\leq \|y_n - y_0\|_X \rightarrow 0, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione.  $\square$

## 1.4 Esempi di spazi di Banach

In questa sezione presenteremo alcuni spazi di Banach noti. Esamineremo nel dettaglio soprattutto spazi di dimensione infinita, ma per completezza forniamo anche il seguente esempio.

**Esempio 1.4.1**  $((\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p))$ . È già noto che  $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p)$  è spazio di Banach per ogni  $p \in [1, +\infty]$ .

### 1.4.1 Lo spazio $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Abbiamo visto che  $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio normato di dimensione infinita. Proviamone la completezza.

**Proposizione 1.4.2.**  $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach.

*Dimostrazione.* Sia  $(f_n)_n \subset C^0([a, b]; \mathbb{R})$  una successione di Cauchy rispetto alla norma della *convergenza uniforme*  $\|\cdot\|_\infty$ . Pertanto, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tale che

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall m, n \geq \nu,$$

cioè, per come è definita  $\|\cdot\|_\infty$ ,

$$\max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq \nu. \quad (1.3)$$

Ciò significa che, per ogni  $t \in [a, b]$  fissato, la successione numerica  $(f_n(t))_n$  è di Cauchy, dunque convergente in  $\mathbb{R}$ . In altre parole, esiste  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = f(t) \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, facendo tendere  $m$  all'infinito in 1.3, grazie alla continuità del valore assoluto, per  $n \geq \nu$  si ha

$$\max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Dunque  $(f_n)_n$  converge a  $f$  in norma-infinito e  $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ , essendo il limite uniforme delle funzioni continue  $f_n$ . Ciò prova la completezza di  $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  e quindi che è uno spazio di Banach.  $\square$

**Osservazione 1.4.3.** Se  $E$  è spazio metrico e  $K$  è un sottoinsieme compatto di  $E$  (cfr. 1.8), allora si prova in maniera analoga che  $(C^0(K; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach.

Nelle successive sezioni presenteremo esempi di spazi vettoriali che hanno come elementi delle successioni in  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Poiché dovremo considerare successioni di tali vettori, per chiarezza utilizzeremo la seguente notazione: con l'intero all'apice tra parentesi indicizzeremo la successione di vettori nello spazio normato, con quello al pedice indicizzeremo ciascun vettore (successione) della successione. In altre parole, l'oggetto  $x_n^{(k)}$  rappresenterà l' $n$ -simo termine del  $k$ -esimo vettore (ovvero successione)  $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_n$  della successione  $(x^{(k)})_k \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

### 1.4.2 Lo spazio $(l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty})$

**Definizione 1.4.4.** Definiamo *spazio  $l^\infty$  delle successioni limitate* l'insieme

$$l^\infty := \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$

che, con le usuali operazioni di somma (termine a termine) tra successioni e prodotto per uno scalare è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  (sottospazio proprio di  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ). Consideriamo ora la funzione

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{l^\infty} : l^\infty &\rightarrow [0, +\infty[, \\ x = (x_n)_n &\mapsto \|x\|_{l^\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|. \end{aligned}$$

Essa è ben definita su  $l^\infty$  e, in virtù delle proprietà dell'estremo superiore e del valore assoluto, essa è una norma su  $l^\infty$ .

Lo spazio normato appena definito è anche completo, come si prova nella seguente proposizione.

**Proposizione 1.4.5.**  $(l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty})$  è uno spazio di Banach.

*Dimostrazione.* Sia  $(x^{(k)})_k \subset l^\infty$  una successione di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_{l^\infty}$ ; risulta

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \|x^{(k)} - x^{(m)}\|_{l^\infty} \leq \varepsilon \quad \forall k, m \geq \nu$$

cioè, per come è definita la norma  $\|\cdot\|_{l^\infty}$ ,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \sup_n |x_n^{(k)} - x_n^{(m)}| \leq \varepsilon \quad \forall k, m \geq \nu. \quad (1.4)$$

Pertanto, fissato  $n \in \mathbb{N}$ , la successione  $(x_n^{(k)})_k$  è di Cauchy nello spazio completo  $\mathbb{K}$ , quindi converge ad un certo  $x_n$  per  $k$  che tende all'infinito. Posto

$x := (x_n)_n$ , proviamo che  $x \in l^\infty$ . Poiché, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ ,  $|x_j^{(k)} - x_j| \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ , scegliendo  $k$  sufficientemente grande si ha

$$|x_j| \leq |x_j^{(k)} - x_j| + |x_j^{(k)}| \leq 1 + \|x^{(k)}\|_{l^\infty} < C,$$

essendo  $(\|x^{(k)}\|_{l^\infty})_k$  limitata in virtù di 1.1.13(ii); pertanto  $\sup_j |x_j| < +\infty$ , quindi  $x = (x_n)_n \in l^\infty$ .

Rimane da provare che  $\|x^{(k)} - x\|_{l^\infty} \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Facendo tendere  $m \rightarrow +\infty$  in 1.4 si ha, fissato  $\varepsilon > 0$ ,

$$|x_n^{(k)} - x_n| \leq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq \nu(\varepsilon),$$

cioè

$$\|x^{(k)} - x\|_{l^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^{(k)} - x_n| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq \nu(\varepsilon),$$

da cui la tesi. □

### 1.4.3 Lo spazio $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ ( $1 \leq p < \infty$ )

**Definizione 1.4.6.** Sia  $1 \leq p < +\infty$ ; definiamo *insieme  $l^p$  delle successioni di potenza  $p$ -esima sommabile* l'insieme

$$l^p := \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

Consideriamo ora la funzione

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{l^p} : l^p &\rightarrow [0, +\infty[, \\ x = (x_n)_n &\mapsto \|x\|_{l^p} := \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Essa è ben definita su  $l^p$  e verifica le proprietà 1.1.1( $N_1$ ) (banalmente) e ( $N_2$ ) (se  $x \in l^p$ , anche  $\lambda x \in l^p$ , per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$ ).

Osserviamo che possiamo esprimere  $l^p$  nel seguente modo:

$$l^p := \{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_{l^p} < +\infty \}.$$

Per provare che  $l^p$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  va verificata la chiusura rispetto alla somma tra successioni, che non è immediata. Per dimostrare ciò e che  $\|\cdot\|_{l^p}$  verifica 1.1.1( $N_3$ ) (e quindi è una norma su  $l^p$ ), sono necessarie alcune disuguaglianze.

**Proposizione 1.4.7 (disuguaglianza di Young).** Siano  $p, p' \in ]1, +\infty[$  e tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Risulta

$$|a \cdot b| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

*Dimostrazione.* La 1.5 è banale se  $a = 0$  oppure  $b = 0$ . Siano allora  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Osserviamo che l'applicazione  $\log : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  è funzione reale concava; pertanto

$$\log \left( \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'} \right) \geq \frac{1}{p} \log(|a|^p) + \frac{1}{p'} \log(|b|^{p'}) = \log|a \cdot b|,$$

da cui, applicando la funzione esponenziale al primo e secondo membro, si ha la tesi.  $\square$

**Proposizione 1.4.8 (disuguaglianza discreta di Hölder).** Siano  $p, p' \in ]1, +\infty[$  e tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Se  $x = (x_n)_n \in l^p$  e  $y = (y_n)_n \in l^{p'}$ , allora  $xy = (x_n y_n)_n \in l^1$  e

$$\|xy\|_{l^1} \leq \|x\|_{l^p} \cdot \|y\|_{l^{p'}}, \quad (1.6)$$

cioè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|^{p'} \right)^{1/p'}$$

*Dimostrazione.* La 1.6 è banale se  $x = 0$  oppure  $y = 0$ . Siano, allora,  $x \in l^p \setminus \{0\}$  e  $y \in l^{p'} \setminus \{0\}$ ; pertanto  $\|x\|_{l^p} > 0$  e  $\|y\|_{l^{p'}} > 0$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , definiamo

$$x_n^* := \frac{x_n}{\|x\|_{l^p}}, \quad y_n^* := \frac{y_n}{\|y\|_{l^{p'}}}.$$

Per la disuguaglianza di Young (1.5)

$$|x_n^* \cdot y_n^*| \leq \frac{1}{p}|x_n^*|^p + \frac{1}{p'}|y_n^*|^{p'} = \frac{1}{p} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_{l^p}^p} + \frac{1}{p'} \frac{|y_n|^{p'}}{\|y\|_{l^{p'}}^{p'}}$$

da cui, sommando su  $n$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n|}{\|x\|_{l^p} \|y\|_{l^{p'}}} &\leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p}{\|x\|_{l^p}^p} + \frac{1}{p'} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|^{p'}}{\|y\|_{l^{p'}}^{p'}} = \frac{1}{p} \frac{\|x\|_{l^p}^p}{\|x\|_{l^p}^p} + \frac{1}{p'} \frac{\|y\|_{l^{p'}}^{p'}}{\|y\|_{l^{p'}}^{p'}} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_{l^p} \|y\|_{l^{p'}},$$

da cui  $xy \in l^1$  e  $\|xy\|_{l^1} \leq \|x\|_{l^p} \|y\|_{l^{p'}}$ .  $\square$

**Osservazione 1.4.9.** Se in (1.6) si ha  $p = p' = 2$ , essa prende il nome di *disuguaglianza di Cauchy-Schwartz*, in analogia al caso degli spazi normati euclidei  $\mathbb{R}^N$ .

Osserviamo inoltre che, se  $p = 1$  e  $p' = +\infty$ , (1.6) continua a valere. Infatti, se  $x = (x_n)_n \in l^1$  e  $y = (y_n)_n \in l^\infty$ , allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|y\|_{l^\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = \|x\|_{l^1} \|y\|_{l^\infty};$$

da cui  $xy \in l^1$  e  $\|xy\|_{l^1} \leq \|x\|_{l^1} \|y\|_{l^\infty}$ .

La seguente disuguaglianza, dimostrata in  $l^p$ , risulta essere valida anche negli spazi finito-dimensionali  $\mathbb{K}^N$  e permette di dimostrare che  $\|\cdot\|_p$  è una norma.

**Proposizione 1.4.10 (disuguaglianza discreta di Minkowski).** *Sia  $p \in [1, +\infty]$  e siano  $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in l^p$ . Allora  $x + y = (x_n + y_n)_n \in l^p$  e*

$$\|x + y\|_{l^p} \leq \|x\|_{l^p} + \|y\|_{l^p}, \quad (1.7)$$

*Dimostrazione.* Per  $p = 1$ , la tesi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|$$

segue dalla disuguaglianza triangolare per il valore assoluto (rispettivamente, per il modulo) in  $\mathbb{R}$  (rispettivamente, in  $\mathbb{C}$ ).

Per  $p = +\infty$ , la tesi

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n|$$

segue dalla disuguaglianza triangolare per il valore assoluto (rispettivamente, per il modulo) in  $\mathbb{R}$  (rispettivamente, in  $\mathbb{C}$ ) e dalla subadditività dell'estremo superiore.

Consideriamo allora il caso  $1 < p < +\infty$ . Si ha

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_{l^p}^p &= \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{p-1} (|x_n| + |y_n|) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{p-1} |x_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{p-1} |y_n| \\
&\leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{(p-1)p'} \right)^{1/p'} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \\
&\quad + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{(p-1)p'} \right)^{1/p'} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|^p \right)^{1/p}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder (1.6) ad entrambi gli addendi. Poiché

$$p' = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1},$$

si ha  $(p-1)p' = p$ . Da (1.8) si ottiene

$$\|x + y\|_{l^p}^p \leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p'} (\|x\|_{l^p} + \|y\|_{l^p}) = \|x + y\|_{l^p}^{p-1} (\|x\|_{l^p} + \|y\|_{l^p}),$$

da cui, dividendo primo e ultimo membro per  $\|x + y\|_{l^p}^{p-1}$ , si ottiene la tesi.  $\square$

**Osservazione 1.4.11.** Dalla disuguaglianza di Minkowski, segue che  $l^p$  è spazio vettoriale, più precisamente che è un sottospazio proprio di  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Infatti, per ogni  $x, y \in l^p$ , la somma  $x + y$  è tale che  $\|x + y\|_{l^p} < +\infty$ , pertanto  $x + y \in l^p$ . Quindi  $l^p$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Inoltre la disuguaglianza (1.7) rappresenta la disuguaglianza triangolare per  $\|\cdot\|_{l^p}$  (proprietà 1.1.1( $N_3$ ) della norma); dunque  $\|\cdot\|_{l^p}$  è una norma su  $l^p$ .

Lo spazio normato  $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$  è anche completo, come si prova nella seguente proposizione.

**Proposizione 1.4.12.** *Per ogni  $p \in [1, +\infty[$ ,  $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$  è uno spazio di Banach.*

*Dimostrazione.* Sia  $(x^{(k)})_k \subset l^p$  una successione di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_{l^p}$ ; risulta

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \|x^{(k)} - x^{(m)}\|_{l^p} \leq \varepsilon \quad \forall k, m \geq \nu$$

cioè, per come è definita la norma  $\|\cdot\|_{l^p}$ ,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(m)}|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall k, m \geq \nu. \quad (1.9)$$

In particolare, si ha

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(m)}| \leq \varepsilon \quad \forall k, m \geq \nu.$$

Allora, fissato  $n \in \mathbb{N}$ , la successione  $(x_n^{(k)})_k$  è di Cauchy nello spazio completo  $\mathbb{K}$ , quindi converge ad un certo  $x_n$  per  $k$  che tende all'infinito. Posto  $x := (x_n)_n$ , proviamo che  $x \in l^p$  e che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - x\|_{l^p} = 0$ .

Fissato  $M \in \mathbb{N}$ , si ha

$$\sum_{n=1}^M |x_n|^p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^M |x_n^{(k)}|^p \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)}\|_{l^p}^p \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x^{(k)}\|_{l^p}^p < C,$$

essendo  $(\|x^{(k)}\|_{l^p})_k$  limitata in virtù di 1.1.13(ii); pertanto, per l'arbitrarietà di  $M \in \mathbb{N}$ , si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty,$$

quindi  $x = (x_n)_n \in l^p$ .

Rimane da provare che  $\|x^{(k)} - x\|_{l^p} \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , da (1.9) risulta, per ogni  $M \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^M |x_n^{(k)} - x_n^{(m)}|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall k, m \geq \nu(\varepsilon).$$

Facendo tendere  $m \rightarrow +\infty$  si ha

$$\sum_{n=1}^M |x_n^{(k)} - x_n|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall k \geq \nu(\varepsilon).$$

Per l'arbitrarietà di  $M$ , si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall k \geq \nu(\varepsilon),$$

cioè  $\|x^{(k)} - x\|_{l^p} \leq \varepsilon$ , il che prova la convergenza di  $x^{(k)}$  a  $x$  in  $l^p$ , concludendo la dimostrazione.  $\square$

**Osservazione 1.4.13.** Confrontando tra loro le norme  $l^p$ , con  $p \in [1, +\infty[$ , si ha:

Se  $s > r$ , allora  $\|x\|_{l^s} \leq \|x\|_{l^r}$  e quindi sussiste l'immersione continua  $l^r \hookrightarrow l^s$ .

Infatti,

$$\left| \frac{x_n}{\|x\|_{l^r}} \right| \leq 1$$

e quindi

$$\left| \frac{x_n}{\|x\|_{l^r}} \right|^s \leq \left| \frac{x_n}{\|x\|_{l^r}} \right|^r,$$

da cui sommando segue la tesi.

#### 1.4.4 Gli spazi $(c_0, \|\cdot\|_{l^\infty})$ e $(c, \|\cdot\|_{l^\infty})$

In questa sezione esamineremo due interessanti sottospazi di  $(l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty})$ . Per provarne la completezza, non agiremo in maniera diretta come nelle precedenti sezioni, ma sfrutteremo la caratterizzazione fornita nell'Osservazione 1.1.15: un sottospazio di uno spazio completo è completo se e solo se esso è chiuso.

**Definizione 1.4.14.** Si dice *spazio delle successioni infinitesime di  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*  l'insieme

$$c_0 := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \right\};$$

si dice *spazio delle successioni convergenti di  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*  l'insieme

$$c := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \text{esiste finito } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \right\}.$$

Gli insiemi  $c_0$  e  $c$ , muniti delle usuali operazioni di somma tra successioni e prodotto per uno scalare sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

**Osservazione 1.4.15.** Osserviamo che  $c_0 \subset c \subset l^\infty$  e che le inclusioni sono strette; in particolare,  $(c_0, \|\cdot\|_{l^\infty})$  e  $(c, \|\cdot\|_{l^\infty})$  sono sottospazi normati di  $(l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty})$ .

I due spazi normati appena introdotti risultano essere completi.

**Proposizione 1.4.16.**  $(c_0, \|\cdot\|_{l^\infty})$  è uno spazio di Banach.

*Dimostrazione.* In virtù di 1.1.15, è sufficiente dimostrare che  $(c_0, \|\cdot\|_{l^\infty})$  è un sottospazio chiuso dello spazio di Banach  $(l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty})$ .

Sia  $(x^{(k)})_k$  una successione in  $c_0$  convergente ad un qualche  $x = (x_n)_n \in l^\infty$ . Pertanto, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $k \geq \nu_1(\varepsilon)$ , si ha

$$\|x^{(k)} - x\|_{l^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.10)$$

Fissato  $k \in \mathbb{N}$ , la successione  $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_n \in c_0$  è infinitesima; in particolare, per  $k \geq \nu_1(\varepsilon)$ , esiste  $\nu_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $n \geq \nu_2(\varepsilon)$  si ha

$$|x_n^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.11)$$

Posto  $\nu(\varepsilon) := \max\{\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)\}$ , per ogni  $n, k \geq \nu(\varepsilon)$  sono valide sia (1.10), sia (1.11), perciò

$$|x_n| \leq |x_n - x_n^{(k)}| + |x_n^{(k)}| \leq \|x^{(k)} - x\|_{l^\infty} + |x_n^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

il che prova che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$  e quindi che  $x \in c_0$ .  $\square$

**Proposizione 1.4.17.**  $(c, \|\cdot\|_{l^\infty})$  è uno spazio di Banach.

*Dimostrazione.* In virtù di 1.1.15, è sufficiente dimostrare che  $(c, \|\cdot\|_{l^\infty})$  è un sottospazio chiuso dello spazio di Banach  $(l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty})$ .

Sia  $(x^{(k)})_k$  una successione in  $c$  convergente ad un qualche  $x = (x_n)_n \in l^\infty$ . Pertanto, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $k \geq \nu_1(\varepsilon)$ , si ha

$$\|x^{(k)} - x\|_{l^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1.12)$$

Fissato  $k \in \mathbb{N}$ , la successione numerica  $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_n \in c$  è convergente in  $\mathbb{K}$ , quindi è di Cauchy in  $\mathbb{K}$ ; in particolare, per  $k \geq \nu_1(\varepsilon)$ , esiste  $\nu_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $i, j \geq \nu_2(\varepsilon)$  si ha

$$|x_i^{(k)} - x_j^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.13)$$

Posto  $\nu(\varepsilon) := \max\{\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)\}$ , per ogni  $i, j, k \geq \nu(\varepsilon)$  sono valide sia (1.12), sia (1.13), perciò

$$\begin{aligned} |x_i - x_j| &\leq |x_i - x_i^{(k)}| + |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}| + |x_j - x_j^{(k)}| \\ &\leq 2\|x^{(k)} - x\|_{l^\infty} + |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ciò prova che la successione numerica  $x = (x_n)_n$  è di Cauchy in  $\mathbb{K}$ , pertanto essa converge, cioè  $x \in c$ .  $\square$

## 1.5 Teorema del completamento di uno spazio normato

Per uno spazio normato non completo esiste un **procedimento di completamento** per colmare questo gap e renderlo completo. Sussiste il seguente teorema:

**Teorema 1.5.1.** *Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato. Allora esiste uno spazio normato completo  $\hat{X}$  e un operatore lineare*

$$T : X \rightarrow \hat{X}$$

*tale che:*

- (i)  $\|Tx\| = \|x\|$  per ogni  $x \in X$  (isometria, iniettiva);
- (ii)  $\overline{TX} = \hat{X}$  (l'immagine di  $X$  tramite  $T$  è densa in  $\hat{X}$ )

*Dimostrazione.* Sia  $E$  lo spazio vettoriale che ha per elementi le successioni di Cauchy  $\bar{x} = (x_n)_n$  di elementi di  $X$ . Introduciamo in  $E$  la seguente relazione di equivalenza  $\cong$ , assumendo per definizione che  $(x_n)_n$  e  $(y_n)_n$  sono  $\cong$  equivalenti,

$$(x_n)_n \cong (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y_n\|_X = 0. \quad (1.14)$$

Consideriamo lo spazio vettoriale (verificare) quoziente  $\hat{X} := E/\cong$  e indichiamo con  $[\bar{x}]_{\cong}$  i suoi elementi ( $[\bar{x}]_{\cong}$  non dipende dal particolare rappresentante  $(x_n)_n$  scelto per definirlo).

Definiamo in  $\hat{X}$  la norma (verificare)

$$\|[\bar{x}]_{\cong}\|_{\hat{X}} := \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_X$$

dove  $(x_n)_n$  è un qualunque rappresentante della classe di equivalenza  $[\bar{x}]_{\cong} \in \hat{X}$ . Il limite precedente è finito, poiché la successione  $(x_n)_n$  è di Cauchy e dalla disuguaglianza :

$$\| \|x_{n+k}\|_X - \|x_n\|_X \| \leq \|x_{n+k} - x_n\|_X,$$

segue che la successione  $(\|x_n\|_X)$  è convergente.

Sia  $T : X \rightarrow \hat{X}$  l'operatore definito da  $Tx = [\bar{x}]_{\cong}$ , dove  $\bar{x}$  è la successione costante  $\bar{x} = (x, x, \dots, x, \dots)$  (ovviamente di Cauchy e  $\|Tx\|_{\hat{X}} = \|[\bar{x}]_{\cong}\|_{\hat{X}} = \|x\|_X$ ).

Proviamo che:

- (1)  $TX$  è denso in  $\hat{X}$ ;
- (2)  $\hat{X}$  è uno spazio completo.
- (1) Sia  $\bar{x} = (x_n)_n \in E$ . Per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che  $\|x_n - x_m\|_X < \epsilon$  per ogni  $m, n \geq \nu$ .  
 Definiamo  $\bar{x}_n \in E$  ponendo  $\bar{x}_n = (x_n, x_n, \dots, x_n, \dots)$  - una successione costante; cioè  $Tx_n = [\bar{x}_n]_{\cong}$ .

Allora

$$\|[\bar{x}]_{\cong} - \underbrace{[\bar{x}_n]_{\cong}}_{=Tx_n}\|_{\hat{X}} = \|\bar{x} - \bar{x}_n\|_X \leq \epsilon$$

per ogni  $n \geq \nu$ . Pertanto, ogni  $[\bar{x}]_{\cong} \in \hat{X}$  è approssimabile con elementi di  $TX$ .

- (2) Consideriamo la successione di Cauchy  $([\bar{x}^{(n)}]_{\cong})_n$  in  $\hat{X}$ .  
 Si ha:

$$\|[\bar{x}^{(n)}]_{\cong} - [\bar{x}^{(m)}]_{\cong}\|_{\hat{X}} = \|\bar{x}^{(n)} - \bar{x}^{(m)}\|_X \rightarrow 0 \quad \text{per } n, m \rightarrow +\infty.$$

Per quanto provato in (1), siano  $\epsilon_n > 0$ ,  $\epsilon_n \rightarrow 0$  e  $x_n \in X$  tale che  $\|\bar{x}^{(n)} - Tx_n\|_{\hat{X}} < \epsilon_n$ . Allora,  $\bar{x}^0 = \{x_n\}$  è una successione di Cauchy in  $X$ . Infatti

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_X &= \|Tx_n - Tx_m\|_{\hat{X}} \\ &\leq \|Tx_n - \bar{x}^{(n)}\|_{\hat{X}} + \|\bar{x}^{(n)} - \bar{x}^{(m)}\|_X + \|\bar{x}^{(m)} - Tx_m\|_{\hat{X}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per  $n \geq m \rightarrow +\infty$ .

Perciò,  $\bar{x}^{(0)} = (x_n)_n \in E$  e  $[\bar{x}^{(0)}]_{\cong} = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\bar{x}^{(n)}]_{\cong}$ , poiché

$$\|[\bar{x}^{(0)}]_{\cong} - [\bar{x}^{(n)}]_{\cong}\|_{\hat{X}} = \|\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^{(n)}\|_X \leq \|\bar{x}^{(n)} - Tx_n\|_{\hat{X}} + \|Tx_n - \bar{x}^{(0)}\|_{\hat{X}} \rightarrow 0.$$

per  $n \rightarrow +\infty$ .

□

**Osservazione 1.5.2.**  $\hat{X}$  (completamento di  $X$ ) è unico a meno di isometrie.

**Osservazione 1.5.3.** È utile confrontare il precedente teorema con la costruzione dei numeri irrazionali dai numeri razionali.

Per una guida, cfr., ad esempio, il Teorema A5.24 nel libro di E. Acerbi, G. Buttazzo, Primo Corso di Analisi Matematica, Pitagora Ed. Bologna (1997).

**Osservazione 1.5.4.** Esempi di completamento verranno dati nel paragrafo 5.11, esercizi 1 e 3.

## 1.6 Operatori lineari, limitati

**Definizione 1.6.1 (operatore lineare, dominio, codominio, nucleo).** Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi normati sul campo  $\mathbb{K}$ . Un *operatore lineare*  $T$  è un'applicazione da un sottospazio  $D(T) \subseteq X$  a valori in  $Y$  tale che

$$T(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Tx_1 + c_2Tx_2$$

per ogni  $x_1, x_2 \in D(T)$  ed ogni  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ .

Il sottospazio  $D(T) \subseteq X$  si dice *dominio* di  $T$ ; il sottospazio

$$\text{Im}(T) := \{Tx : x \in D(T)\} \subseteq Y$$

si dice *codominio* di  $T$  o immagine di  $T$ ; il sottospazio

$$\ker(T) := \{x \in D(T) : Tx = 0\} \subseteq D(T) \subseteq X$$

si dice *nucleo* di  $T$ .

**Osservazione 1.6.2.** Risulta, come nel caso finito-dimensionale:

$$T \text{ iniettivo} \Leftrightarrow \ker(T) = \{0\}.$$

**Nota importante.** D'ora in avanti, a meno che non sia specificato diversamente, considereremo operatori lineari  $T : X \rightarrow Y$  definiti sull'intero spazio  $X$ , cioè con  $D(T) = X$ .

**Definizione 1.6.3 (operatore limitato).** Un operatore lineare  $T : X \rightarrow Y$  si dice *limitato* se

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < +\infty. \quad (1.15)$$

**Osservazione 1.6.4** (espressioni equivalenti di  $\|T\|$  per operatori lineari limitati). Si può dimostrare che

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \\ &= \inf \{M > 0 : \forall x \in X \ \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\}. \end{aligned}$$

Il seguente teorema fornisce una importante caratterizzazione degli operatori lineari limitati.

**Teorema 1.6.5 (continuità degli operatori lineari limitati).** Un operatore lineare  $T : X \rightarrow Y$  è limitato se e solo se esso è continuo.

*Dimostrazione.* Sia  $T : X \rightarrow Y$  un operatore lineare limitato; per ogni  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$ , dalla linearità di  $T$  si ha

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_2\|_Y &= \|T(x_1 - x_2)\|_Y = \|x_1 - x_2\|_X \left\| T \left( \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|_X} \right) \right\|_Y \\ &\leq \|x_1 - x_2\|_X \|T\|, \end{aligned}$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo utilizzato la definizione di  $\|T\|$  in (1.15) e il fatto che il vettore  $\frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|_X}$  abbia norma unitaria in  $X$ . Quindi,  $T$  è uniformemente Lipschitziano su  $X$  con costante di Lipschitz  $\|T\|$ , pertanto esso è continuo in  $X$ .

Viceversa, se  $T : X \rightarrow Y$  è un operatore lineare e continuo in  $X$ , in particolare  $T$  è continuo in  $0 = 0_X$ . Pertanto, esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $\|x\|_X \leq \delta$ , allora  $\|Tx\|_Y \leq 1$ . In particolare, per ogni  $x \in X$  tale che  $\|x\|_X \leq 1$  risulta  $\|\delta x\|_X \leq \delta$ , quindi  $\|T(\delta x)\|_Y \leq 1$ . Per omogeneità della norma e linearità di  $T$ , per ogni  $x \in X$  tale che  $\|x\|_X \leq 1$  si ha

$$\delta \|Tx\|_Y = \|\delta \cdot Tx\|_Y = \|T(\delta x)\|_Y \leq 1,$$

da cui

$$\|Tx\|_Y \leq \frac{1}{\delta} \quad \forall x \in X, \|x\|_X \leq 1.$$

Passando all'estremo superiore e richiamando la definizione di  $\|T\|$  in (1.15), otteniamo  $\|T\| \leq 1/\delta$ , il che prova la limitatezza di  $T$ .  $\square$

Alla luce di questo teorema, parleremo indifferentemente di operatore lineare limitato o continuo. Nel seguito, indicheremo con  $\mathbf{B}(X; Y)$  l'insieme degli operatori lineari limitati  $T : X \rightarrow Y$ . Se  $X = Y$ , invece di  $B(X, X)$  potremo scrivere semplicemente  $B(X)$ .

**Osservazione 1.6.6.** Per ogni  $T_1, T_2 \in B(X; Y)$  ed ogni  $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ , la combinazione lineare  $c_1 T_1 + c_2 T_2$  definita da

$$(c_1 T_1 + c_2 T_2)(x) := c_1 T_1 x + c_2 T_2 x \quad \forall x \in X$$

è ancora un operatore lineare limitato. Pertanto  $B(X; Y)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ .

**Teorema 1.6.7 (Spazio di Banach degli operatori lineari limitati).** *Lo spazio  $B(X; Y)$  è uno spazio normato, munito della norma (norma operatoriale)*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{B(X; Y)} : B(X; Y) &\rightarrow [0, +\infty[, \\ T &\mapsto \|T\|_{B(X; Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y. \end{aligned}$$

*Inoltre, se  $Y$  è uno spazio di Banach, allora  $B(X; Y)$  è uno spazio di Banach.*

**Osservazione 1.6.8.** Per ogni  $T \in B(X; Y)$  ed ogni  $x \in X$ , vale la seguente disuguaglianza

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{B(X; Y)} \|x\|_X. \quad (1.16)$$

*Dimostrazione del Teorema 1.6.7.* Osserviamo che, per ogni  $T \in B(X; Y)$ ,  $\|T\|_{B(X; Y)} = \|T\| < +\infty$ , dove  $\|T\|$  è stata introdotta in (1.15), pertanto  $\|\cdot\|_{B(X; Y)}$  è ben definita su  $B(X; Y)$ . Verifichiamo che essa soddisfa le proprietà 1.1.1 ( $N_1$ ), ( $N_2$ ) e ( $N_3$ ).

( $N_1$ ) Se  $T = 0$  è l'operatore nullo, allora  $Tx = 0$  per ogni  $x \in X$ , dunque  $\|T\|_{B(X; Y)} = 0$ . Se, invece,  $T$  non è l'operatore nullo, allora, per qualche  $x \in X \setminus \{0\}$ , si ha  $Tx \neq 0$ , da cui

$$T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) = \frac{1}{\|x\|_X} \cdot Tx \neq 0,$$

per cui l'estremo superiore che definisce  $\|T\|_{B(X; Y)}$  è strettamente positivo.

( $N_2$ ) Per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$  si ha, per l'omogeneità dell'estremo superiore:

$$\|\lambda T\|_{B(X; Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\lambda Tx\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = |\lambda| \|T\|_{B(X; Y)}.$$

( $N_3$ ) Siano  $T_1, T_2 \in B(X; Y)$ ; per ogni  $x \in X$  con  $\|x\|_X \leq 1$  si ha

$$\begin{aligned} \|(T_1 + T_2)x\|_Y &= \|T_1x + T_2x\|_Y \leq \|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y \\ &\leq \|T_1\|_{B(X; Y)} + \|T_2\|_{B(X; Y)}. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore sui vettori  $x \in X$  con  $\|x\|_X \leq 1$  al primo membro, otteniamo la disuguaglianza triangolare per  $\|\cdot\|_{B(X; Y)}$ .

Dunque  $\|\cdot\|_{B(X; Y)}$  è una norma su  $B(X; Y)$ .

Sia ora  $Y$  di Banach e proviamo che  $B(X; Y)$  è uno spazio di Banach. Sia  $(T_n)_n$  una successione di Cauchy in  $B(X; Y)$ ; per ogni  $x \in X$  si ha

$$\limsup_{m, n \rightarrow +\infty} \|T_mx - T_nx\|_Y \leq \limsup_{m, n \rightarrow +\infty} \|T_m - T_n\|_{B(X; Y)} \|x\|_X = 0,$$

dove, nella maggiorazione, abbiamo usato la (1.16). Ciò prova che la successione  $(T_nx)_n$  (con  $x \in X$  fissato) è di Cauchy in  $Y$ . Poiché  $Y$  è completo, la successione  $(T_nx)_n$  converge ad un (unico) elemento  $Tx \in Y$ . Consideriamo l'applicazione

$$T : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto Tx.$$

Essa è ben posta per il teorema di unicità del limite ed è lineare poiché ogni  $T_n : X \rightarrow Y$  è lineare. Proviamo che  $T \in B(X; Y)$  e che  $\|T_n - T\|_{B(X; Y)} \rightarrow 0$ . Poiché  $(T_n)_n$  è di Cauchy, possiamo scegliere  $M \in \mathbb{N}$  sufficientemente grande tale che  $\|T_n - T_M\|_{B(X; Y)} \leq 1$  per ogni  $n \geq M$ . Pertanto, per ogni  $x \in X$  con  $\|x\|_X \leq 1$  si ha

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x\|_Y \leq \|T_M x\|_Y + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T_M\|_{B(X; Y)} \|x\|_X \\ &\leq \|T_M\|_{B(X; Y)} + 1 < +\infty, \end{aligned}$$

da cui segue che  $\|T\|_{B(X; Y)} < +\infty$  e quindi  $T \in B(X; Y)$ . Per concludere, mostriamo che  $T_n$  converge a  $T$  in  $\|\cdot\|_{B(X; Y)}$ . Sia  $x \in X$  con  $\|x\|_X \leq 1$ ; poiché  $(T_n x)_n$  è di Cauchy in  $Y$ , fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tale che

$$\forall m \geq n \geq \nu(\varepsilon) : \|T_m x - T_n x\|_Y \leq \varepsilon.$$

Per  $m \rightarrow +\infty$  otteniamo che

$$\forall n \geq \nu(\varepsilon) : \|Tx - T_n x\|_Y \leq \varepsilon,$$

da cui, passando all'estremo superiore su  $x$ , si ottiene  $\|T - T_n\|_{B(X; Y)} \leq \varepsilon$ , il che completa la dimostrazione.  $\square$

**Osservazione 1.6.9.** Il teorema 1.6.7 fornisce anche un criterio per riconoscere se uno spazio  $Y$  è di Banach o meno. Infatti, se per una successione di Cauchy in  $B(X; Y)$  risulta che essa non converge ad un elemento di  $B(X; Y)$ , allora  $Y$  non può essere di Banach.

**Esempio 1.6.10** (di operatore lineare limitato: **operatore integrale**). Consideriamo il seguente operatore lineare

$$\begin{aligned} T : (C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty), \\ f &\mapsto Tf, \end{aligned}$$

dove  $Tf$  è definita da

$$(Tf)(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

L'operatore lineare  $T$  è limitato; infatti, per ogni  $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$  ed ogni  $x \in [a, b]$ , si ha

$$|(Tf)(x)| = \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty (b - a),$$

da cui, passando all'estremo superiore su  $x \in [a, b]$ , otteniamo

$$\|Tf\|_\infty \leq (b - a)\|f\|_\infty.$$

In particolare, considerando  $\|f\|_\infty \leq 1$ , si deduce che  $\|T\| \leq (b - a) < +\infty$ .

Non tutti gli operatori lineari tra spazi normati sono continui. Esaminiamo, a tal proposito, l'operatore di derivazione  $T = \frac{d}{dt}$ .

**Esempio 1.6.11** (di operatore lineare non limitato: **operatore di derivazione**). Sia  $X$  lo spazio delle funzioni reali continue e limitate  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , munito della norma

$$\|f\|_X := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

Consideriamo l'operatore di derivazione  $T = \frac{d}{dt}$  definito da

$$Tf := f'.$$

Il suo dominio naturale (dominio massimale)  $D(T)$  è il sottospazio proprio di  $X$  delle funzioni reali continue e limitate con derivata prima continua e limitata. Osserviamo che l'operatore lineare  $T$  non è limitato (quindi non è continuo). Per esempio, le funzioni  $f_n(t) := \sin(nt)$  sono uniformemente limitate:  $\|f_n\|_X = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Tuttavia, la successione delle derivate  $Tf_n = f'_n$  non è limitata, perché  $f'_n(t) = n \cos(nt)$  e quindi  $\|f'_n\|_X = n$ .

## 1.7 Norme equivalenti. Spazi a dimensione finita

**Definizione 1.7.1 (norme equivalenti)**. Sia  $X$  uno spazio vettoriale. Due norme  $\|\cdot\|'$  e  $\|\cdot\|''$  su  $X$  si dicono *equivalenti* se esistono due costanti  $C, c > 0$  tali che

$$c\|x\|' \leq \|x\|'' \leq C\|x\|' \quad \forall x \in X. \quad (1.17)$$

L'importanza di questo concetto risiede nel fatto che norme equivalenti su uno stesso spazio  $X$  inducono la stessa topologia su  $X$  e quindi inducono le stesse successioni di Cauchy e le stesse successioni convergenti, cioè se  $(x_n)_n \subset X$  è convergente o di Cauchy rispetto ad una norma  $\|\cdot\|'$  su  $X$ , essa è convergente o di Cauchy rispetto ad una qualsiasi altra norma  $\|\cdot\|''$  equivalente a  $\|\cdot\|'$ .

**Osservazione 1.7.2.** Ricordiamo che, su  $\mathbb{K}^N$ , tutte le norme  $\|\cdot\|_p$ ,  $p \in [1, +\infty]$ , sono equivalenti tra di loro.

In generale, uno spazio  $X$  a dimensione infinita può avere norme non equivalenti. Consideriamo, ad esempio, lo spazio dei polinomi in una variabile reale nell'intervallo  $[0, 1]$ , munito delle due norme definite da

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad \|f\|_{L^1([0,1])} := \int_0^1 |f(t)| dt \quad (f \in X).$$

Le norme (verificare per esercizio che anche  $\|\cdot\|_{L^1([0,1])}$  soddisfa le proprietà di una norma)  $\|\cdot\|_\infty$  e  $\|\cdot\|_{L^1([0,1])}$  non sono equivalenti.

Consideriamo la successione di monomi  $(f_n)_n \subset X$  definita da

$$f_n(t) := t^n, \quad t \in [0, 1].$$

Osserviamo che  $\|f_n\|_\infty = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e che  $\|f_n\|_{L^1([0,1])} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Pertanto,  $f_n$  converge a  $0 \in X$  in  $(X, \|\cdot\|_{L^1([0,1])})$ , ma non può convergere a zero in  $(X, \|\cdot\|_\infty)$ .

Ci chiediamo se, considerando un qualunque spazio  $X$  a dimensione finita  $N$  su  $\mathbb{K}$  e munendolo di una qualsiasi norma, ci si possa ricondurre, mediante omeomorfismi, ad uno spazio  $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p)$ . In altre parole, ci chiediamo se oltre a sussistere un isomorfismo lineare tra  $X$  e  $\mathbb{K}^N$ , i due spazi siano anche topologicamente equivalenti, indipendentemente dalla norma (e quindi dalla topologia) di cui li abbiamo muniti in partenza.

**Teorema 1.7.3 (Ogni spazio normato a dimensione finita  $N$  su  $\mathbb{K}$  è omeomorfo a  $\mathbb{K}^N$ ).** Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio normato a dimensione finita  $N$  su  $\mathbb{K}$  e sia  $\{u_1, \dots, u_N\}$  una base di  $X$ . Allora

1.  $X$  è completo e quindi è uno spazio di Banach;
2. L'operatore definito da

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{K}^N &\rightarrow X, \\ \alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_N) &\mapsto \Lambda\alpha := \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_N u_N \end{aligned}$$

è lineare, bigettivo e limitato. Inoltre, l'operatore inverso  $\Lambda^{-1} : X \rightarrow \mathbb{K}^N$  è anche limitato.

*Dimostrazione.*

1. L'operatore lineare  $\Lambda$  è bigettivo, poiché  $\{u_1, \dots, u_N\}$  è una base di  $X$ ; inoltre, l'operatore inverso  $\Lambda^{-1} : X \rightarrow \mathbb{K}^N$  è lineare e ben definito (per l'unicità della rappresentazione di un vettore di  $X$  rispetto ad una sua base fissata).
2. Osservato che, per ogni  $\alpha \in \mathbb{K}^N$ , si ha

$$\|\Lambda\alpha\|_X \leq \sum_{k=1}^N \|\alpha_k u_k\|_X \leq \|\alpha\|_{\mathbb{K}^N} \sum_{k=1}^N \|u_k\|_X,$$

si deduce che  $\Lambda$  è limitato, quindi continuo, da  $\mathbb{K}^N$  in  $X$ , con  $\|\Lambda\| \leq \sum_{k=1}^N \|u_k\|_X$ .

3. Proviamo ora che anche  $\Lambda^{-1}$  è limitato. Se non lo fosse, esisterebbe una successione  $(x_n)_n$  in  $X$  con  $\|x_n\|_X \leq 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e tale che  $\|\Lambda^{-1}x_n\|_{\mathbb{K}^N} \rightarrow +\infty$ . Consideriamo i vettori normalizzati

$$x_n^* := \frac{\Lambda^{-1}x_n}{\|\Lambda^{-1}x_n\|_{\mathbb{K}^N}} \in \mathbb{K}^N.$$

Risulta  $\|x_n^*\|_{\mathbb{K}^N} = 1$  e

$$\|\Lambda x_n^*\|_X = \frac{\|\Lambda \Lambda^{-1}x_n\|_X}{\|\Lambda^{-1}x_n\|_{\mathbb{K}^N}} = \frac{\|x_n\|_X}{\|\Lambda^{-1}x_n\|_{\mathbb{K}^N}} \rightarrow 0.$$

Poiché  $(x_n^*)_n$  è limitata nello spazio completo  $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_{\mathbb{K}^N})$ , esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k}^*)_k$  convergente a  $x^* \in \mathbb{K}^N$ . Chiaramente

$$\|x^*\|_{\mathbb{K}^N} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k}^*\|_{\mathbb{K}^N} = 1$$

e, poiché  $\Lambda$  è continuo,

$$\Lambda x^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Lambda x_{n_k}^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{n_k}}{\|\Lambda^{-1}x_{n_k}\|_{\mathbb{K}^N}} = 0.$$

Ciò implica che  $\ker \Lambda \neq \{0\}$ , il che contraddice l'iniettività di  $\Lambda$ . Pertanto  $\Lambda^{-1}$  è necessariamente limitato, quindi continuo.

4. Per provare che  $(X, \|\cdot\|_X)$  è completo, sia  $(x_n)_n \subset X$  una successione di Cauchy. Allora,  $(\Lambda^{-1}x_n)_n$  definisce una successione di Cauchy nello spazio completo  $\mathbb{K}^N$ ; pertanto essa converge ad un certo  $y \in \mathbb{K}^N$ . Poiché  $\Lambda$  è continuo, la successione  $(x_n)_n$  converge a  $\Lambda y \in X$ , provando la completezza di  $(X, \|\cdot\|_X)$  e terminando la dimostrazione.

□

**Osservazione 1.7.4.** Osserviamo che, in virtù dell'arbitrarietà della norma scelta sullo spazio  $X$  e del fatto che tutte le norme su  $\mathbb{K}^N$  sono equivalenti (vedi Osservazione 1.7.2), segue che la limitatezza di  $\Lambda$  e  $\Lambda^{-1}$  è valida per qualsiasi scelta delle norme su  $X$  e su  $\mathbb{K}^N$ .

**Corollario 1.7.5.** *In uno spazio vettoriale a dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.*

*Dimostrazione.* Siano  $\|\cdot\|'$  e  $\|\cdot\|''$  due norme sullo spazio vettoriale  $X$  di dimensione finita  $N$ . Sia  $\{u_1, \dots, u_N\}$  una base di  $X$  e sia  $\Lambda : \mathbb{K}^N \rightarrow X$  come nel precedente Teorema 1.7.3. Osserviamo che, sempre per il Teorema 1.7.3,  $\Lambda$  e  $\Lambda^{-1}$  sono operatori lineari e limitati rispetto a ciascuna delle due norme

su  $X$ . Allora, esistono delle costanti reali positive  $C_1, C_2, c_1, c_2$  tali che, per ogni  $x \in X$ , si ha

$$c_1 \|\Lambda^{-1}x\|_{\mathbb{K}^N} \leq \|x\|' \leq C_1 \|\Lambda^{-1}x\|_{\mathbb{K}^N}$$

e

$$c_2 \|\Lambda^{-1}x\|_{\mathbb{K}^N} \leq \|x\|'' \leq C_2 \|\Lambda^{-1}x\|_{\mathbb{K}^N}$$

(per le disuguaglianze a sinistra abbiamo sfruttato la limitatezza e bigettività di  $\Lambda$ , esprimendo i vettori di  $\mathbb{K}^N$  nella forma  $\Lambda^{-1}x$ ). Ne segue che  $\|\cdot\|'$  e  $\|\cdot\|''$  sono equivalenti.  $\square$

## 1.8 Insiemi compatti. Spazi localmente compatti.

**Definizione 1.8.1 (ricoprimento aperto; insieme compatto, relativamente compatto, precompatto).** Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $K \subseteq X$ . Una collezione di sottoinsiemi di  $X$  aperti  $\{A_j : j \in J\}$  tale che  $K \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$  si chiama un *ricoprimento aperto* di  $K$ . L'insieme di indici  $J$  può essere finito o infinito.

Un insieme  $K \subseteq X$  si dice **compatto** se da ogni ricoprimento aperto  $\{A_j : j \in J\}$  di  $K$  si può estrarre un sottoricoprimento finito, cioè una sottofamiglia  $\{A_j : j \in F\}$ , con  $F \subseteq J$  finito, che sia ancora un ricoprimento aperto di  $K$ .

Un insieme  $S \subseteq X$  si dice **relativamente compatto** se la sua chiusura  $\overline{S}$  è compatta.

Un insieme  $S \subseteq X$  si dice **precompatto** se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esso si può ricoprire con un numero finito di palle di raggio  $\varepsilon$ .

Alle precedenti definizioni si affianca la seguente, inerente gli spazi normati.

**Definizione 1.8.2 (spazio localmente compatto).** Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio normato.  $X$  si dice *localmente compatto* se la palla chiusa unitaria

$$\overline{B(0, 1)} = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$$

è compatta.

**Teorema 1.8.3 (sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}^N$ ).** *Un sottoinsieme  $S \subseteq \mathbb{R}^N$  è compatto se e solo se  $S$  è chiuso e limitato.*

**Teorema 1.8.4 (caratterizzazioni equivalenti della compattezza).** *Sia  $E$  uno spazio metrico. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- (i)  $E$  è compatto;
- (ii)  $E$  è precompatto e completo;
- (iii) Da ogni successione  $(x_n)_n$  di punti di  $E$  si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto limite  $x \in E$ .

Il classico **Teorema di Bolzano-Weierstrass** afferma che

**Ogni successione limitata di  $\mathbb{K}^N$  ammette una sottosuccessione convergente.**

Il prossimo teorema (di **F. Riesz**) mostra che questa proprietà di compattezza è vera per ogni spazio normato a dimensione finita e **non è vera** in alcuno spazio a dimensione infinita, e quindi caratterizza gli spazi a dimensione finita.

**Teorema 1.8.5 (gli spazi normati localmente compatti hanno dimensione finita).**

*Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio normato. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- (i)  $X$  ha dimensione finita;
- (ii)  $X$  è localmente compatto.

*Dimostrazione.* Supponiamo vera (i) e proviamo che vale (ii), cioè che la palla chiusa unitaria  $\overline{B(0,1)}$  di  $X$  è compatta. Sia  $N \in \mathbb{N}$  la dimensione di  $X$ . In virtù del Teorema 1.7.3, è stabilito un omeomorfismo  $\Lambda : \mathbb{K}^N \rightarrow X$  con inverso  $\Lambda^{-1} : X \rightarrow \mathbb{K}^N$  limitato. Poiché  $\overline{B(0,1)}$  è chiusa e limitata in  $X$ , lo è anche la sua immagine omeomorfa

$$K := \Lambda^{-1}(\overline{B(0,1)}) \subset \mathbb{K}^N.$$

L'insieme  $K$  (chiuso e limitato) è compatto in  $\mathbb{K}^N$ . Pertanto,  $\overline{B(0,1)} = \Lambda(K)$  risulta compatto in  $X$ , essendo immagine continua del compatto  $K$ , il che dimostra che vale (ii).

Viceversa, assumiamo  $X$  localmente compatto e proviamo che esso ha dimensione finita. Per ipotesi,  $\overline{B(0,1)}$  è compatta in  $X$  e, per il Teorema 1.8.4, essa è precompatta; pertanto esiste un numero finito di palle aperte  $B(p_i, 1/2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , centrate nei punti  $p_i$  e con raggio  $1/2$ , tali che

$$\overline{B(0,1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(p_i, 1/2). \quad (1.18)$$

Consideriamo il sottospazio di dimensione finita

$$V := \text{span} \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq X.$$

Osserviamo che  $V$  è chiuso in  $X$ , in quanto, per il Teorema 1.7.3 ogni spazio normato a dimensione finita è completo. Proviamo che  $V = X$ , il che implicherà che  $X$  ha dimensione finita. Procediamo per assurdo, supponendo che  $X \neq V$ ; sotto questa ipotesi, consideriamo  $x \in X \setminus V$  e poniamo

$$\rho := d(x, V) = \inf_{y \in V} \|y - x\|_X.$$

Osserviamo che  $\rho > 0$  poiché  $V$  è chiuso e  $x \notin V$ . Pertanto, per le proprietà dell'estremo inferiore, esiste un vettore  $v \in V$  tale che

$$\rho \leq \|x - v\|_X \leq \frac{3}{2}\rho. \quad (1.19)$$

Consideriamo il vettore unitario

$$z := \frac{x - v}{\|x - v\|_X} \in \overline{B(0, 1)}. \quad (1.20)$$

Da (1.18), deduciamo che esiste un punto  $p_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , tale che

$$\|z - p_j\|_X < \frac{1}{2}. \quad (1.21)$$

Allora, da (1.20), risulta

$$x = v + \|x - v\|_X z = v + \|x - v\|_X p_j + \|x - v\|_X (z - p_j).$$

Poiché  $v + \|x - v\|_X p_j \in V$  e  $x \notin V$ , necessariamente  $\|x - v\|_X (z - p_j) \notin V$ , pertanto si ottiene

$$\|x - v\|_X \|z - p_j\|_X \geq d(x, V) = \rho,$$

Quindi, da (1.21),  $\|x - v\|_X \geq 2\rho$ , in contraddizione con (1.19). Possiamo concludere che  $X = V$  e dunque  $X$  ha dimensione finita.  $\square$

# Capitolo 2

## Spazi di Hilbert

### 2.1 Spazi di Hilbert (Spazi con prodotto scalare)

Scopo di questo capitolo è mostrare come la definizione e le proprietà del prodotto scalare in  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , le nozioni di base, proiezione ortogonale, possono essere estese a spazi vettoriali a dimensione infinita

Sia  $H$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$  dei numeri reali o complessi. Un *prodotto scalare* su  $H$  è un funzionale

$$(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

che, a ciascuna coppia di elementi  $u, v \in H$  associa un numero  $(u, v) \in \mathbb{K}$  con le seguenti proprietà. Per ogni  $u, v, w \in H$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$  si ha:

- (i)  $(u, v) = \overline{(v, u)}$ , dove la barra in alto denota la coniugazione complessa;
- (ii)  $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ ;
- (iii)  $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ ;
- (iv)  $(u, u) \geq 0$  e  $(u, u) = 0$  se e solo se  $u = 0$ .

Osserviamo che le precedenti proprietà implicano che

$$(u, v + w) = (u, v) + (u, w), \quad (u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v).$$

Nel caso in cui  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , le proprietà (i) – (iii) affermano che un prodotto scalare su  $\mathbb{R}$  è simmetrico e bilineare.

A partire dal prodotto scalare, definiamo

$$\boxed{\|u\| := (u, u)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{per ogni } u \in H. \quad (2.1)$$

**Proposizione 2.1.1** (Due disuguaglianze fondamentali). *Per ogni  $u, v \in H$  si ha:*

$$(I) \quad |(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad (\text{Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz});$$

$$(II) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{Disuguaglianza triangolare o di Minkowski}).$$

*Dimostrazione.* (I) Se  $v = 0$  la disuguaglianza è ovvia. Sia allora  $v \neq 0$  e poniamo

$$a := (u, u), \quad b := (u, v), \quad c := (v, v).$$

Per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$  risulta

$$0 \leq (u + \lambda v, u + \lambda v) = a + b\bar{\lambda} + \lambda\bar{b} + c\lambda\bar{\lambda}.$$

Scelto  $\lambda = -\frac{b}{c}$ , otteniamo

$$0 \leq a + b \left( -\frac{\bar{b}}{c} \right) + \bar{b} \left( -\frac{b}{c} \right) + c \left( -\frac{b}{c} \right) \left( -\frac{\bar{b}}{c} \right) = a - \frac{b\bar{b}}{c}.$$

Poiché  $c = (v, v) > 0$ , moltiplicando ambo i membri per  $c$  otteniamo

$$0 \leq ac - |b|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - |(u, v)|^2,$$

da cui la tesi.

(II) Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\Re(u, v) \leq |(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

Allora

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + (u, v) + (v, u) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\Re(u, v) \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Prendendo le radici quadrate otteniamo la tesi. □

**Osservazione 2.1.2.** La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz implica che, fissato  $v \in H$ , il funzionale  $u \in H \mapsto (u, v) \in \mathbb{K}$  è Lipschitziano di costante  $\|v\|$ .

Il funzionale (2.1) verifica evidentemente le proprietà di una norma ( $N_1$ ) e ( $N_2$ ). La disuguaglianza triangolare mostra che (2.1) verifica anche la proprietà ( $N_3$ ), pertanto (2.1) definisce una norma su  $H$  (detta **norma di Hilbert**, in quanto associata ad un prodotto scalare).

L'esistenza in  $H$  di un prodotto scalare consente di introdurre in questo spazio non solo la norma (cioè "la lunghezza") di un vettore  $u \in H$ , ma anche "l'angolo"  $\vartheta$  formato da due vettori  $u, v \in H \setminus \{0\}$ ; precisamente, l'angolo  $\vartheta$  determinato dai vettori  $u, v \in H \setminus \{0\}$  è definito da

$$\cos \vartheta := \Re \left( \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|} \right).$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta che il secondo membro è compreso tra -1 e 1 e determina un angolo  $\vartheta \in [0, \pi]$ .

È immediata la verifica delle seguenti identità:

- *Identità del parallelogramma:*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \forall u, v \in H.$$

- *Identità di Pitagora:* se  $u, v \in H$  sono **ortogonali** (cioè  $(u, v) = 0$ ), allora

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

**Osservazione 2.1.3.** È utile sapere se una data norma su uno spazio vettoriale  $X$  (reale, complesso) è una norma di Hilbert, cioè se esiste un prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)$  su  $X$  tale che  $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$  per ogni  $u \in X$ .

Segnaliamo due criteri (a seconda che il campo degli scalari sia  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) espressi di seguito.

### Caratterizzazione delle norme di Hilbert su $\mathbb{R}$

**Teorema 2.1.4** (di Fréchet-von Neumann-Jordan). *Se la norma  $\|\cdot\|$  in uno spazio vettoriale reale  $X$  soddisfa l'identità del parallelogramma*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{per ogni } u, v \in X,$$

*allora  $\|\cdot\|$  è una norma di Hilbert su  $\mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $X$  uno spazio vettoriale reale munito di una norma  $\|\cdot\|$  soddisfacente l'identità del parallelogramma

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad \text{per ogni } a, b \in X.$$

Proviamo che la quantità definita da

$$(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \quad \text{per ogni } u, v \in X$$

(i) è un prodotto scalare reale su  $X$ ,

(ii) soddisfa  $(u, u) = \|u\|^2$ ,

pertanto  $\|\cdot\|$  è una norma di Hilbert.

La verifica di (ii) è immediata.

Proviamo (i). È immediato verificare che  $(u, v) = (v, u)$ .

Inoltre

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w) \quad \text{per ogni } u, v, w \in X.$$

Per provarlo, si usa l'identità del parallelogramma prima con  $a=u, b=v$ ; poi, con  $a=u + w, b=v + w$ ; infine, con  $a=u + v + w, b=w$ .

Osserviamo che risulta  $(-u, v) = -(u, v)$  e  $(u, 2v) = 2(u, v)$ . Per provare che  $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  e per ogni  $u, v \in X$ , si considera dapprima il caso  $\lambda \in \mathbb{N}$ , poi  $\lambda \in \mathbb{Q}$  e infine  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\square$

### Caratterizzazione delle norme di Hilbert su $\mathbb{C}$

**Teorema 2.1.5.** *Sia  $X$  uno spazio vettoriale complesso munito di una norma  $\|\cdot\|$  soddisfacente l'identità del parallelogramma*

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad \text{per ogni } a, b \in X.$$

La quantità definita da

$$(u, v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + \|u - iv\|^2 - \|u + iv\|^2) \quad \text{per ogni } u, v \in X$$

(i) è un prodotto scalare complesso su  $X$ ,

(ii) soddisfa  $(u, u) = \|u\|^2$ ,

pertanto  $\|\cdot\|$  è una norma di Hilbert su  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 2.1.6.** Uno spazio vettoriale  $H$  si dice *spazio di Hilbert* (reale, complesso) se è uno spazio vettoriale (reale, complesso) munito di un prodotto scalare (reale, complesso) ed è *completo* rispetto alla norma di Hilbert (2.1).

**Esempi 2.1.7** (di spazi di Hilbert).

(1) Lo spazio  $\mathbb{R}^N$ , munito del prodotto scalare

$$(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$$

è uno spazio di Hilbert su  $\mathbb{R}$ .

(2) Lo spazio  $l^2$  (cfr. 1.4.6) è uno spazio di Hilbert su  $\mathbb{C}$  con il prodotto scalare

$$(x, y) := \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k}.$$

**Nota importante.** D'ora in avanti considereremo spazi di Hilbert reali, se non specificato diversamente.

## 2.2 Proiezione su un convesso chiuso

**Teorema 2.2.1** (Teorema della proiezione su un convesso, chiuso, non vuoto di uno spazio di Hilbert). *Sia  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert; sia  $K \subset H$  convesso, chiuso e non vuoto. Allora, per ogni  $f \in H$  esiste un unico  $u = u_f \in K$  tale che*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| \quad (= d(f, K)) . \quad (2.2)$$

*Inoltre  $u$  è caratterizzato dalla seguente proprietà:*

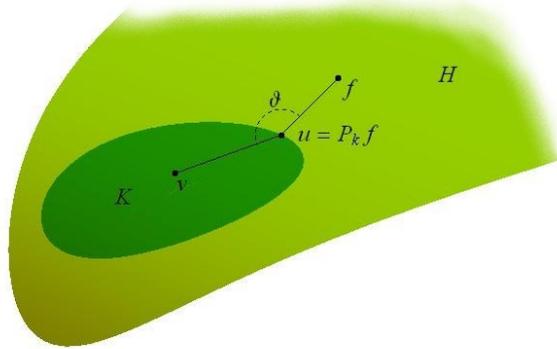
$$\begin{cases} u \in K \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.3)$$

**Osservazione 2.2.2.** La disuguaglianza in (2.3) esprime il fatto che l'angolo determinato dai vettori  $f - u$  e  $v - u$  è maggiore o uguale di  $\pi/2$ .

*Dimostrazione.*

**Esistenza.** Sia

$$d := \inf_{v \in K} \|f - v\|.$$



**Figura 2.1:** Proiezione di  $f$  sul convesso  $K$ .

Per le proprietà dell'estremo inferiore esiste  $(v_n) \subset K$  tale che

$$d_n := \|f - v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d$$

(cioè, esiste  $(v_n) \subset K$  successione “minimizzante” per  $\|f - \cdot\|$ ).

Posto  $u = f - v_n$  e  $v = f - v_m$  nell'identità del parallelogramma, si ha

$$\left\| f - \frac{v_m + v_n}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2)$$

e quindi

$$\left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2.$$

Poiché  $v_n, v_m \in K$  e  $K$  è convesso, risulta  $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$  e quindi

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d.$$

Pertanto

$$0 \leq \left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2$$

e quindi esiste il limite per  $n, m \rightarrow +\infty$  di  $\|v_n - v_m\|$  ed è  $= 0$ . Dunque la successione  $(v_n) \subset K$  è di Cauchy in  $H$ . Poiché  $H$  è completo e  $K$  è chiuso, esiste  $u = u_f \in K$  tale che  $\|v_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Osservato che

$$d \leq \|f - u\| \leq \|f - v_n\| + \|v_n - u\|,$$

passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  risulta

$$\|f - u\| = d.$$

Si è dunque provata l'esistenza.

**Equivalenza (2.2)  $\iff$  (2.3).**

(2.3)  $\implies$  (2.2). Sia  $v \in K$ . Per il teorema di Carnot "generalizzato" si ha

$$\|f - u\|^2 + \|v - u\|^2 - 2(f - u, v - u) = \|f - v\|^2$$

e quindi, ricordando che per ipotesi  $(f - u, v - u) \leq 0$ ,

$$\|f - u\|^2 - \|f - v\|^2 = 2(f - u, v - u) - \|v - u\|^2 \leq 0$$

da cui

$$\|f - u\| \leq \|f - v\| \quad \forall v \in K.$$

(2.2)  $\implies$  (2.3). Sia  $v \in K$ . Posto

$$w = (1 - t)u + tv = u + t(v - u) \quad t \in ]0, 1],$$

si ha  $w \in K$  e per ipotesi

$$\|f - u\| \leq \|f - w\| = \|(f - u) - t(v - u)\|,$$

da cui

$$\|f - u\|^2 \leq \|f - u\|^2 + t^2\|v - u\|^2 - 2t(f - u, v - u)$$

e quindi

$$2(f - u, v - u) \leq t\|v - u\|^2.$$

Passando al limite per  $t \rightarrow 0^+$  risulta

$$(f - u, v - u) \leq 0.$$

**Unicità.** Siano  $u_1, u_2 \in K$  tali che

$$\begin{cases} (f - u_1, v - u_1) \leq 0 \\ (f - u_2, v - u_2) \leq 0 \end{cases} \quad \forall v \in K.$$

In particolare

$$\begin{cases} (f - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \\ (f - u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} (f - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \\ (u_2 - f, u_2 - u_1) \leq 0 \end{cases},$$

e quindi

$$0 \leq (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0,$$

cioè

$$u_1 = u_2.$$

□

**Definizione 2.2.3.** Nelle ipotesi del teorema precedente definiamo l'operatore "proiezione su  $K$ "

$$\begin{aligned} P_K : H &\rightarrow K \\ f &\mapsto P_K(f) = u \quad (\text{proiezione di } f \text{ su } K) \end{aligned}$$

dove  $u$  è l'unico elemento di  $K$  tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|.$$

**Corollario 2.2.4.** Sia  $(H, \|\cdot\|)$  uno spazio di Hilbert reale,  $M$  un suo sottospazio vettoriale chiuso e sia  $f \in H$ ; allora  $u = P_M f$  è caratterizzato da

$$\begin{cases} u \in M \\ (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M \quad (\text{i.e. } (f - u) \perp M, \text{ ovvero } f - u \text{ è ortogonale a } M). \end{cases} \quad (2.4)$$

*Dimostrazione.* Proviamo l'equivalenza: (2.3)  $\iff$  (2.4).

(2.4)  $\implies$  (2.3). Poiché  $u \in M$  risulta

$$(f - u, v - u) = 0 \quad \forall v \in M.$$

(2.3)  $\implies$  (2.4) Dall'ipotesi segue che

$$(f - u, \lambda v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

pertanto

$$\lambda(f - u, v) \leq (f - u, u) \quad \forall v \in M, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$(f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M.$$

□

**Osservazione 2.2.5.** Abbiamo già riconosciuto (cfr. Osservazione 2.1.2) che, in uno spazio di Hilbert, preso  $f \in H$ , l'applicazione  $u \mapsto (f, u)$  è un funzionale lineare e continuo su  $H$ ; è notevole il fatto che **tutti** i funzionali lineari e continui su  $H$  sono rappresentati mediante il prodotto scalare per un opportuno vettore, come dimostrato nella successiva sezione.

## 2.3 Duale di uno spazio di Hilbert. Teorema (di Riesz-Fréchet) di rappresentazione dei funzionali lineari e continui

Indichiamo con  $H^*$  il duale (topologico) di  $H$  (i.e. lo spazio dei funzionali lineari e continui su  $H$ ). Sussiste il seguente fondamentale teorema che asserisce l'esistenza di un isomorfismo isometrico tra  $H$  e  $H^*$ .

Potremo allora identificare i due spazi  $H$  e  $H^*$ .

Nel seguito, la norma (2.1) potrà anche essere indicata con  $\|\cdot\|_H$ .

**Teorema 2.3.1.** (*Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui (di Riesz-Fréchet)*)

*Sia  $(H, \|\cdot\|)$  uno spazio di Hilbert; allora*

$$\forall \varphi \in H^* \quad \exists |u_\varphi \in H : \quad \varphi(v) = (u_\varphi, v) \quad \forall v \in H,$$

*inoltre si ha*

$$\|u_\varphi\|_H = \|\varphi\|_{H^*} \left( := \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_H} \right).$$

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi \in H^*$ . Poniamo

$$M := \varphi^{-1}(\{0\}).$$

$M$  è un sottospazio chiuso di  $H$  (sottospazio perché nucleo di  $\varphi$  lineare, e chiuso perché immagine inversa, tramite  $\varphi$  continuo, del chiuso  $\{0\}$ ).

Se  $M = H$ , risulta  $\varphi \equiv 0$  e quindi basta prendere  $u_\varphi = 0_H$  per conseguire la tesi.

Supponiamo dunque  $M \subsetneq H$  e sia  $g_0 \in H \setminus M$ . Per il Corollario precedente esiste  $g_1 = P_M(g_0) \in M$  tale che

$$(g_0 - g_1, w) = 0 \quad \forall w \in M.$$

Proviamo che

$$(i) \quad \exists g \notin M, \quad \|g\|_H = 1, \quad (g, w) = 0 \quad \forall w \in M.$$

Sia

$$g = \frac{g_0 - g_1}{\|g_0 - g_1\|_H}.$$

Si ha  $\|g\|_H = 1$   $g \notin M$  (se  $g \in M$  allora  $g_0 = g\|g_0 - g_1\|_H + g_1 \in M$ , che è assurdo) ed inoltre

$$(g, w) = \left( \frac{g_0 - g_1}{\|g_0 - g_1\|_H}, w \right) = \frac{1}{\|g_0 - g_1\|_H} (g_0 - g_1, w) = 0 \quad \forall w \in M.$$

Sia  $v \in H$  e proviamo che

(ii)  $v$  può essere decomposto nel seguente modo:

$$v = \lambda g + w \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}, \quad w \in M$$

Basta porre

$$\lambda := \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}, \quad w := v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}g$$

(osserviamo che  $w \in M$  perché  $\varphi(w) = \varphi(v) - \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}\varphi(g) = 0$ ).

Ora

$$\begin{aligned} (g, v) &= \left( g, \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}g + w \right) = \left( g, \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}g \right) + (g, w) = \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}(g, g) \\ &= \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}\|g\|_H^2 = \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}, \end{aligned}$$

per cui, posto  $u_\varphi = \varphi(g)g$ , si ha

$$\varphi(v) = (\varphi(g)g, v) = (u_\varphi, v) \quad \forall v \in H.$$

Si è dunque provata l'esistenza.

Per provare l'unicità, siano  $u_1, u_2 \in H$  tali che

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= (u_1, v) & \forall v \in H \\ \varphi(v) &= (u_2, v) & \forall v \in H.\end{aligned}$$

Allora

$$(u_1, v) - (u_2, v) = 0 \quad \forall v \in H,$$

pertanto

$$(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in H$$

e in particolare

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0,$$

da cui

$$u_1 = u_2.$$

Resta da provare che

$$\|u_\varphi\|_H = \|\varphi\|_{H^*}$$

dove

$$\|\varphi\|_{H^*} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_H}$$

Poiché

$$\varphi(v) = (u_\varphi, v) \quad \forall v \in H,$$

dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|\varphi(v)| = |(u_\varphi, v)| \leq \|u_\varphi\|_H \cdot \|v\|_H \quad \forall v \in H.$$

Pertanto

$$\frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_H} \leq \|u_\varphi\|_H \quad \forall v \in H, \quad v \neq 0$$

da cui segue che

$$\|\varphi\|_{H^*} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_H} \leq \|u_\varphi\|_H.$$

Inoltre, preso  $v = u_\varphi$ , si ha  $\varphi(u_\varphi) = (u_\varphi, u_\varphi)$  e quindi

$$|\varphi(u_\varphi)| = \|u_\varphi\|_H^2$$

ovvero, osservato che  $\|u_\varphi\|_H \neq 0$ ,

$$\frac{|\varphi(u_\varphi)|}{\|u_\varphi\|_H} = \|u_\varphi\|_H,$$

ne segue evidentemente la tesi. □

**Osservazione 2.3.2.** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e  $V$  un suo sottospazio; in virtù del Teorema di Riesz-Fréchet possiamo definire il sottospazio ortogonale di  $V$

$$V^\perp = \{u \in H : (u, v) = 0 \quad \forall v \in V\}$$

come sottospazio di  $H$ .

Evidentemente,  $H^\perp = \{0_H\}$ ,  $\{0_H\}^\perp = H$  e  $V \cap V^\perp = \{0_H\}$ .

Se  $V$  è **chiuso**, abbiamo  $V \oplus V^\perp = H$ . Infatti, ogni  $f \in H$  può scriversi come

$$f = P_V f + (f - P_V f)$$

ed il secondo addendo appartiene a  $V^\perp$  per il Corollario 2.2.4.

Inoltre

- $V^\perp$  è **chiuso**: infatti, se  $u_n \in V^\perp$  e  $u_n \rightarrow u$ , allora, per ogni  $a \in V$ ,  $(u, a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n, a) = 0$  e quindi  $u \in V^\perp$ .
- $(V^\perp)^\perp = \bar{V}$  (cfr. 5.1.3).

## 2.4 Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Nella Proposizione che segue è illustrato un procedimento induttivo per trasformare un sistema linearmente indipendente in un sistema ortonormale.

**Proposizione 2.4.1.** *Sia  $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$  un sistema linearmente indipendente di elementi di uno spazio di Hilbert  $H$  infinito-dimensionale. Allora in  $H$  esiste un sistema ortonormale  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ <sup>1</sup> tale che*

$$E_n := \text{span} \{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione procede per induzione su  $n \in \mathbb{N}$ . Per definizione, sia

$$e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Se, per ipotesi induttiva,  $e_1, \dots, e_{n-1}$  sono stati costruiti, sia  $\tilde{v}_n$  la proiezione ortogonale di  $v_n$  su  $E_{n-1} = \text{span} \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ . Allora, definiamo

$$e_n := \frac{v_n - \tilde{v}_n}{\|v_n - \tilde{v}_n\|}.$$

Osserviamo che  $v_n \neq \tilde{v}_n$ , poiché  $v_n \notin \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ . Quindi  $e_n$  è ben definito ed ha norma uno. Inoltre,  $e_n$  è ortogonale a tutti i vettori  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , pertanto la tesi è dimostrata.  $\square$

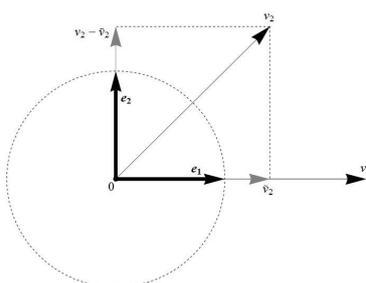
<sup>1</sup>cioè,  $\|e_n\| = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $(e_n, e_m) = 0$  se  $n \neq m$ .

Osserviamo che la proiezione ortogonale di  $v_n$  su  $E_{n-1}$  è data da

$$\tilde{v}_n = \sum_{k=1}^{n-1} (v_n, e_k) e_k$$

e quindi  $e_n$  è dato dalla formula esplicita

$$e_n = \frac{v_n - \sum_{k=1}^{n-1} (v_n, e_k) e_k}{\left\| v_n - \sum_{k=1}^{n-1} (v_n, e_k) e_k \right\|}.$$



**Figura 2.2:** Il procedimento di ortonormalizzazione applicato ai vettori  $v_1, v_2$ .

## 2.5 Somme di Hilbert. Basi hilbertiane ortonormali (sistemi ortonormali completi)

Se  $\{e_1, \dots, e_N\}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^N$ , allora ogni vettore  $x \in \mathbb{R}^N$  è esprimibile (in modo unico) come combinazione lineare finita nella forma

$$x = \sum_{k=1}^N (x, e_k) e_k, \quad (2.5)$$

dove  $(x, e_k)e_k$  rappresenta la proiezione ortogonale del vettore  $x$  sul sottospazio unidimensionale  $\text{span}\{e_k\}$ .<sup>2</sup>

In uno spazio di Hilbert  $H$  a dimensione infinita, la precedente somma finita (2.5) “*dovrebbe*” essere sostituita da una serie (infinita). È importante sapere in quali casi la corrispondente serie converge e quando si ha l’uguaglianza

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} (u, e_k) e_k, \quad (2.6)$$

per ogni  $u \in H$ .

**Definizione 2.5.1** (Somma di Hilbert). Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e sia  $(H_n)_n$  una successione di suoi sottospazi chiusi. Si dice che  $H$  è *somma di Hilbert* dei sottospazi  $H_n$  e si scrive

$$H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n,$$

se

- (a) gli  $H_n$  sono mutualmente ortogonali, cioè  $(u, v) = 0$  per ogni  $u \in H_m$ ,  $v \in H_n$ , con  $m \neq n$ ;
- (b) lo spazio vettoriale  $\text{span}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n\}$  è denso in  $H$ .

<sup>2</sup>Per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$  la funzione

$$\left\| x - \sum_{k=1}^N a_k e_k \right\|^2$$

ha valore minimo per  $a_k = (x, e_k)$ .

Infatti,

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^N a_k e_k \right\|^2 &= \left( x - \sum_{k=1}^N a_k e_k, x - \sum_{k=1}^N a_k e_k \right) = \\ &= (x, x) - 2 \left( x, \sum_{k=1}^N a_k e_k \right) + \left( \sum_{k=1}^N a_k e_k, \sum_{k=1}^N a_k e_k \right) = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^N a_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^N a_k^2 = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^N (x, e_k)^2 + \sum_{k=1}^N (a_k - (x, e_k))^2. \end{aligned}$$

Evidentemente, il minimo di questa espressione si ottiene quando l’ultimo addendo è uguale a zero, cioè per  $a_k = (x, e_k)$  per  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

**Teorema 2.5.2.** *Sia  $H$  la somma di Hilbert dei sottospazi chiusi  $(H_n)_n$ . Assegnato  $u \in H$ , poniamo*

$$u_n := P_{H_n} u$$

e

$$s_n := \sum_{k=1}^n u_k.$$

Allora, risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = u \quad (2.7)$$

e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2. \quad (2.8)$$

(identità di Bessel-Parseval).

Alla dimostrazione del Teorema 2.5.2 premettiamo il seguente risultato.

**Lemma 2.5.3.** *Sia  $(v_n)_n$  una successione in  $H$  tale che*

$$(v_m, v_n) = 0 \quad \forall m \neq n \quad (2.9)$$

e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|v_k\|^2 < +\infty. \quad (2.10)$$

Posto

$$s_n := \sum_{k=1}^n v_k,$$

si ha : esiste in  $H$  il limite

$$s := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

e, inoltre,

$$\|s\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|v_k\|^2. \quad (2.11)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che per  $m > n$  si ha (tenuto conto di (2.9) e dell'identità di Pitagora)

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m \|v_k\|^2 \rightarrow 0,$$

per  $n, m \rightarrow +\infty$  in virtù di (2.10). Quindi,  $(s_n)_n$  è una successione di Cauchy, pertanto esiste in  $H$  il limite  $s := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ . D'altra parte, si ha

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2.$$

Per  $n \rightarrow +\infty$  si ottiene la (2.11).  $\square$

*Dimostrazione del Teorema 2.5.2.* Poiché  $u_n = P_{H_n} u$ , si ha per il Corollario 2.2.4

$$(u - u_n, v) = 0 \quad \forall v \in H_n$$

e, in particolare (preso  $v = u_n \in H_n$ ),

$$(u, u_n) = \|u_n\|^2.$$

Sommando queste uguaglianze, otteniamo

$$(u, s_n) = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2.$$

Ma abbiamo anche

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 = \|s_n\|^2, \quad (2.12)$$

e quindi

$$(u, s_n) = \|s_n\|^2.$$

Ne segue che  $\|s_n\| \leq \|u\|$  (per la Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) e perciò

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Per il Lemma 2.5.3 esiste  $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ .

Proviamo che  $s = u$  (cioè identifichiamo  $s$ ). Sia

$$F = \text{span} \left\{ \bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n \right\}.$$

Dimostriamo che

$$s = P_{\bar{F}} u.$$

Infatti,

$$(u - s_n, v) = 0 \quad \forall v \in H_m, \quad m \leq n$$

(basta osservare che  $u - s_n = (u - u_m) - \sum_{k \neq m} u_k$ ).

Per  $n \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$(u - s, v) = 0 \quad \forall v \in H_m, \quad \forall m$$

e quindi

$$(u - s, v) = 0 \quad \forall v \in F,$$

che implica

$$(u - s, v) = 0 \quad \forall v \in \bar{F}.$$

D'altra parte, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n \in F$ , e al limite  $s \in \bar{F}$ . Questo prova che  $s = P_{\bar{F}}u$ .

Per (b) della definizione di Somma di Hilbert, risulta  $\bar{F} = H$  e quindi  $s = u$ .

Da (2.12) per  $n \rightarrow +\infty$  otteniamo l'identità di Bessel-Parseval

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2.$$

□

La successiva definizione tratta la generalizzazione, nel caso infinito dimensionale, della nozione di base ortonormale.

**Definizione 2.5.4.** Una successione  $(e_n)_n$  in  $H$  si dice *base ortonormale* di  $H$  (o *base di Hilbert*, o semplicemente una *base*; da alcuni autori  $(e_n)_n$  è anche chiamata *sistema ortonormale completo*) se soddisfa le seguenti proprietà:

- (i)  $\|e_n\| = 1 \quad \forall n$  e  $(e_m, e_n) = 0 \quad \forall m \neq n$ ,
- (ii) lo spazio vettoriale  $\text{span}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$  è denso in  $H$ .

**Corollario 2.5.5.** (del Teorema 2.5.2) Sia  $(e_n)_n$  una base ortonormale di  $H$ . Allora per ogni  $u \in H$ , si ha

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} (u, e_k) e_k, \quad \text{cioè} \quad u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (u, e_k) e_k \quad (2.13)$$

e

$$(u, v) = \sum_{k=1}^{+\infty} (u, e_k)(v, e_k) \quad \forall v \in H.$$

In particolare

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(u, e_k)|^2.$$

**Viceversa:**

Data  $(\alpha_n)_n \subset l^2$ , la serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$  converge ad un certo  $u \in H$  tale che  $(u, e_k) = \alpha_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e  $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue dal teorema 2.5.2 e dal Lemma 2.5.3, osservato che  $H$  è la somma di Hilbert degli spazi  $H_n = \mathbb{R}e_n$  e che  $P_{H_n}u = (u, e_n)e_n$ .  $\square$

**Teorema 2.5.6.** *Ogni spazio di Hilbert  $H$  separabile ha una base di Hilbert numerabile e ortonormale.*

*Dimostrazione.* Sia  $(v_n)_n$  un sottoinsieme numerabile e denso di  $H$ .

Sia  $F_k := \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ . La successione  $(F_k)_k$  è non decrescente, formata da spazi a dimensione finita e tale che

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k \quad \text{è denso in } H.$$

Scegliamo un vettore unitario  $e_1 \in F_1$ . Se  $F_2 \neq F_1$ , allora esiste  $e_2 \in F_2$  tale che  $\{e_1, e_2\}$  è una base ortonormale di  $F_2$ . Iterando la stessa costruzione, otteniamo una base di Hilbert ortonormale di  $H$ .  $\square$

**Osservazione 2.5.7.** Il Teorema precedente combinato col Corollario 2.5.5 mostra che **gli spazi di Hilbert separabili sono isomorfi e isometrici (per l'identità di Parseval) allo spazio  $l^2$ .**

**Osservazione 2.5.8.** La separabilità garantisce il fatto di avere una infinità al più numerabile di direzioni indipendenti a due a due ortogonali.

Se lo spazio di Hilbert  $H$  è non separabile si può ancora provare (usando il Lemma di Zorn) l'esistenza di una base ortonormale non numerabile  $(e_i)_{i \in I}$ .

**Osservazione 2.5.9.** Il concetto di base in dimensione infinita richiede il passaggio da combinazioni lineari *finite* (cfr. (2.5)) a combinazioni lineari *infinite* ma con coefficienti a quadrato sommabile (cfr. (2.13)).

**Proposizione 2.5.10.** *Ogni sottospazio chiuso  $H_0$  di uno spazio di Hilbert  $H$  separabile è separabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $(e_n)_n$  una base ortonormale di  $H$  e sia  $v_n$  la proiezione di  $e_n$  su  $H_0$ ,  $v_n := P_{H_0}e_n$ .

Allora, lo span dell'insieme

$$\left\{ \sum_{n=1}^k a_n v_n; \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}, \text{ con } a_n \text{ (coefficienti) razionali} \right\}$$

è denso (cfr. 4.2.2: infatti, se  $\varphi \in H_0$  con  $(\varphi, v_n) = 0$  per ogni  $n$ , si ha  $(\varphi, e_n) = (\varphi, v_n) = 0$ , poiché  $\varphi \in H_0$ ) e numerabile in  $H_0$ .  $\square$

## 2.6 Basi ortonormali e Serie di Fourier complesse nello spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ ,

Nel Capitolo 5 proveremo una tecnica generale per costruire basi ortonormali in spazi di Hilbert reali, separabili, precisamente prendendo gli autovalori di un operatore lineare, compatto e autoaggiunto (*base spettrale*, cfr. 5.10.1). Come applicazione, nel Capitolo 6 si costruiscono *basi speciali di  $L^2$* <sup>3</sup> formate da autofunzioni di operatori differenziali (cfr. Teorema 6.2.11 e Teorema 6.4.5, e alcuni degli Esercizi proposti per i Capitoli 1 – 5).

Vediamo ora una applicazione della teoria sviluppata nei paragrafi precedenti in questo capitolo, ad un particolare spazio di funzioni a valori complessi  $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ , (spazio di Hilbert su  $\mathbb{C}$ , separabile) con prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x) dx.$$

In questo spazio, le funzioni

$$v_k(x) = \frac{\exp(ikx)}{\sqrt{2\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sono ortonormali.

Infatti,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(ik_1x) \exp(-ik_2x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k_1 \neq k_2, \\ 2\pi, & \text{se } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Lo span dell'insieme numerabile  $F = \{\exp(ikx); k \in \mathbb{Z}\}$  è denso in  $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ , cioè

$$\overline{\text{span}(F)} = L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C}).$$

Infatti, fissata  $u \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ , per ogni  $\epsilon > 0$  esiste una funzione continua  $u_\epsilon : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$\|u_\epsilon - u\|_{L^2([-\pi, \pi])} < \epsilon, \quad u_\epsilon(-\pi) = u_\epsilon(\pi) \quad (2.14)$$

Inoltre, esiste un polinomio trigonometrico complesso, sia

$$p(x) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k \exp(ikx) \in \text{span}(F)$$

<sup>3</sup>Per gli spazi di Hilbert  $L^2$  cfr., ad esempio, [2], [5].

( $N \geq 0$  intero, i coefficienti  $\alpha_k \in \mathbb{C}$ ), tale che <sup>4</sup>

$$\|u_\epsilon - p\|_{C^0([-\pi, \pi])} < \epsilon \quad (2.15)$$

Osserviamo che, per (2.15), risulta

$$\|u_\epsilon - p\|_{L^2([-\pi, \pi])} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |u_\epsilon(x) - p(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi} \|u_\epsilon - p\|_{C^0([-\pi, \pi])} < \sqrt{2\pi} \epsilon. \quad (2.16)$$

Da (2.14) e (2.16) segue la tesi.

Pertanto  $\{\exp(ikx); k \in \mathbb{Z}\}$  è una base di Hilbert ortonormale di  $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  (cfr. Definizione 2.5.4).

Data  $u \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ , consideriamo la serie complessa trigonometrica

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \frac{\exp(ikx)}{\sqrt{2\pi}},$$

$$a_k := (u, v_k) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Per il Corollario 2.5.5, questa serie converge a  $u$  in  $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ , cioè

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| u - \sum_{k=-N}^N a_k v_k \right\|_{L^2([-\pi, \pi])} = 0.$$

Riassumendo, sussiste il seguente risultato:

**Proposizione 2.6.1.** *Sia  $u \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ .*

*Definiti i coefficienti*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \exp(-ikx) dx,$$

*si ha la convergenza*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x) - \sum_{k=-N}^N c_k \exp(ikx)|^2 dx = 0.$$

<sup>4</sup>È conseguenza del Teorema di Stone-Weierstrass-Complesso (cfr., ad esempio, Corollario B.13 in [1]).

Ne segue che per ogni  $u \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ , una sottosuccessione delle somme parziali della serie di Fourier,  $\sum_{k=-N}^N c_{n_k} \exp(in_k x)$ , converge a  $u$  quasi ovunque in  $(-\pi, \pi)$ .<sup>5</sup>

Il Teorema dimostrato da L. Carleson nel 1966 afferma che *l'intera successione delle somme parziali della serie di Fourier,  $\sum_{k=-N}^N c_k \exp(ikx)$ , converge a  $u$  quasi ovunque in  $(-\pi, \pi)$* .<sup>6</sup>

**Osservazione 2.6.2.** Sono note diverse basi ortonormali classiche in  $L^2(a, b)$ . Ne ricordiamo in particolare una: si chiamano polinomi di Legendre in  $(-1, 1)$  i polinomi ottenuti applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt (cfr. 2.4) ai vettori

$$1, t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots$$

## 2.7 Operatori strettamente positivi e Teorema di invertibilità

**Definizione 2.7.1. (Operatori strettamente positivi)** Sia  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert reale. Si dice che un operatore lineare  $T : H \rightarrow H$  è *strettamente positivo* se

$$\exists \beta > 0 \text{ t.c. } (Tu, u) \geq \beta \|u\|^2 \text{ per ogni } u \in H. \quad (2.17)$$

Sussiste il seguente Teorema di invertibilità.

**Teorema 2.7.2 (inverso di un operatore strettamente positivo).** *Sia  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert reale. Sia  $T \in B(H)$  soddisfacente (2.17).*

<sup>5</sup>cfr. teorema 4.9 in [5]

<sup>6</sup>Nel 1915 Lusin propose il seguente problema : la condizione  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty$  è sufficiente ad assicurare la convergenza q.o. della serie  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(ikx)$ ? In altre parole, la serie di Fourier di una funzione in  $L^2$  converge q.o. ? Il miglior risultato, precedente quello di Carleson, fu provato nel 1925 da Kolmogoroff-Seliverstov-Plessner : posto  $s_N u(x) = \sum_{k=-N}^N c_k \exp(ikx)$ , risulta  $s_N u(x) = o((\lg N)^{\frac{1}{2}})$ , q.o.

Dopo un periodo di cinquanta anni, dalla congettura formulata da Lusin, L. Carleson (nell'articolo del 1966 "On The Convergence And Growth Of Partial Sums Of Fourier Series", Acta Mathematica, 116 (1), 135-157) ha dato risposta affermativa alla congettura, ovvero: se  $u \in L^2$ , allora  $\lim_{N \rightarrow +\infty} s_N u(x) = u(x)$  q.o.

Per quanto riguarda la stima dell'insieme dei punti di divergenza della serie  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(ikx)$ , entra in gioco un nuovo concetto, più fine di quello di "misura di Lebesgue nulla", chiamato (in teoria del potenziale) *capacità*.

Per approfondimenti sull'argomento, cfr., ad esempio, R.E. Edwards, *Fourier Series, A Modern Introduction*, vol. I, (1967), e le indicazioni bibliografiche ivi riportate.

Allora, per ogni  $f \in H$ , esiste un'unica  $u = T^{-1}f \in H$  tale che  $Tu = f$ . Inoltre, l'operatore inverso  $T^{-1}$  soddisfa

$$\|T^{-1}\|_{B(H;H)} \leq \frac{1}{\beta}.$$

*Dimostrazione.* Proviamo che dall'ipotesi (2.17) segue che l'operatore  $T$  è iniettivo e suriettivo.

1. Da (2.17) segue che

$$\beta\|u\|^2 \leq (Tu, u) \leq \|Tu\| \|u\|.$$

Quindi

$$\beta\|u\| \leq \|Tu\|. \quad (2.18)$$

Se  $Tu = 0$ , allora  $u = 0$ , pertanto  $\ker T = \{0\}$  e  $T$  è iniettivo.

2. Ora, dimostriamo che  $Im T$  è chiuso. Siano  $(v_n)_n \subset Im T$  e  $v \in H$  tali che  $v_n \rightarrow v$ . Proviamo che esiste  $u \in H$  tale che  $v = Tu$ . Sia, allora,  $v_n = Tu_n$  con  $u_n \in H$ . Da (2.18) otteniamo

$$\limsup_{m,n \rightarrow +\infty} \|u_m - u_n\| \leq \limsup_{m,n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \|Tu_m - Tu_n\| = \limsup_{m,n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \|v_m - v_n\| = 0.$$

Pertanto, la successione  $(u_n)_n$  è di Cauchy e converge ad  $u \in H$ . Risulta, per la continuità di  $T$ ,

$$Tu = \lim_{n \rightarrow +\infty} Tu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v.$$

3. Dimostriamo che  $Im T = H$ . In caso contrario ( $Im T \subsetneq H$ ), poiché  $Im T$  è chiuso,  $H = Im T \oplus (Im T)^\perp$  e, quindi, troveremmo un vettore non nullo  $w \in (Im T)^\perp$ . Questo implicherebbe

$$\beta\|w\|^2 \leq (Tw, w) = 0,$$

cioè una contraddizione.

4. Dai precedenti punti 1, 2 e 3, segue che  $T : H \rightarrow H$  è bigettiva; quindi, per ogni  $f \in H$ , l'equazione  $Tu = f$  ha un'unica soluzione

$$u = T^{-1}f.$$

Da (2.18) segue che

$$\|T^{-1}f\| = \|u\| \leq \frac{\|f\|}{\beta}$$

per ogni  $f \in H$ ; pertanto

$$\|T^{-1}\|_{B(H)} \leq \frac{1}{\beta}.$$

□

# Capitolo 3

## Spazio duale. Convergenze (sequenziali) debole e debole\*

### Prologo

R. Courant, nell'Introduzione al suo libro: *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces, Interscience, New York, 1950.*  
scriveva:

*A new era in the history of mathematics opened when Gauss proved the fundamental theorem of algebra. Abandoning the futile attempts of his predecessors to solve algebraic equations of higher degree by root extraction, he took a step of general significance by proving merely the existence of the roots in questions. For the first time it was clearly understood that the primary task in a mathematical problem is to prove the existence of a solution. To find procedures by which the solution can be explicitly obtained is a further question, distinct from that of existence. Since the beginning of the last century this distinction has played a clarifying role contributing to progress in all fields of mathematics. Among the existence proofs which dominated the mathematical thinking of this period, the most celebrated and consequential were those based on extremum problems of the calculus of variations and suggested by actual or imagined physical experiments.*

Per motivare l'introduzione e lo studio della convergenza debole, consideriamo, ad esempio, un problema di minimo del Calcolo delle Variazioni<sup>1</sup> in uno spazio di funzioni  $X$  normato e completo .

Se non è possibile trovare una forma esplicita della soluzione, in genere si

---

<sup>1</sup>Un modello può essere il *Principio di Dirichlet* (cfr., ad esempio in [7] e [6]), studiato nel XX secolo da D. Hilbert (1900), J. Hadamard (1906), H. Lebesgue (1907), e che ha trovato una dimostrazione definitiva dopo gli anni '40 col contributo, tra gli altri, di L. Tonelli e C. B. Morrey.

segue un procedimento, consistente in tre passi, che si basa essenzialmente su una generalizzazione del teorema di Weierstrass:

**Teorema 3.0.1. (di Weierstrass-Fréchet)** Siano  $X$  uno spazio topologico e  $\mathcal{G}$  un funzionale,  $\mathcal{G} : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo che

- (1)  $\mathcal{G}$  sia limitato inferiormente;
- (2)  $\mathcal{G}$  sia sequenzialmente semicontinuo inferiormente (s.c.i) (cioè, per ogni successione  $(u_n)_n$  in  $X$  convergente a  $u \in X$ , risulta

$$\mathcal{G}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}(u_n);$$

- (3)  $X$  sia sequenzialmente compatto (cioè, da ogni successione  $(u_n)_n$  in  $X$  si può estrarre una sottosuccessione  $(u_{n_k})_k$  convergente in  $X$ ).

Allora  $\mathcal{G}$  ha minimo in  $X$ .<sup>2</sup>

Si tratta, quindi, di trovare delle successioni minimizzanti (più precisamente estremanti)  $(u_n)_n$  (cioè,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}(u_n) = \inf_X \mathcal{G}$ ) dalle quali sia possibile estrarre sottosuccessioni convergenti e sfruttare poi la sequenziale s.c.i. di  $\mathcal{G}$ , per concludere che i punti limite sono di minimo.

Per il conseguimento del punto (3) si incontra una rilevante differenza tra  $\mathbb{K}^N$  e gli spazi di funzioni a dimensione infinita. Infatti, in  $\mathbb{K}^N$  tutti gli insiemi chiusi e limitati sono compatti, cioè in  $\mathbb{K}^N$  vale il Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Abbiamo già provato che questa importante proprietà di compattezza è valida in ogni spazio normato a dimensione finita e non è valida in alcuno spazio a dimensione infinita (Teorema 1.8.5).

Ad esempio, nello spazio  $(C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , la successione di funzioni continue  $f_n(t) := \sin(nt)$  è limitata, ma non ammette alcuna sottosuccessione uniformemente convergente.

<sup>2</sup>*Dimostrazione.* Per (1), sia  $(u_n)_n$  una successione minimizzante in  $X$ , ossia tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}(u_n) = \inf_X \mathcal{G}$ . Per (3) esiste una successione estratta  $(u_{n_k})_k$  convergente in  $X$  ad un elemento  $u_0$ . Per (2) risulta

$$\inf_X \mathcal{G} \leq \mathcal{G}(u_0) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{G}(u_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{G}(u_n) = \inf_X \mathcal{G}$$

e quindi

$$-\infty < \mathcal{G}(u_0) = \inf_X \mathcal{G}$$

Quindi, in uno spazio di funzioni a dimensione infinita  $X$ , l'aver dimostrato che una successione è limitata, non garantisce l'esistenza di una sottosuccessione convergente.

Per superare questa difficoltà, si possono adottare due importanti strategie:

- (i) **Introdurre una nozione di convergenza più debole della convergenza in norma (*convergenza forte*)** e provare che ogni successione limitata ha una sottosuccessione che converge in questo senso più debole, anche in uno spazio a dimensione infinita.

Risultati in questa direzione sono il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 3.2.1), il Teorema 3.3.5 di compattezza debole negli spazi di Hilbert, e più in generale il Teorema 4.3.3 di compattezza debole negli spazi riflessivi.

- (ii) **Cercare proprietà aggiuntive delle funzioni che, su uno spazio di dimensione infinita, possano garantire l'esistenza di una sottosuccessione convergente.**

Una risposta in tal senso è data dal Teorema di compattezza di Ascoli-Arzelà nello spazio  $(C^0(E; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , dove  $E$  è spazio metrico compatto (Teorema 3.4.3).

Osserviamo esplicitamente che, in generale, nelle applicazioni né lo spazio  $X$  né la convergenza sono fissati a priori, ma devono essere scelti in modo da soddisfare due requisiti contrastanti: la compattezza di  $X$  (punto (3) precedente), e la s.c.i. di  $\mathcal{G}$  (punto (2) precedente).

Si tratta di due richieste in concorrenza tra loro.

Infatti,

*per ottenere la compattezza di  $X$ , è preferibile che la topologia di  $X$  sia “abbastanza debole”* (quindi, ci sono più successioni convergenti), per cui maggiore è la probabilità che una sottosuccessione converga.

Invece,

*per avere la s.c.i. del funzionale  $\mathcal{G}$  è preferibile dotare  $X$  di una convergenza “relativamente forte”*: più la topologia su  $X$  è forte (quindi, ci sono meno successioni convergenti), maggiore è la probabilità che il funzionale  $\mathcal{G}$  sia s.c.i.

**Per questi motivi lo spazio  $X$  va dotato di una convergenza per quanto possibile “relativamente debole”.**

È evidente che, nelle specifiche applicazioni, “l'efficacia della scelta” può essere valutata a posteriori.

Motivati dalle precedenti considerazioni, introduciamo ora convergenze più deboli della convergenza in norma.

### 3.1 Convergenze (sequenziali) debole, debole\* e proprietà

**Definizione 3.1.1 (Spazio duale di uno spazio normato).** Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio normato. Consideriamo lo spazio dei funzionali  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineari e limitati, denotato con  $B(X; \mathbb{K}) =: X^*$ .<sup>3</sup>

$X^*$ , munito della norma

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{X^*} &:= \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\varphi(x)| \left( = \sup_{\|x\|_X = 1} |\varphi(x)| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_X} \right. \\ &= \left. \inf \{M > 0 : \forall x \in X \ |\varphi(x)| \leq M\|x\|_X\} \right). \end{aligned}$$

è uno spazio di Banach su  $\mathbb{K}$  (Teorema 1.6.7) e si chiama *spazio duale (topologico) di  $X$* .

Introduciamo ora la convergenza debole di successioni su  $X$  e la convergenza debole\* di successioni su  $X^*$  (duale di  $X$ ).

**Definizione 3.1.2 (convergenza debole su  $X$ ).** Una successione  $(x_n)_n$  in uno spazio di Banach  $(X, \|\cdot\|_X)$  è *convergente debolmente* in  $X$  se esiste  $x \in X$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x) \quad \text{per ogni } \varphi \in X^*. \quad (3.1)$$

In tal caso, si dice che  $x$  è il *limite debole* della successione  $(x_n)_n$  e si scrive

$$x_n \rightharpoonup x.$$

**Osservazione 3.1.3.** D'ora in avanti diremo che la successione  $(x_n)_n$  *converge fortemente o in norma*  $\|\cdot\|_X$  a  $x \in X$  se  $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$  e scriveremo  $x_n \rightarrow x$ . Dimosteremo, in seguito, che la convergenza in norma risulta essere più forte della convergenza debole (giustificando anche la terminologia usata!). Ricordiamo che, in caso di convergenza in norma, il limite è unico. Per quanto riguarda la convergenza debole in  $X$ , proveremo che vale il medesimo risultato: *il limite debole, se esiste, è unico*.

**Definizione 3.1.4 (convergenza debole\* su  $X^*$ ).** Una successione di funzionali  $(\varphi_n)_n \subset X^*$  è *convergente debolmente\** in  $X^*$  se esiste  $\varphi \in X^*$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \quad \text{per ogni } x \in X. \quad (3.2)$$

<sup>3</sup> $X^*$  non si riduce allo zero (per il corollario 4.1.6 del Teorema di Hahn-Banach) se  $X$  non è banale.

In tal caso, si dice che  $\varphi$  è il *limite debole\** della successione  $(\varphi_n)_n$  e si scrive

$$\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi.$$

**Osservazione 3.1.5.** La convergenza in norma  $\|\cdot\|_{X^*}$  risulta essere molto più forte della convergenza debole\*. Infatti

$$\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = 0 \text{ per ogni } x \in X,$$

mentre

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = 0.$$

In altre parole, la convergenza debole\* di funzionali è puntuale, quella in norma  $\|\cdot\|_{X^*}$  è uniforme.

Le successive due proposizioni contengono le proprietà principali delle convergenze deboli appena introdotte in  $X$  e in  $X^*$ ; per la dimostrazione, rimandiamo all'Osservazione 4.5.6.

**Proposizione 3.1.6 (proprietà della convergenza debole).**

Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio di Banach e sia  $(x_n)_n$  una successione in  $X$ .

- (i) Se  $x_n \rightharpoonup x$ , allora  $x$  è unico.
- (ii) Se  $x_n \rightarrow x$  fortemente in  $X$ , allora  $x_n \rightharpoonup x$ .
- (iii) Se  $x_n \rightharpoonup x$ , allora  $(\|x_n\|_X)_n$  è limitata (**successioni debolmente convergenti sono limitate**) e

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_X \quad (3.3)$$

(debole semicontinuità inferiore della norma  $\|\cdot\|_X$ ).

- (iv) Se  $x_n \rightharpoonup x$  e  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $X^*$  (cioè  $\|\varphi_n - \varphi\|_{X^*} \rightarrow 0$ ), allora

$$\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x).$$

**Osservazione 3.1.7.** In riferimento alla (ii) della Proposizione 3.1.6 osserviamo che: *In uno spazio a dimensione infinita, in generale, non è vero che la convergenza debole implica la convergenza forte.*

Diamo un esempio. La successione di  $l^2$

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots), \quad \dots$$

converge debolmente a zero in  $l^2$ .

Infatti, per il Teorema di Riesz-Fréchet, preso un arbitrario funzionale lineare e continuo  $\varphi \in l^2$ , esiste (unico)  $u_\varphi = u = (u_1, u_2, \dots) \in l^2$  tale che

$$\varphi(v) = (u, v) \quad \text{per ogni } v \in l^2.$$

Pertanto,  $\varphi(e_n) = (u, e_n) = u_n$  e poiché  $u_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ , otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(e_n) = 0.$$

Ma, la precedente successione  $(e_n)_n$  non converge fortemente (in norma) a nessun limite.

Vale, più in generale, il seguente risultato (cfr. [5]).

Sia  $X$  uno spazio di Banach infinito-dimensionale soddisfacente **una** delle seguenti assunzioni:

- (a)  $X^*$  è separabile ;
- (b)  $X$  è riflessivo.

Allora, si può provare che esiste una successione  $(x_n)_n \subset X$  tale che  $x_n$  converge debolmente in  $X$  e  $\|x_n\|_X = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Osservazione 3.1.8.** Vi sono delle eccezioni. Qui ne segnaliamo una. Un risultato (dovuto a **Schur**) afferma che nello spazio  $l^1$  risulta:

$$x^{(n)} \rightharpoonup x \text{ debolmente in } l^1 \Leftrightarrow x^{(n)} \rightarrow x \text{ fortemente in } l^1.$$

Ovviamente è sufficiente dimostrare l'implicazione :

$$x^{(n)} = (x_i^n)_i \rightharpoonup x \text{ debolmente in } l^1 \Rightarrow x^{(n)} = (x_i^n)_i \rightarrow x \text{ fortemente in } l^1.$$

La dimostrazione di questa implicazione è data alla fine di 5.11.

**Proposizione 3.1.9 (proprietà della convergenza debole\*).**

Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio di Banach e sia  $(\varphi_n)_n$  una successione in  $X^*$ .

- (i\*) Se  $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$ , allora  $\varphi$  è unico.
- (ii\*) Se  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  fortemente in  $X^*$ , allora  $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$ .
- (iii\*) Se  $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$ , allora  $(\|\varphi_n\|_{X^*})_n$  è limitata e

$$\|\varphi\|_{X^*} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n\|_{X^*} \tag{3.4}$$

(debole\* semicontinuità inferiore della norma  $\|\cdot\|_{X^*}$ ).

(iv\*) Se  $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$  e  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  (cioè  $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$ ), allora

$$\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x).$$

Il risultato che segue mostra che, in uno spazio a dimensione finita, la convergenza debole e quella forte coincidono.

**Proposizione 3.1.10.** *In uno spazio  $X$  a dimensione finita  $N$  la convergenza debole coincide con quella forte.*

*Dimostrazione.* Sia  $\{u_1, \dots, u_N\}$  una base ortonormale (ortogonale e normalizzata) in  $X$  rispetto al prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)$  e sia  $(x^{(k)})_k$  una successione in  $X$  convergente debolmente all'elemento  $x \in X$ . Siano

$$x^{(k)} = x_1^{(k)} u_1 + \dots + x_N^{(k)} u_N$$

e

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_N u_N.$$

Allora, poiché ogni applicazione  $v \mapsto (v, u_j)$  ( $j = 1, \dots, N$ ) appartiene a  $X^*$  e  $x^{(k)} \rightharpoonup x$ , si ha

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= (x^{(k)}, u_1) \rightarrow (x, u_1) = x_1, \\ &\vdots \\ x_N^{(k)} &= (x^{(k)}, u_N) \rightarrow (x, u_N) = x_N, \end{aligned}$$

cioè

$$(x_1^{(k)}, \dots, x_N^{(k)}) \rightarrow (x_1, \dots, x_N).$$

Ne segue che

$$\|x^{(k)} - x\|_X = \left( \sum_{j=1}^N (x_j^{(k)} - x_j)^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

cioè  $(x^{(k)})_k$  converge fortemente ad  $x$ . Poiché la convergenza forte implica sempre quella debole, l'equivalenza di queste convergenze è dimostrata.  $\square$

## 3.2 Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki

Per il Teorema 1.8.5, se lo spazio  $X^*$  ha dimensione infinita, la palla chiusa unitaria in  $X^*$

$$\overline{B_{X^*}} = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\|_{X^*} \leq 1\}$$

non è compatta rispetto alla convergenza forte in  $X^*$ . Tuttavia, se invece della convergenza forte consideriamo la convergenza debole\* in  $X^*$ , vale il seguente teorema, che esprime un risultato di locale compattezza negli spazi duali.

**Teorema 3.2.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki).**

Se  $(X, \|\cdot\|_X)$  è uno spazio di Banach separabile<sup>4</sup>, allora la palla chiusa unitaria in  $X^*$  è compatta rispetto alla convergenza (sequenziale) debole\* (cioè, ogni successione limitata di funzionali lineari e limitati  $\varphi_n \in X^*$  ha una sottosuccessione che converge debolmente\*).

*Dimostrazione.* Sia  $(\varphi_n)_n$  una successione limitata di funzionali in  $X^*$ , quindi

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*} \leq c.$$

Proviamo che esiste una sua estratta  $(\varphi_{n_k})_k$  debolmente\* convergente ad una certa  $\varphi \in X^*$ .

Dividiamo la dimostrazione in vari passi.

1. (Costruzione del funzionale limite  $\varphi$ ). Poiché  $X$  è separabile, esiste un sottoinsieme numerabile e denso  $S = \{x_j : j \in \mathbb{N}\} \subset X$ . Mediante un procedimento di diagonalizzazione, costruiamo una sottosuccessione  $(\varphi_{n_k})_k$  che converge puntualmente in ogni  $x_j$ , cioè tale che, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , esista un valore  $\varphi(x_j) \in \mathbb{K}$  per cui valga

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{n_k}(x_j) = \varphi(x_j). \quad (3.5)$$

Poiché la successione numerica  $(\varphi_n(x_1))_n \subset \mathbb{K}$  è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste un insieme infinito di indici  $I_1 \subset \mathbb{N}$  tale che la sottosuccessione  $(\varphi_n(x_1))_{n \in I_1}$  converge ad un certo valore limite  $\varphi(x_1) \in \mathbb{K}$ . Analogamente, nel punto  $x_2$ , la precedente (sotto)successione  $(\varphi_n(x_2))_{n \in I_1}$  è limitata e quindi esiste un insieme infinito di indici  $I_2 \subset I_1$  tale che la sottosuccessione  $(\varphi_n(x_2))_{n \in I_2}$  converge ad un valore limite  $\varphi(x_2) \in \mathbb{K}$ . Induttivamente, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , possiamo trovare un insieme infinito di indici  $I_j \subset I_{j-1}$  tale che la sottosuccessione  $(\varphi_n(x_j))_{n \in I_j}$  converge ad un valore limite  $\varphi(x_j) \in \mathbb{K}$ . Otteniamo, così, una sequenza di sottosuccessioni di  $(\varphi_n)_n$ , individuate dagli insiemi di indici  $I_j$ , in cui ciascuna sottosuccessione è a sua volta estratta da tutte le precedenti e tale che per ogni  $j \in \mathbb{N}$   $(\varphi_n)_{n \in I_j}$  è convergente nei punti  $x_1, \dots, x_j$ . Per costruire la sottosuccessione diagonale cercata, scegliamo nel seguente modo una sottosuccessione di indici

<sup>4</sup>Questo Teorema rimane valido anche se lo spazio  $X$  non è separabile.

$n_1 < n_2 < \dots$ , con  $n_k \in I_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Denotiamo con  $\varphi_{n_1}(x_1)$  il primo elemento della prima successione  $(\varphi_n(x_1))_{n \in I_1}$ , con  $\varphi_{n_2}(x_2)$  il secondo elemento della seconda successione  $(\varphi_n(x_2))_{n \in I_2}$  e, così via, con  $\varphi_{n_k}(x_k)$  il  $k$ -esimo elemento della  $k$ -esima successione  $(\varphi_n(x_k))_{n \in I_k}$ . Otteniamo così una sottosuccessione (estratta dalla successione di partenza  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) di funzionali  $(\varphi_{n_k})_k \subset X^*$  tale che, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , la corrispondente successione numerica  $(\varphi_{n_k}(x_j))_k$  converge al valore numerico  $\varphi(x_j)$ , soddisfacendo (3.5). Possiamo, allora, definire su  $S$  la funzione  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x_j \mapsto \varphi(x_j)$ .

2. (Linearità e limitatezza del funzionale limite  $\varphi$ ). La funzione limite  $\varphi$  trovata al punto precedente è uniformemente Lipschitziana, con costante di Lipschitz  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*}$ . Infatti, per ogni coppia di punti  $x_j, x_l \in S$ , si ha

$$\begin{aligned} |\varphi(x_j) - \varphi(x_l)| &= \lim_{k \rightarrow +\infty} |\varphi_{n_k}(x_j) - \varphi_{n_k}(x_l)| \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi_{n_k}\|_{X^*} \|x_j - x_l\|_X \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*} \|x_j - x_l\|_X. \end{aligned}$$

Allora,  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{K}$  può essere estesa per continuità a  $\overline{S}$ , cioè all'intero spazio  $X$  (essendo  $\overline{S} = X$  per ipotesi). Continuando ad indicare ancora con  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$  tale estensione, osserviamo che  $\varphi$  è limite puntuale di una successione uniformemente limitata di funzionali lineari; pertanto essa è anche lineare e limitata, quindi  $\varphi \in X^*$ .<sup>5</sup>

3. (Convergenza debole\* al funzionale limite  $\varphi$ ). Resta da provare che la sottosuccessione  $(\varphi_{n_k})_k$  converge debolmente\* al funzionale limite  $\varphi$ , cioè che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x)| = 0 \quad \forall x \in X. \quad (3.6)$$

Sia  $x \in X$  e fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Poiché  $S$  è denso in  $X$ , esiste  $x_j \in S$  tale che  $\|x - x_j\|_X < \varepsilon$ . Poiché  $\varphi$  e tutte le funzioni  $\varphi_n$  sono Lipschitziane,

---

<sup>5</sup>*Principio di estensione.* Un funzionale lineare limitato  $\varphi$  con dominio  $S$  può essere esteso a un funzionale lineare limitato con dominio  $\overline{S}$ . Questa estensione è unica e la limitazione è preservata nella estensione.

si ha

$$\begin{aligned}
\limsup_{k \rightarrow +\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x)| &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_k}(x_j)| \\
&\quad + \limsup_{k \rightarrow +\infty} |\varphi_{n_k}(x_j) - \varphi(x_j)| + |\varphi(x_j) - \varphi(x)| \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*} \|x - x_j\|_X + 0 \\
&\quad + \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*} \|x - x_j\|_X \\
&\leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$  segue la tesi. □

**Osservazione 3.2.2.** Fin qui ci siamo limitati a considerare convergenze deboli di successioni; un discorso più generale richiede l'introduzione delle *topologie deboli*  $\sigma(X, X^*)$  e  $\sigma(X^*, X)$ .

Abbiamo definito lo spazio duale di  $X$ ,  $X^*$ , come lo spazio di tutti i funzionali lineari che sono continui (limitati), quando su  $X$  si considera la topologia della norma.

Su uno spazio di Banach  $X$  e sul suo duale  $X^*$  introduciamo (rispettivamente) due topologie speciali.

**Definizione 3.2.3 (topologia debole su  $X$ ).**

La topologia debole su uno spazio di Banach  $X$ ,  $\sigma(X, X^*)$ , è la topologia la cui base è formata da tutti gli insiemi

$$V(x_0; Y^*; \varepsilon) = \{x \in X; |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon, \text{ per ogni } \varphi \in Y^*\},$$

dove  $x_0 \in X$ ,  $Y^*$  è un sottoinsieme finito di  $X^*$  e  $\varepsilon > 0$ .

**Definizione 3.2.4 (topologia debole \* su  $X^*$ ).**

La topologia debole \* sullo spazio duale  $X^*$ ,  $\sigma(X^*, X)$ , è la topologia la cui base è formata da tutti gli insiemi

$$V^*(\varphi_0; Y; \varepsilon) = \{\varphi \in X^*; |\varphi(x) - \varphi_0(x)| < \varepsilon, \text{ per ogni } x \in Y\},$$

dove  $\varphi_0 \in X^*$ ,  $Y$  è un sottoinsieme finito di  $X$  e  $\varepsilon > 0$ .

Sussiste il seguente risultato (che, per brevità, non dimostriamo), più generale del precedente 3.2.1 (cfr., ad esempio, [5]).

**Teorema 3.2.5 (Banach-Alaoglu-Bourbaki).**

Sia  $X$  uno spazio di Banach. La palla chiusa unitaria in  $X^*$ ,

$$\overline{B}_{X^*} = \{\varphi \in X^*; \|\varphi\|_{X^*} \leq 1\}$$

è compatta nella topologia debole\*  $\sigma(X^*, X)$ .

### 3.3 Convergenza debole e compattezza debole in uno spazio di Hilbert: estensione del Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Per il Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui (cfr. Teorema di Riesz-Fréchet), uno spazio di Hilbert  $H$  può essere identificato con il suo duale  $H^*$ . Pertanto, **le nozioni di convergenza debole e convergenza debole\* in uno spazio di Hilbert coincidono.**

**Definizione 3.3.1 (convergenza debole su uno spazio di Hilbert).** Una successione  $(x_n)_n$  in uno spazio di Hilbert  $(H, (\cdot, \cdot))$  è *convergente debolmente* in  $H$  se esiste  $x \in H$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (y, x_n) = (y, x) \quad \text{per ogni } y \in H. \quad (3.7)$$

In tal caso, si dice che  $x$  è il *limite debole* della successione  $(x_n)_n$  e si scrive

$$x_n \rightharpoonup x.$$

**Osservazione 3.3.2.** Il limite debole in uno spazio di Hilbert  $H$ , se esiste, è unico. Infatti, se  $x_n \rightharpoonup x$  e  $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ , preso  $y := x - \bar{x}$  in (3.7), si ha

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x - \bar{x}, x_n) - \lim_{n \rightarrow +\infty} (x - \bar{x}, x_n) = (x - \bar{x}, x) - (x - \bar{x}, \bar{x}) = \|x - \bar{x}\|^2,$$

da cui  $x = \bar{x}$ .

**Osservazione 3.3.3.** Poiché ogni spazio normato  $X$  a dimensione finita, con norma  $\|\cdot\|_2$ , è anche di Hilbert, la Proposizione 3.1.10 afferma che **in uno spazio a dimensione finita  $X$  la convergenza forte (i.e. in norma  $\|\cdot\|_2$ ), la convergenza debole e la convergenza debole\* coincidono.**

**Osservazione 3.3.4.** La locale compattezza debole\* di  $X^*$ , ovvero la compattezza di  $\overline{B_{X^*}}$  rispetto alla convergenza debole\*, è la proprietà più notevole della convergenza debole\*. Visto il ruolo fondamentale svolto dagli insiemi compatti, ad esempio per ottenere risultati di esistenza anche in problemi applicativi, è evidente l'importanza della convergenza debole\*.

In virtù dell'identificazione tra uno spazio di Hilbert e il suo duale, sussiste il seguente teorema.

**Teorema 3.3.5 (compattezza debole in uno spazio di Hilbert).** *Ogni successione limitata in uno spazio di Hilbert ammette una sottosuccessione debolmente convergente.*

### 3.4 Compattezza in spazi di funzioni continue: il Teorema di Ascoli-Arzelà

Per gli insiemi appartenenti a spazi funzionali concreti, è importante dare criteri di precompattezza (per la convergenza forte) utili nelle applicazioni. In questa sezione ci soffermeremo su sottoinsiemi dello spazio  $C^0(E; \mathbb{R})$  delle funzioni continue in uno **spazio metrico compatto**  $(E, d)$  a valori in  $\mathbb{R}$ . In tale contesto, un criterio di precompattezza per i sottoinsiemi di  $C^0(E; \mathbb{R})$  è fornito dal Teorema di Ascoli-Arzelà 3.4.3, capostipite dei teoremi di compattezza in Analisi Funzionale. Diamo prima due definizioni.

**Definizione 3.4.1 (equilimitatezza).** Una famiglia  $\mathcal{F}$  di funzioni in  $C^0(E; \mathbb{R})$  si dice *equilimitata* se

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| < +\infty \quad \forall x \in E. \quad (3.8)$$

**Definizione 3.4.2 (uniforme equicontinuità).** Una famiglia  $\mathcal{F}$  di funzioni in  $C^0(E; \mathbb{R})$  si dice *uniformemente equicontinua* se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in E. \quad (3.9)$$

È opportuno richiamare il fatto che, se  $(E, d)$  è uno spazio metrico compatto, allora  $(C^0(E; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach. In virtù della completezza, dal Teorema 1.8.4 segue che, per un sottoinsieme  $\mathcal{F} \subset C^0(E; \mathbb{R})$ , le proprietà che seguono sono equivalenti:

- (i)  $\mathcal{F}$  è relativamente compatto, cioè la sua chiusura  $\overline{\mathcal{F}}$  è compatta;
- (ii)  $\mathcal{F}$  è precompatto, cioè, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{F}$  ammette un ricoprimento finito con palle di raggio  $\varepsilon$ ;
- (iii) Da ogni successione  $(f_k)_k$  di funzioni continue con  $f_k \in \mathcal{F}$  si può estrarre una sottosuccessione convergente uniformemente in  $E$  ad una funzione  $f \in \overline{\mathcal{F}}$ .

**Teorema 3.4.3 (di compattezza, Ascoli-Arzelà).** Sia  $(E, d)$  uno spazio metrico compatto e sia  $\mathcal{F} \subset C^0(E; \mathbb{R})$  una famiglia uniformemente equicontinua ed equilimitata. Allora  $\mathcal{F}$  è un sottoinsieme relativamente compatto di  $C^0(E; \mathbb{R})$  (equivalentemente, da ogni successione  $(f_k)_k$  di funzioni continue con  $f_k \in \mathcal{F}$  si può estrarre una sottosuccessione convergente uniformemente in  $E$  ad una funzione  $f \in \overline{\mathcal{F}}$ ).

*Dimostrazione.* È sufficiente provare che la famiglia  $\mathcal{F}$  è precompatta. Dividiamo la dimostrazione in più passi.

1. (Ricoprimento del compatto  $E$ ). Sia  $\varepsilon > 0$ ; per l'ipotesi di uniforme equicontinuità di  $\mathcal{F}$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{F} \text{ ed ogni } x, y \in E.$$

Poiché  $E$  è compatto, esso può essere ricoperto con un numero finito di palle di raggio  $\delta$ , cioè esistono  $x_1, \dots, x_n \in E$  tali che

$$E \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta).$$

Per la equilimitatezza di  $\mathcal{F}$ , si ha che

$$M := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x_i)| < +\infty.$$

2. (Ricoprimento di  $\mathcal{F}$ ). Consideriamo l'intervallo compatto  $[-M, M]$  e un suo ricoprimento finito con  $m$  palle di raggio  $\varepsilon$  centrate in  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ , cioè

$$[-M, M] \subset \bigcup_{j=1}^m B(\alpha_j, \varepsilon). \quad (3.10)$$

Sia, ora,  $\Theta$  l'insieme finito costituito dalle  $m^n$  applicazioni

$$\vartheta : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}.$$

Per ogni  $\vartheta \in \Theta$ , definiamo la famiglia di funzioni continue

$$\mathcal{F}_\vartheta := \{f \in \mathcal{F} : f(x_i) \in B(\vartheta(x_i), \varepsilon) \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Poiché per ogni  $i = 1, \dots, n$  esiste  $j \in \{1, \dots, m\}$  tale che  $\vartheta(x_i) = \alpha_j$  e poiché l'intervallo  $[-M, M]$  è ricoperto dalle palle  $B(\alpha_j, \varepsilon)$  (per (3.10)), ogni funzione  $f \in \mathcal{F}$  appartiene a qualche  $\mathcal{F}_\vartheta$ ; in altre parole, risulta

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\vartheta \in \Theta} \mathcal{F}_\vartheta.$$

3. (Precompattezza di  $\mathcal{F}$ ). Per concludere la dimostrazione, proviamo che ogni insieme  $\mathcal{F}_\vartheta$  ha diametro minore o uguale a  $4\varepsilon$ . Infatti, siano  $f, g \in \mathcal{F}_\vartheta$  e sia  $x \in E$  tale che  $x \in B(x_i, \delta)$  per qualche indice  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Allora, si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - \vartheta(x_i)| \\ &\quad + |\vartheta(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto, per l'arbitrarietà di  $x$  in  $E$ ,

$$\|f - g\|_\infty = \max_{x \in E} |f(x) - g(x)| \leq 4\varepsilon.$$

Passando all'estremo superiore su  $f, g \in \mathcal{F}_\vartheta$ , si ha che  $\text{diam}(\mathcal{F}_\vartheta) \leq 4\varepsilon$ . Quindi, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{F}$  può essere ricoperta con un numero finito di insiemi aventi diametro minore o uguale a  $4\varepsilon$ , e pertanto può essere ricoperta da un numero finito di palle chiuse di raggio  $4\varepsilon$ .

Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue la precompattezza di  $\mathcal{F}$ .

□

Il precedente Teorema 3.4.3 si può estendere a funzioni a valori in  $\mathbb{C}$  o in uno spazio  $\mathbb{R}^N$ .

**Corollario 3.4.4.** *Sia  $(E, d)$  uno spazio metrico compatto e sia  $(f_k)_k$  una successione di funzioni continue da  $E$  in  $\mathbb{R}^N$  tale che*

(i) *la famiglia  $\{f_k\}_k$  è uniformemente equicontinua;*

(ii) *la famiglia  $\{f_k\}_k$  è equilimitata, cioè*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k(x)\| < +\infty \quad \forall x \in E.$$

*Allora la successione  $(f_k)_k$  ha una sottosuccessione uniformemente convergente in  $E$ .*

*Dimostrazione.* Per ogni  $j = 1, \dots, N$  denotiamo con  $f_k^j$  la  $j$ -esima componente della funzione vettoriale  $f_k$ , cioè, per ogni  $x \in E$ , poniamo

$$f_k(x) =: (f_k^1(x), \dots, f_k^N(x)) \in \mathbb{R}^N.$$

Per il Teorema 3.4.3 applicato alla prima successione di funzioni reali  $(f_k^1)_k \subset C^0(E; \mathbb{R})$ , possiamo estrarre un insieme infinito di indici  $I_1 \subseteq \mathbb{N}$  tale che la sottosuccessione  $(f_k^1)_{k \in I_1}$  converge uniformemente in  $E$ . Passando alla seconda componente, consideriamo la sottosuccessione  $(f_k^2)_{k \in I_1}$ ; da questa sottosuccessione possiamo estrarre una ulteriore sottosuccessione  $(f_k^2)_{k \in I_2}$  (con  $I_2$  insieme infinito di indici,  $I_2 \subseteq I_1$ ) che converge uniformemente in  $E$ , e così via. Dopo  $N$  passi avremo ottenuto una sottosuccessione  $(f_k)_{k \in I_N}$  di funzioni vettoriali a valori in  $\mathbb{R}^N$  dove tutte le  $N$  componenti convergono, uniformemente in  $E$ . □

# Capitolo 4

## Teoremi di estensione per funzionali lineari, lineari limitati e conseguenze

I teoremi di estensione per funzionali lineari presentati in questo capitolo, nonostante le dimostrazioni siano non costruttive, sono importanti per la varietà delle molteplici applicazioni (cfr., ad esempio, una delle più importanti applicazioni: il Teorema di separazione di insiemi convessi).

### 4.1 Teoremi di Hahn-Banach (forma analitica)

Allo scopo di dimostrare i fondamentali Teoremi di Banach, richiamiamo, per convenienza del lettore, il Lemma di Zorn.

**Definizione 4.1.1.** Un insieme  $\mathcal{F}$  si dice *parzialmente ordinato* se, per qualche  $x, y \in \mathcal{F}$ , è definita una relazione binaria  $x \preceq y$  (“ $x$  precede  $y$ ”) che soddisfi, per ogni  $x, y, z \in \mathcal{F}$ , le seguenti proprietà:

1.  $x \preceq x$  ;
2.  $x \preceq y$  e  $y \preceq x \Rightarrow x = y$  ;
3.  $x \preceq y$  e  $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$  .

Sia  $\mathcal{F}$  un insieme parzialmente ordinato; un suo sottoinsieme  $\mathcal{F}_0$  si dice *totalmente ordinato* se per ogni  $x, y \in \mathcal{F}_0$  si ha

$$x \preceq y \text{ o } y \preceq x.$$

Un elemento  $c \in \mathcal{F}$  si dice un *maggiorante* per  $\mathcal{F}_0$  se

$$x \preceq c \quad \forall x \in \mathcal{F}_0.$$

Infine, si dice che  $m \in \mathcal{F}$  è un *elemento massimale* per  $\mathcal{F}$  se

$$\forall x \in \mathcal{F} \text{ t.c. } m \preceq x \Rightarrow m = x$$

(cioè,  $m \in \mathcal{F}$  è elemento massimale per  $\mathcal{F}$  se non esiste alcun elemento  $x \in \mathcal{F}$  tale che  $m \preceq x$ , tranne che per  $x = m$ ).

**Lemma 4.1.2 (di Zorn).** *Se, in un insieme parzialmente ordinato  $\mathcal{F}$ , ogni sottoinsieme totalmente ordinato  $\mathcal{F}_0$  ha un maggiorante (in  $\mathcal{F}$ ), allora esiste (in  $\mathcal{F}$ ) un elemento massimale.*

**Teorema 4.1.3 (di Hahn-Banach. Estensione per funzionali lineari reali).** *Sia  $X$  uno spazio vettoriale **reale**,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che*

1.  $p(tx) = tp(x)$ ,  $\forall x \in X$  e  $\forall t \geq 0$  ( $p$  è positivamente 1-omogenea)
2.  $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$   $\forall x, y \in X$  ( $p$  è sublineare).

*Sia  $V$  un sottospazio vettoriale di  $X$  e  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare tale che*

$$f(x) \leq p(x) \text{ per ogni } x \in V. \quad (4.1)$$

*Allora esiste un funzionale lineare  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  che estende  $f$ , cioè tale che*

$$F(x) = f(x) \text{ per ogni } x \in V$$

e

$$-p(-x) \leq F(x) \leq p(x) \text{ per ogni } x \in X. \quad (4.2)$$

*Dimostrazione.*

1. Se  $V = X$ , osservato che  $f(x) = -f(-x) \geq -p(-x)$ , la conclusione è ovvia.

Se  $V \subsetneq X$ , sia  $x_0 \in X \setminus V$  e consideriamo il seguente sottospazio di  $X$

$$V_0 = \text{span}\{V, x_0\} = \{x + tx_0 : x \in V, t \in \mathbb{R}\}. \quad (4.3)$$

Osserviamo che  $V \subsetneq V_0$  ( $x_0 \in V_0 \setminus V$ ), e per ogni  $x, y \in V$  si ha per (4.1)

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x-x_0) + p(x_0+y). \quad (4.4)$$

Perciò

$$f(x) - p(x-x_0) \leq p(x_0+y) - f(y) \text{ per ogni } x, y \in V. \quad (4.5)$$

Sia  $\beta := \sup_{x \in V} \{f(x) - p(x-x_0)\}$ , allora

$$f(x) - p(x-x_0) \leq \beta \leq p(x_0+y) - f(y) \text{ per ogni } x, y \in V. \quad (4.6)$$

2. Ora, estendiamo  $f$  ad un funzionale definito sul sottospazio  $V_0$  in questo modo:

$$f(x + tx_0) := f(x) + \beta t, \quad x \in V, t \in \mathbb{R}.$$

Proviamo che anche l'estensione soddisfa

$$f(x + tx_0) \leq p(x + tx_0) \quad \text{per ogni } x \in V, t \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Se  $t = 0$ , allora (4.7) è l'ipotesi iniziale (4.1). Se  $t > 0$ , sostituendo sia  $x$  che  $y$  in (4.6) con  $\frac{x}{t}$  e moltiplicando per  $t$ , si ha

$$t \left[ f\left(\frac{x}{t}\right) - p\left(\frac{x}{t} - x_0\right) \right] \leq \beta t \leq t \left[ p\left(x_0 + \frac{x}{t}\right) - f\left(\frac{x}{t}\right) \right],$$

cioè

$$f(x) - p(x - tx_0) \leq \beta t \leq p(x + tx_0) - f(x). \quad (4.8)$$

Allora, per  $x \in V$  e  $t \geq 0$  si ha

$$f(x - tx_0) = f(x) - \beta t \leq p(x - tx_0)$$

e

$$f(x + tx_0) = f(x) + \beta t \leq p(x + tx_0),$$

dove le due disuguaglianze seguono, rispettivamente, dalle limitazioni a sinistra e a destra in (4.8), provando così la (4.7).

3. I precedenti due passi mostrano che ogni funzionale lineare  $f$  definito su un sottospazio proprio  $V \subsetneq X$  si può estendere ad un sottospazio più grande, dove la disuguaglianza (4.1) risulta ancora soddisfatta.

Per completare la dimostrazione, useremo il Lemma di Zorn.

Sia  $\mathcal{F}$  la famiglia di tutte le coppie  $(W, \phi)$ , dove  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $X$  tale che  $V \subseteq W$  e  $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}$  è un funzionale lineare che estende  $f$  e tale che  $\phi(x) \leq p(x)$  per ogni  $x \in W$ .

Chiaramente  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  perché  $f \in \mathcal{F}$ .

Definiamo ora su  $\mathcal{F}$  una relazione d'ordine parziale, ponendo

$$(W, \phi) \preceq (\tilde{W}, \tilde{\phi}) \Leftrightarrow W \subseteq \tilde{W} \text{ e } \tilde{\phi}|_W = \phi.$$

Ora, per ogni sottofamiglia  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  totalmente ordinata, esiste (in  $\mathcal{F}$ ) un maggiorante (basta prendere il funzionale  $F^*$  definito sul sottospazio vettoriale di  $X$  generato da  $\bigcup_{F_0 \in \mathcal{F}_0} D(F_0)$  tale che  $F^*(x) = F_0(x)$  se  $x \in D(F_0)$ ).

Allora, dal Lemma di Zorn, segue l'esistenza di un elemento massimale per  $\mathcal{F}$ , sia esso  $(W^{max}, F)$ .

Proviamo che  $W^{max} = X$ . Se per assurdo  $W^{max} \subsetneq X$ , dai passi 1 e 2 il funzionale lineare  $F$  si potrebbe estendere ad un sottospazio più ampio, contraddicendo così l'assunzione di massimalità.

Quindi  $W^{max} = X$  e  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  è un funzionale lineare tale che

$$F(x) \leq p(x) \text{ per ogni } x \in X.$$

Per la linearità di  $F$ , si ha infine

$$-p(-x) \leq -F(-x) = F(x).$$

□

Il precedente Teorema ha una naturale applicazione nel caso in cui  $p(\cdot)$  è una norma.

**Teorema 4.1.4 (di estensione per funzionali lineari e limitati su  $\mathbb{K}$ ).**

*Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio normato sul campo  $\mathbb{K}$ . Sia  $V \subseteq X$  un sottospazio di  $X$  e  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  un funzionale lineare e limitato (i.e.  $f \in V_{\mathbb{K}}^*$ ), allora  $f$  si può estendere ad un funzionale lineare e limitato  $F : X \rightarrow \mathbb{K}$  (i.e.  $F \in X_{\mathbb{K}}^*$ )<sup>1</sup> avente la stessa norma, cioè*

$$\|F\|_{X_{\mathbb{K}}^*} := \sup_{\|x\|_X \leq 1, x \in X} |F(x)| = \sup_{\|x\|_X \leq 1, x \in V} |f(x)| := \|f\|_{V_{\mathbb{K}}^*}. \quad (4.9)$$

*Dimostrazione.*

1. Assumiamo dapprima che  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Definiamo  $p(x) := \|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*} \cdot \|x\|_X$  per ogni  $x \in X$ ; allora la tesi segue dal Teorema precedente, infatti

$$-\|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*} \cdot \|x\|_X \leq F(x) \leq \|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*} \cdot \|x\|_X$$

e quindi

$$|F(x)| \leq \|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*} \cdot \|x\|_X$$

per ogni  $x \in X$ , da cui

$$\|F\|_{X_{\mathbb{R}}^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1, x \in X} |F(x)| \leq \|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*}$$

e quindi

$$\|F\|_{X_{\mathbb{R}}^*} = \|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*}.$$

<sup>1</sup>Denotiamo con  $X_{\mathbb{K}}^*$ ,  $V_{\mathbb{K}}^*$  gli spazi duali di  $X$  e  $V$  riguardati come spazi vettoriali sul campo  $\mathbb{K}$ .

2. Consideriamo ora il caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Il funzionale  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  sarà ottenuto costruendo separatamente la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Dato  $x \in V$ , sia  $u(x) = \Re f(x)$ . Allora  $u$  è un funzionale reale, lineare su  $V$  con norma

$$\|u\|_{V_{\mathbb{R}}^*} \leq \|f\|_{V_{\mathbb{C}}^*},$$

pertanto, in virtù del passo 1,  $u$  ha un'estensione  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  con norma

$$\|U\|_{X_{\mathbb{R}}^*} \leq \|f\|_{V_{\mathbb{C}}^*}.$$

Proviamo che il funzionale

$$F(x) = U(x) - iU(ix) \quad (x \in X)$$

verifica la tesi.

Infatti, per  $x \in V$ , osservato che da

$$f(ix) = if(x) = i\Re f(x) - \Im f(x)$$

segue

$$\Re f(ix) = -\Im f(x),$$

si ha

$$F(x) = \Re f(x) - i\Re f(ix) = \Re f(x) + i\Im f(x) = f(x).$$

Inoltre, sia  $\alpha \in \mathbb{C}$  tale che  $|\alpha| = 1$  e  $\alpha F(x) = |F(x)|$ ; allora

$$|F(x)| = \alpha F(x) = U(\alpha x) \leq \|f\|_{V_{\mathbb{C}}^*} \cdot \|\alpha x\|_X = \|f\|_{V_{\mathbb{C}}^*} \cdot \|x\|_X$$

per ogni  $x \in X$ , da cui

$$\|F\|_{X_{\mathbb{C}}^*} \leq \|f\|_{V_{\mathbb{C}}^*},$$

e quindi

$$\|F\|_{X_{\mathbb{C}}^*} = \|f\|_{V_{\mathbb{C}}^*}.$$

□

**Osservazione 4.1.5** (*Estensione di operatori lineari e continui*). Siano  $X$  e  $Y$  due spazi di Banach e sia  $V \subset X$  un sottospazio chiuso. Sia  $S : V \rightarrow Y$  un operatore lineare e continuo. Ci chiediamo se sia possibile estendere  $S$  con un operatore lineare e continuo  $T : X \rightarrow Y$ . Osserviamo che i Teoremi 4.1.3 e successivo risolvono positivamente la questione solo se  $Y = \mathbb{K}$ . La risposta è in generale negativa, eccetto che in alcuni casi speciali, per esempio se  $\dim Y < \infty$ . In tal caso, si può scegliere una base di  $Y$  e applicare il Teorema di Hahn-Banach a ciascuna componente.

### 4.1.1 Alcune importanti conseguenze del Teorema di Hahn-Banach

**Corollario 4.1.6.** *Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio normato su  $\mathbb{K}$ . Dato  $x \in X \setminus \{0\}$ , esiste  $F_x \in X^*$  con  $\|F_x\|_{X^*} = 1$  tale che  $F_x(x) = \|x\|_X$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $V = \{\lambda x, \lambda \in \mathbb{K}\} \subset X$ . Definiamo

$$\begin{aligned} f : V &\rightarrow \mathbb{K}, \\ \lambda x &\mapsto f(\lambda x) := \lambda \|x\|_X \end{aligned}$$

ed estendiamo  $f$  su  $X$ . Sia  $F_x \in X^*$  il prolungamento di  $f$ . Risulta

$$\|f\|_{V^*} = 1 = \|F_x\|_{X^*}$$

e, poiché  $x \in V$ ,

$$F_x(x) = f(x) = 1 \cdot \|x\|_X = \|x\|_X.$$

□

Il precedente Corollario prova l'esistenza di un gran numero di funzionali lineari e continui.

**Corollario 4.1.7.** *Se  $x_1, x_2 \in X$  e  $x_1 \neq x_2$ , allora esiste  $F \in X^*$  soddisfacente  $F(x_1) \neq F(x_2)$  (cioè,  $X^*$  separa i punti di  $X$ ).*

*Dimostrazione.* Segue dal corollario precedente applicato al vettore non nullo

$$x = x_1 - x_2 \in X.$$

□

**Corollario 4.1.8.** *Se  $x_0 \in X$  è tale che  $F(x_0) = 0$  per ogni  $F \in X^*$ , allora  $x_0 = 0$ .*

*Dimostrazione.* Se fosse  $x_0 \neq 0$  e quindi  $\|x_0\|_X > 0$ , per il Corollario 4.1.6 esisterebbe  $F_{x_0} \in X^*$  tale che

$$F_{x_0}(x_0) = \|x_0\|_X > 0,$$

contro l'ipotesi. □

**Corollario 4.1.9.** *Se  $M$  è un sottospazio chiuso proprio di  $X$  e  $x \notin M$ , allora esiste  $F_x \in X^*$  tale che  $F_x(x) \neq 0$ , ma  $F_x|_M = 0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x \notin M$  e  $V := \{\lambda x + y; y \in M, \lambda \in \mathbb{K}\} \subset X$ .

Definiamo il funzionale lineare  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\lambda x + y \mapsto f(\lambda x + y) = \lambda$ .

Poiché  $\ker f = M$ , e  $M$  è chiuso,  $f$  è continuo su  $V$ . Estendiamo allora  $f$  su tutto  $X$ , sia  $F_x \in X^*$ .

Risulta  $F_x(x) \neq 0$  e  $F_x|_M = 0$ . □

**Corollario 4.1.10.** *Per ogni  $x \in X \setminus \{0\}$  si ha*

$$\|x\|_X = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\|_{X^*} = 1}} |x^*(x)| = \max_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\|_{X^*} = 1}} |x^*(x)|$$

*Dimostrazione.* Risulta

$$\sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\|_{X^*} = 1}} |x^*(x)| \leq \|x\|_X.$$

Per il Corollario 4.1.6 esiste  $F_x \in X^*$  t.c.  $\|F_x\|_{X^*} = 1$  e  $F_x(x) = \|x\|_X$ . Pertanto

$$\sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\|_{X^*} = 1}} |x^*(x)| = \max_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\|_{X^*} = 1}} |x^*(x)| = \|x\|_X.$$

□

## 4.2 Le forme geometriche del teorema di Hahn-Banach: Separazione di insiemi convessi.

Il successivo Teorema (la cui dimostrazione, omessa per brevità, si basa sul teorema di estensione di Hahn-Banach) esprime una risposta positiva al problema seguente: assegnati due insiemi convessi e disgiunti  $A$  e  $B$  in uno spazio normato  $X$ , esiste un funzionale lineare e continuo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che le immagini  $\varphi(A)$  e  $\varphi(B)$  siano disgiunte?

**Teorema 4.2.1 (Separazione di insiemi convessi).** *Sia  $X$  uno spazio normato su  $\mathbb{R}$ , e siano  $A$  e  $B$  sottoinsiemi non vuoti di  $X$ , convessi e disgiunti.*

(i) *Se  $A$  è aperto, allora esiste un funzionale lineare e continuo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $c \in \mathbb{R}$  tale che*

$$\varphi(a) < c \leq \varphi(b) \quad \text{per ogni } a \in A, b \in B;$$

(ii) *Se  $A$  è chiuso e  $B$  è compatto, allora esistono un funzionale lineare e continuo  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tali che*

$$\varphi(a) \leq c_1 < c_2 \leq \varphi(b) \quad \text{per ogni } a \in A, b \in B$$

**Corollario 4.2.2.** *Sia  $V$  un sottospazio di  $X$  tale che  $\overline{V} \neq X$ . Allora esiste  $\varphi \in X^*$ ,  $\varphi$  non identicamente nullo, tale che  $\varphi(x) = 0$  per ogni  $x \in V$ .*

**Osservazione 4.2.3.** Il Corollario 4.2.2 è utile per provare che un sottospazio è denso. È sufficiente provare che ogni funzionale lineare e continuo su  $X$  che si annulla su  $V$  deve annullarsi ovunque su  $X$ .

### 4.3 Riflessività. Compattezza debole in uno spazio riflessivo

Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio di Banach. Il suo duale  $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$  ha a sua volta uno spazio duale (lo spazio dei funzionali lineari e continui su  $X^*$ ) detto *biduale* di  $X$  e indicato con  $X^{**}$ , munito della norma

$$\|\xi\|_{X^{**}} = \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leq 1} |\xi(\varphi)| \quad (\xi \in X^{**}).$$

**Esiste una isometria lineare  $\tau$  tra  $X$  e  $X^{**}$ , definita da**

$$\begin{aligned} \tau : X &\rightarrow \tau(X) \subseteq X^{**} \\ X \ni x &\mapsto \tau(x) := \Phi_x \in X^{**} \end{aligned} \tag{4.10}$$

**che agisce nel seguente modo**

$$\Phi_x(\varphi) := \varphi(x)$$

**per ogni  $\varphi \in X^*$ .**

Risulta:

- $\Phi_x$  è (ovviamente) un funzionale lineare,
- $\Phi_x$  è limitato, in quanto da

$$|\Phi_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{X^*} \cdot \|x\|_X \quad \forall \varphi \in X^*,$$

segue che

$$\|\Phi_x\|_{X^{**}} = \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leq 1} |\Phi_x(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leq 1} |\varphi(x)| \leq \|x\|_X.$$

D'altra parte, per il Corollario 4.1.6, fissato  $x \in X$ , esiste un elemento  $\varphi_x \in X^*$  di norma unitaria tale che

$$\varphi_x(x) = \|x\|_X.$$

Quindi

$$\|\Phi_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Dunque, l'applicazione  $\tau$  è una isometria lineare da  $X$  in  $\tau(X) \subset X^{**}$ . In particolare,  $\tau(X)$  è un sottospazio chiuso di  $X^{**}$ . Ricordiamo che una isometria lineare è necessariamente iniettiva, ma non necessariamente suriettiva. Nel caso in cui valga la proprietà di suriettività, si dice che  $\tau$  è un *isomorfismo isometrico* tra  $X$  e  $X^{**}$ .

**Definizione 4.3.1 (spazio riflessivo).** Uno spazio di Banach  $(X, \|\cdot\|_X)$  si dice *riflessivo* se la mappa canonica  $\tau : X \rightarrow X^{**}$  è anche suriettiva (cioè  $\tau(X) = X^{**}$ ).

Nel caso  $X$  sia riflessivo, esso può essere identificato con il suo biduale  $X^{**}$ .

Evidentemente, *ogni spazio normato riflessivo è completo* (in quanto duale di  $X^*$ ).

Osserviamo che *la convergenza debole in uno spazio riflessivo  $X$  coincide con la convergenza debole\* in  $X^{**}$ .*

È molto utile la seguente Proposizione.

**Proposizione 4.3.2.**

$(X \text{ spazio riflessivo e } M \text{ sottospazio chiuso di } X) \Rightarrow (M \text{ riflessivo}).$

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che  $\tau : M \rightarrow M^{**}$  è suriettiva, cioè : per ogni  $\phi_0 \in M^{**}$  esiste  $z \in M$  tale che  $\tau(z) = \phi_0$ , che agisce nel seguente modo,  $\phi_0(\varphi_0) = \varphi_0(z)$  per ogni  $\varphi_0 \in M^*$ .

Ogni funzionale lineare e continuo  $\varphi$  su  $X$ ,  $\varphi \in X^*$ , quando è ristretto a  $M$ , diviene un funzionale lineare e continuo su  $M$ ; sia  $\varphi_0 = \varphi|_M \in M^*$ .

Poiché, per il teorema di Hahn-Banach, ogni funzionale lineare e continuo su  $M$  può essere esteso a  $X$ , l'applicazione *restrizione*  $\varphi \rightarrow \varphi_0$ ,  $X^* \rightarrow M^*$  è *suriettiva*.

L'applicazione *restrizione* induce la seguente applicazione da  $M^{**} \rightarrow X^{**}$  :

per ogni  $\phi_0 \in M^{**}$  definiamo  $\phi \in X^{**}$ , ponendo, per ogni  $\varphi \in X^*$

$$\phi(\varphi) = \phi_0(\varphi_0), \quad (4.11)$$

dove  $\varphi_0$  è la restrizione di  $\varphi$  a  $M$ .

Poiché  $X$  è riflessivo,  $\phi$  può essere identificato con un elemento  $z \in X$  :

$$\phi(\varphi) = \varphi(z);$$

allora, per (4.11) risulta

$$\varphi(z) = \phi_0(\varphi_0). \quad (4.12)$$

Proviamo che  $z \in M$ . Per provarlo, osserviamo che se  $\varphi$  si annulla su  $M$ , allora  $\varphi_0 = 0$ , e per (4.12),  $\varphi(z) = 0$ . Per il Corollario 4.2.2 e successiva Osservazione, concludiamo che  $z \in \overline{M}$ . Ma, poiché  $M$  è chiuso  $z \in M$ . Pertanto possiamo riscrivere (4.12) :

$$\varphi_0(z) = \phi_0(\varphi_0). \quad (4.13)$$

Poiché  $\varphi_0$  rappresenta un arbitrario funzionale in  $M^*$ , (4.13) prova che ogni  $\phi_0 \in M^{**}$  può essere identificato con qualche  $z \in M$ .  $\square$

**Esempi di spazi riflessivi** sono tutti gli spazi  $X$  a dimensione finita (poiché,  $\dim X = \dim X^* = \dim X^{**}$ ) e gli spazi  $H$  di Hilbert (poiché, per il teorema di Riesz-Fréchet,  $H = H^* = H^{**}$ ). Vedremo in seguito che gli spazi  $l^p$  sono riflessivi per  $1 < p < \infty$ , **mentre non sono riflessivi** gli spazi  $l^1$ ,  $l^\infty$ ,  $c_0$  e  $c$ .

**Lo spazio  $C^0(K; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ , dove  $K$  è uno spazio metrico non finito e compatto, non è riflessivo.**

*Dimostrazione.* Sia  $(a_k)_k$  una successione di elementi di  $K$  tale che  $a_k \rightarrow a$  e  $a_k \neq a$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Consideriamo il funzionale lineare

$$\begin{aligned} \varphi : C^0(K; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varphi(u) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} u(a_k). \end{aligned}$$

Supponiamo, per assurdo, che  $C^0(K; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$  sia riflessivo. Allora il suo sottospazio chiuso

$$C_a^0 = \{u \in C^0(K; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty) : u(a) = 0\}$$

è anche riflessivo (Proposizione 4.3.2)),  $\sup_{u \in \overline{B}_{C_a^0}} \varphi(u)$  è assunto ed è uguale a 1 (poiché, per il Lemma di Urysohn, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , esiste  $u \in C_a^0$  tale che  $0 \leq u \leq 1$  su  $K$  e  $u(a_i) = 1$  per ogni  $i = 1, 2, \dots, j$ ). Quindi esiste una  $u \in \overline{B}_{C_a^0}$  tale che  $\varphi(u) = 1$ . Di conseguenza,  $u(a_k) = 1$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e  $u(a) = 0$ ; assurdo (perché,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u(a_k) = 1 \neq u(a) = 0$ ).  $\square$

Dimostriamo, ora, un teorema di compattezza debole in uno spazio riflessivo (che contiene, in particolare, il Teorema 3.3.5, relativo agli spazi di Hilbert)

**Teorema 4.3.3 (compattezza debole in uno spazio riflessivo).**

Ogni successione limitata in uno spazio riflessivo  $X$  ammette una sottosuccessione debolmente convergente in  $X$ .<sup>2</sup>

*Dimostrazione.* Per semplicità, assumiamo  $X$  separabile (ma il teorema vale anche se  $X$  non è separabile). Allora, essendo  $X$  separabile e riflessivo, risulta che anche  $X^*$  è separabile.<sup>3</sup> Sia allora  $(x_n)_n$  una successione limitata

<sup>2</sup>L'implicazione inversa (**Teorema di Eberlein-Šmulian**) è anch'essa vera. Di fatto si ha la seguente caratterizzazione degli spazi riflessivi.

Uno spazio di Banach  $X$  è riflessivo se e solo se ogni successione limitata in  $X$  ammette una sottosuccessione debolmente convergente.

Un'altra proprietà fondamentale degli spazi riflessivi è espressa dal seguente risultato. **Proposizione (1)**

Sia  $X$  uno spazio di Banach.

$$(X \text{ riflessivo}) \Leftrightarrow (X^*, \text{ spazio duale di } X, \text{ riflessivo}).$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che la riflessività è una proprietà topologica e che una isometria lineare e suriettiva tra spazi di Banach preserva la riflessività. Dunque, se  $X$  è riflessivo lo stesso vale per  $X^{**}$ . Pertanto, è da dimostrare solo la seguente implicazione:

$$(X^* \text{ riflessivo}) \Rightarrow (X \text{ riflessivo}).$$

Sia  $X^*$  riflessivo. Se  $X$  non lo è,  $\tau(X)$  è un sottospazio chiuso proprio di  $X^{**}$ .

Per il Corollario 4.1.9, esiste  $\phi \in X^{***}$ ,  $\phi \neq O$  e  $\phi(\varphi_x) = 0$  per ogni  $\varphi_x \in \tau(X)$ .

Per la riflessività di  $X^*$ , esiste  $\psi \in X^*$  tale che  $\phi = \phi_\psi$ .

Pertanto,  $0 = \phi_\psi(\varphi_x) = \varphi_x(\psi) = \psi(x)$  per ogni  $x \in X$ . Quindi  $\psi = O$ , e, di conseguenza,  $\phi = O$ . Contraddizione.  $\square$

<sup>3</sup>Per quanto riguarda la separabilità, valgono i seguenti risultati.

**Proposizione. (2)**

Sia  $X$  uno spazio di Banach.

$$(X^* \text{ separabile}) \Rightarrow (X \text{ separabile}).$$

**Osservazione 4.3.4.** Dalla Proposizione (2) si evince che la separabilità è una proprietà che gli spazi normati “ereditano” dai propri spazi duali.

Il viceversa della Proposizione (2) non è vero. Infatti, vedremo in seguito che  $X = l^1$  è separabile, ma il suo duale  $X^* = l^\infty$  non è separabile.

Tuttavia, vale il seguente risultato.

**Proposizione (3)**

$$(X \text{ separabile e riflessivo}) \Rightarrow (X^* \text{ separabile}).$$

Per la dimostrazione delle due precedenti Proposizioni ((2), (3)), osserviamo preliminarmente che ragionando come nella dimostrazione della Proposizione (1), dobbiamo solo dimostrare l'implicazione

in  $X$ . Usando la mappa canonica  $\tau$ ,  $(x_n)_n$  può essere riguardata come una successione limitata nello spazio biduale  $X^{**}$ . Pertanto, per il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki 3.2.1 relativo a  $X^*$ , esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k \subset X^{**}$  convergente debolmente\* in  $X^{**}$ , cioè  $(x_{n_k})_k \subset X$  converge debolmente in  $X$ .  $\square$

**Proposizione 4.3.5.** *Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio di Banach riflessivo. Assegnato  $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ , esiste  $x_\varphi \in X$  tale che*

$$\|x_\varphi\|_X = 1 \quad \text{e} \quad \|\varphi\|_{X^*} = \varphi(x_\varphi)$$

(cioè,  $x_\varphi \in X$  realizza la norma di  $\varphi$ ).

*Dimostrazione.* Per il Corollario 4.1.6 applicato allo spazio  $X^*$  e per l'ipotesi di riflessività su  $X$ , dato  $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$  esiste  $x_\varphi \in X^{**} = X$  tale che

$$\|x_\varphi\|_X = 1 \quad \text{e} \quad \|\varphi\|_{X^*} = \varphi(x_\varphi).$$

$\square$

**Osservazione 4.3.6.** Viceversa, vale il seguente risultato:  
(Teorema di **James**)

*Uno spazio di Banach in cui la norma di ogni elemento del duale è realizzata è riflessivo.*

$$(X^* \text{ separabile}) \Rightarrow (X \text{ separabile}).$$

*Dimostrazione.* Sia  $(\varphi_n)_n$  una successione densa in  $X^*$ . Poiché  $\|\varphi_n\|_{X^*} = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \varphi_n(x)$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $x_n \in X$  con  $\|x_n\|_X = 1$ , tale che

$$|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|\varphi_n\|_{X^*}.$$

Sia  $M$  lo spazio vettoriale (numerabile) formato dalle combinazioni lineari finite degli  $x_n$  a coefficienti razionali. Allora la chiusura  $\overline{M}$  è un sottospazio (chiuso) di  $X$ . Per conseguire la tesi, proviamo che  $\overline{M} = X$ .

Se, per assurdo,  $\overline{M} \subsetneq X$ , per il Corollario 4.1.9, esiste  $\varphi \in X^*$ ,  $\varphi \neq O$  e  $\varphi|_{\overline{M}} = O$ .

Fissato  $\epsilon > 0$ , selezioniamo un elemento  $\varphi_{n_0}$  tale che  $\|\varphi - \varphi_{n_0}\|_{X^*} < \epsilon$ .

Allora, poiché  $\varphi(x_{n_0}) = 0$ ,

$$\frac{1}{2} \|\varphi_{n_0}\|_{X^*} \leq |\varphi_{n_0}(x_{n_0})| \leq |\varphi_{n_0}(x_{n_0}) - \varphi(x_{n_0})| \leq \|\varphi_{n_0} - \varphi\|_{X^*} \cdot \|x_{n_0}\|_X \leq \epsilon.$$

Ne segue che,  $\|\varphi\|_{X^*} \leq \|\varphi - \varphi_{n_0}\|_{X^*} + \|\varphi_{n_0}\|_{X^*} \leq 3\epsilon$ , e dall'arbitrarietà di  $\epsilon > 0$  concludiamo che  $\varphi = O$ . Contraddizione.

Osserviamo esplicitamente che si può dimostrare  $\overline{M} = X$  utilizzando il Corollario 4.2.2 e l'Osservazione successiva.  $\square$

Studiamo, ora, dualità, separabilità e riflessività per gli spazi di successioni introdotti nelle sezioni 1.4.2, 1.4.3 e 1.4.4.

### 4.3.1 Dualità, separabilità e riflessività per spazi di successioni

**Premessa.** Posto

$$D := \{x = (x_k)_k; x_k \in \mathbb{Q} \quad \forall k \in \mathbb{N}, x_k = 0 \text{ per } k \text{ sufficientemente grande}\},$$

risulta:

- (i)  $D$  è numerabile;
- (ii)  $D$  è denso in  $l^p$  per  $1 \leq p < +\infty$ ;
- (iii)  $D$  è denso in  $c_0$ ;
- (iv) L'insieme  $D + \lambda(1, 1, 1, \dots)$ , con  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , è numerabile e denso in  $c$ .

*Dimostrazione.* La numerabilità degli insiemi  $D$  e  $D + \lambda(1, 1, 1, \dots)$ , con  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , è ovvia.

- (ii) Sia  $u = (u_k)_k \in l^p$ . Proviamo che, fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$  e  $x = (x_1, \dots, x_{\nu_\varepsilon-1}, 0, 0, \dots) \in D$  tali che

$$\|u - x\|_{l^p}^p < \varepsilon,$$

cioè

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k - x_k|^p < \varepsilon.$$

Poiché  $\|u\|_{l^p} < +\infty$ , esiste  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che

$$\sum_{k=\nu_\varepsilon}^{+\infty} |u_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora, per la densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ , per ogni  $k = 1, \dots, \nu_\varepsilon - 1$  esiste  $x_k \in \mathbb{Q}$  tale che

$$|u_k - x_k|^p < \frac{\varepsilon}{2(\nu_\varepsilon - 1)}.$$

Sia ora  $x := (x_1, \dots, x_{\nu_\varepsilon-1}, 0, 0, \dots) \in D$ ; risulta

$$\begin{aligned} \|u - x\|_{l^p}^p &= \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k - x_k|^p \\ &= \sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon-1} |u_k - x_k|^p + \sum_{k=\nu_\varepsilon}^{+\infty} |u_k|^p < (\nu_\varepsilon - 1) \frac{\varepsilon}{2(\nu_\varepsilon - 1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui otteniamo la tesi.

- (iii) Sia  $u = (u_k)_k \in c_0$ . Proviamo che, fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$  e  $x = (x_1, \dots, x_{\nu_\varepsilon-1}, 0, 0, \dots) \in D$  tali che

$$\|u - x\|_{l^\infty} < \varepsilon,$$

cioè

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - x_k| < \varepsilon.$$

Poiché  $\lim_k u_k = 0$ , esiste  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che  $|u_k| < \varepsilon$  per ogni  $k \geq \nu_\varepsilon$ .

Ora, per la densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ , per ogni  $k = 1, \dots, \nu_\varepsilon - 1$  esiste  $x_k \in \mathbb{Q}$  tale che

$$|u_k - x_k| < \varepsilon.$$

Sia ora  $x := (x_1, \dots, x_{\nu_\varepsilon-1}, 0, 0, \dots) \in D$ ; risulta

$$\|u - x\|_{l^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - x_k| = \max \left\{ \max_{k=1, \dots, \nu_\varepsilon-1} |u_k - x_k|, \sup_{k \geq \nu_\varepsilon} |u_k| \right\} < \varepsilon,$$

da cui otteniamo la tesi.

- (iv) Sia  $u = (u_k)_k \in c$  e sia  $l := \lim_k u_k$ ,  $l \in \mathbb{R}$ . Proviamo che, fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_{\nu_\varepsilon-1}, 0, 0, \dots) \in D$  e  $\lambda \in \mathbb{Q}$  tali che  $y := x + \lambda(1, \dots, 1, \dots) \in D + \lambda(1, \dots, 1, \dots)$  e

$$\|u - y\|_{l^\infty} < \varepsilon,$$

cioè

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - y_k| < \varepsilon.$$

Poiché  $\lim_k u_k = l$ , esiste  $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che  $|u_k - l| < \varepsilon/2$  per ogni  $k \geq \nu_\varepsilon$ .

Ora, per la densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ , per ogni  $k = 1, \dots, \nu_\varepsilon - 1$  esiste  $x_k \in \mathbb{Q}$  tale che

$$|u_k - x_k| < \varepsilon$$

ed esiste  $\lambda \in \mathbb{Q}$  tale che

$$|l - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned} \|u - y\|_{l^\infty} &= \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - y_k| = \max \left\{ \max_{k=1, \dots, \nu_\varepsilon-1} |u_k - x_k|, \sup_{k \geq \nu_\varepsilon} |u_k - \lambda| \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{k=1, \dots, \nu_\varepsilon-1} |u_k - x_k|, \sup_{k \geq \nu_\varepsilon} |u_k - l| + |l - \lambda| \right\} < \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui otteniamo la tesi.

□

**Proposizione 4.3.7** (duale di  $l^p$  ( $1 \leq p < +\infty$ )). *Sia  $1 \leq p < +\infty$  e sia  $p'$  il suo esponente coniugato (cioè  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , con  $1' = +\infty$ ). Allora, per ogni  $\varphi \in (l^p)^*$ , esiste un'unica  $u = (u_k)_k \in l^{p'}$  tale che*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k \quad \forall x = (x_k)_k \in l^p.$$

Inoltre,

$$\|u\|_{l^{p'}} = \|\varphi\|_{(l^p)^*}.$$

*Dimostrazione.* Sia

$$e^{(k)} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{e_k^{(k)}}, 0, 0, \dots) \in l^p$$

e poniamo

$$u_k := \varphi(e^{(k)}).$$

Proviamo che  $u = (u_k)_k \in l^{p'}$  e

$$\|u\|_{l^{p'}} \leq \|\varphi\|_{(l^p)^*}. \quad (4.14)$$

Se  $p = 1$ , la disuguaglianza (4.14) è ovvia poiché

$$|u_k| \leq \|\varphi\|_{(l^1)^*} \cdot \|e^{(k)}\|_{l^1} = \|\varphi\|_{(l^1)^*} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k| \leq \|\varphi\|_{(l^1)^*}.$$

Consideriamo pertanto il caso  $1 < p < \infty$ . Fissiamo  $N \in \mathbb{N}$ ; allora, per ogni successione  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ , si ha

$$\sum_{k=1}^N u_k x_k = \varphi \left( \sum_{k=1}^N x_k e^{(k)} \right) \leq \|\varphi\|_{(l^p)^*} \cdot \|x\|_{l^p}.$$

Scegliendo  $x_k := |u_k|^{p'-2} u_k$  per ogni  $k = 1, \dots, N$  abbiamo

$$\sum_{k=1}^N u_k |u_k|^{p'-2} u_k \leq \|\varphi\|_{(l^p)^*} \left( \sum_{k=1}^N \left| |u_k|^{p'-2} u_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

cioè

$$\sum_{k=1}^N |u_k|^{p'} \leq \|\varphi\|_{(l^p)^*} \left[ \sum_{k=1}^N \left( |u_k|^{p'-1} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}};$$

osservato che (poiché  $p'p = p' + p$ , quindi  $p'p - p = p'$ )

$$\sum_{k=1}^N \left( |u_k|^{p'-1} \right)^p = \sum_{k=1}^N |u_k|^{p'p-p} = \sum_{k=1}^N |u_k|^{p'},$$

ne segue che

$$\sum_{k=1}^N |u_k|^{p'} \leq \|\varphi\|_{(l^p)^*} \left( \sum_{k=1}^N |u_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}$$

e quindi

$$\left( \sum_{k=1}^N |u_k|^{p'} \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left( \sum_{k=1}^N |u_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|\varphi\|_{(l^p)^*}.$$

Per  $N \rightarrow +\infty$  otteniamo che  $u \in l^{p'}$  e (4.14) è dimostrata.

Inoltre, per ogni  $x \in D$ , si ha

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k$$

ed essendo  $D$  denso in  $l^p$  (per ogni  $1 \leq p < +\infty$ ) si ha  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k$  per ogni  $x \in l^p$ . Per la disuguaglianza di Hölder

$$|\varphi(x)| \leq \|u\|_{l^{p'}} \|x\|_{l^p}$$

per ogni  $x \in l^p$  e perciò

$$\|\varphi\|_{(l^p)^*} \leq \|u\|_{l^{p'}}. \quad (4.15)$$

Da (4.14) e (4.15) segue

$$\|\varphi\|_{(l^p)^*} = \|u\|_{l^{p'}}.$$

L'unicità di  $u \in l^{p'}$  è ovvia. □

**Proposizione 4.3.8** (duale di  $c_0$ ). *Per ogni  $\varphi \in (c_0)^*$ , esiste un'unica  $u = (u_k)_k \in l^1$  tale che*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k \quad \forall x = (x_k)_k \in c_0.$$

Inoltre,

$$\|u\|_{l^1} = \|\varphi\|_{(c_0)^*}.$$

*Dimostrazione.* La prova è un adattamento della dimostrazione della Proposizione 4.3.7 ( con  $p = \infty$  e  $p' = 1$ ); l'ultima parte della dimostrazione vale perché  $D$  è denso in  $c_0$ .  $\square$

**Proposizione 4.3.9** (duale di  $c$ ). *Per ogni  $\varphi \in (c)^*$ , esiste un'unica coppia  $(u, \lambda) = ((u_k)_k, \lambda) \in l^1 \times \mathbb{R}$  tale che*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k + \lambda \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \quad \forall x = (x_k)_k \in c.$$

Inoltre,

$$\|u\|_{l^1} + |\lambda| = \|\varphi\|_{(c)^*}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi : c \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e continuo e consideriamone la restrizione a  $c_0$  (ricordiamo che  $c_0 \subset c$ ); a  $\varphi|_{c_0}$  applichiamo la Proposizione 4.3.8, per cui esiste  $u \in l^1$  tale che

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k y_k \quad \forall y = (y_k)_k \in c_0.$$

Osserviamo che ogni  $x \in c$  può essere scritto come  $x = y + a e$ , dove

$$e := (1, 1, \dots, 1, \dots), \quad a := \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k, \quad y \in c_0.$$

Allora

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(y + a e) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k y_k + a \varphi(e) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k (x_k - a) + a \varphi(e) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k + \lambda a, \end{aligned}$$

dove

$$\lambda = \varphi(e) - \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

Viceversa, dati  $u \in l^1$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il funzionale definito da

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k + \lambda \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \quad (x \in c) \tag{4.16}$$

è un elemento di  $(c)^*$ . Proviamo che

$$\|\varphi\|_{(c)^*} = \|u\|_{l^1} + |\lambda|. \tag{4.17}$$

È evidente che

$$\|\varphi\|_{(c)^*} \leq \|u\|_{l^1} + |\lambda|. \quad (4.18)$$

Sia ora  $x = (x_k)_k \in c$  definito da

$$x_k := \begin{cases} \text{sign}(u_k), & 1 \leq k \leq N, \\ \text{sign}(\lambda), & k > N, \end{cases}$$

dove  $N \in \mathbb{N}$  è fissato. Scegliendo siffatto  $x$  in (4.16) otteniamo, poiché  $\|x\|_{l^\infty} = 1$ ,

$$\sum_{k=1}^N |u_k| + \text{sign}(\lambda) \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k + |\lambda| = \varphi(x) \leq \|\varphi\|_{(c)^*}.$$

Per  $N \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$\|u\|_{l^1} + |\lambda| \leq \|\varphi\|_{(c)^*}. \quad (4.19)$$

Da (4.18) e (4.19) segue (4.17).  $\square$

**Proposizione 4.3.10.** *Gli spazi  $l^p$  per  $1 \leq p < \infty$ ,  $c_0$  e  $c$  sono separabili.*

*Dimostrazione.* Segue dalla **Premessa**.  $\square$

**Proposizione 4.3.11.** *Lo spazio  $l^\infty$  non è separabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $A \subset l^\infty$  numerabile e proviamo che esiste  $b \in l^\infty$  tale che  $b \notin \overline{A}$  (cioè  $A$  numerabile non può essere denso in  $l^\infty$ ).

Sia  $A = \{a^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , con  $a^k \in l^\infty$ , sicché

$$a^k = (a_1^k, a_2^k, \dots).$$

Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  poniamo

$$b_k := \begin{cases} a_k^k + 1 & \text{se } |a_k^k| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |a_k^k| > 1. \end{cases}$$

Osserviamo che  $b = (b_k)_k \in l^\infty$  e che

$$|b_k - a_k^k| \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pertanto

$$\|b - a^k\|_{l^\infty} \geq |b_k - a_k^k| \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e quindi  $b \notin \overline{A}$ .  $\square$

**Proposizione 4.3.12.** *Lo spazio  $l^p$  per  $1 < p < \infty$  è riflessivo.*

*Dimostrazione.* Basta osservare che

$$(l^p)^* = l^{p'} \quad \Rightarrow \quad (l^p)^{**} = (l^{p'})^* = l^p.$$

□

**Proposizione 4.3.13.** *Gli spazi  $l^1$ ,  $l^\infty$ ,  $c_0$  e  $c$  non sono riflessivi.*

*Dimostrazione.* Abbiamo già dimostrato che  $(c_0)^* = l^1$  e  $(l^1)^* = l^\infty$ . Perciò, l'applicazione identità da  $c_0$  in  $l^\infty$  corrisponde all'iniezione canonica  $\tau : c_0 \rightarrow (c_0)^{**}$  definita in (4.10). Poiché  $\tau$  non è suriettiva, concludiamo che  $c_0$  non è riflessivo.

In alternativa, è istruttivo dimostrare la non riflessività di  $c_0$  utilizzando la Proposizione 4.3.5 e 4.3.6.

(1) Definito il funzionale lineare

$$\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_k)_k \in c_0 \mapsto \varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} x_k,$$

si dimostra facilmente che  $\varphi$  è continuo e  $\|\varphi\|_{(l^\infty)^*} = 1$ . Infatti risulta  $\|\varphi\|_{(l^\infty)^*} \leq 1$  e per conseguire l'uguaglianza consideriamo la successione  $(\xi_n)_n$  di elementi di  $c_0$ , definiti da

$$\xi_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n, \end{cases}$$

e risulta

$$\varphi(\xi_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \quad \text{quindi} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\xi_n) = 1.$$

(2) Tenendo presente, come già detto in precedenza, la Proposizione 4.3.5 e 4.3.6, per conseguire la **non riflessività** di  $c_0$ , dimostriamo che

- (i) *non esiste*  $x \in c_0$ ,  $\|x\|_{l^\infty} = 1$  e  
(ii)  $\varphi(x) = \|\varphi\|_{(l^\infty)^*}$  (cioè,  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} x_k = 1$ ),

Se, per assurdo, esistesse  $x = (x_k)_k \in c_0$  tale che

$$\|x\|_{l^\infty} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} x_k = 1,$$

allora per (i) esisterebbero un insieme infinito,  $J_1 \subset \mathbb{N}$ , di indici  $k$  tali che  $|x_k| < 1$  e un insieme non-vuoto e finito,  $J_2 \subset \mathbb{N}$ , di indici  $k$  tali che

$x_k = 1$ , con  $J_1 \cup J_2 = \mathbb{N}$  e (ovviamente)  $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ .

Di conseguenza, per (ii) si avrebbe

$$\begin{aligned} 1 = |\varphi(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} |x_k| \\ &= \sum_{k \in J_1} \frac{1}{2^k} |x_k| + \sum_{k \in J_2} \frac{1}{2^k} < \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1, \end{aligned}$$

assurdo.

Poiché uno spazio è riflessivo se e solo se lo è il suo duale, deduciamo che  $l^1$  e  $l^\infty$  non sono riflessivi.

Inoltre, poiché ogni sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo è uno spazio riflessivo,  $c$  non può essere riflessivo, altrimenti  $c_0$ , che è un sottospazio chiuso di  $c$ , dovrebbe essere riflessivo.  $\square$

Resta da studiare il duale di  $l^\infty$ .

**Proposizione 4.3.14** (duale di  $l^\infty$ ). *Il duale di  $l^\infty$  è strettamente più ampio di  $l^1$ .*

*Dimostrazione.* Per lo studio del duale di  $l^\infty$ , ricordiamo che  $l^1$  non è riflessivo (Proposizione 4.3.13). Di conseguenza, lo spazio duale  $(l^\infty)^*$  contiene  $l^1$  (poiché  $l^\infty = (l^1)^*$ ) e  $(l^\infty)^*$  è strettamente più ampio di  $l^1$ . In altre parole, si possono costruire funzionali lineari e continui,  $\Phi \in (l^\infty)^*$ , che **non possono** essere rappresentati come  $\Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k x_k$  per ogni  $x \in l^\infty$  e qualche  $y \in l^1$ .<sup>4</sup>

Descriviamo un **Esempio** “concreto” di un tale funzionale. L’idea della verifica è la seguente.

(1) Consideriamo il funzionale lineare

$$\begin{aligned} \varphi : c &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x = (x_k)_k &\mapsto \varphi(x) := \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tale  $\varphi$  è continuo dato che  $|\varphi(x)| \leq \|x\|_{l^\infty}$  (è immediato riconoscere che  $\|\varphi\|_{(l^\infty)^*} = 1$ ). Per il teorema di estensione di Hahn-Banach, esiste un prolungamento lineare e continuo di  $\varphi$  a  $l^\infty$ ; sia, allora, questo prolungamento

$$\Phi : l^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \varphi(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \quad \text{per ogni } x = (x_k)_k \in c. \quad (4.20)$$

<sup>4</sup>Può essere di un qualche interesse per l’argomento qui trattato, anche la Proposizione 3.2.1 in [7], relativa alla distribuzione  $\delta$  di Dirac.

(2) Verifichiamo che **non** esiste alcuna  $y \in l^1$  tale che

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k x_k \quad \text{per ogni } x \in l^\infty. \quad (4.21)$$

Se una tale  $y = (y_k)_k \in l^1$  esistesse, da (4.20) e (4.21) risulterebbe

$$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \quad \text{per ogni } x \in c.$$

Consideriamo la successione  $(\xi_n)_n$  di elementi di  $l^\infty$  definiti da

$$\xi_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{se } k < n \\ 1 & \text{se } k \geq n. \end{cases}$$

Risulta

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_n^{(k)} = 1, \quad \text{pertanto } (\xi_n^{(k)})_k \in c.$$

Allora, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha

$$1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_n^{(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k \xi_n^{(k)} = \sum_{k \geq n}^{+\infty} y_k,$$

che è assurdo (perché  $\sum_{k \geq n}^{+\infty} y_k$  è il resto  $n$ -esimo della serie assolutamente convergente, relativo a  $y = (y_k)_k \in l^1$ , infinitesimo per  $n \rightarrow +\infty$ ).

□

**Osservazione 4.3.15.** Una buona proprietà di  $l^\infty$  è la seguente: *essendo  $l^\infty$  uno spazio duale, risulta che  $\overline{B}_{l^\infty}$  è compatta nella convergenza debole\** (per il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki 3.2.1).

I precedenti risultati sono riassunti nella seguente tabella.

SPAZIO	DUALE	SEPARABILE	RIFLESSIVO
$l^p$ ( $1 < p < \infty$ )	$l^{p'}$ ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ )	SI	SI
$l^1$	$l^\infty$	SI	NO
$l^\infty$	strett. più ampio di $l^1$	NO	NO
$c_0$	$l^1$	SI	NO
$c$	$l^1 \times \mathbb{R}$	SI	NO

## 4.4 Teorema di Baire-Hausdorff

Per dimostrare i Teoremi fondamentali riguardanti gli operatori lineari limitati, premettiamo il Teorema di Baire-Hausdorff.

**Definizione 4.4.1 (insiemi di I categoria e di II categoria).** Sia  $(E, d)$  uno spazio metrico. Un insieme  $S \subseteq E$  si dice *insieme di I categoria* se è dato dall'unione di una successione di insiemi chiusi tutti privi di punti interni.

Un sottoinsieme  $S \subseteq E$  che non sia *di I categoria* si dice *di II categoria*.

Sussiste il seguente Teorema.

**Teorema 4.4.2 (di Baire-Hausdorff).** Sia  $(E, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $(E_n)_n$  una successione di sottoinsiemi chiusi tale che

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Allora, esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $\overset{\circ}{E}_{n_0} \neq \emptyset$  (cioè, **uno spazio metrico completo è un insieme di II categoria (in sé)**).

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che nessuno dei chiusi  $E_n$  possenga punti interni; costruiamo un elemento  $v \in E$  che non appartiene ad alcuno degli  $E_n$ , contraddicendo così l'ipotesi.

In particolare, avremo  $E_1 \neq E$ , dato che  $E$  ha punti interni.

Sia allora  $v_1 \notin E_1$ . Siccome  $E_1$  è chiuso,  $v_1$  è esterno ad  $E_1$ ; pertanto esiste  $r_1 > 0$  tale che

$$E_1 \cap B(v_1, 2r_1) = \emptyset.$$

Non è restrittivo supporre  $r_1 < 1$  e che  $E_1 \cap \overline{B(v_1, r_1)} = \emptyset$ .

Siccome la palla  $B(v_1, r_1)$  non è inclusa in  $E_2$ , altrimenti  $v_1$  sarebbe interno ad  $E_2$ , esiste  $v_2 \in B(v_1, r_1) \setminus E_2$ .

Siccome  $E_2$  è chiuso,  $v_2$  è esterno ad  $E_2$ , per cui esiste  $r_2 > 0$  tale che

$$E_2 \cap B(v_2, 2r_2) = \emptyset.$$

Possiamo supporre che  $E_2 \cap \overline{B(v_2, r_2)} = \emptyset$  e, pur di rimpicciolire  $r_2$ , che  $r_2 < \frac{1}{2}$  e  $B(v_2, r_2) \subseteq B(v_1, r_1)$ .

Confrontando ora  $B(v_2, r_2)$  con  $E_3$  e proseguendo in questo modo, costruiamo una successione di elementi  $v_n \in E$  e una successione di numeri reali  $r_n > 0$  verificanti, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , le seguenti condizioni

- $E_n \cap \overline{B(v_n, r_n)} = \emptyset$ ;
- $B(v_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(v_n, r_n)$  (successione di palle aperte nidificate);
- $r_n < \frac{1}{n}$ .

Dimostriamo che la successione  $(v_n)_n$  dei centri delle palle è una successione di Cauchy.

Infatti, fissato  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, sia  $n_0$  tale che  $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$ . Se  $m > n \geq n_0$  si ha allora

$$v_m \in B(v_n, r_n)$$

da cui

$$d(v_m, v_n) < r_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon.$$

Quindi  $(v_n)_n$  è una successione di Cauchy in  $E$  (completo per ipotesi), pertanto converge ad un elemento  $v \in E$ . Dimostriamo che  $v$  non appartiene ad alcuno degli  $E_n$ ; infatti, fissato  $n \in \mathbb{N}$  ad arbitrio, si ha  $v_m \in B(v_n, r_n)$  per ogni  $m > n$ , da cui  $v \in \overline{B(v_n, r_n)}$  e quindi  $v \notin E_n$ .  $\square$

**Osservazione 4.4.3.** Il Teorema di Baire-Hausdorff si applica, ovviamente, agli spazi di Banach pensandoli come spazi metrici completi, usando la distanza associata alla norma.

## 4.5 Principio di uniforme limitatezza

Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi vettoriali normati; come nel Capitolo 1, denotiamo con  $B(X; Y)$  lo spazio degli operatori  $T : X \rightarrow Y$  lineari e limitati (continui), munito della norma

$$\|T\|_{B(X; Y)} := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Nel caso in cui  $X = Y$ , denoteremo  $B(X; X)$  semplicemente con  $B(X)$ .

Il risultato che segue stabilisce l'uniforme limitatezza di una famiglia di operatori lineari e limitati.

**Teorema 4.5.1 (Principio di uniforme limitatezza, di Banach-Steinhaus).** *Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi di Banach e sia  $\mathcal{F}$  una famiglia (non necessariamente numerabile) di operatori lineari e limitati (cioè  $\mathcal{F} \subset B(X; Y)$ ). Supponiamo che per ogni  $x \in X$  esista una costante  $M_x \geq 0$  tale che*

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\|_Y \leq M_x < +\infty. \quad (4.22)$$

Allora esiste una costante  $M \geq 0$  tale che

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\|_{B(X; Y)} \leq M < +\infty, \quad (4.23)$$

cioè, tale che

$$\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X, \quad \forall x \in X, \quad \forall T \in \mathcal{F}.$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $n \geq 1$  consideriamo l'insieme chiuso

$$X_n = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} T^{-1} \left( \overline{B(0, n)} \right)$$

che possiamo anche riguardare come  $X_n = \{x \in X : \forall T \in \mathcal{F}, \|Tx\|_Y \leq n\}$ .

Per (4.22), risulta

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n = X;$$

infatti, se  $x \in X$ , esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\|_Y \leq n$ , e quindi  $x \in X_n$ .

Essendo  $X$  uno spazio di Banach, per il Teorema di Baire-Hausdorff, esiste  $n_0 \geq 1$  tale che  $X_{n_0}^\circ \neq \emptyset$ .

Sia  $x_0 \in X$  ed  $r > 0$  tale che  $\overline{B(x_0, r)} \subset X_{n_0}$ . Se  $\|z\|_X \leq 1$  segue che  $x_0 + rz \in \overline{B(x_0, r)} \subset X_{n_0}$ , pertanto

$$\|T(x_0 + rz)\|_Y \leq n_0, \quad \forall T \in \mathcal{F}, \quad \forall z \in \overline{B(0, 1)};$$

allora

$$\|T(rz)\|_Y = \|T(x_0 + rz) - Tx_0\|_Y \leq \|T(x_0 + rz)\|_Y + \|Tx_0\|_Y$$

da cui

$$r \|T\|_{B(X; Y)} = r \sup_{\|z\|_X \leq 1} \|Tz\|_Y \leq n_0 + \|Tx_0\|_Y \quad \forall T \in \mathcal{F},$$

e quindi la tesi.  $\square$

**Osservazione 4.5.2.** Il teorema precedente continua a valere anche se lo spazio  $Y$  non è completo. Al contrario, è essenziale che lo spazio  $X$  sia di Banach.

**Osservazione 4.5.3.** La conclusione del precedente Teorema 4.5.1 è notevole; difatti, da stime puntuali, si deduce una stima (globale) uniforme (questo giustifica il termine “Principio di uniforme limitatezza”).

**Corollario 4.5.4 (continuità del limite puntuale).**

*Siano  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  spazi di Banach,  $(T_n)_n$  una successione in  $B(X; Y)$ . Supponiamo che per ogni  $x \in X$  esista il limite puntuale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x = Tx.$$

*Allora, l'operatore limite  $T$  è lineare e limitato (cioè  $T \in B(X; Y)$ ).*

*Dimostrazione.* Per ogni  $x \in X$ , la successione  $(T_n x)_n$  è limitata. Quindi per il Principio di uniforme limitatezza la successione  $(T_n)_n$  è uniformemente limitata. Questo implica

$$\begin{aligned} \|T\|_{B(X,Y)} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x\|_Y \right) \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{B(X,Y)} < +\infty. \end{aligned}$$

Ciò mostra che l'operatore  $T$  (ovviamente lineare) è limitato.  $\square$

**Osservazione 4.5.5.** In generale il limite puntuale di funzioni continue non è necessariamente una funzione continua. L'ipotesi di linearità ha un ruolo essenziale nel corollario precedente.

**Osservazione 4.5.6.** Dimostriamo ora i punti (i), (ii), (iii) e (iv) della Proposizione 3.1.6 (per la dimostrazione dei punti (i\*), (ii\*), (iii\*) e (iv\*) della Proposizione 3.1.9 si procede in maniera analoga).

- (i) Proviamo che se  $x_n \rightarrow x$  e  $x_n \rightarrow y$ , allora  $x = y$ . Se fosse  $x \neq y$ , allora, per il Corollario 4.1.7, esisterebbe  $F \in X^*$  tale che  $F(x) \neq F(y)$ ; ciò porterebbe ad una contraddizione, in quanto per l'ipotesi risulta

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) = \varphi(y)$$

per ogni  $\varphi \in X^*$ .

- (ii) L'asserto segue dalla maggiorazione

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{X^*} \cdot \|x_n - x\|_X$$

valida per ogni  $\varphi \in X^*$ .

- (iii) Sia  $x_n \rightharpoonup x$ ; allora, per ogni  $\varphi \in X^*$ , la successione numerica  $(\varphi(x_n))_n$  è limitata. Consideriamo la successione  $(\Phi_n)_n \subset X^{**}$  di funzionali lineari e continui su  $X^*$  definiti da

$$\Phi_n(\varphi) := \varphi(x_n)$$

per ogni  $\varphi \in X^*$ . Ora, fissato  $\varphi \in X^*$ , esiste  $M_\varphi \geq 0$  tale che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\Phi_n(\varphi)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(x_n)| \leq M_\varphi.$$

Per il Principio di uniforme limitatezza 4.5.1, esiste  $M \geq 0$  tale che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\Phi_n(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_{X^*} \quad \forall \varphi \in X^*.$$

Ma, in virtù del Corollario 4.1.6, per ogni elemento della successione  $x_n \in X$ , esiste  $\varphi_{x_n} \in X^*$  tale che

$$\|\varphi_{x_n}\|_{X^*} = 1, \quad \varphi_{x_n}(x_n) = \|x_n\|_X.$$

Quindi, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|x_n\|_X = |\varphi_{x_n}(x_n)| = |\Phi_n(\varphi_{x_n})| \leq M \|\varphi_{x_n}\|_{X^*} = M,$$

cioè  $(\|x_n\|_X)_n$  è limitata.

Ancora per il Corollario 4.1.6, relativamente al punto  $x \in X$ , limite debole di  $(x_n)_n$ , esiste  $\varphi_x \in X^*$  tale che

$$\|\varphi_x\|_{X^*} = 1, \quad \varphi_x(x) = \|x\|_X.$$

Allora, poiché  $x_n \rightharpoonup x$ , si ha

$$\begin{aligned} \|x\|_X = \varphi_x(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_x(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi_x(x_n)| \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_x\|_{X^*} \cdot \|x_n\|_X = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_X, \end{aligned}$$

completando la dimostrazione.

- (iv) L'asserto segue dalla maggiorazione

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| &\leq |(\varphi_n - \varphi)(x_n)| + |\varphi(x_n - x)| \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_{X^*} \cdot \|x_n\|_X + |\varphi(x_n) - \varphi(x)|, \end{aligned}$$

tenendo presente che  $(\|x_n\|_X)_n$  è limitata in virtù di (iii).

## 4.6 Teorema dell'applicazione aperta e di limitatezza dell'operatore inverso

I successivi teoremi fondamentali sono dovuti a Banach.

**Teorema 4.6.1 (dell'applicazione aperta).** *Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  spazi di Banach su  $\mathbb{K}$ . Sia  $T : X \rightarrow Y$  un operatore lineare, limitato e **suriiettivo**. Allora  $T$  è aperto (cioè, per ogni sottoinsieme aperto  $A \subseteq X$ , l'immagine  $T(A)$  è un sottoinsieme aperto di  $Y$ .)*

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $T$  è aperto se e solo se, per ogni  $x \in X$  ed  $r > 0$ , l'immagine  $T(B_X(x, r))$ <sup>5</sup> contiene una palla aperta con centro in  $T(x)$ .

1. Per la linearità di  $T$ , l'immagine  $T(B_X(x, r))$  è data da

$$T(B_X(x, r)) = T(x) + T(B_X(0, r)) = T(x) + rT(B_X(0, 1)).$$

In definitiva, per provare il Teorema è allora sufficiente dimostrare che  $T(B_X(0, 1))$  contiene una palla aperta con centro nell'origine di  $Y$ .

2. Proviamo preliminarmente che esiste  $r > 0$  tale che

$$B_Y(0, r) \subset \overline{T(B_X(0, 1))} \quad (4.24)$$

(questa inclusione è “quasi” la tesi, poiché sarà necessario rimuovere la chiusura e lo faremo, a patto di dimezzare  $r$ , cfr. il successivo passo **3**).

Poiché

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_X(0, n)}$$

e  $T$  è suriettivo, allora

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(B_X(0, n))}.$$

Essendo  $Y$  uno spazio di Banach, per il Teorema di Baire-Hausdorff, almeno uno dei chiusi  $\overline{T(B_X(0, n))} \subset Y$  ha interno non vuoto. Sia  $\overline{T(B_X(0, n_0))} \neq \emptyset$ . Allora, riscalandolo, anche

$$\overline{T(B_X(0, 1))} = \frac{1}{n_0} \overline{T(B_X(0, n_0))}$$

<sup>5</sup>Nella dimostrazione di questo Teorema, per maggior chiarezza, indicheremo le palle in  $X$  e in  $Y$  con  $B_X(\cdot, \cdot)$ ,  $B_Y(\cdot, \cdot)$ , rispettivamente.

ha interno non vuoto. Quindi esiste  $y_0 \in Y$  ed  $r > 0$  tale che

$$B_Y(y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, 1))}. \quad (4.25)$$

Poiché  $B_X(0, 1)$  è un insieme convesso e simmetrico, anche  $T(B_X(0, 1))$  e la sua chiusura  $\overline{T(B_X(0, 1))}$  sono convessi e simmetrici. In particolare, per la simmetria,

$$B_Y(-y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, 1))}, \quad (4.26)$$

mentre la convessità implica che

$$\begin{aligned} B_Y(0, r) &= \frac{1}{2}B_Y(-y_0, r) + \frac{1}{2}B_Y(y_0, r) \\ &\subseteq \frac{1}{2}\overline{T(B_X(0, 1))} + \frac{1}{2}\overline{T(B_X(0, 1))} = \overline{T(B_X(0, 1))}, \end{aligned}$$

tenuto conto di (4.25) e (4.26). Risulta così provata la (4.24).

Usando la linearità di  $T$ , da (4.24), per riscalamento, otteniamo

$$B_Y\left(0, \frac{r}{2^n}\right) \subseteq \overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2^n}\right)\right)}$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**3.** Concludiamo la dimostrazione provando che

$$B_Y\left(0, \frac{r}{2}\right) \subseteq T(B_X(0, 1)).$$

Infatti, consideriamo un punto  $y \in B_Y\left(0, \frac{r}{2}\right)$  e proviamo che esiste un  $x \in X$  tale che  $\|x\|_X < 1$  e  $Tx = y$ .

Procediamo per induzione.

– Per densità, possiamo trovare  $x_1 \in B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)$  tale che

$$\|y - Tx_1\|_Y < \frac{1}{2^2}r.$$

– Successivamente, per la stessa costruzione applicata a  $y - Tx_1$ , possiamo trovare  $x_2 \in B_X\left(0, \frac{1}{2^2}\right)$  tale che

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\|_Y < \frac{1}{2^3}r.$$

– Continuando per induzione, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  abbiamo

$$y - \sum_{j=1}^{n-1} Tx_j \in B_Y \left( 0, \frac{1}{2^n} r \right).$$

Pertanto, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , possiamo selezionare un punto

$$x_n \in B_X \left( 0, \frac{1}{2^n} \right)$$

tale che

$$\left\| \left( y - \sum_{j=1}^{n-1} Tx_j \right) - Tx_n \right\|_Y < \frac{1}{2^{n+1}} r. \quad (4.27)$$

Poiché  $X$  è spazio di Banach e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_X < +\infty$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  converge (Teorema 1.2.3); sia allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = x \in X$ . Osserviamo che

$$\|x\|_X \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_X < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1;$$

dalla continuità di  $T$  si ha che

$$\|y - Tx\|_Y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| y - \sum_{j=1}^n Tx_j \right\|_Y = 0$$

per (4.27) e quindi  $Tx = y$ .

In definitiva, l'immagine  $T(B_X(0, 1))$  contiene tutti i punti  $y \in Y$  con  $\|y\|_Y < \frac{r}{2}$ .

□

**Osservazione 4.6.2.** Mentre nel Teorema di Banach-Steinhaus è sufficiente che solo lo spazio  $(X, \|\cdot\|_X)$  sia di Banach, nel Teorema precedente è necessario che lo sia anche  $(Y, \|\cdot\|_Y)$ .

**Teorema 4.6.3 (di limitatezza dell'operatore inverso).** *Se  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  sono spazi di Banach su  $\mathbb{K}$  e  $T : X \rightarrow Y$  è un operatore lineare, continuo (cioè  $T \in B(X; Y)$ ) e **bigettivo**, allora l'operatore inverso  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  esiste, è lineare e continuo (cioè  $T^{-1} \in B(Y; X)$ ).*

*Dimostrazione.* Si deve provare solo la continuità di  $T^{-1} : Y \rightarrow X$ , in quanto la linearità è ovvia. Per far ciò, è sufficiente far vedere che controimmagini di aperti di  $X$  attraverso  $T^{-1}$  sono aperti in  $Y$ .

Sia, allora,  $A \subset X$  un insieme aperto. Poiché  $T$  è bigettivo, si ha

$$(T^{-1})^{-1}(A) = T(A)$$

che è un aperto in  $Y$  per il Teorema dell'applicazione aperta 4.6.1.  $\square$

**Corollario 4.6.4.** *Sia  $X$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ , e siano  $\|\cdot\|'$  e  $\|\cdot\|''$  due diverse norme che rendono (**entrambe**)  $X$  uno spazio di Banach. Supponiamo che esista  $c \geq 0$  per cui  $\|x\|'' \leq c\|x\|'$ , per ogni  $x \in X$ . Allora le due norme sono **equivalenti**.*

*Dimostrazione.* L'operatore identità

$$I : (X, \|\cdot\|') \rightarrow (X, \|\cdot\|'')$$

è bigettivo, lineare e continuo (per l'ipotesi  $\|x\|'' \leq c\|x\|'$  per ogni  $x \in X$ ).

Per il Teorema precedente l'operatore inverso

$$I^{-1} : (X, \|\cdot\|'') \rightarrow (X, \|\cdot\|')$$

è lineare e continuo, da cui si ha che esiste  $c' \geq 0$  per cui  $\|x\|' \leq c'\|x\|''$  per ogni  $x \in X$ .

Di conseguenza le due norme sono equivalenti.  $\square$

## 4.7 Teorema del grafico chiuso

**Teorema 4.7.1 (del grafico chiuso).**

*Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  due spazi di Banach su  $\mathbb{K}$  e sia*

$$T : D(T) = X \rightarrow Y$$

*un operatore lineare. Assumiamo che il grafico di  $T$*

$$G(T) := \{(x, y) \in X \times Y; y = Tx\}$$

*sia chiuso in  $X \times Y$ . Allora  $T$  è continuo.*

*Dimostrazione.* Consideriamo su  $X$  le due norme

$$\|x\|' := \|x\|_X + \|Tx\|_Y \quad \text{e} \quad \|x\|'' := \|x\|_X, \quad (4.28)$$

(la prima norma  $\|\cdot\|'$  è detta *norma del grafico*).

Essendo per ipotesi  $G(T)$  chiuso,  $X$  munito della norma del grafico è uno spazio di Banach su  $\mathbb{K}$ . D'altra parte,  $X$  munito della norma  $\|x\|''$  è uno spazio di Banach su  $\mathbb{K}$  per ipotesi e, ovviamente,  $\|x\|'' \leq \|x\|'$ . Ne segue, per il corollario 4.6.4 che le due norme sono equivalenti e pertanto esiste una costante  $c \geq 0$  tale che

$$\|x\|' \leq c \|x\|''.$$

Concludiamo che per ogni  $x \in X$  risulta

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X$$

e quindi  $T$  è limitato. □

**Osservazione 4.7.2.** Il viceversa del precedente Teorema 4.7.1 è ovviamente vero, poiché il grafico di una funzione continua (lineare o no) è chiuso.

**Osservazione 4.7.3.** Osserviamo che l'esempio 1.6.11 non contraddice il Teorema del grafico chiuso, perché  $T = \frac{d}{dt}$  non è definito sull'intero spazio  $X$ , come invece è richiesto dal Teorema precedente. Tuttavia  $T$ , oltre che lineare e non continuo, ha il grafico chiuso. Infatti, sia  $(f_n)_n \subset D(T)$  tale che, per qualche funzione  $f, g \in X$  ( $X$  e  $D(T)$  sono precisati nell'esempio 1.6.11), risulti

$$\|f_n - f\|_X \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|f'_n - g\|_X \rightarrow 0.$$

Allora,  $f \in D(T)$  e  $f' = g$ . Quindi la coppia  $(f, g) = (f, Tf) \in G(T)$ .



# Capitolo 5

## Teoria di Fredholm.

Alternativa di Fredholm.

## Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt

per operatori compatti autoaggiunti su spazi di Hilbert reali separabili

### 5.1 Operatori aggiunti e proprietà. Operatori autoaggiunti (simmetrici) su spazi di Hilbert reali

Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  spazi di Banach su  $\mathbb{K}$ . Fissato un elemento  $x \in X$  e un elemento del suo duale  $x^* \in X^*$ , indicheremo l'azione di  $x^*$  su  $x$ ,  $x^*(x)$ , col simbolo  $\langle x^*, x \rangle_{X^*, X}$ , cioè porremo

$$x^*(x) =: \langle x^*, x \rangle_{X^*, X}.$$

Al simbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*, X}$  daremo il nome di *crochet* o di *dualità* tra  $X^*$  e  $X$ . In uno spazio di Hilbert questa notazione si riduce al prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)$ .

**Definizione 5.1.1 (Operatore aggiunto).** Sia  $T : X \rightarrow Y$  un operatore lineare limitato, si definisce *operatore aggiunto di  $T$* , l'operatore

$$T^* : Y^* \rightarrow X^*$$

tale che

$$\langle T^* y^*, x \rangle_{X^*, X} = \langle y^*, Tx \rangle_{Y^*, Y} \quad \forall y^* \in Y^*, \forall x \in X. \quad (5.1)$$

**Definizione 5.1.2.** Sia  $V \subseteq X$ , si definisce *insieme ortogonale a  $V$*  l'insieme

$$V^\perp := \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle_{X^*, X} = 0 \quad \forall x \in V \right\}.$$

Se  $W \subseteq X^*$ , si definisce *insieme ortogonale a  $W$*  l'insieme

$$W^\perp := \left\{ x \in X; \langle x^*, x \rangle_{X^*, X} = 0 \quad \forall x^* \in W \right\}.$$

È facile provare che  $V^\perp$  è sottospazio chiuso di  $X^*$  e  $W^\perp$  (indicato anche  ${}^\perp W$ ) è sottospazio chiuso di  $X$ . Sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 5.1.3.**

$$(V^\perp)^\perp = \overline{V},$$

$$(W^\perp)^\perp \supseteq \overline{W}.$$

Se  $X$  è riflessivo (in particolare, se  $X$  è spazio di Hilbert) risulta l'uguaglianza.

*Dimostrazione.* È evidente che  $V \subseteq (V^\perp)^\perp$ , e poiché  $(V^\perp)^\perp$  è chiuso si ha  $\overline{V} \subseteq (V^\perp)^\perp$ .

Per provare che  $(V^\perp)^\perp \subseteq \overline{V}$ , supponiamo, per assurdo, che esista  $x_0 \in (V^\perp)^\perp$  tale che  $x_0 \notin \overline{V}$ .

Applicando il Teorema 4.2.1 (punto (ii), con  $A = \overline{V}$  e  $B = \{x_0\}$ ), esistono  $\varphi \in X^*$  e  $c \in \mathbb{R}$  tali che  $\varphi(x) < c < \varphi(x_0)$  per ogni  $x \in V$ .

Poiché  $V$  è uno spazio vettoriale (quindi,  $\lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x) < c$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ), risulta  $\varphi(x) = 0$  per ogni  $x \in V$  e anche  $\varphi(x_0) > 0$ . Allora  $\varphi \in V^\perp$  e di conseguenza  $\varphi(x_0) = 0$ , una evidente contraddizione.

È ovvio che il chiuso  $(W^\perp)^\perp \supseteq W$  e quindi  $(W^\perp)^\perp \supseteq \overline{W}$ . Se  $X = X^{**}$  è evidente che  $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$ .  $\square$

**Proposizione 5.1.4 (Alcune proprietà dell'operatore aggiunto).** *Sia  $T \in B(X; Y)$ . Risulta:*

$$(i) \quad \|T\|_{B(X; Y)} = \|T^*\|_{B(Y^*; X^*)} \quad (\text{quindi } T^* \in B(Y^*; X^*));$$

$$(ii) \quad \ker T = [Im T^*]^\perp, \quad \ker T^* = [Im T]^\perp;$$

$$(iii) \quad T^* \text{ suriettivo} \Rightarrow T \text{ iniettivo}; \quad T \text{ suriettivo} \Rightarrow T^* \text{ iniettivo}.$$

*Dimostrazione.*

(i) Risulta, per il Corollario 4.1.10,

$$\begin{aligned} \|T\|_{B(X; Y)} &= \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \sup_{\|y^*\|_{Y^*}=1} |\langle y^*, Tx \rangle_{Y^*, Y}| \\ &= \sup_{\|y^*\|_{Y^*}=1} \sup_{\|x\|_X=1} |\langle T^* y^*, x \rangle_{X^*, X}| \\ &= \sup_{\|y^*\|_{Y^*}=1} \|T^* y^*\|_{X^*} = \|T^*\|_{B(Y^*; X^*)}. \end{aligned}$$

(ii) Sono equivalenti le seguenti asserzioni (tenendo presente il Corollario 4.1.8):

- $x \in \ker T$ ,
- $Tx = 0$ ,
- $\langle y^*, Tx \rangle_{Y^*, Y} = 0 \quad \forall y^* \in Y^*$ ,
- $\langle T^*y^*, x \rangle_{X^*, X} = 0 \quad \forall y^* \in Y^*$ ,
- $x \in [Im T^*]^\perp$ .

Analogamente, sono equivalenti le seguenti asserzioni:

- $y^* \in \ker T^*$ ,
- $T^*y^* = 0$ ,
- $\langle T^*y^*, x \rangle_{X^*, X} = 0 \quad \forall x \in X$ ,
- $\langle y^*, Tx \rangle_{Y^*, Y} = 0 \quad \forall x \in X$ ,
- $y^* \in [Im T]^\perp$ .

(iii) Le implicazioni seguono dalle precedenti proprietà. Per brevità ne dimostriamo solo una.

$$T^* \text{ suriettivo} \Leftrightarrow Im T^* = X^* \Rightarrow \underbrace{(Im T^*)^\perp}_{=\ker T} = (X^*)^\perp = \{0_X\}.$$

□

**Definizione 5.1.5 (Operatore aggiunto su uno spazio di Hilbert reale).** Siano  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert reale,  $T : H \rightarrow H$  operatore lineare e limitato. Allora  $T^* : H \rightarrow H$  è l'operatore aggiunto di  $T$  se

$$(T^*y, x) = (y, Tx) \quad \forall x, y \in H.$$

**Definizione 5.1.6 (Operatore autoaggiunto (simmetrico) su uno spazio di Hilbert reale).** Sia  $T \in B(H)$ . Si dice che  $T$  è *autoaggiunto* (o *simmetrico*) se

$$(Ty, x) = (y, Tx) \quad \forall x, y \in H,$$

cioè se  $T = T^*$ .

**Osservazione 5.1.7.** (dovuta a Hellinger e Toeplitz)

Un operatore  $T$  lineare autoaggiunto **definito su tutto uno spazio di Hilbert**  $H$  è necessariamente continuo.

Infatti,  $T$  ha il grafico chiuso (se  $u_n \rightarrow u \in H$  e  $Tu_n \rightarrow v \in H$ , risulta

$$\forall x \in H \quad (Tu_n, x) = (u_n, Tx)$$

e, per  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\forall x \in H \quad (v, x) = (u, Tx) = (Tu, x);$$

pertanto  $Tu = v$ ). Allora, per il teorema del grafico chiuso,  $T$  è continuo.

Ne segue che gli operatori autoaggiunti non-limitati possono essere definiti *solo* su un sottospazio proprio di uno spazio di Hilbert.

## 5.2 Operatori compatti e proprietà

**Definizione 5.2.1 (operatore compatto).** Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  spazi di Banach; un operatore  $T \in B(X; Y)$  si dice *compatto* (o completamente continuo) se per ogni successione  $(x_n)_n$  limitata in  $X$ , esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k$  tale che  $(Tx_{n_k})_k$  converge in  $Y$ .

Equivalentemente,  $T$  è compatto se e solo se per ogni  $U \subset X$  insieme limitato, l'immagine  $T(U) \subset Y$  ha chiusura compatta nella topologia forte di  $Y$  (cioè  $T(U)$  è relativamente compatta).

Indichiamo con  $\mathcal{K}(X; Y)$  lo spazio vettoriale degli operatori compatti da  $X$  in  $Y$ . Se  $X = Y$ , invece di  $\mathcal{K}(X; X)$  scriveremo semplicemente  $\mathcal{K}(X)$ .

**Osservazione 5.2.2.** L'operatore identità  $I$ , su uno spazio di Banach  $X$  di dimensione infinita, non è compatto.

Difatti:  $I : X \rightarrow X$ ,  $x \in X \mapsto I(x) := x \in X$  ( $\dim X = \infty$ ) è lineare e limitato e

$$\overline{I(U)} = \overline{U}$$

per ogni  $U$  insieme limitato. Ora,  $\overline{B_X(0, 1)}$  è (chiuso e) limitato in  $X$ , ma non è compatto per il Teorema 1.8.5, essendo  $X$  di dimensione infinita.

**Proposizione 5.2.3 (esempi di operatori compatti).**

1. Se  $T \in B(X; Y)$  e  $\dim(\text{Im } T) < +\infty$ , allora  $T \in \mathcal{K}(X; Y)$ .

*Dimostrazione.* Un operatore  $T \in B(X, Y)$  è compatto se e solo se la palla aperta unitaria  $B_X(0, 1) \subset X$  ha immagine  $T(B_X(0, 1)) \subset Y$  a chiusura compatta. Poiché  $\dim(\text{Im } T) < +\infty$  e  $T$  è limitato, allora la chiusura  $\overline{T(B_X(0, 1))}$  è un sottoinsieme chiuso e limitato di uno spazio a dimensione finita, quindi è compatto.  $\square$

2. Sia  $(T_n)_n$  una successione in  $\mathcal{K}(X; Y)$  e sia  $T \in B(X; Y)$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\|_{B(X; Y)} = 0.$$

Allora anche  $T \in \mathcal{K}(X; Y)$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che, poiché  $Y$  è di Banach, la chiusura  $\overline{T(B_X(0, 1))}$  è compatta se e solo se  $T(B_X(0, 1))$  è precompatta (Teorema 1.8.4) e quindi, per conseguire la tesi, proviamo che, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,  $T(B_X(0, 1))$  può essere ricoperto con un numero finito di palle aperte di raggio  $\varepsilon$ .

Per l'ipotesi, sia  $\varepsilon > 0$  fissato e scegliamo  $k \in \mathbb{N}$  tale che

$$\|T_k - T\|_{B(X; Y)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poiché  $T_k$  è compatto possiamo selezionare un numero finito di elementi  $y_1, y_2, \dots, y_N \in Y$  tali che

$$T_k(B_X(0, 1)) \subset \bigcup_{i=1}^N B_Y\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (5.2)$$

Se  $\|x\|_X < 1$ , allora  $\|T_k x - T x\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$ . Per (5.2) esiste un punto  $y_i$  con  $\|T_k x - y_i\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$ . Per la disuguaglianza triangolare,

$$\|T x - y_i\|_Y < \varepsilon.$$

Ciò prova che il numero finito di palle aperte di raggio  $\varepsilon$ ,  $B_Y(y_i, \varepsilon)$ , ricopre  $T(B_X(0, 1))$ .  $\square$

**Osservazione 5.2.4.** Un operatore  $T \in B(X; Y)$  si dice **di rango finito** se  $\dim(\text{Im } T) < +\infty$ . Per il punto 1 della Proposizione 5.2.3 un operatore di rango finito è compatto. Indicata con  $\mathcal{F}(X; Y)$  la classe degli operatori lineari limitati di rango finito, risulta

$$\mathcal{F}(X; Y) \subset \mathcal{K}(X; Y).$$

Dalla Proposizione 5.2.3 si ha il seguente risultato.

**Corollario 5.2.5.** *Sia  $(T_n)_n$  una successione di operatori di rango finito e sia  $T \in B(X; Y)$  tale che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\|_{B(X; Y)} = 0.$$

Allora  $T \in \mathcal{K}(X; Y)$ .

Il problema inverso del Corollario 5.2.5, è noto come “**Problema dell’ approssimazione di Banach-Grothendieck**”:

“dato un operatore compatto tra spazi di Banach,  $T \in \mathcal{K}(X; Y)$ , esiste sempre una successione  $(T_n)_n$  di operatori di rango finito tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\|_{B(X; Y)} = 0 \text{ ?}”$$

(in altre parole, è vero che  $\overline{\mathcal{F}(X; Y)} = \mathcal{K}(X; Y)$ ?). Tale problema ha, in generale, risposta negativa (controesempio del 1972, dovuto a P. Enflo). La risposta è però positiva in alcuni casi speciali, ad esempio se  $Y$  è spazio di Hilbert.

Infatti, se  $T \in \mathcal{K}(X; H)$ , con  $X$  spazio di Banach e  $H$  spazio di Hilbert, posto  $K := \overline{T(B_X)}$ , assegnato  $\varepsilon > 0$ , esiste un ricoprimento finito di  $K$  con palle di raggio  $\varepsilon$ ; sia

$$K \subset \bigcup_{i \in I} B_H(y_i, \varepsilon),$$

con  $I$  insieme finito. Sia

$$S := \text{span}\{y_i : i \in I\}$$

e poniamo

$$T_\varepsilon := P_S T,$$

per cui  $T_\varepsilon$  è di rango finito. Proviamo che

$$\|T_\varepsilon - T\|_{\mathcal{B}(X; H)} < 2\varepsilon.$$

Per ogni  $x \in B_X$  esiste  $i_0 \in I$  tale che

$$\|Tx - y_{i_0}\|_H < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Pertanto

$$\|P_S T x - P_S y_{i_0}\|_H < \varepsilon,$$

cioè

$$\|P_S T x - y_{i_0}\|_H < \varepsilon. \tag{5.4}$$

Da (5.3) e (5.4) otteniamo

$$\|P_S T x - T x\|_H < 2\varepsilon$$

per ogni  $x \in B_X$  e quindi  $\|T_\varepsilon - T\|_{\mathcal{B}(X; H)} < 2\varepsilon$ .

**Osservazione 5.2.6.** Per il punto 2 della Proposizione 5.2.3,  $\mathcal{K}(X; Y)$  è un sottospazio chiuso di  $B(X; Y)$  nella norma  $\|\cdot\|_{B(X; Y)}$  e quindi è uno spazio di Banach su  $\mathbb{K}$  (purché almeno  $Y$  sia uno spazio di Banach).

È utile il seguente risultato.

**Proposizione 5.2.7.** Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ,  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  tre spazi di Banach su  $\mathbb{K}$ . Se  $T \in B(X; Y)$  e  $S \in \mathcal{K}(Y; Z)$  (rispettivamente  $T \in \mathcal{K}(X; Y)$  e  $S \in B(Y; Z)$ ) allora  $S \circ T \in \mathcal{K}(X; Z)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $U$  un sottoinsieme limitato di  $X$ ; poiché  $T$  è continuo,  $T(U)$  è un sottoinsieme limitato di  $Y$ , e quindi, per la compattezza di  $S$ , si ha che  $S(T(U))$  è relativamente compatto in  $Z$ .

Se  $T$  è compatto e  $S$  è continuo, la dimostrazione è analoga. □

Dimostriamo ora che **un operatore compatto su uno spazio di Hilbert porta successioni debolmente convergenti in successioni fortemente convergenti.**<sup>1</sup>

**Teorema 5.2.8.** Sia  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert,  $x_n \rightharpoonup x$ ,  $T \in \mathcal{K}(H)$ . Allora  $(Tx_n)_n$  converge fortemente a  $Tx$  in  $H$ , cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Tx_n - Tx\| = 0. \tag{5.5}$$

*Dimostrazione.* Per provare (5.5), è sufficiente dimostrare che ogni sottosuccessione  $(x_n)_{n \in I_1}$  di  $(x_n)_n$  ha una sottosuccessione  $(x_n)_{n \in I_2}$  (con  $I_2 \subseteq I_1$  insiemi infiniti) tale che

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in I_2}} \|Tx_n - Tx\| = 0.$$

Sia allora  $(x_n)_{n \in I_1}$  una sottosuccessione di  $(x_n)_n$ . Poiché per ipotesi  $x_n \rightharpoonup x$ , risulta per il punto (iii) della Proposizione 3.1.6  $\|x_n\| \leq c$  per ogni  $n \in I_1$ .

---

<sup>1</sup>Più in generale, vale il seguente risultato.

**Teorema.** Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  spazi di Banach,  $T \in \mathcal{K}(X; Y)$ . Se  $x_n$  converge debolmente ad  $x \in X$ , allora  $(Tx_n)_n$  converge fortemente a  $Tx$ .

Il viceversa è valido se  $X$  è riflessivo.

In virtù di questo teorema, in uno spazio di Hilbert  $H$  risulta comoda la seguente definizione di compattezza di un operatore:

$$T \in \mathcal{K}(H) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} T \text{ trasforma successioni debolmente convergenti} \\ \text{in successioni fortemente convergenti.} \end{array}$$

Essendo  $T$  compatto, da questa sottosuccessione limitata possiamo estrarre una ulteriore sottosuccessione  $(x_n)_{n \in I_2}$ , con  $I_2 \subseteq I_1$ , tale che l'immagine converge fortemente, cioè

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in I_2}} \|Tx_n - y\| = 0,$$

per qualche  $y \in H$ .

Rimane da provare che  $y = Tx$ . Detto  $T^*$  l'aggiunto di  $T$ , si ha

$$(v, Tx_n - Tx) = (T^*v, x_n - x) \rightarrow 0$$

per ogni  $v \in H$ , e questo prova la convergenza debole

$$Tx_n \rightharpoonup Tx.$$

Poiché il limite debole è unico, questo implica che  $Tx = y$ , completando la dimostrazione.  $\square$

**Teorema 5.2.9 (di Schauder, compattezza dell'operatore aggiunto).**

*Siano  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  spazi di Banach e sia  $T \in B(X; Y)$ . Allora*

$$T \in \mathcal{K}(X; Y) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{K}(Y^*; X^*).$$

*(La dimostrazione di questo importante risultato si basa sul teorema di Ascoli-Arzelà.)*

*Dimostrazione.* Assumiamo che  $T \in \mathcal{K}(X; Y)$ .

1. Dobbiamo dimostrare che  $T^*(\overline{B_{Y^*}}(0, 1))$  ha chiusura compatta in  $X^*$ .  
Sia  $(y_n^*)_n$  una successione in  $Y^*$ ,  $y_n^* : Y \rightarrow \mathbb{K}$ , con  $\|y_n^*\|_{Y^*} \leq 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .  
Proviamo che  $(T^*y_n^*)_n$  ha una sottosuccessione convergente.  
Per l'ipotesi l'insieme  $K := \overline{T(\overline{B_X}(0, 1))} \subseteq Y$  è compatto.
2. Poniamo  $\varphi_n := y_n^*|_K$  (la restrizione di  $y_n^*$  al compatto  $K$ ).  
Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} \subseteq C^0(K; \mathbb{K})$$

definita da

$$\mathcal{F} := \{\varphi_n : y \in K \mapsto (\varphi_n(y)) \in \mathbb{K}; n \in \mathbb{N}\}$$

Proviamo che  $\mathcal{F}$  soddisfa le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzelà (3.4.3). Infatti, tutte queste funzioni sono uniformemente Lipschitziane, perché

$$\|\varphi_n(y) - \varphi_n(y')\| \leq \|y_n^*\|_{Y^*} \cdot \|y - y'\|_K \leq \|y - y'\|_K \quad \text{per ogni } y, y' \in K.$$

Inoltre, osservato che

$$\sup_{y \in K} \|y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_Y = \|T\|_{B(X;Y)},$$

si ha

$$|\varphi_n(y)| \leq \|y_n^*\|_{Y^*} \cdot \|y\|_K \leq 1 \cdot \|T\|_{B(X;Y)} \quad \text{per ogni } y \in K.$$

Quindi tutte le funzioni  $\varphi_n$  sono anche uniformemente limitate. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà esiste una sottosuccessione  $(\varphi_{n_k})_k$  che converge uniformemente sul compatto  $K$  ad una funzione continua  $\varphi$ .

**3.** Osserviamo che

$$\begin{aligned} \|T^*y_{n_i}^* - T^*y_{n_j}^*\|_{X^*} &= \sup_{\|x\|_{X^*} \leq 1} |\langle T^*y_{n_i}^* - T^*y_{n_j}^*, x \rangle_{X^*, X^*}| \\ &= \sup_{\|x\|_{X^*} \leq 1} |\langle y_{n_i}^* - y_{n_j}^*, Tx \rangle_{Y^*, Y}| \\ &= \sup_{\|x\|_{X^*} \leq 1} |\varphi_{n_i}(Tx) - \varphi_{n_j}(Tx)| \rightarrow 0 \quad \text{per } i, j \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Pertanto la successione  $(T^*y_{n_k}^*)_k$  è di Cauchy in  $X^*$ , quindi convergente. Perciò  $T^* \in \mathcal{K}(Y^*; X^*)$ .

*Viceversa*, assumiamo  $T^* \in \mathcal{K}(Y^*; X^*)$ .

Per quanto già provato nella prima parte, risulta  $T^{**} \in \mathcal{K}(X^{**}; Y^{**})$ .

In particolare,  $T^{**}(\overline{B}_X(0, 1))$  ha chiusura compatta in  $Y^{**}$ .

Ma  $T(\overline{B}_X(0, 1)) = T^{**}(\overline{B}_X(0, 1))$  e  $Y$  è chiuso in  $Y^{**}$ . Pertanto  $T(\overline{B}_X(0, 1))$  ha chiusura compatta in  $Y$ . □

Nel caso di operatori compatti su uno spazio di Hilbert  $H$ , il teorema di Schauder può essere dimostrato senza ricorrere al teorema di Ascoli-Arzelà. Dapprima ne proviamo solo un'implicazione, precisamente dimostriamo la seguente:

**Proposizione 5.2.10.** *Sia  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert. Se  $T \in \mathcal{K}(H)$ , allora  $T^* \in \mathcal{K}(H)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $(x_n)_n$  una successione limitata in  $H$  e sia (per il Teorema 3.3.5)  $(x_{n_k})_k$  una sua sottosuccessione debolmente convergente a  $x \in H$ . Per conseguire la tesi, proviamo che  $(T^*x_{n_k})_k$  è fortemente convergente in  $H$ . In particolare, proviamo che

$$T^*x_{n_k} \rightarrow T^*x \quad (5.6)$$

fortemente in  $H$ . Osserviamo che

$$\|T^*x_{n_k} - T^*x\|^2 = (T^*x_{n_k} - T^*x, T^*(x_{n_k} - x)) = (T(T^*x_{n_k}) - T(T^*x), x_{n_k} - x). \quad (5.7)$$

Ora, poiché  $T^*$  è lineare, si ha

$$T^*x_{n_k} \rightharpoonup T^*x. \quad (5.8)$$

Essendo  $T \in \mathcal{K}(H)$  e  $T^* \in B(H)$ , per la Proposizione 5.2.7, si ha che  $TT^* \in \mathcal{K}(H)$  e quindi, per il Teorema 5.2.8 applicato all'operatore compatto  $TT^*$ , da (5.8) segue la convergenza forte

$$T(T^*x_{n_k}) \rightarrow T(T^*x).$$

Pertanto, da (5.7), segue (5.6) e dunque la tesi.  $\square$

**Osservazione 5.2.11.** Se analizziamo la dimostrazione della Proposizione precedente, risulta evidente che la tesi è conseguita grazie al fatto che  $TT^*$  è compatto. È ragionevole ipotizzare che per dimostrare l'implicazione inversa della Proposizione precedente, basterà provare che da  $T^*T$  compatto segue che  $T$  è compatto. In effetti, vale il seguente risultato:

**Lemma 5.2.12.**

- (i)  $T \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow T^*T \in \mathcal{K}(H)$ ;
- (ii)  $T^* \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow ((T^*)^*T^* =) TT^* \in \mathcal{K}(H)$ .

*Dimostrazione.* Proviamo (i); (ii) segue da (i) applicata a  $T^*$ .

Se  $T$  è compatto, allora  $T^*T$  è compatto, in quanto composizione dell'operatore  $T$ , compatto per ipotesi, e l'operatore limitato  $T^*$ . Per provare il viceversa, sia  $(x_n)_n$  una successione limitata in  $H$ , assumiamo  $\|x_n\| \leq C$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Allora, essendo  $T^*T$  compatto per ipotesi, la successione  $(T^*Tx_n)_n$  ha una estratta convergente, sia  $(T^*Tx_{n_k})_k$ .

Risulta

$$\begin{aligned} \|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\|^2 &= (T(x_{n_k} - x_{n_l}), T(x_{n_k} - x_{n_l})) \\ &= (T^*T(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_l}) \leq \|T^*T(x_{n_k} - x_{n_l})\| \|x_{n_k} - x_{n_l}\| \\ &\leq \|T^*T(x_{n_k} - x_{n_l})\| (\|x_{n_k}\| + \|x_{n_l}\|) \leq 2C \|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_l}\|. \end{aligned}$$

Quindi, la successione  $Tx_{n_k}$  è di Cauchy in  $H$  e pertanto è convergente.  $\square$

In definitiva è provato il seguente Teorema di Schauder in uno spazio di Hilbert  $(H, (\cdot, \cdot))$ .

**Teorema 5.2.13.**

$$T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(H).$$

*Dimostrazione.*

$T \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow TT^* \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow$  ( per (ii) del Lemma 5.2.12)  $T^* \in \mathcal{K}(H)$ ;

viceversa

$T^* \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow T^*T \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow$  ( per (i) del Lemma 5.2.12)  $T \in \mathcal{K}(H)$ .

□

Gli operatori compatti spesso si presentano nella forma di operatori integrali definiti (di Fredholm) o nella forma di integrali indefiniti (o meglio, nella forma di funzioni integrali) (di Volterra). Vediamone un primo risultato in ipotesi di sufficiente regolarità.

**Proposizione 5.2.14 (operatore integrale (di Fredholm) compatto).**

Sia  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione continua. L'operatore integrale con nucleo  $k$ ,

$$K : C^0([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow C^0([a, b]; \mathbb{R})$$

definito, per ogni  $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$  e  $x \in [a, b]$ , da

$$(Kf)(x) := \int_a^b k(x, t) f(t) dt,$$

è un operatore lineare compatto.

*Dimostrazione.* L'operatore  $K$  è ovviamente lineare e continuo. Consideriamo una successione limitata di funzioni continue  $f_n \in (C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ . Proviamo che la successione  $(Kf_n)_n$  ammette una sottosuccessione uniformemente convergente. Per il Teorema di compattezza di Ascoli-Arzelà 3.4.3, è sufficiente provare che la successione  $(Kf_n)_n$  è equilimitata ed uniformemente equicontinua.

1. Poiché l'applicazione  $k$  è continua sul compatto  $[a, b] \times [a, b]$ ,  $k$  è limitata ed uniformemente continua. Quindi, esiste una costante  $c$  tale che  $|k(x, t)| \leq c$  per ogni  $(x, t) \in [a, b] \times [a, b]$ ; inoltre, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|k(x, t) - k(\tilde{x}, t)| \leq \varepsilon$$

se  $|\tilde{x} - x| \leq \delta$ , con  $x, \tilde{x}, t \in [a, b]$ .

2. Essendo  $(f_n)_n$  successione limitata, esiste una costante  $M > 0$  tale che

$$\|f_n\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f_n(t)| \leq M \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Questo implica, per ogni  $x \in [a, b]$ ,

$$|(Kf_n)(x)| \leq \int_a^b |k(x, t)| |f_n(t)| dt \leq (b-a)c \cdot M,$$

pertanto la successione  $(Kf_n)_n$  è equilimitata.

3. Sia, ora,  $\varepsilon > 0$  fissato. Scegliamo  $\delta > 0$  tale che valga (5.2.14). Se  $|\tilde{x} - x| \leq \delta$ , allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\begin{aligned} |(Kf_n)(x) - (Kf_n)(\tilde{x})| &\leq \int_a^b |k(x, t) - k(\tilde{x}, t)| \cdot |f_n(t)| dt \\ &\leq (b-a)\varepsilon \cdot M. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ , questo prova che la successione  $(Kf_n)_n$  è uniformemente equicontinua. Per concludere la dimostrazione, basta quindi applicare il Teorema di Ascoli-Arzelà 3.4.3.  $\square$

Una parziale generalizzazione della Proposizione 5.2.14 è il seguente risultato:

**Proposizione 5.2.15.**

Sia  $\bar{\Omega}$  un compatto di  $\mathbb{R}^N$  e  $k : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione continua. L'operatore integrale con nucleo  $k$ ,

$$K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega),$$

definito per ogni  $f \in L^2(\Omega)$  e  $x \in \Omega$ , da

$$(Kf)(x) := \int_{\Omega} k(x, t) f(t) dt,$$

è un operatore lineare compatto.

*Dimostrazione.* La dimostrazione può essere svolta come nella Proposizione 5.2.14, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

(suggerimento : vedere la dimostrazione della Proposizione 6.2.4, in cui il nucleo  $k(x, y)$  è la funzione continua di Green  $G(x, y)$ ).  $\square$

Più in generale, vale il seguente risultato :

**Teorema 5.2.16.** *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$  e  $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ .  
L'operatore integrale con nucleo  $k$ ,*

$$K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

*definito, per ogni  $f \in L^2(\Omega)$  e  $x \in \Omega$ , da*

$$(Kf)(x) := \int_{\Omega} k(x, t) f(t) dt,$$

*è un operatore lineare compatto.*

*Dimostrazione.*  $K$  è lineare e continuo. Approssimiamo il nucleo  $k$  con una successione di nuclei  $k_n$  continui in  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$  e siano  $K_n$  gli operatori integrali associati. Questi operatori, per la Proposizione 5.2.15, sono compatti e convergono in norma a  $K$ , cioè,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|K_n - K\|_{B(L^2(\Omega))} = 0.$$

Per la Proposizione 5.2.3 (punto 2) l'operatore  $K$  è compatto. □

Un caso importante del Teorema 5.2.16 è quello in cui il nucleo  $k$  ha una discontinuità per  $t = x$  del tipo

$$k(x, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq x; \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

**Proposizione 5.2.17 (operatore integrale (di Volterra) compatto).**  
*Sia il nucleo  $k$  definito da*

$$k(x, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq x; \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

*L'operatore integrale con nucleo  $k$ ,*

$$K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$$

*definito, per ogni  $f \in L^2([0, 1])$  e  $x \in [0, 1]$ , da*

$$(Kf)(x) := \int_0^1 k(x, t) f(t) dt = \int_0^x f(t) dt,$$

*è un operatore lineare compatto.*

### 5.3 Dai sistemi di equazioni algebriche lineari alla teoria di Fredholm

Sia  $A$  una matrice  $N \times N$  reale; l'equazione algebrica lineare

$$Ax = b$$

ha un'unica soluzione per ogni vettore  $b \in \mathbb{R}^N$  se e solo se l'equazione omogenea associata

$$Ax = 0$$

ha solo la soluzione  $x = 0$ . Quindi

$$A \text{ iniettiva} \Leftrightarrow A \text{ suriettiva.} \quad (5.9)$$

Ovviamente, questo vale se e solo se la matrice  $A$  è invertibile.

Considerato l'operatore lineare  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  associato alla matrice  $A$ , definito, per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$ , da  $T(x) := Ax$ , l'equivalenza (5.9) si traduce in

$$T \text{ iniettivo} \Leftrightarrow T \text{ suriettivo}^2. \quad (5.10)$$

Osserviamo che, nella equivalenza (5.10), per il Teorema 1.7.3,  $\mathbb{R}^N$  può essere sostituito con un qualunque spazio normato di dimensione finita  $N$ .

In generale, operatori lineari continui su uno spazio  $X$  a dimensione infinita non hanno la proprietà (5.10). Infatti, si possono costruire operatori lineari e limitati  $T : X \rightarrow X$  che sono iniettivi, ma non suriettivi, o viceversa.<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Ricordiamo il Teorema del rango:  $N = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$ .

<sup>3</sup>Qui ne diamo un esempio. Consideriamo lo spazio completo  $l^2$  di successioni reali di quadrato sommabile (cfr. Definizione 1.4.6 e Proposizione 1.4.12); esso ha dimensione infinita: i vettori linearmente indipendenti  $\{e^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ , dove

$$e^{(k)} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{e_k^{(k)}}, 0, 0, \dots),$$

costituiscono una base ortonormale di  $l^2$ . Consideriamo gli operatori lineari

$$T_+ : l^2 \rightarrow l^2, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto T_+ x := (0, x_1, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{(T_+ x)_n}, \dots)$$

e

$$T_- : l^2 \rightarrow l^2, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto T_- x := (x_2, x_3, \dots, \underbrace{x_{n+1}}_{(T_- x)_n}, \dots),$$

Tuttavia, la (5.10) valida in dimensione finita si estende ad una importante classe di operatori  $T$  su spazi  $X$  a dimensione infinita, precisamente agli operatori  $T : X \rightarrow X$  della forma  $T = I - K$ , dove  $I$  è l'operatore identità su  $X$  e  $K$  è un operatore compatto su  $X$ . Se  $T$  è in questa classe, allora vale ancora l'equivalenza

$$T = I - K : X \rightarrow X \text{ iniettivo} \Leftrightarrow T = I - K : X \rightarrow X \text{ suriettivo.} \quad (5.11)$$

## 5.4 Teoria di Fredholm

Qui proviamo quanto affermato alla fine della precedente Sezione 5.3 nel caso in cui lo spazio a dimensione infinita sia uno spazio di Hilbert (cfr. proprietà (iv) nel Teorema di Fredholm 5.4.1).

Per il caso in cui lo spazio a dimensione infinita sia uno spazio di Banach arbitrario, cfr. Teorema 6.6 in [5].

Il teorema che segue descrive le varie relazioni tra nucleo ( $\ker$ ) e insieme immagine ( $\text{Im}$ ) di un operatore avente la forma  $I - K$  (**operatore di Riesz-Fredholm**) e del suo operatore aggiunto.

**Teorema 5.4.1 (di Fredholm).** *Sia  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert reale e sia  $K \in \mathcal{K}(H)$ . Allora*

- (i)  $\ker(I - K)$  ha dimensione finita;
- (ii)  $\text{Im}(I - K)$  è chiusa e, più precisamente,
- (iii)  $\text{Im}(I - K) = \ker(I - K^*)^\perp$ ;
- (iv)  $\ker(I - K) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(I - K) = H$ ;
- (v)  $\ker(I - K)$  e  $\ker(I - K^*)$  hanno la stessa dimensione.<sup>4</sup>

chiamati rispettivamente *operatore di traslazione a destra (right shift)* e *operatore di traslazione a sinistra (left shift)*. È facile provare che:

- $T_+, T_- \in B(l^2; l^2)$ , con  $\|T_+\|_{B(l^2)} = \|T_-\|_{B(l^2)} = 1$ ;
- $T_+$  è iniettivo, ma non è suriettivo (infatti  $T_+(l^2) \subset l^2$ ; ad esempio  $e^{(1)} \in l^2 \setminus T_+(l^2)$ );
- $T_-$  è suriettivo, ma non è iniettivo.

<sup>4</sup>Definiamo *indice dell'operatore  $I - K$*  il numero

$$\text{ind}(I - K) := \dim(\ker(I - K)) - \dim(\ker(I - K^*)).$$

I punti (i) e (v) del Teorema 5.4.1 affermano che l'indice degli operatori della forma  $I - K$  è zero.

*Dimostrazione.* La dimostrazione di questo teorema sarà ottenuta in diversi passi.

1. Per provare il punto (i), supponiamo per assurdo che  $\dim \ker(I - K)$  sia infinita. In tal caso, potremmo trovare una successione  $(e_n)_n$  di vettori ortonormali contenuti in  $\ker(I - K)$ <sup>5</sup> per i quali si avrebbe

$$Ke_n = e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre, per l'Identità di Pitagora, per ogni  $m \neq n$  si avrebbe

$$\|e_m - e_n\|^2 = \|e_m\|^2 + \|e_n\|^2 = 2.$$

Dunque

$$\|Ke_m - Ke_n\| = \|e_m - e_n\| = \sqrt{2}$$

per ogni  $m \neq n$ . Pertanto, dalla successione  $(Ke_n)_n$  non si potrebbe estrarre alcuna sottosuccessione convergente, contro il fatto che  $K$  è operatore compatto. Ciò prova l'affermazione (i).

2. Proviamo, preliminarmente alla dimostrazione di (ii), che

$$\exists \beta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \|u - Ku\| \geq \beta \|u\| \quad \forall u \in \ker(I - K)^\perp. \quad (5.12)$$

Infatti, se (5.12) non fosse vera, potremmo trovare una successione  $(u_n)_n \subset \ker(I - K)^\perp$  tale che

$$\|u_n\| = 1 \quad \text{e} \quad \|u_n - Ku_n\| < \frac{1}{n}.$$

Poiché siffatta  $(u_n)_n$  è limitata, esiste una sua estratta (che, per brevità, indicheremo ancora con  $(u_n)_n$ ) debolmente convergente in  $H$  ad  $u \in H$ . Poiché  $K$  è compatto, per il Teorema 5.2.8, la successione  $(Ku_n)_n$  converge fortemente a  $Ku$ . Inoltre, risulta

$$\|u_n - Ku\| \leq \|u_n - Ku_n\| + \|Ku_n - Ku\| \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow +\infty$ . Ne segue che  $u_n$  converge fortemente a  $Ku$ . Poiché  $u_n$  converge debolmente a  $u$ , concludiamo che  $u = Ku$  e  $u_n \rightarrow u$ . Per costruzione, abbiamo

$$\|u\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = 1, \quad u \in \ker(I - K)^\perp$$

(poiché  $\ker(I - K)^\perp$  è chiuso), mentre, contemporaneamente,  $u - Ku = 0$ , quindi risulta anche  $u \in \ker(I - K)$ . Otteniamo così una contraddizione (in quanto  $u \in \ker(I - K) \cap \ker(I - K)^\perp = \{0_H\}$ , mentre  $\|u\| = 1$ ), per cui risulta provata la (5.12).

---

<sup>5</sup>cfr. §2.4.

3. Proviamo ora l'affermazione (ii), cioè che  $Im(I - K)$  è chiusa. Consideriamo una successione  $(v_n)_n \subset Im(I - K)$ , con  $v_n \rightarrow v$  per  $n \rightarrow +\infty$  e dimostriamo che  $v \in Im(I - K)$ , cioè che esiste  $u \in H$  tale che  $v = u - Ku$ .

Per assunzione, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $u_n \in H$  tale che  $v_n = u_n - Ku_n$ . Sia  $\tilde{u}_n \in \ker(I - K)$  la proiezione di  $u_n$  su  $\ker(I - K)$ , cioè

$$\tilde{u}_n = P_{\ker(I-K)} u_n;$$

posto

$$z_n := u_n - \tilde{u}_n,$$

risulta  $z_n \in \ker(I - K)^\perp$  e vale

$$\begin{aligned} v_n &= u_n - Ku_n = (\tilde{u}_n + z_n) - K(\tilde{u}_n + z_n) = z_n - Kz_n + \underbrace{\tilde{u}_n - K\tilde{u}_n}_{=0} \\ &= z_n - Kz_n. \end{aligned}$$

Usando (5.12) (applicata a  $z_m - z_n$ ), per ogni  $m, n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\|v_m - v_n\| \geq \beta \|z_m - z_n\|.$$

Poiché  $(v_n)_n$  è di Cauchy, anche  $(z_n)_n$  è di Cauchy. Pertanto esiste  $u \in H$  tale che  $z_n \rightarrow u$ , e quindi

$$u - Ku = \lim_{n \rightarrow +\infty} (z_n - Kz_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v,$$

il che dimostra l'asserto (ii).

4. Poiché  $Im(I - K)$  e  $\ker(I - K^*)^\perp$  sono sottospazi chiusi, la (iii) vale se e solo se

$$Im(I - K)^\perp = \ker(I - K^*).$$

Ciò è provato osservando che valgono le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} x &\in \ker(I - K^*), \\ (I - K^*)x &= 0, \\ (y, (I - K^*)x) &= 0 \quad \forall y \in H, \\ ((I - K)y, x) &= 0 \quad \forall y \in H, \\ x &\in Im(I - K)^\perp. \end{aligned}$$

5. Proviamo dapprima la seguente implicazione di (iv):

$$\ker(I - K) = \{0\} \Rightarrow Im(I - K) = H.$$

Sia, allora,  $I - K$  iniettivo e, per assurdo, supponiamo che  $I - K$  non sia suriettivo, cioè sia

$$(I - K)(H) = H_1 \subsetneq H.$$

Per (ii)  $H_1$  è un sottospazio chiuso di  $H$ .

Poiché  $I - K$  è iniettivo abbiamo che

$$H_2 := (I - K)(H_1) \subsetneq H_1.^6$$

Continuando questo processo, per induzione si ha che per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$H_n := (I - K)^n(H), \quad (I - K)(H_n) = H_{n+1}.$$

Inoltre, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n$  è sottospazio chiuso e

$$H \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_n \supsetneq H_{n+1} \supsetneq \dots$$

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  scegliamo  $e_n \in H_n \cap H_{n+1}^\perp$  con  $\|e_n\| = 1$ .

Osserviamo che, se  $n > m$  si ha

$$H_{n+1} \subsetneq H_n \subseteq H_{m+1} \subsetneq H_m$$

e perciò

$$Ke_m - Ke_n = -(e_m - Ke_m) + (e_n - Ke_n) + (e_m - e_n) = e_m + z_m$$

dove  $z_m = -(e_m - Ke_m) + (e_n - Ke_n) - e_n \in H_{m+1}$ . Poiché  $e_m \in H_{m+1}^\perp$ , per l'Identità di Pitagora

$$\|Ke_m - Ke_n\| \geq \|e_m\| = 1.$$

Pertanto la successione  $(Ke_n)_n$  non può avere alcuna sottosuccessione convergente fortemente, contraddicendo così la compattezza di  $K$ .

**6.** Proviamo ora l'implicazione inversa in (iv), cioè

$$Im(I - K) = H \Rightarrow \ker(I - K) = \{0\}.$$

Utilizziamo un argomento di dualità. Per una delle proprietà dell'operatore aggiunto (Proposizione 5.1.4(ii)), si ha

$$\ker(I - K^*) = Im(I - K)^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

<sup>6</sup> Se, per assurdo,  $(I - K)(H_1) = H_1$ ,  $I - K : H_1 \rightarrow H_1$  risulta bigettivo. Sia  $x \in H \setminus H_1$  (siffatto elemento esiste, in quanto  $H_1 \subsetneq H$ ); allora  $(I - K)(x) \in H_1$  e quindi esiste  $x' \in H_1$  tale che  $(I - K)(x) = (I - K)(x')$  e, per l'iniettività di  $I - K$ , si ha  $x = x' \in H_1$ , il che è assurdo.

Poiché  $K^*$  è compatto, per il passo precedente si ha  $Im(I - K^*) = H$ .

Usando ancora la Proposizione 5.1.4(ii), risulta

$$\ker(I - K) = Im(I - K^*)^\perp = H^\perp = \{0\},$$

e ciò conclude la dimostrazione di (iv).

**7.** Per dimostrare (v), cominciamo col provare che

$$\dim \ker(I - K) \geq \dim Im(I - K)^\perp. \quad (5.13)$$

Supponiamo, per assurdo, che (5.13) non sia vera, cioè

$$\dim \ker(I - K) < \dim Im(I - K)^\perp. \quad (5.14)$$

Allora esiste un operatore lineare e limitato

$$A : \ker(I - K) \rightarrow Im(I - K)^\perp$$

che è iniettivo, ma *non* suriettivo. Estendiamo  $A$  ad un operatore (ancora indicato con  $A$ )

$$A : H \rightarrow Im(I - K)^\perp$$

definito su tutto lo spazio  $H$  ponendo  $Au = 0$  per  $u \in \ker(I - K)^\perp$ . Poiché  $Im A$  ha dimensione finita,  $A$  è compatto e quindi anche  $K + A$  è compatto. Proviamo che

$$\ker(I - (K + A)) = \{0\}. \quad (5.15)$$

Infatti, se  $Ku + Au = u$ , allora  $u - Ku = Au \in Im(I - K)^\perp$ ; quindi  $u - Ku = Au = 0$ . Sicché  $u \in \ker(I - K)$  e quindi  $u = 0$  poiché  $A$  è iniettivo su  $\ker(I - K)$ . Da (5.15), applicando (iv) all'operatore compatto  $K + A$ , segue che  $Im(I - (K + A)) = H$ .

Tuttavia questo è impossibile: se  $v \in Im(I - K)^\perp$  ma  $v \notin Im A$ , l'equazione  $u - (Ku + Au) = v$  non ha soluzione. Questa contraddizione mostra che (5.14) non può valere.

**8.** Tenendo presente la Proposizione 5.1.4(ii), da (5.13) si ha

$$\dim \ker(I - K) \geq \dim Im(I - K)^\perp = \dim \ker(I - K^*).$$

Ancora da (5.13) applicata a  $I - K^*$ , si ha anche (scambiando il ruolo di  $K$  e  $K^*$ )

$$\dim \ker(I - K^*) \geq \dim Im(I - K^*)^\perp = \dim \ker(I - K),$$

e quindi la tesi (v).

□

**Osservazione 5.4.2** (una dimostrazione alternativa del punto (i)). Risulta

$$\overline{B_{\ker(I-K)}}(0, 1) \subset K(\overline{B_H}(0, 1))$$

e pertanto  $\overline{B_{\ker(I-K)}}(0, 1)$  è compatta. Per il Teorema 1.8.5,  $\ker(I - K)$  ha dimensione finita.

**Osservazione 5.4.3.** La proprietà (iv) mostra che l'equivalenza (5.10), nota in spazi a dimensione finita, si estende alla classe di operatori della forma  $I - K$  su spazi a dimensione infinita.

**Osservazione 5.4.4.** È ovvio che tutto quanto affermato dal Teorema di Fredholm resta valido anche per gli operatori  $\lambda I - K$  se  $\lambda \neq 0$ .

## 5.5 Alternativa di Fredholm

Quando  $K$  è un operatore compatto, il Teorema di Fredholm 5.4.1 fornisce informazioni su esistenza ed unicità delle soluzioni per l'equazione lineare

$$u - Ku = f \quad (f \in H). \quad (5.16)$$

Difatti, due eventualità possono verificarsi.

*CASO 1:*  $\ker(I - K) = \{0\}$ . Questo significa che l'equazione omogenea  $u - Ku = 0$  ha la sola soluzione nulla. Allora, per il punto (iv) del Teorema di Fredholm 5.4.1, l'operatore  $I - K$  è iniettivo e suriettivo. Pertanto, per ogni  $f \in H$ , l'equazione non omogenea (5.16) ha esattamente una sola soluzione.

*CASO 2:*  $\ker(I - K) \neq \{0\}$ . Questo significa che l'equazione omogenea  $u - Ku = 0$  ha una soluzione non nulla. In questo caso, lo spazio delle soluzioni di  $u - Ku = 0$  ha dimensione finita per il punto (i) del Teorema di Fredholm 5.4.1 e, per il punto (iii) dello stesso Teorema, l'equazione non omogenea (5.16) ha soluzioni se e solo se  $f \in \ker(I - K^*)^\perp$ , cioè se e solo se  $(f, u) = 0$  per ogni  $u \in H$  tale che  $u - K^*u = 0$  (ovvero, se e solo se  $f$  è ortogonale ad ogni (in numero finito per (i) e (v) del Teorema di Fredholm 5.4.1) soluzione dell'equazione omogenea (duale)  $u - K^*u = 0$ ).

La descritta dicotomia è nota come *Alternativa di Fredholm*.

## 5.6 Dal teorema spettrale dell'Algebra Lineare al teorema spettrale di Hilbert-Schmidt

“È difficile indicare una nozione nella Teoria degli Operatori che sia più importante di quella di spettro.” (da [15], pag. 230)

Iniziamo col considerare il caso della dimensione finita.

Sia  $A := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$  matrice quadrata di ordine  $N$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ; si dice che  $\lambda \in \mathbb{C}$  è un **autovalore** per  $A$  se esiste  $x \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$  per cui risulti

$$Ax = \lambda x \quad ^7$$

e quindi tale che  $\det(\lambda I - A) = 0$ .

In tal caso ogni elemento  $x \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$  tale che  $Ax = \lambda x$  è detto **autovettore** relativo all'autovalore  $\lambda$ . L'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore  $\lambda$  forma, insieme allo zero, un sottospazio di  $\mathbb{C}^N$  chiamato **autospatio** relativo all'autovalore  $\lambda$ .

È noto, dall'Algebra Lineare, che se  $A$  è una **matrice reale**  $N \times N$  e **simmetrica**

- i suoi autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  sono tutti reali,
- il  $\det(A)$  (determinante di  $A$ ) è uguale a  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_N$ ,

e sussiste il seguente risultato di diagonalizzazione :

- **(Teorema Spettrale)** Esiste una base ortonormale  $\{v_i\}_{i=1,\dots,N}$  di  $\mathbb{R}^N$  (detta **base spettrale**) formata da autovettori di  $A$  (cioè,  $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$  per ogni  $i, j = 1, \dots, N$  e  $\|v_i\| = 1$  per ogni  $i = 1, \dots, N$ ;  $Av_i = \lambda_i v_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$  sono i corrispondenti autovalori).

### 5.6.1 Diagonalizzazione in dimensione finita

Rispetto alla base spettrale  $\{v_1, \dots, v_N\}$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$  si ha che, posto

$$x = \sum_{i=1}^N c_i v_i$$

e

$$b = \sum_{i=1}^N (b, v_i) v_i,$$

---

<sup>7</sup>Questa equazione impone al vettore  $Ax$ , trasformato di  $x$ , di risultare proporzionale ad  $x$  stesso.

l'equazione  $Ax = b$  si presenta nella forma

$$Ax = \sum_{i=1}^N c_i Av_i = \sum_{i=1}^N \lambda_i c_i v_i = \sum_{i=1}^N (b, v_i) v_i = b,$$

ovvero, utilizzando la notazione matriciale rispetto alla base spettrale  $\{v_1, \dots, v_N\}$ ,

$$Ax = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 \\ \lambda_2 c_2 \\ \vdots \\ \lambda_N c_N \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} (b, v_1) \\ (b, v_2) \\ \vdots \\ (b, v_N) \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

quindi la matrice  $A$ , rispetto alla base spettrale, è ridotta in forma diagonale. Di conseguenza, la soluzione  $x \in \mathbb{R}^N$  di  $Ax = b$ , può essere ora trovata risolvendo, invece di un sistema di  $N$  equazioni in  $N$  incognite,  $N$  equazioni scalari, una per ognuno dei coefficienti  $c_1, \dots, c_N$ .

Se tutti gli autovalori di  $A$  sono non nulli (quindi  $\det(A) \neq 0$ ), la soluzione esplicita di  $Ax = b$  è data da

$$x = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} (b, v_i) v_i.$$

Consideriamo ora l'operatore  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  associato alla matrice  $A$ , definito, per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$ , da  $T(x) = Ax$ . Si ottiene, operando come sopra,

$$T(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i c_i v_i,$$

cioè possiamo esprimere l'operatore  $T$  come combinazione lineare (finita) dei vettori della base spettrale.

Il Teorema spettrale (in dimensione finita) appena richiamato, resta valido per operatori lineari, compatti e autoaggiunti (simmetrici)  $K : H \rightarrow H$  con  $H$  spazio di Hilbert reale separabile di dimensione infinita (Teorema di Hilbert-Schmidt [5.10.1](#)).

## 5.7 Risolvente e spettro di un operatore lineare limitato

Sulla base del caso particolare in  $\mathbb{R}^N$ , si può ora formulare una definizione più generale.

**Definizione 5.7.1. (Risolvente e Spettro di un operatore lineare e limitato)**

Sia  $H$  uno spazio di **Hilbert reale** e sia  $T \in B(H)$ . Si definisce *insieme risolvente di  $T$*  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}$

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda I - T \text{ è iniettivo e suriettivo}\}.^8 \quad (5.18)$$

Se  $\lambda \in \rho(T)$ , esiste l'operatore inverso  $(\lambda I - T)^{-1}$  che è un operatore lineare e continuo (Teorema 4.6.3), cioè  $(\lambda I - T)^{-1} \in B(H)$ .

**Definizione 5.7.2.** Si definisce *spettro di  $T$*  il seguente sottoinsieme di  $\mathbb{R}$

$$\sigma(T) := \mathbb{R} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda I - T \text{ non è invertibile}\}.$$

Inoltre, si definisce *spettro puntuale di  $T$*

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda I - T \text{ non è iniettivo}\}.$$

Equivalentemente,  $\lambda \in \sigma_p(T)$  se esiste un vettore  $w \in H \setminus \{0\}$  tale che  $Tw = \lambda w$ . In questo caso,  $\lambda$  è detto *autovalore* di  $T$  e  $w$  è un *autovettore (autofunzione)* associato a  $\lambda$ .

**Proposizione 5.7.3.** *Lo spettro di  $T \in B(H)$ ,  $\sigma(T)$ , è compatto e  $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|_{B(H)}, \|T\|_{B(H)}]$ . L'insieme risolvente  $\rho(T)$  è aperto.*

*Dimostrazione.* Sia  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $|\lambda| > \|T\|_{B(H)}$ . Proviamo che  $\lambda I - T$  è bigettivo; ne seguirà che

$$\sigma(T) \subseteq [-\|T\|_{B(H)}, \|T\|_{B(H)}].$$

Assegnato  $f \in H$  l'equazione  $\lambda u - Tu = f$  ha un'unica soluzione, poiché  $u = \lambda^{-1}(Tu + f)$ , e si può applicare il Principio delle contrazioni.<sup>9</sup>

Proviamo ora che  $\rho(T)$  è aperto. Sia  $\lambda_0 \in \rho(T)$  e proviamo che esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(\lambda_0) \subset \rho(T)$ . Assegnati  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che

$$|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|_{B(H)}}$$

<sup>8</sup>Alcuni autori nella definizione di  $\rho(T)$  considerano l'operatore  $T - \lambda I$  invece di  $\lambda I - T$ . Nel seguito utilizzeremo indifferentemente l'uno o l'altro operatore.

<sup>9</sup>**Teorema (di Banach del punto fisso- Principio delle contrazioni)**

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico non vuoto completo e sia  $S : X \rightarrow X$  una contrazione stretta, cioè,

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq k \cdot d(v_1, v_2),$$

per ogni  $v_1, v_2 \in X$ , con  $k < 1$ . Allora  $S$  ha un unico punto fisso  $u \in X$ , cioè  $u = Su$ .

e  $f \in H$ , risolviamo  $\lambda u - Tu = f$ . Questa equazione può essere così riscritta

$$\lambda_0 u - Tu = f + (\lambda_0 - \lambda)u,$$

cioè,

$$u = (\lambda_0 I - T)^{-1}[(\lambda_0 - \lambda)u + f].$$

Quest'ultima equazione ha, ancora per il Principio delle contrazioni, un'unica soluzione in virtù dell'ipotesi  $|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|_{B(H)}}$ . Quindi  $\lambda \in \rho(T)$ . Posto  $r = \frac{1}{\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|_{B(H)}}$ , per l'arbitrarietà di  $\lambda \in B_r(\lambda_0)$  conseguiamo la tesi.  $\square$

**Osservazione 5.7.4.** Se invece di uno spazio di Hilbert  $H$  **reale**, consideriamo uno spazio  $X$  di Banach **reale**, la Proposizione 5.7.3 rimane valida con identica dimostrazione.

**Osservazione 5.7.5.** È evidente che  $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$ . In generale, questa inclusione può essere stretta: può esistere  $\lambda$  tale che  $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$  e  $Im(\lambda I - T) \neq H$  (un tale  $\lambda$  appartiene allo spettro, poiché  $\lambda I - T$  non è invertibile, ma non è autovalore). Consideriamo, per esempio, in  $H = l^2$  l'operatore di traslazione a destra  $T_+$ . Allora  $0 \in \sigma(T_+)$ , mentre  $0 \notin \sigma_p(T_+)$  (cfr. Esercizio 20).

Può naturalmente accadere, in spazi sul campo  $\mathbb{R}$  a dimensione finita o infinita, che  $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \emptyset$ ; consideriamo per esempio una rotazione di  $\frac{\pi}{2}$  in  $\mathbb{R}^2$ , o in  $l^2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$  l'operatore

$$T(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots).$$

**Osservazione 5.7.6.** In uno spazio di Banach  $X$ , a dimensione infinita, su  $\mathbb{C}$  lo studio degli autovalori e dello spettro è più interessante.

In questo caso, se  $T \in B(X)$ , l'insieme risolvente  $\rho(T)$  è definito da

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - T \text{ è iniettivo e suriettivo}\}^{10}$$

e lo spettro è definito da

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ non è invertibile}\}.$$

<sup>10</sup>Se  $\lambda \in \rho(T)$ , l'operatore risolvente di  $T$ ,  $R_\lambda : X \rightarrow X$  è definito da

$$R_\lambda u = R(\lambda, T)u := (\lambda I - T)^{-1}u.$$

Più precisamente il risolvente è la funzione  $\lambda \in \rho(T) \rightarrow R_\lambda$ . Il termine "risolvente di  $T$ " è giustificato dal fatto che l'equazione lineare non omogenea  $(\lambda I - T)u = v$  (dove  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $v \in X$  sono assegnati e  $u \in X$  è da determinare) ha soluzione per ogni  $v$  se e solo se  $\lambda \in \rho(T)$  (cioè, se  $(\lambda I - T)^{-1}$  esiste). Allora la soluzione  $u$  esiste ed è data da  $u = (\lambda I - T)^{-1}v$ .

Sussistono le seguenti proprietà:

**Proposizione 5.7.7.** *Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio di Banach, a dimensione infinita, su  $\mathbb{C}$  e  $T \in B(X)$ .*

*Allora si ha:*

(i) *Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  è tale che  $|\lambda| > \|T\|_{B(X)}$ , allora  $\lambda \in \rho(T)$ ,*

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \quad (\text{serie di Neumann})$$

e

$$\|R(\lambda, T)\|_{B(X)} \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|_{B(X)}};$$

(ii)  $\sigma(T) \neq \emptyset$ ;

(iii)  $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|_{B(X)}\}$ ;

(iv)  $\sigma(T)$  è compatto e  $\rho(T) \neq \emptyset$  è aperto

(v) *Il raggio spettrale di  $T$ , denotato  $r(T)$ , è definito da*

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

*Risulta (Gelfand)*

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

e

$$r(T) \leq \|T\|_{B(X)}.$$

*Dimostrazione.*

(i) Fissiamo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $|\lambda| > \|T\|_{B(X)}$ . Allora  $\lambda I - T$  è invertibile (stessa dimostrazione come in 5.7.3), cioè  $\lambda \in \rho(T)$ , e

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left( I - \frac{T}{\lambda} \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}},$$

serie assolutamente convergente per  $\|T\|_{B(X)} < |\lambda|$  in virtù di

$$\|T^n\|_{B(X)} \leq \|T\|_{B(X)}^n.$$

Ciò implica che la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$  converge (totalmente) in  $B(X)$ .

Risulta

$$\|R_\lambda\|_{B(X)} \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|T\|_{B(X)}}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|_{B(X)}}. \quad (5.19)$$

- (ii) Per provare (ii), supponiamo, per assurdo,  $\sigma(T) = \emptyset$ , cioè  $\rho(T) = \mathbb{C}$ . Allora, la funzione risolvente di  $T$ ,  $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ , è definita ed analitica su tutto  $\mathbb{C}$  e, per (5.19), soddisfa

$$\|R(\lambda, T)\|_{B(X)} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad |\lambda| \rightarrow +\infty. \quad (5.20)$$

Fissati  $x \in X$  e  $\varphi \in X^*$ , definiamo su  $\mathbb{C}$  la funzione intera

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \lambda &\mapsto \Phi(\lambda) := (\varphi \circ R(\lambda, T))(x). \end{aligned}$$

Per (5.19),  $|\Phi(\lambda)| \leq \|\varphi\|_{X^*} \frac{1}{|\lambda| - \|T\|_{B(X)}} \|x\|_X$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $|\lambda| > \|T\|_{B(X)}$ . Ne segue che  $\Phi$  è anche limitata in  $\mathbb{C}$  e

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \Phi(\lambda) = 0.$$

Allora, per il Teorema di Liouville sulle funzioni intere (cfr., ad esempio, [8]) applicato a  $\Phi$ , risulta  $\Phi = 0$  in  $\mathbb{C}$ . Per l'arbitrarietà di  $\varphi$  e  $x$ , abbiamo che  $R(\lambda, T) = O$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ma ciò porta alla contraddizione

$$I = (\lambda I - T)R(\lambda, T) = O.$$

- (iii) Per (i), si ha

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|_{B(X)}\} \subseteq \rho(T)$$

e quindi, passando al complementare in  $\mathbb{C}$

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|_{B(X)}\}.$$

- (iv) La dimostrazione che  $\rho(T)$  è aperto può essere svolta come nella Proposizione 5.7.3. Allora  $\sigma(T)$  è chiuso e, per (iii), è anche limitato in  $\mathbb{C}$ , quindi è compatto.
- (v) Per brevità, per la dimostrazione rinviamo, ad esempio, al Teorema 1.16 in [1].

□

**Osservazione 5.7.8.** Evidenziamo che: in uno spazio di Banach  $X$  a dimensione infinita su  $\mathbb{C}$ , è un risultato non banale il fatto che **lo spettro  $\sigma(T)$  è sempre non vuoto.**

Tuttavia, può accadere che  $\sigma_p(T) = \emptyset$  (considerare, per esempio, l'operatore di traslazione a destra  $T_+$  in  $H = \ell^2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ , cfr. Esercizio 20).

Non è superfluo ricordare anche che **in spazi a dimensione finita  $N$  su  $\mathbb{C}$  risulta  $\sigma_p(T) = \sigma(T) \neq \emptyset$** : una matrice  $N \times N$  con elementi in  $\mathbb{C}$  ha autovalori in  $\mathbb{C}$  (le radici del polinomio caratteristico), ma può non avere alcun autovalore in  $\mathbb{R}$ , anche se gli elementi della matrice sono reali.

## 5.8 Spettro di un operatore lineare compatto

Esaminiamo ora lo spettro di un operatore lineare compatto. Proveremo, tra l'altro, che per un operatore compatto  $K$  in uno spazio di Hilbert a dimensione infinita, lo spettro si riduce soltanto allo zero e allo spettro puntuale  $\sigma_p(K)$ .

**Teorema 5.8.1. (Spettro di un operatore lineare compatto)** Sia  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert reale di dimensione infinita e  $K \in \mathcal{K}(H)$ . Allora

- (i)  $0 \in \sigma(K)$  (quindi  $K$  non è invertibile);
- (ii)  $\sigma(K) = \sigma_p(K) \cup \{0\}$ ;  
inoltre
- (iii)  $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ ;
- (iv) Vale uno dei seguenti casi:
  - $\sigma(K) = \{0\}$
  - $\sigma_p(K) \setminus \{0\}$  è un insieme finito
  - $\sigma_p(K) \setminus \{0\}$  è una successione di autovalori  $(\lambda_n)_n$  soddisfacente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0.$$

*Dimostrazione.* Per provare (i) ragioniamo per assurdo. Se  $0 \notin \sigma(K)$  allora  $K$  ha inverso  $K^{-1}$  continuo, pertanto l'operatore identità su  $H$ ,  $I = K \circ K^{-1}$ , risulta compatto per la Proposizione 5.2.7 (in quanto composizione di un operatore compatto e di uno continuo). Ma questo è falso, in quanto  $\dim H$  è infinita.

Per provare (ii), è sufficiente dimostrare l'inclusione  $\sigma(K) \subseteq \sigma_p(K) \cup \{0\}$ . Sia  $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$  e proviamo che  $\lambda$  è un autovalore. Se, per assurdo,  $\lambda$  non è autovalore di  $K$ , cioè se  $\ker(\lambda I - K) = \{0\}$ , per (iv) del Teorema di Fredholm,  $\text{Im}(\lambda I - K) = H$ . Per il Teorema 4.6.3  $\lambda I - K$  ha inverso limitato, e quindi  $\lambda \in \rho(K)$ , contro l'assunto. Questa contraddizione prova che  $\lambda \in \sigma_p(K)$ .

Per provare (iii), essendo ovvia l'inclusione  $\sigma_p(K) \setminus \{0\} \subseteq \sigma(K) \setminus \{0\}$ , sia  $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$  e proviamo che  $\lambda$  è un autovalore. Procediamo come nella dimostrazione di (ii). Se, per assurdo,  $\lambda$  non è autovalore di  $K$ , cioè se  $\ker(\lambda I - K) = \{0\}$ , per (iv) del Teorema di Fredholm,  $\text{Im}(\lambda I - K) = H$ . Per il Teorema 4.6.3  $\lambda I - K$  ha inverso limitato, e quindi  $\lambda \in \rho(K)$ , contro l'assunto. Questa contraddizione prova che  $\lambda \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ .

Per provare (iv), assumiamo che  $(\lambda_n)_n$  sia una successione di autovalori di  $K$ , distinti e in  $\sigma_p(K) \setminus \{0\}$  e premettiamo i seguenti risultati:

**Lemma 5.8.2.** *Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione.* Proviamo per induzione su  $n \in \mathbb{N}$ , che se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sono autovalori distinti di  $K$ , e per ogni  $i = 1, \dots, n$   $w_i$  è autovettore relativo a  $\lambda_i$  (quindi  $w_i \neq 0$  e  $Kw_i = \lambda_i w_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ), allora  $w_1, \dots, w_n$  sono linearmente indipendenti.

Assumiamo, per ipotesi induttiva, che la tesi valga fino ad  $n$ , e supponiamo, per assurdo, che

$$0 \neq w_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i w_i.$$

Allora risulta

$$Kw_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i w_i$$

e

$$Kw_{n+1} = \lambda_{n+1} w_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_{n+1} w_i.$$

Per differenza, segue che  $\sum_{i=1}^n a_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) w_i = 0$  e per l'ipotesi induttiva  $a_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . In definitiva, essendo  $\lambda_i \neq \lambda_{n+1}$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , risulta  $a_i = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ; una contraddizione.  $\square$

**Lemma 5.8.3.** *Sia  $(\lambda_n)_n$  una successione di elementi reali distinti di  $\sigma_p(K) \setminus \{0\}$  tale che  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ . Allora  $\lambda = 0$ .*

In altre parole, tutti i punti di  $\sigma_p(K) \setminus \{0\}$  sono punti isolati.

*Dimostrazione.* Poiché  $\lambda_n \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ , esiste  $w_n \neq 0$  t.c.

$$Kw_n = \lambda_n w_n.$$

Sia  $H_n := \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ . Allora  $H_n \subsetneq H_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , poiché per il Lemma 5.8.2 autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Osserviamo che  $(K - \lambda_n I)H_n \subseteq H_{n-1}$  per ogni  $n \geq 2$ . Scegliamo ora, per ogni  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , un elemento  $e_n \in H_n \cap H_{n-1}^\perp$  con  $\|e_n\| = 1$ . Se  $2 \leq m < n$ , risulta  $H_{m-1} \subsetneq H_m \subseteq H_{n-1} \subsetneq H_n$ , allora  $(Ke_n - \lambda_n e_n) \in H_{n-1}$ ,  $(Ke_m - \lambda_m e_m) \in H_{m-1} \subset H_{n-1}$ ,  $e_m \in H_m \subseteq H_{n-1}$ , mentre  $e_n \in H_{n-1}^\perp$ . Quindi (per l'identità di Pitagora)

$$\begin{aligned} \|Ke_n - Ke_m\| &= \left\| \underbrace{(Ke_n - \lambda_n e_n) - (Ke_m - \lambda_m e_m) - \lambda_m e_m}_{\in H_{n-1}} + \underbrace{\lambda_n e_n}_{\in H_{n-1}^\perp} \right\| \\ &\geq \|\lambda_n e_n\| = |\lambda_n|. \end{aligned}$$

Perciò

$$\liminf_{m,n \rightarrow +\infty} \|Ke_n - Ke_m\| \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| = |\lambda|.$$

Necessariamente risulta  $\lambda = 0$ , in quanto se  $|\lambda| > 0$ , allora la successione  $(Ke_n)_n$  non potrebbe avere alcuna sottosuccessione convergente, contraddicendo l'ipotesi di compattezza dell'operatore  $K$ .  $\square$

Concludiamo la dimostrazione del punto (iv). Per ogni intero  $n \geq 1$  l'insieme

$$\sigma_p(K) \cap \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\} \quad (5.21)$$

è o vuoto o finito (se l'insieme 5.21 avesse infiniti punti *distinti*, esisterebbe, poiché  $\sigma(K)$  è compatto, una sottosuccessione convergente a un  $\lambda$ , con  $|\lambda| \geq \frac{1}{n}$ , contraddicendo il Lemma 5.8.3). È allora chiara la struttura di  $\sigma_p(K)$ : esso è formato al più da una successione  $(\lambda_n)_n$  di punti distinti con punto limite lo zero. Quindi, se  $\sigma_p(K) \setminus \{0\}$  ha infiniti punti distinti, questi si possono ordinare come successione tendente a zero (si possono ordinare secondo i valori decrescenti  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$ ).  $\square$

**Osservazione 5.8.4.** Il Teorema 5.8.1 precedente resta valido anche in spazi di Banach reali a dimensione infinita, cioè anche se  $K \in \mathcal{K}(X)$  con  $X$  spazio di Banach reale e  $\dim(X) = \infty$  (cfr. Teorema 6.8 in [5]).

**Osservazione 5.8.5.** Riformuliamo, ora, l'Alternativa di Fredholm vista nel §5.5.

*CASO 1.* Se  $\lambda = 1 \in \rho(K)$  (cioè se l'unità non è autovalore di  $K$ ,  $1 \notin \sigma_p(K)$ ), l'equazione non omogenea  $u - Ku = f$  ha una e una sola soluzione, qualunque sia  $f \in H$ .

*CASO 2.* Se, invece,  $\lambda = 1 \in \sigma_p(K)$  (cioè se l'unità è autovalore di  $K$ ), l'equazione non omogenea  $u - Ku = f$  ha soluzione se e solo se il termine noto  $f$  è ortogonale a tutte (in numero finito) le soluzioni dell'equazione omogenea (duale)  $u - K^*u = 0$ .

## 5.9 Limitazioni per lo spettro di un operatore lineare autoaggiunto

**Osservazione 5.9.1.** Sia  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$  una matrice  $N \times N$  *simmetrica* (evidentemente, anche l'operatore lineare  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  associato ad  $A$ , definito da  $T(x) = Ax$ , è **simmetrico**). Considerata la forma quadratica determinata da  $A$

$$x \mapsto (x, Ax) := \sum_{i,j=1}^N a_{ij}x_i x_j, \quad (5.22)$$

risulta

$$m \leq (x, Ax) \leq M$$

dove

$$m := \min_{\|x\|=1} (x, Ax),$$

$$M := \max_{\|x\|=1} (x, Ax)$$

( $m$  e  $M$  sono, rispettivamente, il più piccolo ed il più grande autovalore di  $A$ ).

Estenderemo la precedente proprietà delle matrici simmetriche ad operatori lineari, limitati e autoaggiunti su spazi di Hilbert di dimensione infinita.

**Teorema 5.9.2 (limitazioni per lo spettro di un operatore autoaggiunto).** *Siano  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert reale e  $S \in B(H)$  autoaggiunto. Posto*

$$m := \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Su, u), \quad M := \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Su, u), \quad (5.23)$$

si ha

$$(i) \quad \sigma(S) \subset [m, M];$$

$$(ii) \quad m, M \in \sigma(S);$$

$$(iii) \quad \|S\|_{B(H)} = \max\{|m|, |M|\}.$$

*Dimostrazione.*

(i) Sia  $\lambda > M$  e proviamo che  $\lambda \in \rho(S)$ . Per la definizione di  $M$ , risulta, per ogni  $u \in H \setminus \{0\}$ ,

$$\left( \frac{Su}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|} \right) = \frac{1}{\|u\|^2} (Su, u) \leq M$$

e quindi

$$(Su, u) \leq M\|u\|^2 \quad \forall u \in H,$$

pertanto

$$(\lambda u - Su, u) = \lambda(u, u) - (Su, u) \geq (\lambda - M)\|u\|^2 = \beta\|u\|^2$$

con  $\beta = \lambda - M > 0$ . Per il Teorema 2.7.2, si deduce che  $\lambda I - S$  è bigettivo, pertanto  $\lambda \in \rho(S)$ .

Analogamente, si prova che ogni  $\lambda < m$  appartiene a  $\rho(S)$  (considerando  $-S$  al posto di  $S$ ), quindi  $\sigma(S) \subset [m, M]$ . È così provata la (i).

- (ii) Proviamo che  $M \in \sigma(S)$  (per dimostrare che  $m \in \sigma(S)$  si procede in maniera analoga). La forma bilineare

$$a(u, v) := (Mu - Su, v)$$

è simmetrica e soddisfa

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H.$$

Allora, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$|a(u, v)| \leq a(u, u)^{\frac{1}{2}} \cdot a(v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H,$$

cioè

$$|(Mu - Su, v)| \leq (Mu - Su, u)^{\frac{1}{2}} \cdot (Mv - Sv, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H. \quad (5.24)$$

In particolare, poiché

$$(Su, u) \geq m\|u\|^2 \quad \forall u \in H,$$

risulta (preso  $v = Mu - Su$  nella (5.24))

$$\begin{aligned} & \|Mu - Su\|^2 \\ & \leq (Mu - Su, u)^{\frac{1}{2}} [(M(Mu - Su) - S(Mu - Su), Mu - Su)]^{\frac{1}{2}} \\ & = (Mu - Su, u)^{\frac{1}{2}} \left[ M\|Mu - Su\|^2 - \underbrace{(S(Mu - Su), Mu - Su)}_{\leq -m\|Mu - Su\|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq (Mu - Su, u)^{\frac{1}{2}} [(M - m)\|Mu - Su\|^2]^{\frac{1}{2}} \\ & = (Mu - Su, u)^{\frac{1}{2}} (M - m)^{\frac{1}{2}} \|Mu - Su\|. \end{aligned}$$

Pertanto, esiste  $c := (M - m)^{\frac{1}{2}} > 0$  tale che

$$\|Mu - Su\| \leq c(Mu - Su, u)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H. \quad (5.25)$$

Per la definizione di  $M$ , esiste una successione  $(u_n)_n \subset H$  tale che  $\|u_n\| = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $(Su_n, u_n) \rightarrow M$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Da (5.25) si

deduce che  $\|Mu_n - Su_n\| \rightarrow 0$  e quindi  $M \in \sigma(S)$  (perché, se  $M \in \rho(S)$ , allora esiste  $(MI - S)^{-1}$  operatore lineare e continuo, per cui  $u_n = (MI - S)^{-1}(Mu_n - Su_n) \rightarrow 0$ , e ciò è impossibile, perché  $\|u_n\| = 1$ ). Risulta così provata la (ii).

(iii) Posto  $\mu = \max\{|m|, |M|\}$ , proviamo che  $\|S\|_{B(H)} = \mu$ . Per ogni  $u, v \in H$

$$(S(u+v), u+v) = (Su, u) + (Sv, v) + 2(Su, v)$$

$$(S(u-v), u-v) = (Su, u) + (Sv, v) - 2(Su, v).$$

Pertanto

$$4(Su, v) = (S(u+v), u+v) - (S(u-v), u-v) \leq M\|u+v\|^2 - m\|u-v\|^2,$$

e quindi

$$4|(Su, v)| \leq \mu(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = 2\mu(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Sostituendo  $v$  con  $\alpha v$ ,  $\alpha > 0$ , si ha

$$4|(Su, v)| \leq 2\mu \left( \frac{\|u\|^2}{\alpha} + \alpha\|v\|^2 \right).$$

Minimizzando il membro a destra rispetto ad  $\alpha$  si ha  $\alpha = \frac{\|u\|}{\|v\|}$ ,  $v \neq 0$ , e otteniamo

$$|(Su, v)| \leq \mu\|u\|\|v\| \quad \text{per ogni } u, v \in H,$$

sicché

$$\|S\|_{B(H)} \leq \mu.$$

D'altra parte, risulta  $|(Su, u)| \leq \|S\|_{B(H)}\|u\|^2$ , pertanto  $|m| \leq \|S\|_{B(H)}$  e  $|M| \leq \|S\|_{B(H)}$ , e quindi

$$\mu \leq \|S\|_{B(H)}.$$

□

**Corollario 5.9.3.** *Sia  $S \in B(H)$  autoaggiunto tale che  $\sigma(S) = \{0\}$ . Allora  $S = O$ .*

## 5.10 Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt per operatori compatti autoaggiunti su spazi di Hilbert reali separabili

Dimostriamo, ora, che anche in dimensione infinita vale il seguente fondamentale risultato di diagonalizzabilità (in una opportuna base) per gli operatori lineari compatti autoaggiunti.

**Teorema 5.10.1 (spettrale, di Hilbert-Schmidt; autovettori di un operatore compatto autoaggiunto).** *Siano  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert reale separabile e  $K : H \rightarrow H$  un operatore lineare, compatto e autoaggiunto. Allora esistono una base numerabile e ortonormale  $(v_n)_n$  di  $H$  formata da autovettori di  $K$  (base spettrale) e una successione di autovalori reali e distinti  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ , con  $\lambda_n \neq 0$  e  $\lambda_n \rightarrow 0$ , tali che, per ogni  $u \in H$  l'operatore  $K$  ha la rappresentazione*

$$Ku = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (u, v_n) v_n.$$

*Dimostrazione.* Se  $H = \mathbb{R}^N$ , abbiamo il classico Teorema spettrale dell'Algebra Lineare. Assumiamo, allora, che  $H$  abbia dimensione infinita. Poiché  $K \in \mathcal{K}(H)$ , risulta, per il Teorema 5.8.1,

$$\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_{n \geq 1},$$

con la successione  $(\lambda_n)_{n \geq 1} \in c_0$ .

1. Sia, quindi,  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  la successione di tutti gli autovalori distinti di  $K$ , escluso lo zero. Poniamo

$$\lambda_0 := 0, \quad H_0 := \ker K, \quad H_n := \ker(K - \lambda_n I) \quad (n \geq 1).$$

Osserviamo che  $H_0$  e  $H_n$  ( $n \geq 1$ ) sono sottospazi chiusi di  $H$ , in quanto nuclei di operatori lineari continui; inoltre,

$$0 \leq \dim H_0 \leq \infty \quad \text{mentre} \quad 0 < \dim H_n < \infty,$$

in virtù del punto (i) del Teorema di Fredholm 5.4.1.

2. Proviamo che  $H$  è la somma di Hilbert degli  $H_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  (nel senso della Definizione 2.5.1). Per questo, dimostriamo che gli spazi  $H_k$  sono mutualmente ortogonali e, inoltre, che lo span della loro unione è denso in  $H$ .

- (a) Gli  $H_k$  sono mutualmente ortogonali. Infatti, se  $u \in H_m$  e  $v \in H_n$ , con  $m \neq n$ , allora  $Ku = \lambda_m u$  e  $Kv = \lambda_n v$ , pertanto

$$\lambda_m(u, v) = (Ku, v) = (u, Kv) = \lambda_n(u, v).$$

Poiché  $\lambda_n \neq \lambda_m$ , si deduce che  $(u, v) = 0$ ; di conseguenza, i sottospazi  $H_m$  e  $H_n$  sono mutualmente ortogonali.

- (b) Sia

$$F := \text{span} \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n \right) = \left\{ \sum_{n=0}^m a_n u_n : m \in \mathbb{N}_0, u_n \in H_n, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proviamo che  $F$  è denso in  $H$ . Ovviamente,  $K(F) \subseteq F$ . Ne segue che  $\boxed{K(F^\perp) \subseteq F^\perp}$ . Infatti, dato  $u \in F^\perp$ , per ogni  $v \in F$ , si ha  $Kv \in F$  e quindi

$$(Ku, v) = (u, Kv) = 0;$$

in virtù dell'arbitrarietà di  $v \in F$ , deduciamo che  $Ku \in F^\perp$ .

Denotiamo ora la restrizione di  $K$  a  $F^\perp$  con  $K_0$ ; l'operatore  $\boxed{K_0 = K|_{F^\perp} : F^\perp \rightarrow K(F^\perp) \subseteq F^\perp}$  è compatto ed autoaggiunto su  $F^\perp$ .

Proviamo che  $\boxed{\sigma(K_0) = \{0\}}$ .

Sia, per assurdo,  $\lambda \in \sigma(K_0)$ ,  $\lambda \neq 0$ . Poiché  $\lambda \in \sigma_p(K_0) \setminus \{0\}$ , esiste  $u \in F^\perp$ ,  $u \neq 0$ , tale che  $K_0 u = \lambda u$ . Perciò  $\lambda$  è uno degli autovalori di  $K$ ; supponiamo  $\lambda = \lambda_n$ , con  $n \geq 1$ . Pertanto  $u \in H_n \subseteq F$ . Poiché  $u \in F^\perp \cap F$ , risulta  $u = 0$ , ottenendo una contraddizione. Dunque  $\sigma(K_0) = \{0\}$  e, per il Teorema 5.9.2,  $(K_0 u, u) = 0$  per ogni  $u \in F^\perp$ . Ma, per ogni  $u, v \in F^\perp$ , si ha

$$2(K_0 u, v) = (K_0(u+v), (u+v)) - (K_0 u, u) - (K_0 v, v) = 0.$$

Dall'arbitrarietà di  $u$  e  $v$ , segue che  $\boxed{K_0 = O}$ ,<sup>11</sup> cioè che l'operatore  $K$  si annulla su  $F^\perp$ . Si ha, allora,

$$F^\perp \subseteq \ker K = H_0 \subset F,$$

cioè  $F^\perp \subset F$  e quindi (poiché  $\{0\} = F \cap F^\perp = F^\perp$ )  $F^\perp = \{0\}$ . Ne segue che  $F$  è denso in  $H$ . Infatti, ricordato che

$$(F^\perp)^\perp = \overline{F},$$

risulta

$$\overline{F} = (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

<sup>11</sup>cfr. anche 5.9.3.

Da (a) e (b) deduciamo che  $H$  è somma di Hilbert degli  $H_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$H = \underbrace{H_0}_{0 \leq \dim. = N(0) < \infty} \oplus \underbrace{H_1}_{\dim. = N(1) < \infty} \oplus \underbrace{H_2}_{\dim. = N(2) < \infty} \cdots \oplus \underbrace{H_n}_{\dim. = N(n) < \infty} \oplus \cdots$$

3. Per ogni  $n \geq 1$ , gli spazi a dimensione finita  $H_n$  hanno una base ortonormale, formata da autovettori di  $K$  relativi all'autovalore  $\lambda_n$ ,

$$\mathcal{B}_n = \{v_{n,1}, v_{n,2}, \dots, v_{n,N(n)}\}$$

(Teorema spettrale dell'Algebra Lineare).

D'altra parte,  $H_0 = \ker K$  è sottospazio chiuso dello spazio  $H$ , separabile per ipotesi, pertanto  $H_0$  è separabile (cfr. 2.5.10) e quindi ammette una base di Hilbert numerabile e ortonormale (cfr. Teorema 2.5.6)

$$\mathcal{B}_0 = \{v_{0,1}, v_{0,2}, \dots\}$$

formata da autovettori di  $K$  (relativi a  $\lambda_0 = 0$ ).

In definitiva, l'unione

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{B}_n$$

è una base ortonormale di  $H$ , formata da autovettori di  $K$ .

Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots\}$  la base di Hilbert numerabile e ortonormale formata da autovettori di  $K$ .

Allora, se  $u \in H$ ,  $u = \sum_{n=0}^{+\infty} (u, v_n) v_n$  (cfr. Corollario 2.5.5) e quindi

$$Ku = \sum_{n=1}^{+\infty} (u, v_n) K v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (u, v_n) v_n.$$

□

**Osservazione 5.10.2.** È importante sottolineare che l'autospazio relativo a ciascun  $\lambda_n$  ( $n \geq 1$ ) autovalore di  $K$  ha dimensione finita.

### 5.10.1 Diagonalizzazione in dimensione infinita

Dalla precedente analisi, per ciascun elemento  $u \in H$  si ha

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} (u, v_n) v_n,$$

con  $v_n \in H_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  ( $Kv_n = \lambda_n v_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ) e

$$Ku \left( = \sum_{n=1}^{+\infty} (u, v_n) Kv_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (u, v_n) v_n.$$

Rispetto alla base spettrale  $\mathcal{B}$  del Teorema 5.10.1, possiamo quindi pensare  $K$  come una matrice diagonale infinita

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_N & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

In altre parole, si ottiene un risultato “analogo” al Teorema spettrale sulla riduzione della matrice associata ad un operatore simmetrico  $T$  in dimensione finita  $N$  alla forma diagonale rispetto ad una base spettrale  $\{v_1, \dots, v_N\}$  (cfr. Sezione 5.6, Paragrafo 5.6.1)

$$Tx = \sum_{i=1}^N \lambda_i (x, v_i) v_i \quad \left( x = \sum_{i=1}^N (x, v_i) v_i \in \mathbb{R}^N \right).$$

**Osservazione 5.10.3.** Ribadiamo quanto già premesso alla fine del Capitolo secondo: il Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt esprime una tecnica generale per costruire basi ortonormali in spazi di Hilbert reali, separabili, prendendo gli autovalori di operatori lineari, compatti e autoaggiunti (base spettrale). Come applicazione, in alcuni Esercizi sviluppati alla fine di questo capitolo, si costruiscono basi speciali dello spazio di Hilbert reale e separabile  $L^2$  formate da autofunzioni di operatori differenziali.

**Osservazione 5.10.4.** A questo punto verrebbe di pensare che tutta l'Analisi Funzionale tratti esclusivamente operatori limitati. Non è così: i metodi dell'Analisi Funzionale si estendono a operatori non-limitati (cfr., ad esempio, [1]). Qui segnaliamo alcuni sviluppi dell'**Analisi spettrale**. Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e sia  $T \in B(H)$ , autoaggiunto, possibilmente non compatto. È possibile costruire una “famiglia spettrale” di  $T$  che estende il Teorema 5.10.1. In particolare, si definisce un “calcolo funzionale” per dare senso a  $f(T)$  per ogni funzione continua  $f$ , estendendo l'Analisi spettrale ad operatori  $T$  non limitati e non autoaggiunti, *normali*, cioè tali che  $TT^* = T^*T$ . L'analisi spettrale è stata anche affrontata in Spazi di Banach su  $\mathbb{C}$ .

“Longum iter est per praecepta, breve et efficax per exempla”

(Sen., Ep. 6,5)

## 5.11 Esercizi proposti per i capitoli 1 – 5.

1. Lo spazio  $C^0([a, b]; \mathbb{R})$  **non** è di Banach rispetto alla norma definita da

$$\|u\|_{L^1([a,b])} := \int_a^b |u(x)| dx$$

per ogni  $u \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ .

*Soluzione.* Senza perdere in generalità, consideriamo l'intervallo  $[-1, 1]$ . Sia  $(u_n)_n$  la successione di funzioni continue

$$u_n(x) := \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq -1/n \\ nx, & -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1, & 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

e la funzione discontinua in 0

$$u(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \\ -1, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

Risulta

$$\int_{-1}^1 |u_n(x) - u(x)| dx = \frac{1}{n},$$

da cui otteniamo che  $(u_n)_n$  è di Cauchy. Infatti

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{L^1([-1,1])} &= \int_{-1}^1 |u_n(x) - u_m(x)| dx \\ &\leq \int_{-1}^1 |u_n(x) - u(x)| dx + \int_{-1}^1 |u_m(x) - u(x)| dx = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Ma, d'altra parte, se per assurdo esistesse  $w \in C^0([-1, 1]; \mathbb{R})$  tale che  $\|u_n - w\|_{L^1([-1,1])} \rightarrow 0$ , allora

$$\int_{-1}^1 |w(x) - u(x)| dx \leq \int_{-1}^1 |u_n(x) - u(x)| dx + \int_{-1}^1 |u_n(x) - w(x)| dx$$

e, siccome il secondo membro è infinitesimo, deduciamo che

$$\int_{-1}^1 |w(x) - u(x)| dx = 0.$$

Poiché  $u$  e  $w$  sono continue per  $x \neq 0$ , segue che  $w(x) = u(x)$  per  $x \neq 0$ . Dunque  $w$  è, come  $u$ , discontinua in  $0$ , in contraddizione con l'assunto.  $\square$

**Osservazione 5.11.1.** Il completamento dello spazio normato non completo  $C^0([a, b]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_{L^1([a, b])})$  è lo **spazio di Lebesgue**  $L^1([a, b])$ .

2. Sia  $C^1([-1, 1]; \mathbb{R})$  lo spazio delle funzioni continue, con derivata prima continua in  $[-1, 1]$ . Consideriamo in  $C^1([-1, 1]; \mathbb{R})$  la norma della convergenza uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ . Mostrare che  $(C^1([-1, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  **non** è uno spazio di Banach.

*Soluzione.* Considerata la successione definita da

$$u_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n}, \quad x \in [-1, 1],$$

risulta  $u_n(x) \rightarrow |x|$  uniformemente. Infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2} = |x|$$

e inoltre

$$|u_n(x) - |x|| = \left| \frac{\sqrt{1+n^2x^2} - n|x|}{n} \right| = \frac{1}{n(\sqrt{1+n^2x^2} + n|x|)} \leq \frac{1}{n}.$$

Pertanto  $u_n(x) \rightrightarrows |x|$  in  $[-1, 1]$ .

Ne segue che  $(C^1([-1, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \subset (C^0([-1, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  non è chiuso rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ , per cui non è completo, tenendo conto dell'Osservazione 1.1.15.  $\square$

3. Sia  $C^1([a, b]; \mathbb{R})$  lo spazio delle funzioni continue, con derivata prima continua in  $[a, b]$ . Mostrare che  $(C^1([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty + \|\cdot'\|_\infty)$  è uno spazio di Banach.

*Soluzione.* Sia  $(u_n)_n$  una successione di Cauchy in  $(C^1([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty + \|\cdot'\|_\infty)$ . Allora  $(u_n)_n$  e  $(u'_n)_n$  sono entrambe di Cauchy nello spazio

di Banach  $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  e pertanto esistono due funzioni  $u, v \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$  tali che  $\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0$  e  $\|u'_n - v\|_\infty \rightarrow 0$ .

Proviamo che  $v(x) = u'(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Essendo

$$u_n(x) - u_n(a) = \int_a^x u'_n(t) dt,$$

poiché  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  e  $u_n(a) \rightarrow u(a)$ , passando al limite sotto il segno di integrale (giustificato dal fatto che  $u'_n \rightrightarrows v$ ) si ha

$$u(x) - u(a) = \int_a^x v(t) dt.$$

Quindi  $v(x) = u'(x)$ . □

**Osservazione 5.11.2.** Verificare che lo spazio  $C^1([a, b]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_{L^1([a,b])} + \|\cdot'\|_{L^1([a,b])})$  non è completo. Il completamento di  $C^1([a, b]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_{L^1([a,b])} + \|\cdot'\|_{L^1([a,b])})$  è lo spazio di Sobolev  $W^{1,1}([a, b])$ .

4. Per ogni  $u \in C^0([0, 2]; \mathbb{R})$  definiamo

$$\|u\| := \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| + \int_1^2 |u(x)| dx. \tag{5.26}$$

- (a) Verificare se 5.26 definisce una norma su  $C^0([0, 2]; \mathbb{R})$ .
- (b) In caso affermativo, dire se lo spazio normato  $(C^0([0, 2]; \mathbb{R}), \|\cdot\|)$  è uno spazio di Banach.

*Soluzione.* La risposta affermativa al punto (a) è lasciata per esercizio. Per il punto (b), consideriamo la successione di funzioni

$$v_n(x) := \begin{cases} -1, & x \in [0, 1] \\ u_n(2x - 3) & x \in [1, 2], \end{cases}$$

dove  $u_n$  è definita nell'esercizio 1. Osservato che  $v_n(1) = u_n(-1) = -1$ , risulta  $v_n \in (C^0([0, 2]; \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , con  $(v_n)_n$  di Cauchy.

La funzione

$$v(x) := \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ 0, & x = \frac{3}{2} \\ 1, & \frac{3}{2} < x \leq 2, \end{cases}$$

è tale che  $\|v_n - v\| \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ , ma non è continua in  $[0, 2]$ . Pertanto  $(C^0([0, 2]; \mathbb{R}), \|\cdot\|)$  non è spazio di Banach. □

5. Considerare su  $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , per ogni  $p \in [1, +\infty[$ , la norma<sup>12</sup>

$$\|u\|_{L^p([0,1])} := \left( \int_0^1 |u(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (5.27)$$

(a) Data la successione  $(u_n)_n$  definita da

$$u_n(x) = \sqrt{n}x^n, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dimostrare che

$$u_n \rightarrow u = 0 \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_{L^1([0,1])},$$

ma

$$u_n \not\rightarrow u = 0 \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_{L^2([0,1])}.$$

(b) Generalizzare il punto (a) provando che, considerata la successione di funzioni  $u_n(x) := n^{1/q}x^n$ , con  $q > 1$ , risulta

$$u_n \rightarrow u = 0 \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_{L^p([0,1])} \Leftrightarrow p < q.$$

*Soluzione.*

(a) Risulta

$$\|u_n - u\|_{L^1([0,1])} = \int_0^1 |\sqrt{n}x^n| dx = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \rightarrow 0$$

e

$$\|u_n - u\|_{L^2([0,1])}^2 = \int_0^1 (\sqrt{n}x^n)^2 dx = \frac{n}{2n+1} \not\rightarrow 0.$$

(b) Si ha

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^p([0,1])}^p &= \int_0^1 |n^{\frac{1}{q}}x^n|^p dx = n^{\frac{p}{q}} \int_0^1 x^{np} dx \\ &= \frac{n^{\frac{p}{q}}}{np+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

se e solo se  $p/q < 1$ , cioè  $p < q$ .

□

<sup>12</sup>Per provare che il funzionale in (5.27) è una norma, seguire i passi della dimostrazione negli spazi  $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ , passando, evidentemente, dal discreto al continuo (ovvero, operando l'ovvia sostituzione delle serie con gli appropriati integrali).

6. Dimostrare che la palla unitaria chiusa di  $(C^0([-1, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  non è compatta.

*Soluzione.* Tenere presente il Teorema 1.8.5 □

7. Dimostrare che la palla unitaria chiusa di  $(C^1([-1, 1]; \mathbb{R}), \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty)$  non è compatta.

*Soluzione.* Tenere presente il Teorema 1.8.5 □

8. Sia  $\mathcal{P}_1([a, b])$  lo spazio dei polinomi di grado al più 1 sull'intervallo  $[a, b]$ . Provare che  $\|\cdot\|_{L^1([a, b])}$  e  $\|\cdot\|_\infty$  sono norme equivalenti su  $\mathcal{P}_1([a, b])$ .<sup>13</sup>

*Soluzione.* Lo spazio  $\mathcal{P}_1([a, b])$  ha dimensione due (una base è  $\{1, t\}$ ), pertanto la tesi segue da 1.7.5. □

9. Sullo spazio  $C^1([a, b]; \mathbb{R})$  consideriamo le norme definite da

$$\|u\| := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$$

e

$$\|u\|' := |u(a)| + \|u'\|_\infty,$$

per ogni  $u \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ .

Provare che  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|'$  sono norme equivalenti.

*Soluzione.* Evidentemente  $\|u\|' \leq \|u\|$ . Non è difficile provare che esiste  $c > 0$  tale che  $\|u\| \leq c\|u\|'$ . *Domanda:* è possibile, in alternativa, utilizzare il 4.6.4? □

10. Sia  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e positiva su  $[a, b]$ . Consideriamo il funzionale definito da

$$\|u\|_w := \max_{a \leq x \leq b} |w(x)u(x)|,$$

per ogni  $u \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ .

(a) Provare che  $\|\cdot\|_w$  definisce una norma su  $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ .

(b) Provare che  $\|\cdot\|_w$  è equivalente a  $\|\cdot\|_\infty$ .

---

<sup>13</sup>Osserviamo che, sullo spazio dei polinomi  $\mathcal{P}([a, b])$  di grado qualunque su  $[a, b]$ , le norme  $\|\cdot\|_{L^1([a, b])}$  e  $\|\cdot\|_\infty$  non sono equivalenti ( cfr. Osservazione 1.7.2).

11. Sia  $u \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ ; allora

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|.$$

*Soluzione.* Sia  $M = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)| > 0$ ; allora, per ogni  $k > M^{-1}$  esiste un intervallo  $[a_k, b_k] \subset [a, b]$  con  $a_k \neq b_k$ , tale che

$$|u(x)| > M - \frac{1}{k}$$

per ogni  $x \in [a_k, b_k]$ ; pertanto, per  $x \in [a, b]$ , si ha

$$\left( M - \frac{1}{k} \right) \chi_{[a_k, b_k]}(x) \leq |u(x)| \leq M,$$

dove  $\chi_{[a_k, b_k]}$  è la funzione caratteristica di  $[a_k, b_k]$ .

Ne segue

$$\left( \int_a^b \left( M - \frac{1}{k} \right)^p \chi_{[a_k, b_k]}(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{p}}.$$

Il primo membro di tali disuguaglianze è uguale a  $\left( M - \frac{1}{k} \right) (b_k - a_k)^{\frac{1}{p}}$  e tende a  $M - \frac{1}{k}$  per  $p \rightarrow +\infty$ .

Allora risulta

$$M - \frac{1}{k} \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M$$

e la tesi segue per  $k \rightarrow +\infty$ . □

12. Sia  $T : C^0([-1, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definito da

$$T(u) := \int_{-1}^1 g(x)u(x)dx \quad \forall u \in C^0([-1, 1]; \mathbb{R}),$$

dove

$$g(x) := \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Provare che  $T$  è lineare e continuo.

(b) Calcolare  $\|T\|$ .

*Soluzione.*  $T$  è ovviamente lineare ed è continuo, infatti

$$|T(u)| \leq \int_{-1}^1 |g(x)||u(x)|dx \leq \int_{-1}^1 |u(x)|dx \leq 2\|u\|_\infty.$$

Pertanto  $\|T\| \leq 2$ . Proviamo che  $\|T\| = 2$ . Consideriamo la successione di funzioni continue  $(u_n)_n$  considerate nell'esercizio 1.

Risulta  $\|u_n\|_\infty=1$  e  $T(u_n)=2 - \frac{1}{n}$ , per cui  $|T(u_n)| \rightarrow 2$ , per  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

13. Sia  $T : C^0([-1, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definito da

$$T(u) := \int_{-1}^1 g(x)u(x)dx \quad \forall u \in C^0([-1, 1]; \mathbb{R}),$$

dove

$$g(x) := \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq 1/3 \\ 1, & 1/3 < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Provare che  $T$  è lineare e continuo.

(b) Calcolare  $\|T\|$ .

14. Sia  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  l'operatore definito da

$$(Tx)_n := \frac{n}{1+n^2}x_n \quad \forall x = (x_n)_n \in \ell^2.$$

(a) Provare che  $T$  è lineare e continuo.

(b) Calcolare  $\|T\|$

*Soluzione.*  $T$  è ovviamente lineare ed è continuo, infatti

$$\|Tx\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}|x_n|^2 \leq \frac{1}{4}\|x\|_{\ell^2}^2,$$

cioè  $\|Tx\|_{\ell^2} \leq \frac{1}{2}\|x\|_{\ell^2}$ , quindi  $\|T\|_{B(\ell^2)} \leq \frac{1}{2}$ .

Proviamo che  $\|T\|_{B(\ell^2)} = \frac{1}{2}$ . Consideriamo  $e^1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ; risulta  $\|e^1\|_{\ell^2}=1$  e  $\|Te^1\|_{\ell^2}=\frac{1}{2}$ .  $\square$

15. Sia  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  l'operatore definito da

$$(Tx)_n := \frac{n}{1+n}x_n \quad \forall x = (x_n)_n \in \ell^2.$$

(a) Provare che  $T$  è lineare e continuo.

- (b) Calcolare  $\|T\|$ .
16. Verificare che, per ogni  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$ , gli spazi  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_1)$  e  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$  non sono spazi di Hilbert. ( $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  sono definite nell'Esempio 1.1.2).
17. Verificare che la norma  $\|\cdot\|_\infty$  su  $(C^0([0, 1]; \mathbb{R}))$ , non è di Hilbert.
18. Verificare che la norma  $\|u\|_{L^1([a, b])} := \int_a^b |u(x)| dx$  su  $(C^0([0, 1]; \mathbb{R}))$ , non è di Hilbert.
19. Verificare che la norma  $\|\cdot\|_{l^p}$  su  $l^p$ ,  $p \in [1, +\infty]$  è di Hilbert se e solo se  $p = 2$ .

*Soluzione.* Per gli esercizi 16, 17, 18, 19, tenere presente 2.1.3.

Per l'esercizio 16, considerare  $x = (1, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N-2})$  e  $y = (-1, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N-2})$ .

Relativamente all'esercizio 17: siano  $f(t) = t$ ,  $g(t) = 1 - t$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Risulta  $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$  e  $\|f + g\|_\infty = \|f - g\|_\infty = 1$ .

È evidente che l'identità del parallelogramma non è verificata.

Relativamente all'esercizio 18, prendere  $u(t) = \sin^2(\frac{\pi t}{2})$  e  $v(t) = \cos^2(\frac{\pi t}{2})$ .

Relativamente all'esercizio 19, prendere  $x = (1, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$  e  $y = (-1, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ .

Risulta  $\|x + y\|_{l^p} = \|x - y\|_{l^p} = 2$  e  $\|x\|_{l^p} = \|y\|_{l^p} = 2^{\frac{1}{p}}$ .

Pertanto,  $8 = \|x + y\|_{l^p}^2 + \|x - y\|_{l^p}^2 = 2(\|x\|_{l^p}^2 + \|y\|_{l^p}^2) = 4 \cdot 2^{\frac{2}{p}}$ , e l'uguaglianza vale se e solo se  $p = 2$ .  $\square$

20. **Proprietà spettrali degli operatori di traslazione.**

Siano  $T_+, T_- : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  gli operatori di traslazione (rispettivamente) a destra e a sinistra definiti nella nota 3 del Capitolo 5.

- (a) Dimostrare che gli operatori lineari  $T_+$  e  $T_-$  sono continui, ma non sono compatti.
- (b) Provare che  $T_+^* = T_-$  e  $T_-^* = T_+$ .
- (c) Provare che  $\sigma_p(T_+) = \emptyset$ ,  $\sigma_p(T_-) = ]-1, 1[$ ,  $\sigma(T_+) = \sigma(T_-) = [-1, 1]$ . (Osserviamo che risulta :  $\sigma(T_+^*) = \sigma(T_+)$  e  $\sigma(T_-^*) = \sigma(T_-)$ ).

*Soluzione.*

- (a)  $\|T_+\|_{B(\ell^2)} = \|T_-\|_{B(\ell^2)} = 1$ . Osserviamo che  $T_- \circ T_+ = I : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ , pertanto  $T_+$  e  $T_-$  non sono compatti (tenuto conto di 5.2.2 e 5.2.7).

(b)  $(T_+^*x, y) := (x, T_+y) = ((x_1, x_2, x_3, \dots), (0, y_1, y_2, y_3, \dots)) = (T_-x, y)$ ,  
 e quindi  $T_+^* = T_-$ . Analogamente si prova che  $T_-^* = T_+$ .

(c) Se  $T_+x = \lambda x$ ,  $\lambda \neq 0$ , si ha

$$(0, x_1, x_2, \dots) = \lambda(x_1, x_2, \dots)$$

e quindi

$$0 = \lambda x_1, \quad x_1 = \lambda x_2, \quad x_2 = \lambda x_3, \quad \dots;$$

ne segue che  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = 0$ . Pertanto  $\sigma_p(T_+) = \emptyset$ .

Se  $T_-x = \lambda x$ ,  $\lambda \neq 0$ , si ha

$$(x_2, x_3, \dots) = \lambda(x_1, x_2, \dots)$$

e quindi

$$x_2 = \lambda x_1, \quad x_3 = \lambda x_2, \quad x_4 = \lambda x_3, \quad \dots;$$

ne segue che

$$x = (x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \lambda^3 x_1, \dots) = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots).$$

Tale vettore è non nullo e appartiene a  $l^2$  se e solo se  $|\lambda| < 1$ .  
 Pertanto  $\sigma_p(T_-) = ]-1, 1[$ .

Per ogni  $\lambda \in [-1, 1]$  l'operatore  $(T_+ - \lambda I)$  non è suriettivo (per esempio, se  $y = (-1, 0, 0, 0, \dots)$  l'equazione  $T_+x - \lambda x = y$  non ha alcuna soluzione  $x \in l^2$ ), pertanto  $\sigma(T_+) = [-1, 1]$ .

Per ogni  $\lambda \in [-1, 1]$  l'operatore  $(T_- - \lambda I)$  non è iniettivo, pertanto  $\sigma(T_-) = [-1, 1]$ .

□

21. Sia  $1 \leq p < \infty$  e  $\lambda = (\lambda_n)_n$  una successione reale limitata;  
 sia  $T_\lambda : l^p \rightarrow l^p$  l'operatore lineare

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto T_\lambda(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \dots).$$

Dimostrare che

$$T_\lambda \in B(l^p) \quad \text{compatto} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0 \quad (\lambda \in c_0).$$

*Soluzione.* Diamo la dimostrazione nel caso  $p = 2$ . Supponiamo che

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$ . Definiamo

$$T_\lambda^{(j)}(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \dots, \lambda_j x_j, 0, 0, 0, \dots).$$

Risulta

$$(T_\lambda - T_\lambda^{(j)})(x) = (0, 0, 0, \dots, 0, \lambda_{j+1}x_{j+1}, \lambda_{j+2}x_{j+2}, \dots)$$

e

$$\|T_\lambda - T_\lambda^{(j)}\|_{l^2}^2 = \sup_{n \geq j+1} |\lambda_n| \rightarrow 0.$$

Poiché ciascun  $T_\lambda^{(j)}$  ha rango finito e quindi è compatto (5.2.3 1.), l'operatore  $T_\lambda$  è compatto (5.2.3 2.). Viceversa, supponiamo, per assurdo, che  $(\lambda_n)_n$  non converga a zero per  $n \rightarrow +\infty$ . Allora esiste una sottosuccessione  $(\lambda_{n_k})_k$  tale che  $|\lambda_{n_k}| \geq \epsilon > 0$ . Consideriamo la successione ortonormale  $(e_{n_k})_k$  di vettori base di  $l^2$ . Per ogni indice  $l, m$ , abbiamo

$$\|T_\lambda e_{n_l} - T_\lambda e_{n_m}\|_{l^2}^2 = \|\lambda_{n_l} e_{n_l} - \lambda_{n_m} e_{n_m}\|_{l^2}^2 = |\lambda_{n_l}|^2 + |\lambda_{n_m}|^2 \geq 2\epsilon^2 > 0.$$

Concludiamo che la successione  $(T_\lambda e_{n_k})_k$  non contiene una sottosuccessione convergente e quindi  $T_\lambda$  non è compatto.  $\square$

22. Siano  $X$  e  $Y$  spazi di Banach di dimensione infinita. Provare che se  $K : X \rightarrow Y$  è un operatore lineare compatto, allora  $K(X) \neq Y$ , cioè  $K$  non è suriettivo.

*Soluzione.* È sufficiente, per esempio, considerare  $K : l^1 \rightarrow l^1$  tale che

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto K(x) = \left( \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right).$$

l'operatore  $K$  è compatto (per quanto provato nell'esercizio 21 precedente) ed esiste  $y \in l^1 \setminus K(l^1)$ .  $\square$

23. Sia  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  l'operatore definito, per ogni  $x = (x_n)_n \in \ell^2$  da

$$(Tx)_n := \frac{x_n}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Provare che  $T$  è lineare e continuo.  
 (b) Dire se  $T$  è compatto.  
 (c) Trovare gli eventuali autovalori di  $T$  e descriverne lo spettro.

*Soluzione.* La linearità è di facile verifica; per la continuità basta osservare che risulta

$$\|Tx\|_{l^2}^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = \|x\|_{l^2}^2.$$

$T$  è compatto per quanto provato nell'esercizio 21. Risulta

$$\sigma_p(T) = \left( \frac{1}{2^n} \right)_n,$$

con rispettivi autovalori

$$e^n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{\text{componente } n\text{-esima}}, 0, 0, \dots)$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ . □

24. Sia  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  l'operatore definito, per ogni  $x = (x_n)_n \in \ell^2$  da

$$(Tx)_n := \frac{x_n}{1+n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Dire se  $T$  è lineare e continuo.
- (b) Dire se  $T$  è compatto.
- (c) Descrivere  $\sigma(T)$  e  $\sigma_p(T)$ .

25. Sia  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  l'operatore definito, per ogni  $x = (x_n)_n \in \ell^2$  da

$$(Tx)_n := \frac{x_n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Dire se  $T$  è lineare e continuo.
- (b) Dire se  $T$  è compatto.
- (c) Descrivere  $\sigma(T)$  e  $\sigma_p(T)$ .

*Suggerimento.* Per la dimostrazione degli esercizi 24 e 25, si procede come nell'esercizio 23. □

**Un caso particolare di operatore di moltiplicazione**  
**in**  $(C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

26. Sia  $T : (C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  l'operatore definito, per ogni  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , da

$$(Tu)(x) := xu(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

- (a) Verificare che  $T$  è lineare e continuo.
- (b) Determinare lo spettro puntuale  $\sigma_p(T)$ .

- (c) Determinare lo spettro  $\sigma(T)$  e dedurne l'eventuale compattezza di  $T$ .

*Soluzione.*

- (a) La linearità dell'operatore  $T$  si prova banalmente; la continuità segue immediatamente dalla stima

$$|(Tu)(x)| \leq x|u(x)| \leq |u(x)| \quad \forall x \in [0, 1].$$

- (b) Osserviamo che  $\lambda \in \sigma_p(T)$  se e solo se esiste una funzione  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ ,  $u \neq 0$ , tale che

$$xu(x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Poiché l'unica possibilità è che  $u$  sia la funzione identicamente nulla in  $[0, 1]$ , deduciamo che  $\sigma_p(T) = \emptyset$ .

- (c) Troviamo dapprima  $\rho(T)$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(T) &\Leftrightarrow T - \lambda I \text{ è bigettivo} \\ &\Leftrightarrow \forall g \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \exists |u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \text{ t.c. } (T - \lambda I)u = g \\ &\Leftrightarrow \forall g \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \exists |u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \text{ t.c.} \\ &\quad (x - \lambda)u(x) = g(x) \quad \forall x \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow \forall g \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \exists |u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \text{ t.c.} \\ &\quad u(x) = \frac{g(x)}{x - \lambda} \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

L'unica possibilità affinché l'equazione sia risolta in  $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$  per qualsiasi scelta di  $g \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$  è che  $x - \lambda$  non si annulli per alcun  $x \in [0, 1]$ , cioè che  $\lambda \notin [0, 1]$ . Perciò  $\rho(T) = \mathbb{R} \setminus [0, 1]$  e, di conseguenza,  $\sigma(T) = [0, 1]$ . Allora, risultando

$$\underbrace{\sigma(T) \setminus \{0\}}_{=[0,1]} \neq \underbrace{\sigma_p(T) \setminus \{0\}}_{=\emptyset},$$

deduciamo (tenuto conto anche dell'Osservazione 5.8.4), che  $T$  non è compatto.

□

**L'operatore di Hardy in  $(C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .**

27. Sia  $T : (C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  l'operatore definito, per ogni  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , da

$$(Tu)(0) := u(0)$$

e, per  $x \in ]0, 1]$ , da

$$(Tu)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x u(t) dt.$$

- (a) Verificare che  $Tu \in (C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , è lineare e  $\|Tu\|_\infty \leq \|u\|_\infty$  per ogni  $u \in (C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .
- (b) Provare che  $T$  è iniettivo ma non suriettivo.
- (c) Provare che  $T$  non è compatto.

*Soluzione.* Il primo punto è di facile verifica.

$T$  è iniettivo. Infatti, da  $(Tu)(x) = 0$  in  $]0, 1]$  con  $u(0) = 0$ , segue che  $u \equiv 0$  in  $[0, 1]$ . Quindi  $0 \notin \sigma_p(T)$

$T$  non è suriettivo. Infatti, sia

$$v(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Evidentemente questa funzione  $v \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , ma non esiste  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$  tale che  $Tu = v$ .

Se una tale  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$  esistesse, risulterebbe

$$(Tu)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x u(t) dt = v(x), \quad \text{con } u(0) = v(0) = 0.$$

Allora per  $x > 0$  :

$$\int_0^x u(t) dt = xv(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - x^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pertanto  $xv(x) \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ , assurdo perché

$$(xv(x))' = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Quindi  $(xv(x))' \notin C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ .

Proviamo che  $T$  non è compatto. Sia, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n(x) := \left(1 - \frac{x}{n}\right) \exp\left(\frac{-x}{n}\right) \quad (\text{successione uniformemente limitata}).$$

Risulta

$$(Tu_n)(0) = u_n(0) = 1,$$

e

$$(Tu_n)(x) = \exp\left(\frac{-x}{n}\right);$$

questa successione non ammette estratte uniformemente convergenti (comunque si prenda una successione estratta il massimo si ha per  $x = 0$  e il valore massimo è 1), pertanto  $T$  non è compatto.  $\square$

### Operatori integrali di Volterra

28. Sia  $T : C^0([0, 1]; \mathbb{R}; \|\cdot\|_\infty) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R}; \|\cdot\|_\infty)$  l'operatore definito, per ogni  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , da

$$(Tu)(x) := \int_0^x e^t u(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

- (a) Verificare che  $T$  è lineare e continuo.
- (b) Dire se  $T$  è compatto.
- (c) Trovare gli eventuali autovalori di  $T$  e descriverne lo spettro.

*Soluzione.* Osserviamo che

$$(Tu)(x) := \int_0^x e^t u(t) dt = \int_0^1 k(x, t) u(t) dt,$$

dove

$$k(x, t) = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t \leq x \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

La linearità e continuità di  $T$  sono ovvie;  $T$  è compatto per 5.2.16.

Per la compattezza di  $T$  segue che  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ .

Determiniamo  $\sigma_p(T)$ . Sia  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che (equazione integrale di Volterra di seconda specie)

$$(Tu)(x) = \int_0^x e^t u(t) dt = \lambda u(x).$$

Risulta  $u \in C^1$ , e derivando si ha  $e^x \cdot u(x) = \lambda u'(x)$ , con  $u(0) = 0$ . L'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{e^x \cdot u(x)}{\lambda} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

è  $u \equiv 0$ . Pertanto  $\sigma_p(T) = \emptyset$ .  $\square$

29. Sia  $T : C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$  l'operatore definito, per ogni  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , da

$$(Tu)(x) := \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{t}} dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

- (a) Verificare che  $T$  è lineare e continuo.
- (b) Dire se  $T$  è compatto.
- (c) Trovare gli eventuali autovalori di  $T$  e descriverne lo spettro.

*Suggerimento.* Questo esercizio è un caso particolare del successivo esercizio 30. □

30. Siano  $q > 1$  e  $T_q : C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$  l'operatore definito, per ogni  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , da

$$(T_q u)(x) := \int_0^x \frac{u(t)}{t^{1/q}} dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

- (a) Verificare che  $T_q$  è lineare e continuo.
- (b) Dire se  $T_q$  è compatto.
- (c) Descrivere  $\sigma(T_q)$  e  $\sigma_p(T_q)$ , e verificare che non dipendono dalla scelta di  $q$ .

*Soluzione.* La linearità di  $T_q$  è ovvia; per provare la continuità, osserviamo che  $|(T_q u)(x)| \leq \frac{q}{q-1} \|u\|_\infty$ , pertanto  $\|T_q u\|_\infty \leq \frac{q}{q-1} \|u\|_\infty$ , da cui segue  $\|T_q\|_{B(C^0([0,1];\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty))} \leq \frac{q}{q-1}$ . Osserviamo che

$$(T_q u)(x) := \int_0^x \frac{u(t)}{t^{1/q}} dt = \int_0^1 k(x, t) u(t) dt,$$

dove

$$k(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1/q}}, & 0 \leq t \leq x \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

Allora  $T_q$  è compatto per 5.2.16.

Per la compattezza di  $T_q$  segue che  $\sigma(T_q) = \sigma_p(T_q) \cup \{0\}$ .

Determiniamo  $\sigma_p(T_q)$ . Sia  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $(T_q u)(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{t^{1/q}} dt = \lambda u(x)$ .

Poiché  $u$  è continua, per cui  $u(0) = 0$ , e  $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/q}} dx$  è finito, per il Lemma di Gronwall (forma differenziale)<sup>14</sup> risulta  $u \equiv 0$  in  $[0, 1]$ , e quindi  $\sigma_p(T_q) = \emptyset$ . □

---

<sup>14</sup>cfr., ad esempio, [13] pag. 624.

31. Sia  $T : C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$  l'operatore definito, per ogni  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , da

$$(Tu)(x) := \int_0^x \frac{u(t)}{1+t^2} dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

- (a) Verificare che  $T$  è lineare e continuo e calcolare  $\|T\|$ .  
 (b) Dire se  $T$  è compatto.  
 (c) Trovare gli eventuali autovalori di  $T$  e descriverne lo spettro.

*Soluzione.* La linearità di  $T$  è ovvia; per provare la continuità, osserviamo che  $|(Tu)(x)| \leq \frac{\pi}{4} \|u\|_\infty$ , pertanto  $\|Tu\|_\infty \leq \frac{\pi}{4} \|u\|_\infty$ , da cui segue  $\|T\|_{B(C^0([0,1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty))} \leq \frac{\pi}{4}$ . In effetti risulta  $\|T\|_{B(C^0([0,1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty))} = \frac{\pi}{4}$  (considerare la funzione  $u \equiv 1$ ).

Osserviamo che

$$(Tu)(x) := \int_0^x \frac{u(t)}{1+t^2} dt = \int_0^1 k(x, t)u(t) dt,$$

dove

$$k(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t^2}, & 0 \leq t \leq x \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

Allora  $T$  è compatto per 5.2.16.

Per la compattezza di  $T$  segue che  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ .

Determiniamo  $\sigma_p(T)$ . Sia  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $(Tu)(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{1+t^2} dt = \lambda u(x)$ .

Risulta  $u \in C^1$ ,  $u(0) = 0$  e derivando si ha  $\frac{u(x)}{1+x^2} = \lambda u'(x)$ ,

L'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{u(x)}{\lambda \cdot (1+x^2)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

è  $u \equiv 0$ . Pertanto  $\sigma_p(T) = \emptyset$ . □

32. Sia  $T : C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$  l'operatore definito, per ogni  $u \in C^0([0, 1])$ , da

$$(Tu)(x) := \int_0^x (\log t)u(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

- (a) Verificare che  $T$  è lineare e continuo e calcolare  $\|T\|$ .

- (b) Dire se  $T$  è compatto.
- (c) Trovare gli eventuali autovalori di  $T$  e descriverne lo spettro.

*Soluzione.* La linearità di  $T$  è ovvia e risulta  $\|T\|_{B(C^0([0,1];\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty))} = 1$ . Osserviamo che

$$(Tu)(x) := \int_0^x (\log t)u(t)dt = \int_0^1 k(x,t)u(t)dt,$$

dove

$$k(x,t) = \begin{cases} \log t, & 0 < t \leq x \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

Allora  $T$  è compatto per 5.2.16.

Per la compattezza di  $T$  segue che  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ . Determiniamo  $\sigma_p(T)$ . Sia  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che

$$(Tu)(x) = \int_0^x (\log t)u(t)dt = \lambda u(x).$$

Poiché  $u$  è continua, per cui  $u(0) = 0$ , e  $\int_0^1 \log x dx$  è finito, per il Lemma di Gronwall (forma differenziale) risulta  $u \equiv 0$  in  $[0,1]$ , e quindi  $\sigma_p(T) = \emptyset$ . □

33. Sia  $T : C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$  l'operatore definito, per ogni  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , da

$$(Tu)(x) := \int_0^x tu(t)dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

- (a) Dire se  $T$  è lineare e continuo.
- (b) Dire se  $T$  è compatto.
- (c) Descrivere  $\sigma(T)$  e  $\sigma_p(T)$ .

*Soluzione.* La linearità e continuità di  $T$  è ovvia. Osserviamo che

$$(Tu)(x) := \int_0^x tu(t)dt = \int_0^1 k(x,t)u(t)dt,$$

dove

$$k(x,t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq x \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

Allora  $T$  è compatto per 5.2.16.

Per la compattezza di  $T$  segue che  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ .

Determiniamo  $\sigma_p(T)$ . Sia  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $(Tu)(x) = \int_0^x tu(t)dt = \lambda u(x)$ .

Poiché  $u$  è continua, per cui  $u(0) = 0$ , e  $\int_0^1 x dx$  è finito, per il Lemma di Gronwall (forma differenziale) risulta  $u \equiv 0$  in  $[0,1]$ , e quindi  $\sigma_p(T) = \emptyset$ .

□

**Osservazione 5.11.3.** Per gli esercizi 28 – 29 – 30 – 31 – 32 – 33, si provi la compattezza dei rispettivi operatori (in alternativa alla applicazione diretta di 5.2.16), provando in modo analitico l'applicabilità del teorema di Ascoli-Arzelà.

34. Descrivere lo spettro dell'operatore

$$K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])^{15}$$

definito da

$$(Ku)(x) = \int_0^1 k(x, t)u(t)dt$$

dove

$$k(x, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq x, \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

*Soluzione.* Essendo  $K$  operatore compatto (cfr. 5.2.17),  $0 \in \sigma(K)$  e ogni  $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$  è un autovalore. Sia  $(Ku)(t) = \lambda u(t)$ ,  $\lambda \neq 0$ . Questo significa che

$$\int_0^1 k(x, t)u(t)dt = \int_0^x u(t)dt = \lambda u(x).$$

Ne segue che  $u \in C^1$ ,  $\lambda u' = u$  e  $u(0) = 0$ , pertanto  $u \equiv 0$ . Quindi  $\sigma_p(K) = \emptyset$  e  $\sigma(K) = \{0\}$ .

Osserviamo che l'equazione

$$u(x) - \int_0^1 k(x, t)u(t)dt = f(x)$$

ha un'unica soluzione per ogni  $f \in L^2([0, 1])$ , in quanto  $1 \notin \sigma_p(K)$  (cfr. 5.8.5). □

<sup>15</sup>Per lo svolgimento degli esercizi da 34 a 38, occorre la conoscenza degli spazi di Lebesgue  $L^p$ , cfr. [2]

**Osservazione 5.11.4.** Dall'esame dei risultati degli esercizi 28 – 29 – 30 – 31 – 32 – 33 – 34, si evidenzia che per gli operatori integrali compatti  $T$ , di Volterra, risulta  $\sigma(T) = \{0\}$ , essendo  $\sigma_p(T) = \emptyset$ .

In effetti, in generale,

**Gli operatori integrali  $V$  di Volterra hanno spettro  $\sigma(V) = \{0\}$ .**

(1) Illustriamone dapprima la dimostrazione per l'operatore lineare compatto su  $C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ ,

$$V : C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty),$$

definito, per ogni  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$  e  $x \in [0, 1]$ , da

$$(Vu)(x) := \int_0^1 k(x, t) f(t) dt = \int_0^x u(t) dt.$$

dove il nucleo  $k$  è definito da

$$k(x, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq x; \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Per induzione, con integrazione per parti, si ha per ogni  $x \in [0, 1]$  e  $u \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$

$$(V^n u)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t) dt.$$

Quindi,

$$|(V^n u)(x)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^n |u(t)| dt \leq \frac{\|u\|_\infty}{n!}.$$

Allora,

$$\|V^n\|_{B(C^0([0,1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty))} \leq \frac{1}{n!}$$

e, per la formula di Stirling

$$n! = n^n \exp(-n) \sqrt{2\pi n} (1 + o(n)),$$

risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|V^n\|_{B(C^0([0,1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty))}^{\frac{1}{n}} = r(V) = 0,$$

da cui segue l'asserto. □

(2) Consideriamo ora l'operatore lineare compatto su  $L^p([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_{L^p([0,1])})$ ,

$$V : L^p([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_{L^p([0,1])}) \rightarrow L^p([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_{L^p([0,1])}), 1 \leq p \leq \infty,$$

definito, per ogni  $u \in L^p([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_{L^p([0,1])})$  e  $x \in [0, 1]$ , da

$$(Vu)(x) = \int_0^x u(t) dt.$$

*Dimostrazione.* Assumiamo, per ipotesi induttiva, che per un fissato  $n \geq 2$  sia

$$(V^n u)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t) dt.$$

Risulta

$$\begin{aligned} (V^{n+1}u)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x ds \int_0^s (s-t)^{n-1} u(t) dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x u(t) \left[ \int_t^x (s-t)^{n-1} ds \right] dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n u(t) dt. \end{aligned}$$

Allora, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$(V^n u)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t) dt.$$

Consideriamo le funzioni  $u_1 \in L^1(\mathbb{R})$  e  $u_2 \in L^p(\mathbb{R})$  definite da

$$u_1(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$u_2(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per  $0 \leq x \leq 1$  si ha (il prodotto di convoluzione)

$$(u_1 * u_2)(x) = (V^n u)(x).$$

Allora, per la disuguaglianza di Young (per il prodotto di convoluzione, cfr., ad esempio, [7])

$$\|u_1 * u_2\|_{L^p([0,1])} \leq \|u_1 * u_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \|u_2\|_{L^p(\mathbb{R})} = \frac{1}{n!} \|u\|_{L^p([0,1])},$$

cioè  $\|V^n\|_{B(L^p([0,1]))} \leq \frac{1}{n!}$ , da cui segue che (per la formula di Stirling)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|V^n\|_{B(L^p([0,1]))}^{\frac{1}{n}} = r(V) = 0,$$

e quindi l'asserto. □

### Operatori integrali di Fredholm

35. Descrivere lo spettro dell'operatore compatto ed autoaggiunto

$$K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$$

definito da

$$(Ku)(t) = \int_0^1 k(t, s)u(s)ds$$

dove

$$k(t, s) = \min\{t, s\} \quad \text{per } 0 \leq t, s \leq 1.$$

*Soluzione.* Poiché  $k(t, s)$  è una funzione continua e  $k(t, s) = \overline{k(s, t)}$ , l'operatore  $K$  è compatto e autoaggiunto. Pertanto lo spettro di  $K$  consiste dello zero e di autovalori reali. Sia (equazione integrale di Fredholm di seconda specie)

$$(Ku)(t) = \lambda u(t), \quad \lambda \neq 0$$

Questo significa che

$$\lambda u(t) = \int_0^t s u(s) ds + t \int_t^1 u(s) ds.$$

Derivando due volte rispetto a  $t$ , si ha

$$\lambda u'(t) = t u(t) + \int_t^1 u(s) ds - t u(t) = \int_t^1 u(s) ds, \quad (5.28)$$

e

$$\lambda u''(t) = -u(t). \quad (5.29)$$

Osserviamo che  $\lambda > 0$ , cioè l'operatore  $K$  è positivo. Infatti, moltiplicando l'equazione differenziale (5.29) per  $\bar{u}(t)$  e integrando tra 0 e 1, si ha

$$\lambda \int_0^1 u''(t)\bar{u}(t) dt + \|u\|_{L^2([0,1])}^2 = 0.$$

Integrando per parti, si ha

$$\lambda \left( [u'(t)\bar{u}(t)]_0^1 - \int_0^1 |u'(t)|^2 dt \right) + \|u\|_{L^2([0,1])}^2 = 0.$$

Tenendo conto delle condizioni ai limiti  $u(0) = 0 = u'(1)$ , si ha

$$-\lambda \int_0^1 |u'(t)|^2 dt + \|u\|_{L^2([0,1])}^2 = 0$$

e quindi  $\lambda > 0$ . L'integrale generale dell'equazione differenziale (5.29) è

$$u(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}t\right).$$

Imponendo le condizioni ai limiti, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= u(0) = c_1, \\ 0 &= u'(1) = c_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \end{aligned}$$

e pertanto  $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$ , quindi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots \right\}$$

e gli autovalori sono

$$\sigma_p(K) = \left\{ \frac{4}{\pi^2}, \frac{4}{9\pi^2}, \frac{4}{25\pi^2}, \dots \right\} = \left\{ \lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

con corrispondenti autofunzioni

$$\varphi_k(t) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}t\right), \quad k \in \mathbb{N},$$

(base (spettrale) ortogonale dello spazio di Hilbert separabile  $L^2([0,1])$ , per il Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt 5.10.1).

Poiché  $K$  è autoaggiunto, si ha

$$\|K\|_{B(L^2([0,1]))} = \max_k |\lambda_k| = |\lambda_1| = \frac{4}{\pi^2}.$$

Poiché  $K$  è positivo, si ha <sup>16</sup>

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \int_0^1 k(t,t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

□

<sup>16</sup> Teorema di Mercer : Sia  $K : L^2([a,b]) \rightarrow L^2([a,b])$  definito da  $(Ku)(t) = \int_a^b k(t,s)u(s)ds$ , con  $k(t,s)$  continuo, un operatore lineare, compatto e positivo. Allora  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \int_a^b k(t,t)dt$ , dove i  $\lambda_k$  sono gli autovalori di  $K$ .

36. Come nell'esercizio precedente, con

$$k(t, s) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ 1 - s, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

*Soluzione.* Poiché  $k(t, s)$  è una funzione continua e  $k(t, s) = \overline{k(s, t)}$ , l'operatore  $K$  è compatto e autoaggiunto. Pertanto lo spettro di  $K$  consiste dello zero e di autovalori reali. Sia

$$(Ku)(t) = \lambda u(t), \quad \lambda \neq 0.$$

Questo significa che

$$\lambda u(t) = (1 - t) \int_0^t u(s) ds + \int_t^1 (1 - s)u(s) ds$$

Derivando due volte rispetto a  $t$ , si ha

$$\lambda u'(t) = - \int_0^t u(s) ds + (1 - t)u(t) - (1 - t)u(t) = - \int_0^t u(s) ds \quad (5.30)$$

e

$$\lambda u''(t) = -u(t), \text{ con } u(1) = 0 = u'(0). \quad (5.31)$$

Osserviamo che  $\lambda > 0$ , cioè l'operatore  $K$  è positivo. Infatti, moltiplicando l'equazione differenziale (5.31) per  $\bar{u}(t)$  e integrando tra 0 e 1, si ha

$$\lambda \int_0^1 u''(t)\bar{u}(t) dt + \|u\|_{L^2([0,1])}^2 = 0.$$

Integrando per parti, si ha

$$\lambda \left( [u'(t)\bar{u}(t)]_0^1 - \int_0^1 |u'(t)|^2 dt \right) + \|u\|_{L^2([0,1])}^2 = 0.$$

Tenendo conto delle condizioni ai limiti  $u(1) = 0 = u'(0)$ , si ha

$$-\lambda \int_0^1 |u'(t)|^2 dt + \|u\|_{L^2([0,1])}^2 = 0$$

e quindi  $\lambda > 0$ .

L'integrale generale dell'equazione differenziale (5.31) è

$$u(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}t\right).$$

Imponendo le condizioni ai limiti, si ha  $c_2 = 0$  e

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots \right\}$$

e gli autovalori sono

$$\sigma_p(K) = \left\{ \frac{4}{\pi^2}, \frac{4}{9\pi^2}, \frac{4}{25\pi^2}, \dots \right\} = \left\{ \lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

con corrispondenti autofunzioni

$$\varphi_k(t) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)t}{2}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Poiché  $K$  è autoaggiunto, si ha

$$\|K\|_{B(L^2([0,1]))} = \max_k |\lambda_k| = |\lambda_1| = \frac{4}{\pi^2}.$$

Poiché  $K$  è positivo, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \int_0^1 k(t,t) dt = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}.$$

□

37. Descrivere lo spettro dell'operatore compatto ed autoaggiunto

$$K : L^2([0,1]) \rightarrow L^2([0,1])$$

definito da

$$(Ku)(t) = \int_0^1 k(t,s)u(s)ds$$

dove

$$k(t,s) = \max\{t,s\} \quad \text{per } 0 \leq t,s \leq 1.$$

*Soluzione.* Poiché  $k(t,s)$  è una funzione continua e  $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$ , l'operatore  $K$  è compatto e autoaggiunto. Pertanto lo spettro di  $K$  consiste dello zero e di autovalori reali. Sia

$$\lambda u(t) = (Ku)(t), \quad \lambda \neq 0.$$

Questo significa che

$$\lambda u(t) = t \int_0^t u(s)ds + \int_t^1 su(s)ds.$$

Derivando due volte rispetto a  $t$ , si ha

$$\lambda u'(t) = \int_0^t u(s) ds + tu(t) - tu(t),$$

e

$$\lambda u''(t) = u(t).$$

Per  $t = 1$  e  $t = 0$ , si ha

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0, \\ u(1) &= u'(1). \end{aligned}$$

Così abbiamo l'equazione differenziale

$$u''(t) = \mu u(t), \tag{5.32}$$

con  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ , e le condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} u'(0) &= 0, \\ u(1) &= u'(1). \end{aligned}$$

Consideriamo dapprima il caso

$$\mu > 0.$$

In questo caso, l'integrale generale di 5.32 è

$$u(t) = c_1 \exp(\sqrt{\mu}t) + c_2 \exp(-\sqrt{\mu}t)$$

e

$$u'(t) = \sqrt{\mu}(c_1 \exp(\sqrt{\mu}t) - c_2 \exp(-\sqrt{\mu}t)).$$

Applicando la prima condizione ai limiti, si ha

$$\sqrt{\mu}(c_1 - c_2) = 0,$$

che implica  $c_1 = c_2$  e quindi  $u(t) = C \cosh(\sqrt{\mu}t)$ ,  $u'(t) = C\sqrt{\mu} \sinh(\sqrt{\mu}t)$

Applicando la seconda condizione ai limiti, si ha  $\coth(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$ .

Questa equazione ha un'unica soluzione (positiva)  $\mu^0$ . Pertanto l'unico autovalore positivo di  $K$  è

$$\lambda^0 = \frac{1}{\mu^0},$$

con corrispondente autofunzione

$$u^0(t) = \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^0}}t\right).$$

Consideriamo, ora, il caso

$$\mu < 0,$$

cioè

$$\mu = -\nu^2, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

In questo caso l'integrale generale di (5.32) è

$$u(t) = c_3 \cos(\nu t) + c_4 \sin(\nu t)$$

e

$$u'(t) = \nu(-c_3 \sin(\nu t) + c_4 \cos(\nu t)).$$

Imponendo la prima condizione ai limiti, si ha  $c_4 = 0$ , e quindi

$$u(t) = c_3 \cos(\nu t), \quad u'(t) = -c_3 \nu \sin(\nu t).$$

Imponendo la seconda condizione ai limiti, si ha  $\cos(\nu) = -\nu \sin(\nu)$ , ovvero

$$\cot(\nu) = -\nu.$$

Questa equazione ha una infinità numerabile di soluzioni  $\nu_n^1$  per  $n \in \mathbb{N}$  e così otteniamo una successione di autovalori negativi di  $K$ :

$$\lambda_n^1 = -\frac{1}{(\nu_n^1)^2} \quad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

con corrispondenti autofunzioni

$$u_n^1(t) = \cos(\nu_n^1 t).$$

L'operatore  $K$  non è positivo perché ha anche autovalori negativi.  $\square$

38. Descrivere lo spettro dell'operatore compatto ed autoaggiunto

$$K : L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow L^2([-\pi, \pi])$$

definito da

$$(Ku)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |t-s|u(s)ds.$$

*Soluzione.* Poiché  $k(t, s)$  è una funzione continua e  $k(t, s) = \overline{k(s, t)}$ , l'operatore  $K$  è compatto e autoaggiunto. Pertanto lo spettro di  $K$  consiste dello zero e di autovalori reali. Sia

$$\lambda u(t) = (Ku)(t), \quad \lambda \neq 0.$$

Questo significa che

$$\lambda u(t) = \int_{-\pi}^t (t-s)u(s)ds + \int_t^{\pi} (s-t)u(s)ds.$$

Derivando due volte rispetto a  $t$ , si ha

$$\lambda u'(t) = \int_{-\pi}^t u(s)ds - \int_t^{\pi} u(s)ds$$

e

$$\lambda u''(t) = 2u(t).$$

Per  $t = \pi$  e  $t = -\pi$ , si ha

$$\begin{aligned} \lambda u(\pi) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\pi-s)u(s)ds, \\ \lambda u(-\pi) &= \int_{-\pi}^{\pi} (\pi+s)u(s)ds, \\ \lambda (u(\pi) + u(-\pi)) &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} u(s)ds, \\ \lambda u'(\pi) &= \int_{-\pi}^{\pi} u(s)ds, \\ \lambda u'(-\pi) &= - \int_{-\pi}^{\pi} u(s)ds. \end{aligned}$$

Così abbiamo l'equazione differenziale

$$u''(t) = \mu u(t), \quad \text{con} \quad \mu = \frac{2}{\lambda} \tag{5.33}$$

e le condizioni ai limiti

$$u(\pi) + u(-\pi) = 2\pi u'(\pi),$$

$$u'(\pi) + u'(-\pi) = 0.$$

Consideriamo dapprima il caso

$$\mu > 0,$$

cioè

$$\mu = \nu^2, \nu \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

In questo caso, l'integrale generale di (5.33) è

$$u(t) = c_1 \exp(\nu t) + c_2 \exp(-\nu t)$$

e

$$u'(t) = \nu(c_1 \exp(\nu t) - c_2 \exp(-\nu t)).$$

Applicando la seconda condizione ai limiti, si ha

$$(c_1 - c_2)(\exp(\nu\pi) - \exp(-\nu\pi)) = 0$$

che implica  $c_1 = c_2$  e quindi  $u(t) = C \cosh(\nu t)$ .

Applicando la prima condizione ai limiti, si ha  $\cosh(\nu\pi) = \pi\nu \sinh(\nu\pi)$  ovvero  $\coth(\nu\pi) = \nu\pi$ .

Questa equazione ha un'unica soluzione (positiva)  $\nu^0$ . Pertanto l'unico autovalore positivo di  $K$  è

$$\lambda^0 = \frac{2}{(\nu^0)^2},$$

con corrispondente autofunzione

$$u^0(t) = \cosh(\nu^0 t).$$

Consideriamo, ora, il caso

$$\mu < 0,$$

cioè

$$\mu = -\nu^2.$$

In questo caso l'integrale generale di (5.33) è

$$u(t) = c_3 \cos(\nu t) + c_4 \sin(\nu t)$$

e

$$u'(t) = \nu(-c_3 \sin(\nu t) + c_4 \cos(\nu t)).$$

Per la seconda condizione ai limiti, si ha

$$2c_4 \cos(\nu\pi) = 0.$$

Esaminiamo allora due casi.

Consideriamo dapprima il caso  $c_4 = 0$ , pertanto  $u(t) = c_3 \cos(\nu t)$ .

Applicando la prima condizione ai limiti, si ha

$$2c_3 \cos(\nu\pi) = -2\pi c_3 \nu \sin(\nu\pi),$$

ovvero

$$\cot(\nu\pi) = -\nu\pi.$$

Questa equazione ha una infinità numerabile di soluzioni  $\nu_n^1$  per  $n \in \mathbb{N}$  e così otteniamo una successione di autovalori negativi di  $K$ :

$$\lambda_n^1 = -\frac{2}{(\nu_n^1)^2} \quad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

con corrispondenti autofunzioni

$$u_n^1(t) = \cos(\nu_n^1 t).$$

Rimane da considerare il caso:  $c_4 \neq 0$ ,  $\cos(\nu\pi) = 0$ , ovvero

$$c_4 \neq 0, \quad \nu_n^2 = \frac{2n-1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Applicando la prima condizione ai limiti, si ha

$$-2\pi\nu c_3 \sin(\nu\pi) = 0,$$

e quindi  $c_3 = 0$  (essendo  $\sin(\nu\pi) \neq 0$ , in quanto  $\cos(\nu\pi) = 0$ ).

Così otteniamo una seconda successione di autovalori negativi di  $K$ :

$$\lambda_n^2 = -\frac{8}{(2n-1)^2} \quad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

con corrispondenti autofunzioni

$$u_n^2(t) = \sin\left(\frac{2n-1}{2}t\right).$$

L'operatore  $K$  non è positivo, avendo anche autovalori negativi.

Osserviamo che la collezione di tutte le autofunzioni di  $K$ ,

$$\{u^0(t), (u_n^1(t))_n, (u_n^2(t))_n\}$$

è una base (spettrale) numerabile ed ortogonale dello spazio di Hilbert separabile  $L^2([-\pi, \pi])$ , per il Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt 5.10.1.

□

Riportiamo qui la dimostrazione dell'implicazione (Teorema di **Schur**):

$$x^{(n)} \rightharpoonup x \text{ debolmente in } l^1 \Rightarrow x^{(n)} \rightarrow x \text{ fortemente in } l^1.$$

*Dimostrazione.* Proviamo dapprima che:

$$x^{(n)} \rightharpoonup 0 \text{ debolmente in } l^1 \Rightarrow x^{(n)} \rightarrow 0 \text{ fortemente in } l^1,$$

ovvero, sia per ogni  $n \in \mathbb{N}$   $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_i \subseteq l^1$  tale che  $\varphi(x^{(n)}) \rightarrow 0$  per ogni  $\varphi \in l^\infty (= (l^1)^*)$ , allora  $\|x^{(n)}\|_{l^1} = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^{(n)}| \rightarrow 0$ .

Per ogni  $f = (f_1, f_2, \dots, f_i, \dots)$ ,  $g = (g_1, g_2, \dots, g_i, \dots) \in \overline{B_{l^\infty}}$  definiamo la metrica (verificare) su  $\overline{B_{l^\infty}}$

$$d(f, g) := \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} |f_i - g_i|.$$

Per il teorema 3.2.5  $(\overline{B_{l^\infty}}, \sigma(l^\infty, l^1))$  è compatta.

Sia  $\mathcal{T}$  la topologia corrispondente alla metrica  $d$ .

L'immersione  $(\overline{B_{l^\infty}}, \sigma(l^\infty, l^1)) \hookrightarrow (\overline{B_{l^\infty}}, \mathcal{T})$  è continua.

Infatti, per ogni  $\varphi^0 \in \overline{B_{l^\infty}}$  e per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un intorno di  $\varphi^0$  per  $\sigma(l^\infty, l^1)$ , sia

$$V^*(\varphi^0; (e^i)_{i=1,2,\dots,n}; \epsilon) = \{\varphi \in l^\infty; |(\varphi - \varphi^0)(e^i)| < \delta, \text{ per ogni } i = 1, 2, \dots, n\}$$

(con  $\delta$  e  $n$  da determinare)  $((e^i)_i$  base canonica di  $l^1$  e  $\delta + \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$ ), tale che

$$V^*(\varphi^0; (e^i)_{i=1,2,\dots,n}; \epsilon) \cap \overline{B_{l^\infty}} \subset \{\varphi \in \overline{B_{l^\infty}}; d(\varphi, \varphi^0) < \epsilon\}.^{17}$$

Allora,  $\overline{B_{l^\infty}}$  è compatta rispetto alla topologia  $\mathcal{T}$  e  $(\overline{B_{l^\infty}}, d)$  è spazio metrico compatto e quindi spazio metrico completo.

Sia  $\epsilon > 0$  e definiamo gli insiemi

$$F_k := \{\varphi \in \overline{B_{l^\infty}}; |\varphi(x^{(n)})| \leq \epsilon \text{ per ogni } n \geq k\}.$$

Gli  $F_k$  sono chiusi nella topologia  $\mathcal{T}$  e inoltre, poichè  $\varphi(x^{(n)}) \rightarrow 0$  per ogni  $\varphi \in l^\infty$ , risulta

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k = \overline{B_{l^\infty}}.$$

<sup>17</sup>La scelta di  $\delta$  e di  $n$  sufficientemente grande in modo che riesca  $\delta + \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$  scaturisce dalla seguente analisi: sia

$$\varphi \in V^*(\varphi^0; (e^i)_{i=1,2,\dots,n}; \epsilon) = \{\varphi \in l^\infty; |(\varphi - \varphi^0)(e^i)| < \delta, \forall i = 1, 2, \dots, n\} \cap \overline{B_{l^\infty}};$$

allora,

$$d(\varphi, \varphi^0) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} |\varphi_i - \varphi_i^0| + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} |\varphi_i - \varphi_i^0| < \delta + 2 \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \delta + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pertanto, basta prendere  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$  e  $n$  sufficientemente grande in modo che  $\frac{1}{2^{n-1}} < \delta$ , per avere  $d(\varphi, \varphi^0) < \epsilon$ .

Per il teorema di Baire-Hausdorff 4.4.2, esiste un intero  $k_0$  tale che  $F_{k_0}^\circ \neq \emptyset$ . Sia, allora,  $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, \dots, \varphi_i^0, \dots) \in F_{k_0}$  e consideriamo gli elementi  $\varphi \in \overline{B}_{l^\infty}$  della forma  $\varphi = (\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, \dots, \varphi_N^0, \pm 1, \pm 1, \dots)$ , per cui esiste una costante  $\rho > 0$  tale che

$$d(\varphi, \varphi^0) \leq \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{2}{2^i} < \rho.$$

Risulta  $\varphi \in F_{k_0}$  e si ha, per ogni  $n \geq k_0$ ,

$$|\varphi(x^{(n)})| = \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i x_i^{(n)} \right| = \left| \sum_{i=1}^N \varphi_i^0 x_i^{(n)} + \sum_{i=N+1}^{+\infty} (\pm x_i^{(n)}) \right| \leq \epsilon.$$

Ne segue che

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |x_i^{(n)}| \leq \epsilon + \sum_{i=1}^N |\varphi_i^0| |x_i^{(n)}| \leq \epsilon + \sum_{i=1}^N |x_i^{(n)}|$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^{(n)}| \leq \epsilon + 2 \sum_{i=1}^N |x_i^{(n)}| \quad \text{per ogni } n \geq k_0.$$

Da qui segue la tesi, poiché per ogni fissato  $i$  la successione  $(x_i^{(n)})_n$  tende a 0 per  $n \rightarrow +\infty$ . □

**Osservazione 5.11.5.** Con lo stesso metodo utilizzato nella precedente dimostrazione, si prova che

$$x^{(n)} \rightharpoonup x \text{ debolmente in } l^1 \Rightarrow x^{(n)} \rightarrow x \text{ fortemente in } l^1$$

ovvero, se  $(x^{(n)})_n \subseteq l^1$  (per ogni  $n \in \mathbb{N}$  sia  $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_i$ ) è tale che  $\varphi(x^{(n)})$  converge a un limite per ogni  $\varphi \in l^\infty (= (l^1)^*)$ , allora  $\|x^{(n)}\|_{l^1} = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^{(n)}|$  converge a un limite.

Infatti, fissato  $\epsilon > 0$  e definiti gli insiemi

$$F_k := \{\varphi \in \overline{B}_{l^\infty}; |\varphi(x^{(n)} - x^{(m)})| \leq \epsilon \text{ per ogni } m, n \geq k\},$$

si trovano  $k_0$  e  $N \in \mathbb{N}$  tali che  $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_{l^1} \leq \epsilon + 2 \sum_{i=1}^N |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|$  per ogni  $m, n \geq k_0$ .

Ne segue che la successione  $(x^{(n)})_n$  è di Cauchy nello spazio di Banach  $l^1$  e quindi è convergente.



# Capitolo 6

## Principi del max-min. Teoria di Sturm-Liouville.

In questo capitolo diamo due importanti applicazioni del Teorema Spettrale [5.10.1](#).

### 6.1 Operatori positivi e Principi del max-min di Fischer-Courant. Metodo di Rayleigh-Ritz.

Le formule del max-min e del min-max (Fischer, in dimensione finita; Fischer-Courant, in uno spazio di Hilbert di dimensione infinita) esprimono utili caratterizzazioni variazionali degli autovalori  $\lambda_k$ , senza alcun riferimento ai precedenti autovalori e agli autovettori.

Premettiamo il seguente risultato.

**Proposizione 6.1.1.** *Sia  $(H, (\cdot, \cdot))$  uno spazio di Hilbert reale separabile di dimensione infinita. Sia  $K : H \rightarrow H$  un operatore compatto, autoaggiunto e tale che  $(Ku, u) \geq 0$  per ogni  $u \in H$  (cioè,  $K$  è un operatore positivo su  $H$ ). Per un tale operatore  $K$ , lo spettro  $\sigma(K)$  è dato dall'unione*

$$\sigma(K) = \sigma_p(K) \cup \{0\},$$

con lo spettro puntuale  $\sigma_p(K)$  formato da una successione  $(\lambda_k)_k$  decrescente e infinitesima di autovalori positivi

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \lambda_{k+1} \geq \dots \geq 0,$$

contati con la loro molteplicità (cfr. Teorema [5.8.1](#)).

Sia  $(v_j)_j$  una base ortonormale di  $H$  formata da autovettori di  $K$  (cfr. Teorema 5.10.1), con  $v_j$  autovalore relativo all'autovettore  $\lambda_j$ .

Sia

$$E_k := \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

e, per ogni  $u \neq 0$ , sia

$$R(u) := \frac{(Ku, u)}{\|u\|^2}$$

il **quoziente di Rayleigh** di  $K$ .

Risulta:

(i) Per ogni  $k \geq 1$

$$\min_{u \in E_k \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k.$$

(ii) Per ogni  $k \geq 2$

$$\max_{u \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k$$

e

$$\max_{u \in H \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_1.$$

*Dimostrazione.*

(i) Sia  $u \in E_k \setminus \{0\}$ , con

$$u = \sum_{j=1}^k c_j v_j$$

e

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^k c_j^2.$$

Dal Teorema Spettrale in dimensione finita, si ha

$$Ku = \sum_{l=1}^k \lambda_l c_l v_l,$$

da cui

$$R(u) = \frac{\left( \sum_{l=1}^k \lambda_l c_l v_l, \sum_{j=1}^k c_j v_j \right)}{\|u\|^2} = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j c_j^2 \|v_j\|^2}{\|u\|^2} \geq \frac{\lambda_k \|u\|^2}{\|u\|^2} = \lambda_k.$$

In particolare,  $v_k \in E_k \setminus \{0\}$  e vale

$$R(v_k) = (Kv_k, v_k) = (\lambda_k v_k, v_k) = \lambda_k,$$

da cui otteniamo la tesi.

(ii) Siano  $k \geq 2$ ,  $E_{k-1}^\perp = \text{span} \{v_k, v_{k+1}, \dots\}$  e  $u \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}$ , con

$$u = \sum_{j=k}^{+\infty} c_j v_j$$

e

$$\|u\|^2 = \sum_{j=k}^{+\infty} c_j^2.$$

Dal Teorema di Hilbert-Schmidt 5.10.1, si ha

$$Ku = \sum_{l=k}^{+\infty} \lambda_l c_l v_l,$$

da cui

$$R(u) = \frac{\left( \sum_{l=k}^{+\infty} \lambda_l c_l v_l, \sum_{j=k}^{+\infty} c_j v_j \right)}{\|u\|^2} = \frac{\sum_{j=k}^{+\infty} \lambda_j c_j^2 \|v_j\|^2}{\|u\|^2} \leq \frac{\lambda_k \|u\|^2}{\|u\|^2} = \lambda_k.$$

In particolare,  $v_k \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}$  e vale

$$R(v_k) = (Kv_k, v_k) = (\lambda_k v_k, v_k) = \lambda_k,$$

da cui otteniamo la tesi.

Per  $k = 1$  la tesi è ovvia. □

**Teorema 6.1.2.** *Nelle stesse ipotesi e notazioni della precedente Proposizione 6.1.1, si ha:*

*Per ogni  $k \geq 1$ , sia  $\Sigma_k$  un sottospazio  $k$ -dimensionale di  $H$ ; allora risulta*

$$\min_{u \in \Sigma_k \setminus \{0\}} R(u) \leq \lambda_k \quad (\text{i})$$

e quindi vale la **formula di max-min relativa a  $R(u)$**

$$\boxed{\max_{\substack{\Sigma_k \subset H \\ \dim \Sigma_k = k}} \min_{u \in \Sigma_k \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k} \quad (\text{ii})$$

Inoltre:

Per ogni  $k \geq 2$ , sia  $\Sigma_{k-1}$  un sottospazio  $(k-1)$ -dimensionale di  $H$ ; allora risulta

$$\max_{u \in \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) \geq \lambda_k \quad (\text{iii})$$

e quindi, per ogni  $k \geq 1$ , vale **formula di min-max relativa a  $R(u)$**

$$\boxed{\min_{\substack{\Sigma_{k-1} \subset H \\ \dim \Sigma_{k-1} = k-1}} \max_{u \in \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k.} \quad (\text{iv})$$

*Dimostrazione.*

(i) Dimostriamo preliminarmente che, per ogni  $k \geq 2$ ,

$$\Sigma_k \cap E_{k-1}^\perp \neq \{0\}.$$

Sia  $\{e_1, \dots, e_k\}$  una base ortonormale di  $\Sigma_k$  e sia  $u \in \Sigma_k$ ,  $u = \sum_{j=1}^k a_j e_j$ . Vogliamo scegliere i coefficienti  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , in modo che risulti  $u \neq 0$  e  $u \perp E_{k-1}$ . Consideriamo il sistema lineare di equazioni omogenee

$$\begin{cases} (u, v_1) = \sum_{j=1}^k a_j (e_j, v_1) = 0 \\ \vdots \\ (u, v_{k-1}) = \sum_{j=1}^k a_j (e_j, v_{k-1}) = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema omogeneo di  $k-1$  equazioni in  $k$  incognite. Quindi,  $\Sigma_k \cap E_{k-1}^\perp \neq \{0\}$ . Per concludere la dimostrazione di (i) osserviamo che

$$\min_{u \in \Sigma_k \setminus \{0\}} R(u) \leq \min_{u \in \Sigma_k \cap E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) \leq \max_{u \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k$$

per il punto (ii) della Proposizione 6.1.1.

(ii) Segue da (i).

(iii) Dimostriamo preliminarmente che

$$E_k \cap \Sigma_{k-1}^\perp \neq \{0\}.$$

Sia  $u \in E_k$ ,  $u = \sum_{j=1}^k a_j v_j$  ( $Kv_j = \lambda_j v_j$ ). Vogliamo scegliere i coefficienti  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , in modo che risulti  $u \neq 0$  e  $u \perp \Sigma_{k-1}$ . Sia

$\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$  una base di  $\Sigma_{k-1}$  e consideriamo il sistema lineare di equazioni omogenee

$$\begin{cases} (u, e_1) = \sum_{j=1}^k a_j (v_j, e_1) = 0 \\ \vdots \\ (u, e_{k-1}) = \sum_{j=1}^k a_j (v_j, e_{k-1}) = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema omogeneo di  $k-1$  equazioni in  $k$  incognite. Quindi,  $E_k \cap \Sigma_{k-1}^\perp \neq \{0\}$ . Per concludere la dimostrazione di (iii) osserviamo che

$$\max_{u \in \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) \geq \max_{u \in E_k \cap \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(u) \geq \min_{u \in E_k \setminus \{0\}} R(u) = \lambda_k$$

per il punto (i) della Proposizione 6.1.1.

(iv) Segue da (iii). □

**Osservazione 6.1.3.** Nella Proposizione 6.1.1 gli autovalori  $\lambda_k$  sono ottenuti tramite formule ricorsive: occorre conoscere prima  $E_k$  per ottenere  $\lambda_k$  (cfr. (i)), oppure occorre conoscere prima  $E_{k-1}^\perp$  per ottenere  $\lambda_k$  (cfr. (ii)).

Invece, i Principi di max-min e di min-max (cfr. (ii) e (iv) nel Teorema 6.1.2) danno dirette formulazioni variazionali degli autovalori  $\lambda_k$  dell'operatore  $K$ .

La (ii) può essere usata per dare limitazioni dal basso per il  $k$ -esimo autovalore positivo. La (iv) può essere usata per dare limitazioni dall'alto per il  $k$ -esimo autovalore positivo.

Le dimostrazioni della Proposizione e del Teorema che seguono si ottengono con argomenti analoghi a quelli della Proposizione 6.1.1 e del Teorema 6.1.2, applicati alla funzione  $u \mapsto \frac{1}{R(u)}$ .

**Proposizione 6.1.4.** *Nelle stesse ipotesi e notazioni della Proposizione 6.1.1, se  $\lambda_k > 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  (equivalentemente, se  $\ker(K) = \{0\}$ , per cui  $R(u) \neq 0$  per ogni  $u \neq 0$ ), risulta:*

(i) Per ogni  $k \geq 1$

$$\max_{u \in E_k \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\lambda_k}.$$

(ii) Per ogni  $k \geq 2$

$$\min_{u \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\lambda_k}$$

e

$$\min_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\lambda_1}.$$

**Teorema 6.1.5.** *Nelle stesse ipotesi della Proposizione 6.1.4, valgono le seguenti affermazioni.*

Per ogni  $k \geq 1$ , risulta

$$\max_{u \in \Sigma_k \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} \geq \frac{1}{\lambda_k} \quad (\text{i})$$

e quindi vale la **formula di min-max relativa a  $\frac{1}{R(u)}$**

$$\boxed{\min_{\substack{\Sigma_k \subset H \\ \dim \Sigma_k = k}} \max_{u \in \Sigma_k \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\lambda_k}}. \quad (\text{ii})$$

Inoltre:

Per ogni  $k \geq 2$ , risulta

$$\min_{u \in \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} \leq \frac{1}{\lambda_k} \quad (\text{iii})$$

e quindi, per ogni  $k \geq 1$ , vale **formula di max-min relativa a  $\frac{1}{R(u)}$**

$$\boxed{\max_{\substack{\Sigma_{k-1} \subset H \\ \dim \Sigma_{k-1} = k-1}} \min_{u \in \Sigma_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{1}{R(u)} = \frac{1}{\lambda_k}}. \quad (\text{iv})$$

## 6.2 Problemi autoaggiunti agli autovalori in intervalli compatti

La soluzione di problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali può talvolta essere ricondotta alla soluzione di equazioni differenziali ordinarie contenenti un parametro e soggette a certe condizioni ai limiti.

Applicheremo ora il Teorema spettrale 5.10.1 a una classe di operatori differenziali ordinari del secondo ordine, contenenti un parametro, con condizioni ai limiti.

Sia  $[a, b]$  un intervallo reale e **compatto**. Consideriamo l'**equazione differenziale ordinaria del secondo ordine di Sturm-Liouville**

$$-h'' + qh - \mu h = f \quad \text{in } ]a, b[, \quad (6.1)$$

dove  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $q \in C^0([a, b], \mathbb{R})$  e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in L^2([a, b])$ ,<sup>1</sup> con le condizioni ai limiti

$$\begin{cases} (\mathcal{A}) & \alpha h(a) + \alpha_1 h'(a) = 0, \\ (\mathcal{B}) & \beta h(b) + \beta_1 h'(b) = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

dove  $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 \in \mathbb{R}$  e

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 > 0, \quad \beta^2 + \beta_1^2 > 0.$$

L'equazione (6.1) con le condizioni ai limiti (6.2) si chiama **sistema (regolare) di Sturm-Liouville**.<sup>2</sup>

Studieremo le soluzioni del sistema di Sturm-Liouville associando al sistema un particolare operatore integrale, compatto ed autoaggiunto.

Precisiamo l'ambiente funzionale, pertanto definiamo le classi di funzioni<sup>3</sup>

$$\mathcal{D}_a := \{h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}) : h' \text{ assolutamente continua,} \\ h'' \in L^2([a, b]), h \text{ soddisfa (6.2)(\mathcal{A})}\},$$

$$\mathcal{D}_b := \{h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}) : h' \text{ assolutamente continua,} \\ h'' \in L^2([a, b]), h \text{ soddisfa (6.2)(\mathcal{B})}\}$$

e poniamo

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b.$$

Osserviamo che  $\mathcal{D}$  è uno spazio vettoriale.

Definiamo l'operatore lineare (chiamato **operatore di Sturm-Liouville**)

$$\begin{aligned} L : \mathcal{D} &\rightarrow L^2([a, b]), \\ h &\mapsto L(h) := -h'' + qh. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Cfr., ad esempio, [7].

<sup>2</sup>Tali sistemi, contenenti un parametro  $\mu$ , si presentano in diversi problemi fisici quali, ad esempio, lo studio delle vibrazioni di una corda di lunghezza finita, fissata gli estremi (cfr. [7]), lo studio della conduzione termica, ecc. (cfr. anche in [18]: il metodo di separazione delle variabili, di Fourier).

<sup>3</sup>Cfr., ad esempio, Definizione 8.2.11 e Teorema 8.2.12 in [8].

Formuliamo ora il **problema di Sturm-Liouville**:

se  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $f \in L^2([a, b])$ , esiste  $h \in \mathcal{D}$  tale che  $(L - \mu I)(h) = f$ ? Equivalentemente, per quali  $\mu \in \mathbb{R}$  <sup>4</sup>  $f \in \text{Im}(L - \mu I)$ ?

*L'idea centrale è quella di risolvere il problema di Sturm-Liouville in termini della teoria degli operatori.* Però non possiamo considerare in questo contesto l'operatore di Sturm-Liouville  $L$ , in quanto  $L$ , come operatore differenziale, determina una perdita di regolarità quando si passa da  $h$  a  $L(h)$ .

Considereremo, allora, l'operatore inverso  $(L - \mu I)^{-1}$  (una volta garantita la sua esistenza); ovviamente, in quanto inverso di un operatore differenziale,  $(L - \mu I)^{-1}$  sarà un operatore integrale. È questo l'operatore idoneo per applicare il Teorema spettrale 5.10.1. La relazione tra lo spettro di un operatore e lo spettro del suo operatore inverso consentirà di risolvere il problema di Sturm-Liouville.

Iniziamo considerando il caso  $\mu = 0$  (equivalentemente, invece di  $q$ , consideriamo  $q - \mu$ ). Per definire  $L^{-1}$  (anche se solo su  $\text{Im}(L)$ ), occorre che  $L$  sia iniettivo. Pertanto, formuliamo la seguente

**Ipotesi (di Sturm-Liouville):**

$$\text{se } h \in \mathcal{D} \text{ e } L(h) = 0, \text{ allora } h = 0, \quad (\mathcal{S} - \mathcal{L})$$

(cioè, l'operatore  $L$  è iniettivo su  $\mathcal{D}$ , ovvero  $\ker L = \{0\}$ ). Tale ipotesi non è restrittiva (cfr. Osservazione 6.2.14).

Il Lemma che segue, sulle equazioni differenziali ordinarie, afferma l'esistenza di soluzioni *non nulle* per certi problemi di Cauchy.

**Lemma 6.2.1.** *Se  $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha^2 + \alpha_1^2 > 0$  e  $\beta^2 + \beta_1^2 > 0$ , allora esistono funzioni reali  $h_a \in \mathcal{D}_a$  e  $h_b \in \mathcal{D}_b$  tali che  $L(h_a) = 0$  e  $L(h_b) = 0$  e  $h_a, h_b$  sono non identicamente nulle.*

<sup>4</sup>Si può obiettare che la richiesta " $\mu \in \mathbb{R}$ " sia restrittiva, e che invece si debba considerare  $\mu \in \mathbb{C}$ . Tuttavia, sia  $\mu$  un autovalore, con  $h \neq 0$  relativa autofunzione, del problema di Sturm-Liouville. Da  $L(h) = \mu h$ , si ha che

$$(L(h), h)_{L^2([a, b])} = \mu(h, h)_{L^2([a, b])}$$

e

$$(h, L(h))_{L^2([a, b])} = \bar{\mu}(h, h)_{L^2([a, b])}.$$

Poiché  $(L(h), h)_{L^2([a, b])} = (h, L(h))_{L^2([a, b])}$  (essendo il problema di Sturm-Liouville autoaggiunto, cfr. Osservazione 6.2.14(b)), risulta che  $(\mu - \bar{\mu})(h, h)_{L^2([a, b])} = 0$ . Essendo  $(h, h)_{L^2([a, b])} > 0$ , segue che  $\mu = \bar{\mu}$  e pertanto ogni autovalore deve essere necessariamente reale.

*Dimostrazione.* Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} L(h) = h'' - qh = 0 & \text{in } [a, b] \\ h(a) = 1 \\ h'(a) = -\frac{\alpha}{\alpha_1} \end{cases} \quad (\alpha_1 \neq 0)$$

(se  $\alpha_1 = 0$  si considerano le condizioni  $h(a) = 0$  e  $h'(a) = 1$ ) ammette un'unica soluzione

$$h_a : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

non nulla (in virtù delle condizioni iniziali), tale che  $L(h_a) = 0$  e, inoltre,

$$\alpha h(a) + \alpha_1 h'(a) = \alpha + \alpha_1 \cdot \left(-\frac{\alpha}{\alpha_1}\right) = 0,$$

per cui  $h_a \in \mathcal{D}_a$ . Allo stesso modo, si prova l'esistenza di  $h_b$ .  $\square$

Proviamo che  $h_a$  e  $h_b$  sono soluzioni linearmente indipendenti di  $L(h) = 0$ . Infatti, consideriamo il determinante Wronskiano di  $h_a$  e  $h_b$ :

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} h_a(x) & h_b(x) \\ h'_a(x) & h'_b(x) \end{pmatrix} = h_a(x)h'_b(x) - h'_a(x)h_b(x)$$

per ogni  $x \in [a, b]$ . Osservato che, per ogni  $x \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} W'(x) &= h'_a(x)h'_b(x) + h_a(x)h''_b(x) - h''_a(x)h_b(x) - h'_a(x)h'_b(x) \\ &= h_a(x)(q(x)h_b(x)) - h_b(x)(q(x)h_a(x)) = 0, \end{aligned}$$

risulta  $W(x) = \text{costante} = W(a)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

**Lemma 6.2.2.** *Assunta l'ipotesi (S - L), risulta  $W(a) \neq 0$  e quindi  $h_a$  e  $h_b$  sono linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione.* Se  $W(a) = 0$ , i vettori colonna della matrice  $W(a)$  sono linearmente dipendenti. Pertanto, esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$h_b(a) = ch_a(a), \quad h'_b(a) = ch'_a(a).$$

Allora,  $h_b \in \mathcal{D}_b \cap \mathcal{D}_a = \mathcal{D}$  e  $L(h_b) = 0$ . Dall'ipotesi (S - L), segue  $h_b = 0$ , in contraddizione con il precedente Lemma 6.2.1.  $\square$

Definiamo la **funzione di Green** per  $L$ :

$$\begin{aligned} G &: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \\ G(x, y) &:= \begin{cases} \frac{1}{W(a)} h_a(x) h_b(y) & \text{se } a \leq x \leq y \leq b, \\ \frac{1}{W(a)} h_a(y) h_b(x) & \text{se } a \leq y \leq x \leq b. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3)$$

**Lemma 6.2.3.** *La funzione reale  $G(x, y)$  definita in (6.3) è continua sul compatto  $[a, b] \times [a, b]$  (e quindi ivi anche uniformemente continua) e*

$$G(x, y) = G(y, x).$$

*Dimostrazione.* Ovvio. □

**Proposizione 6.2.4.** *Assunta l'ipotesi ( $\mathcal{S} - \mathcal{L}$ ), sia  $G$  la funzione di Green per  $L$  definita in (6.3). L'operatore integrale*

$$\begin{aligned} K : L^2([a, b]) &\rightarrow L^2([a, b]) \\ f &\mapsto K(f), \end{aligned} \tag{6.4}$$

dove

$$[K(f)](x) = \int_a^b G(x, y)f(y) dy$$

per ogni  $x \in [a, b]$ , è un operatore lineare, compatto e autoaggiunto in  $L^2([a, b])$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f \in L^2([a, b])$ . È ben definita la funzione reale

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto g(x) := \int_a^b G(x, y)f(y) dy < +\infty. \end{aligned}$$

Proviamo che  $g \in L^2([a, b])$ . Infatti,

$$\begin{aligned} \int_a^b |g(x)|^2 dx &= \int_a^b \left| \int_a^b G(x, y)f(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_a^b \left( \int_a^b |G(x, y)f(y)| dy \right)^2 dx \quad (\text{dis. di Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \int_a^b \left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right) \|f\|_{L^2([a, b])}^2 dx \\ &= \|f\|_{L^2([a, b])}^2 \int_a^b \left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right) dx < +\infty \end{aligned}$$

e quindi  $g \in L^2([a, b])$  e

$$\|g\|_{L^2([a, b])} \leq \|f\|_{L^2([a, b])} \left( \int_a^b \left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right) dx \right)^{1/2}.$$

Si può quindi considerare l'operatore

$$K : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$$

definito ponendo, per ogni  $f \in L^2([a, b])$  e per ogni  $x \in [a, b]$ ,

$$[K(f)](x) := \int_a^b G(x, y) f(y) dy.$$

$K$  è ovviamente lineare e, da quanto dimostrato, è continuo e

$$\|K\|_{B(L^2([a, b]))} \leq \left( \int_a^b \left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right) dx \right)^{1/2}.$$

Proviamo ora che  $K$  è compatto. Dimostriamo dapprima che

$$K(L^2([a, b])) \subset C^0([a, b]; \mathbb{R}).$$

Siano, allora,  $f \in L^2([a, b])$  e  $(x_n)_n$  una successione di  $[a, b]$  convergente ad un certo  $x \in [a, b]$  e proviamo che

$$[K(f)](x_n) \rightarrow [K(f)](x).$$

Poiché  $G$  è uniformemente continua sul compatto  $[a, b] \times [a, b]$  (per il Lemma 6.2.3), fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $(s, t), (\bar{s}, \bar{t}) \in [a, b] \times [a, b]$ :

$$|s - \bar{s}| < \delta, \quad |t - \bar{t}| < \delta \implies |G(s, t) - G(\bar{s}, \bar{t})| < \varepsilon. \quad (6.5)$$

Considerato  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq \nu$  risulti  $|x_n - x| < \delta$ , si ha, in particolare, per ogni  $n \geq \nu$  e per ogni  $y \in [a, b]$

$$|G(x_n, y) - G(x, y)| < \varepsilon.$$

Per ogni  $n \geq \nu$ , la funzione  $G(x_n, \cdot) - G(x, \cdot)$  è continua sul compatto  $[a, b]$  e quindi  $G(x_n, \cdot) - G(x, \cdot) \in L^2([a, b])$ . Allora, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ogni  $n \geq \nu$ :

$$\begin{aligned} |[K(f)](x_n) - [K(f)](x)| &\leq \int_a^b |G(x_n, y) - G(x, y)| \cdot |f(y)| dy \\ &\leq \left( \int_a^b |G(x_n, y) - G(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \|f\|_{L^2([a, b])} \\ &\leq \varepsilon (b - a)^{1/2} \|f\|_{L^2([a, b])}. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$  è così provato che  $K(f) \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ .

Dimostriamo, infine, che  $K$  è un operatore compatto. Sia  $(f_n)_n$  una successione limitata di funzioni di  $L^2([a, b])$ , con  $\|f_n\|_{L^2([a, b])} < 1$ , e sia

$$M := \max_{(x, y) \in [a, b] \times [a, b]} |G(x, y)|.$$

Allora, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [a, b]$ , si ha

$$\begin{aligned} |[K(f_n)](x)| &\leq \int_a^b |G(x, y)| \cdot |f_n(y)| dy \quad (\text{dis. di Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \left( \int_a^b |G(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \|f_n\|_{L^2([a, b])} \leq M(b-a)^{1/2} \end{aligned}$$

e quindi la successione  $(K(f_n))_n$  è equilimitata. Inoltre,  $(K(f_n))_n$  è uniformemente equicontinua. Infatti, sia  $\varepsilon > 0$  fissato e scegliamo  $\delta > 0$  e  $x, \bar{x}, y \in [a, b]$  tali che  $|x - \bar{x}| < \delta$ . Allora, dalla (6.5), risulta  $|G(x, y) - G(\bar{x}, y)| < \varepsilon$  e quindi

$$\begin{aligned} |[K(f_n)](x) - [K(f_n)](\bar{x})| &\leq \int_a^b |G(x, y) - G(\bar{x}, y)| \cdot |f_n(y)| dy \\ &\leq \left( \int_a^b |G(x, y) - G(\bar{x}, y)|^2 dy \right)^{1/2} \|f_n\|_{L^2([a, b])} \\ &\leq \varepsilon(b-a)^{1/2}. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ , risulta così provato che la successione  $(K(f_n))_n$  è uniformemente equicontinua.

Per il Teorema di Ascoli-Arzelà 3.4.3,  $(K(f_n))_n$  ammette una estratta  $(K(f_{n_k}))_k$  uniformemente convergente a una funzione  $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R}) \subset L^2([a, b])$ , per cui, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che, per ogni  $k \geq \nu$ ,  $|[K(f_{n_k})](x) - f(x)| < \varepsilon$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Resta da provare che  $(K(f_{n_k}))_k$  converge a  $f$  anche in  $L^2([a, b])$ . Infatti, per ogni  $k \geq \nu$ , risulta

$$\begin{aligned} \|K(f_{n_k}) - f\|_{L^2([a, b])} &= \left( \int_a^b |[K(f_{n_k})](x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon(b-a)^{1/2}. \end{aligned}$$

Che l'operatore  $K$  sia autoaggiunto in  $L^2([a, b])$  (cioè che, per ogni  $f, g \in L^2([a, b])$ , si abbia  $(K(f), g)_{L^2([a, b])} = (f, K(g))_{L^2([a, b])}$ ) segue dal fatto che  $G$  è reale e che  $G(x, y) = G(y, x)$ .  $\square$

**Proposizione 6.2.5.** Assunta l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , l'operatore integrale  $K$ , definito in (6.4), verifica le seguenti proprietà:

- (i)  $Im(K) = \mathcal{D}$ ;
- (ii)  $L(K(f)) = f$  per ogni  $f \in L^2([a, b])$  (i.e.  $K$  è l'inverso destro di  $L$ );
- (iii)  $K(L(h)) = h$  per ogni  $h \in \mathcal{D}$  (i.e.  $K$  è l'inverso sinistro di  $L$ ).

*Dimostrazione.* Sia  $f \in L^2([a, b])$ ; posto  $K(f) =: h$ , proviamo dapprima che  $h \in \mathcal{D}$  (cioè  $Im(K) \subseteq \mathcal{D}$ ). Poniamo

$$H_a(x) := \frac{1}{W(a)} \int_a^x h_a(y)f(y) dy, \quad H_b(x) := \frac{1}{W(a)} \int_x^b h_b(y)f(y) dy.$$

Allora

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_a^b G(x, y)f(y) dy \\ &= \frac{1}{W(a)} \int_a^x h_a(y)h_b(x)f(y) dy + \frac{1}{W(a)} \int_x^b h_a(x)h_b(y)f(y) dy \\ &= H_a(x)h_b(x) + h_a(x)H_b(x). \end{aligned}$$

Derivando si ha

$$\begin{aligned} h' &= \frac{1}{W(a)}(h_a f)h_b + H_a h'_b + h'_a H_b + h_a \left( -\frac{1}{W(a)} h_b f \right) \\ &= H_a h'_b + h'_a H_b \quad \text{q.o. in } [a, b] \end{aligned}$$

(quindi,  $h$  è assolutamente continua in  $[a, b]$ ). Proviamo che risulta

$$h' = H_a h'_b + h'_a H_b \quad \text{ovunque in } [a, b].$$

Infatti, per ogni  $x \in [a, b]$ , poniamo

$$\phi(x) := H_a(x)h'_b(x) + h'_a(x)H_b(x), \quad \psi(x) := h(a) + \int_a^x \phi(y) dy.$$

Allora,  $h$  e  $\psi$  sono assolutamente continue,  $h(a) = \psi(a)$  e  $h'(x) = \psi'(x)$  q.o. in  $[a, b]$ . Pertanto  $h(x) = \psi(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Ma  $\psi$  ha derivata continua  $\phi$ , pertanto anche  $h$  ha derivata continua in  $[a, b]$ .

Derivando  $h' = H_a h'_b + h'_a H_b$ , si ha q.o. in  $[a, b]$

$$h'' = \frac{1}{W(a)}(h_a f)h'_b + H_a h''_b + h''_a H_b + h'_a \left( -\frac{1}{W(a)} h_b f \right);$$

poiché tutti gli addendi sono in  $L^2([a, b])$ , anche  $h'' \in L^2([a, b])$ . Poiché  $H_a(a) = 0$  e  $h_a \in \mathcal{D}_a$ , risulta

$$\begin{aligned} \alpha h(a) + \alpha_1 h'(a) &= \alpha h_a(a)H_b(a) + \alpha_1 h'_a(a)H_b(a) \\ &= [\alpha h_a(a) + \alpha_1 h'_a(a)] H_b(a) = 0. \end{aligned}$$

Quindi  $h \in \mathcal{D}_a$ . Analogamente, si prova che  $h \in \mathcal{D}_b$ . Pertanto  $h \in \mathcal{D}$  e in definitiva  $Im(K) \subseteq \mathcal{D}$ .

Proviamo che  $L(K(f)) = f$ . Se  $h := K(f)$ ,

$$\begin{aligned} L(K(f)) &= L(h) = -h'' + qh \\ &= - \left[ \frac{1}{W(a)} h_a h_b' f + H_a h_b'' + h_a'' H_b - \frac{1}{W(a)} h_a' h_b f \right] + q [H_a h_b + h_a H_b] \\ &= [-h_b'' + q h_b] H_a + [-h_a'' + q h_a] H_b + \frac{1}{W(a)} [h_a' h_b - h_a h_b'] f = f \end{aligned}$$

poiché  $L(h_a) = L(h_b) = 0$  e  $W = h_a' h_b - h_a h_b' = W(a)$ . Risulta così provata (ii).

Se  $h \in \mathcal{D}$ , allora  $L(h) \in L^2([a, b])$  e  $K(L(h)) \in \mathcal{D}$ . Pertanto, per la prima parte della dimostrazione,  $L(K(L(h))) = L(h)$ . Allora

$$L(h - K(L(h))) = 0,$$

da cui, per l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , segue che  $h - K(L(h)) = 0$ , cioè  $K(L(h)) = h$  e quindi  $h \in \text{Im}(K)$ . Risulta così provata (iii) e, poiché  $\mathcal{D} \subseteq \text{Im}(K)$ , è anche completata la dimostrazione di (i).  $\square$

Visto il ruolo fondamentale svolto dall'operatore  $K$  nell'analisi spettrale di  $L$ , è conveniente enunciare in un unico teorema i risultati delle Proposizioni 6.2.4 e 6.2.5.

**Teorema 6.2.6.** *Assunta l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , l'operatore integrale  $K$ , definito in (6.4), verifica le seguenti proprietà:*

- (i)  $K$  è un operatore lineare, compatto e autoaggiunto in  $L^2([a, b])$ ;
- (ii)  $\text{Im}(K) = \mathcal{D}$ ;
- (iii)  $L(K(f)) = f$  per ogni  $f \in L^2([a, b])$ ;
- (iv)  $K(L(h)) = h$  per ogni  $h \in \mathcal{D}$ .

**Osservazione 6.2.7.** Dai punti (ii), (iii) e (iv) del Teorema 6.2.6 segue che  $K = L^{-1}$ .

**Osservazione 6.2.8.** Nel precedente Teorema 6.2.6 è manifesta l'idea principale, cioè il fatto che all'operatore inverso  $K = L^{-1}$  si può applicare, per il punto (i), il Teorema spettrale 5.10.1.

**Corollario 6.2.9.** *Assunta l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , se  $v \in L^2([a, b])$  e  $K(v) = \lambda v$  per qualche  $\lambda \neq 0$ , allora  $v \in \mathcal{D}$  e*

$$L(v) = \frac{1}{\lambda} v;$$

*inoltre, se  $v \in \mathcal{D}$  e  $L(v) = \frac{1}{\lambda} v$ , allora  $K(v) = \lambda v$  (cioè:  $\lambda \neq 0$  è un autovalore di  $K$  se e solo se  $\frac{1}{\lambda}$  è autovalore di  $L$ ).*

*Dimostrazione.* Segue dal Teorema 6.2.6. Infatti, per (ii) e (iii), da  $K(v) = \lambda v$  segue che  $v \in \mathcal{D}$  e

$$v = L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

e quindi  $L(v) = \frac{1}{\lambda}v$ .

Inoltre, se  $v \in \mathcal{D}$  e  $L(v) = \frac{1}{\lambda}v$ , allora, per (iv)

$$v = \frac{1}{\lambda}K(v)$$

e quindi  $K(v) = \lambda v$ . □

**Lemma 6.2.10.** *Assunta l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , se  $\lambda \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ , allora  $\dim(\ker(K - \lambda I)) = 1$  (cioè, ciascun autovalore  $\lambda \neq 0$  di  $K$  ha molteplicità 1).*

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che ci siano due funzioni linearmente indipendenti  $h_1, h_2 \in \ker(K - \lambda I)$ . Per il Corollario 6.2.9,  $h_1$  e  $h_2$  sono soluzioni dell'equazione

$$-h'' + \left(q - \frac{1}{\lambda}\right)h = 0.$$

Poiché questa è una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, ogni sua soluzione è combinazione lineare di  $h_1$  e  $h_2$ . Ma  $h_1, h_2 \in \mathcal{D}$ , quindi esse soddisfano le condizioni ai limiti (6.2). Tuttavia, possiamo determinare una soluzione di questa equazione soddisfacente condizioni iniziali nel punto  $a$  e pertanto non verificante le condizioni (6.2). Questa contraddizione mostra che non possono esserci in  $\ker(K - \lambda I)$  due funzioni  $h_1, h_2$  linearmente indipendenti. □

L'operatore inverso di  $L$ ,  $K = L^{-1}$ , è un ingrediente teorico nello studio del problema di Sturm-Liouville. Ora, convertiamo i precedenti risultati direttamente in termini di  $L$ . La stretta relazione che connette lo spettro di  $L$  e del suo inverso  $K$  (cfr. Corollario 6.2.9) permette di concludere l'analisi del problema di Sturm-Liouville, come provato nel seguente teorema.

**Teorema 6.2.11 (degli autovalori, di Sturm-Liouville).** *Assunta l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$ , esistono una successione reale  $(\mu_n)_n$  e una base ortonormale (sistema ortonormale completo)  $(v_n)_n$  di  $L^2([a, b])$  tali che:*

$$(a) \quad 0 < |\mu_1| < |\mu_2| < \dots \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |\mu_n| = +\infty;$$

(b)  $v_n \in \mathcal{D}$  e  $L(v_n) = \mu_n v_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (cioè  $v_n$  è autofunzione relativa all'autovalore  $\mu_n$  per l'operatore  $L$  in  $\mathcal{D}$ ); ogni autovalore  $\mu_n$  di  $L$  è semplice;

- (c) se  $\mu \neq \mu_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , allora, per ogni  $f \in L^2([a, b])$ , esiste un'unica  $h \in \mathcal{D}$  tale che  $L(h) - \mu h = f$ ;
- (d) se  $\mu = \mu_n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ , allora, per ogni  $f \in L^2([a, b])$ , le seguenti proposizioni sono equivalenti:
- (i) esiste  $h \in \mathcal{D}$  tale che  $L(h) - \mu h = f$ ;
- (ii)  $(f, v_n)_{L^2([a, b])} = 0$ .

Se  $(f, v_n)_{L^2([a, b])} = 0$ , due qualunque soluzioni di  $L(h) - \mu h = f$  differiscono per un multiplo di  $v_n$ .

*Dimostrazione.* Per il punto (i) del Teorema 6.2.6, all'operatore integrale  $K$  possiamo applicare il Teorema spettrale 5.10.1. Pertanto, esistono una base numerabile e ortonormale  $(v_n)_n$  di  $L^2([a, b])$  formata da autovettori di  $K$  (base spettrale) e una successione di autovalori reali e distinti  $(\lambda_n)_n$ , con  $\lambda_n \neq 0$ ,  $\lambda_n \rightarrow 0$  e  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$  tali che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K(v_n) = \lambda_n v_n$ ,  $\dim(\ker(K - \lambda_n I)) = 1$  (per il Lemma 6.2.10) e, per ogni  $f \in L^2([a, b])$ ,

$$K(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (f, v_n)_{L^2([a, b])} v_n.$$

I punti (a) e (b) seguono, allora, dal Corollario 6.2.9 e dal Lemma 6.2.10. Infatti, per il Corollario 6.2.9, da  $K(v_n) = \lambda_n v_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , segue che  $v_n \in \mathcal{D}$  e  $L(v_n) = \frac{1}{\lambda_n} v_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Posto  $\mu_n := \frac{1}{\lambda_n}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , risulta (poiché  $\lambda_n \neq 0$ ,  $\lambda_n \rightarrow 0$ )

$$0 < |\mu_1| < |\mu_2| < \dots \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |\mu_n| = +\infty,$$

$L(v_n) = \mu_n v_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e, per il Lemma 6.2.10, essendo ogni autovalore  $\lambda_n$  di  $K$  semplice, risulta che anche ogni autovalore  $\mu_n$  di  $L$  è semplice.

Passiamo alla dimostrazione dei punti (c) e (d).

Se  $\mu \neq \mu_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{\mu} \notin \sigma_p(K)$ , cioè,  $\frac{1}{\mu}I - K$  è iniettivo. Poiché  $K$  è compatto,  $\frac{1}{\mu}I - K$  è anche suriettivo, per il Teorema 5.4.1(iv). In definitiva,  $\frac{1}{\mu}I - K$  è bigettivo. Pertanto, se  $f \in L^2([a, b])$ , esiste un'unica  $h \in L^2([a, b])$  tale che  $K(f) = \left(\frac{1}{\mu}I - K\right)(h)$ ; quindi  $h \in \mathcal{D}$  e  $f = L\left(\frac{h}{\mu}\right) - \mu\left(\frac{h}{\mu}\right)$ . Risulta così provato il punto (c).

Per provare il punto (d), supponiamo  $\mu = \mu_n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ ; sia allora  $f \in L^2([a, b])$  ed esista, per l'ipotesi (i) in (d),  $h \in \mathcal{D}$  tale che  $L(h) - \mu_n h = f$ . Allora, per il punto (iv) del Teorema 6.2.6 risulta

$$h - \mu_n K(h) = K(f)$$

Quindi

$$\begin{aligned} (K(f), v_n)_{L^2([a,b])} &= (h, v_n)_{L^2([a,b])} - \mu_n (K(h), v_n)_{L^2([a,b])} \\ &= (h, v_n)_{L^2([a,b])} - \mu_n (h, K(v_n))_{L^2([a,b])} \\ &= (h, v_n)_{L^2([a,b])} - \underbrace{\mu_n \lambda_n}_{=1} (h, v_n)_{L^2([a,b])} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto

$$0 = (K(f), v_n)_{L^2([a,b])} = (f, K(v_n))_{L^2([a,b])} = \lambda_n (f, v_n)_{L^2([a,b])},$$

dunque  $(f, v_n)_{L^2([a,b])} = 0$ . Resta così provata l'implicazione (i)  $\implies$  (ii) del punto (d).

Viceversa, sia, per l'ipotesi (ii) in (d),  $(f, v_n)_{L^2([a,b])} = 0$ . Poiché

$$\ker(K - \lambda_n I) = \mathbb{C}v_n,$$

$K_1 := K|_{(\mathbb{C}v_n)^\perp}$  è un operatore lineare, compatto e autoaggiunto in  $(\mathbb{C}v_n)^\perp$  e  $\lambda_n \notin \sigma_p(K_1)$ . Pertanto,  $K_1 - \lambda_n I$  è iniettivo ed è anche suriettivo per il Teorema 5.4.1(iv). Dunque,  $\text{Im}(K_1 - \lambda_n I) = (\mathbb{C}v_n)^\perp$  e  $K_1 - \lambda_n I$  è bigettivo da  $(\mathbb{C}v_n)^\perp$  su  $(\mathbb{C}v_n)^\perp$ . Come nella dimostrazione del precedente punto (c), essendo per ipotesi  $(f, v_n)_{L^2([a,b])} = 0$  (quindi  $f \in (\mathbb{C}v_n)^\perp$ ), esiste un'unica  $h \in (\mathbb{C}v_n)^\perp$  tale che  $L(h) - \mu_n h = f$ . Resta così provata l'implicazione (ii)  $\implies$  (i) del punto (d).

Osserviamo che anche  $h + cv_n$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) è una soluzione di  $L(h) - \mu_n h = f$ . Allora, se  $h_1$  e  $h_2$  sono due soluzioni, risulta  $h_1 - h_2 \in \ker(L - \mu_n I)$  e quindi  $h_1 - h_2 = cv_n$ , con  $c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Osservazione 6.2.12.** Dalla dimostrazione del punto (b) del teorema precedente, si evince che **gli autovalori di  $L$  sono i reciproci di quelli di  $K$ , mentre le autofunzioni di  $L$  sono le stesse di  $K$**  (e quindi gli autospazi associati hanno dimensione uno).

**Osservazione 6.2.13.** Dalla Osservazione 6.2.7, segue che, per il punto (c) del Teorema precedente 6.2.11, se  $\mu \neq \mu_n$  (cioè, se  $\mu$  non è autovalore di  $L$ ), si può rappresentare la soluzione  $h \in \mathcal{D}$  di  $L(h) - \mu h = f$  attraverso l'operatore integrale  $K$ . Se  $h_a \in \mathcal{D}_a$  e  $h_b \in \mathcal{D}_b$  sono due soluzioni linearmente indipendenti di  $L(h) - \mu h = 0$ , allora, per ogni  $f \in L^2([a, b])$  la funzione

$$h(x) = [K(f)](x) = \int_a^b G(x, y)f(y) dy$$

è l'unica soluzione del problema ai limiti per  $h \in \mathcal{D}$  e  $L(h) - \mu h = f$ .

In particolare, se  $\mu = 0$  non è autovalore di  $L$ , l'unica soluzione  $h \in \mathcal{D}$  di  $L(h) = f$  è data da

$$h := L^{-1}(f) = K(f),$$

cioè

$$h(x) = [K(f)](x) = \int_a^b G(x, y)f(y) dy$$

per ogni  $x \in [a, b]$ .

**Osservazione 6.2.14.** Cosa succede se l'ipotesi  $(\mathcal{S} - \mathcal{L})$  non sussiste (cioè, se  $\ker L \neq \{0\}$ )? In questo caso è possibile trovare un numero reale  $c$  tale che  $\ker(L - cI) = \{0\}$ . Allora, il precedente Teorema 6.2.11 si applicherà ancora sostituendo  $q$  con  $q - c$ .

Per dimostrare quanto asserito, proviamo che

- (a) Se  $h, g \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ , con  $h', g'$  assolutamente continue e  $h'', g'' \in L^2([a, b])$ , allora vale la *formula di Green*

$$\int_a^b (h''g - hg'') dx = [h'(b)g(b) - h(b)g'(b)] - [h'(a)g(a) - h(a)g'(a)].$$

- (b) Se  $h, g \in \mathcal{D}$ , allora

$$(L(h), g)_{L^2([a, b])} = (h, L(g))_{L^2([a, b])}$$

(cioè  **$L$  è autoaggiunto in  $\mathcal{D}$** ).

- (c) Se  $h, g \in \mathcal{D}$  e  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\mu_1 \neq \mu_2$ ,  $h \in \ker(L - \mu_1 I)$  e  $g \in \ker(L - \mu_2 I)$ , allora  $h \perp g$  (cioè  $(h, g)_{L^2([a, b])} = 0$ ).

- (d) Esiste un numero reale  $c$  tale che

$$\ker(L - cI) = \{0\}.$$

*Dimostrazione.*

- (a) Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b (h''g - hg'') dx &= [h'g]_a^b - \int_a^b h'g' dx - [g'h]_a^b + \int_a^b g'h' dx \\ &= [h'(b)g(b) - h(b)g'(b)] - [h'(a)g(a) - h(a)g'(a)]. \end{aligned}$$

- (b) La simmetria dell'operatore  $L$  in  $\mathcal{D}$  segue dal punto (a) e dalle condizioni ai limiti (6.2). Infatti

$$\begin{aligned} (h, L(g))_{L^2([a,b])} - (L(h), g)_{L^2([a,b])} &= \int_a^b (h''g - g''h) dx \\ &= [h'(b)g(b) - h(b)g'(b)] - [h'(a)g(a) - h(a)g'(a)] = 0 \end{aligned}$$

poiché, per ipotesi,  $h$  e  $g$  verificano (6.2).

- (c) Dall'ipotesi segue che

$$(L(h), g)_{L^2([a,b])} - \mu_1(h, g)_{L^2([a,b])} = 0$$

e

$$(L(g), h)_{L^2([a,b])} - \mu_2(g, h)_{L^2([a,b])} = 0;$$

pertanto, per il punto (b),

$$(\mu_2 - \mu_1)(h, g)_{L^2([a,b])} = 0,$$

da cui la tesi (essendo  $\mu_1 \neq \mu_2$ ).

- (d) Essendo il problema di Sturm-Liouville autoaggiunto,  $\sigma_p(L)$  è costituito da un insieme di numeri reali al più numerabile senza alcun punto di accumulazione al finito.<sup>5</sup> Allora, è sufficiente prendere  $c \notin \sigma_p(L)$ .

□

**Osservazione 6.2.15.** Il Teorema 6.2.11 continua a valere se invece dell'equazione (6.1) si considera l'equazione

$$-(p(x)h'(x))' + (q(x) - \mu r(x))h(x) = f(x) \quad \text{in } ]a, b[ \quad (6.6)$$

(dove  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $p \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ ,  $p(x) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ ,  $q \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ ,  $r \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ ,  $r > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ ,  $f \in L^2([a, b])$ ) con le stesse condizioni ai limiti (6.2). Evidentemente, nell'equazione (6.1) risulta  $p(x) = r(x) = 1$  in  $[a, b]$ .

**Osservazione 6.2.16.** Più in generale, per l'equazione (6.6) si possono considerare le condizioni ai limiti

$$\begin{cases} \alpha_{00}h(a) + \alpha_{01}h'(a) = \beta_{00}h(b) + \beta_{01}h'(b) \\ \alpha_{10}h(a) + \alpha_{11}h'(a) = \beta_{10}h(b) + \beta_{11}h'(b) \end{cases} \quad (6.7)$$

<sup>5</sup>Cfr. in [9], Teorema 2.1 nel Capitolo 7.

(in cui rientrano, ad esempio, le *condizioni di periodicità*  $h(a) = h(b)$ ,  $h'(a) = h'(b)$ ). Se

$$p(b) \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = p(a) \cdot \det \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} \\ \beta_{10} & \beta_{11} \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

l'equazione (6.6) con condizioni (6.7) è un problema autoaggiunto e vale ancora per tale sistema (regolare, di Sturm-Liouville) il Teorema degli autovalori, con l'unica variante che gli autospazi associati agli autovalori non nulli possono avere dimensione due (cfr. Esempio 6.3.7).

### 6.2.1 Proprietà spettrali del sistema di Sturm-Liouville con condizioni omogenee di Dirichlet e caratterizzazione variazionale degli autovalori

Sia  $q \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ ,  $q \geq 0$ ; consideriamo il seguente problema di Sturm-Liouville con condizioni omogenee di Dirichlet:

$$\begin{cases} L(h) = -h'' + qh = \mu h & \text{in } ]a, b[, \\ h(a) = 0, \\ h(b) = 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Dimostriamo che **tutti gli autovalori di (6.9) sono positivi**.

Se  $\mu$  è autovalore di  $L$  e  $h \neq 0$  la corrispondente autofunzione, si ha

$$h \in \mathcal{D}_{Dir} := \left\{ h \in C^1([a, b]; \mathbb{R}); h' \in AC([a, b]; \mathbb{R}), \right. \\ \left. h'' \in L^2([a, b]), h(a) = h(b) = 0 \right\},$$

dove  $AC([a, b]; \mathbb{R})$  denota lo spazio delle funzioni assolutamente continue da  $[a, b]$  in  $\mathbb{R}$ , e

$$L(h) = -h'' + qh = \mu h \quad \text{in } ]a, b[. \quad (6.10)$$

Moltiplichiamo (6.10) per l'autofunzione  $h$  e integriamo tra  $a$  e  $b$ . Risulta

$$\int_a^b (-h'' + qh)h \, dx = \mu \int_a^b h^2 \, dx$$

e, poiché  $h(a) = h(b) = 0$ , si ha (integrando per parti)

$$\int_a^b (h'^2 + qh^2) \, dx = \mu \int_a^b h^2 \, dx,$$

da cui

$$\mu = \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) \, dx}{\int_a^b h^2 \, dx} > 0,$$

poiché  $q \geq 0$  e  $h$  non è costante (altrimenti  $h$  sarebbe identicamente zero). In particolare,  $\mu = 0$  non è autovalore.

Sono note molte **proprietà spettrali per il problema (6.9)**. Ne menzioniamo alcune:

- (i) Ogni autovalore  $\mu_n$  ha molteplicità uno (cfr. Corollario 6.2.9 e Lemma 6.2.10).
- (ii) L'autofunzione  $v_n$  corrispondente a  $\mu_n$  possiede esattamente  $(n-1)$  zeri nell'intervallo **aperto**  $]a, b[$ ; in particolare, la prima autofunzione  $v_1$  ha segno costante in  $]a, b[$  (usualmente si assume  $v_1 > 0$  in  $]a, b[$ ), cfr. [19].
- (iii) Il rapporto  $\frac{\mu_n}{n^2}$  converge per  $n \rightarrow +\infty$  ad un limite positivo.

Al fine di esplicitare i Principi del minimo e di min-max per l'operatore  $L$ , rispettivamente tramite il punto (ii) della Proposizione 6.1.4 e i punti (ii) e (iv) del Teorema 6.1.5, premettiamo la seguente osservazione.

**Osservazione 6.2.17.** Lo spazio  $\mathcal{D}_{Dir}$ , col prodotto scalare di  $L^2([a, b])$ , è sottospazio chiuso di Hilbert di  $L^2([a, b])$ . Muniamo, ora,  $\mathcal{D}_{Dir}$  anche del prodotto scalare

$$(h, g)_{\mathcal{D}_{Dir}} := (L(h), g)_{L^2([a, b])} = \int_a^b (h'g' + qhg) dx, \quad (6.11)$$

dove la seconda uguaglianza si ottiene integrando per parti, e indichiamo con  $|\cdot|_{\mathcal{D}_{Dir}}$  la norma indotta da tale prodotto scalare.

Anche rispetto a tale prodotto scalare, lo spazio  $\mathcal{D}_{Dir}$  è di Hilbert. L'operatore lineare, compatto e autoaggiunto  $K$ , definito da (6.4), soddisfa l'uguaglianza

$$(K(h), g)_{\mathcal{D}_{Dir}} = (L(K(h)), g)_{L^2([a, b])} = (h, g)_{L^2([a, b])} = \int_a^b hg dx \quad (6.12)$$

per ogni  $h, g \in \mathcal{D}_{Dir}$ , dove abbiamo sfruttato il punto (ii) della Proposizione 6.2.5.

Il quoziente di Rayleigh di  $L$ , per ogni  $h \in \mathcal{D}_{Dir} \setminus \{0\}$  è il rapporto

$$\frac{(L(h), h)_{L^2([a, b])}}{\|h\|_{L^2([a, b])}^2} = \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} \quad (6.13)$$

Da (6.11) e (6.12), con la scelta  $g = h$ , deduciamo che il **reciproco del quoziente di Rayleigh di  $K$  in  $\mathcal{D}_{Dir}$**  coincide col **quoziente di Rayleigh di  $L$  in  $L^2([a, b])$** , cioè, per ogni  $h \in \mathcal{D}_{Dir} \setminus \{0\}$ :

$$\frac{|h|_{\mathcal{D}_{Dir}}^2}{(K(h), h)_{\mathcal{D}_{Dir}}} = \frac{(L(h), h)_{L^2([a, b])}}{\|h\|_{L^2([a, b])}^2} \left( = \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} \right). \quad (6.14)$$

Inoltre, per il Corollario 6.2.9,  $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$  ( $\mu_n > 0$ ) è autovalore di  $L$  e  $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} > 0$  è autovalore di  $K$ .

In virtù della precedente osservazione, i **Principi del minimo** per gli autovalori del problema (6.9) seguono dal punto (ii) della Proposizione 6.1.4, tenendo conto di (6.14). Pertanto, il primo autovalore di  $L$  è dato da

$$\mu_1 = \min_{h \in \mathcal{D}_{Dir} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} \right\};$$

inoltre, per ogni  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \mu_n &= \min \left\{ \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} : h \in \mathcal{D}_{Dir} \setminus \{0\}, \right. \\ &\quad \left. \int_a^b h v_1 dx = 0, \dots, \int_a^b h v_{n-1} dx = 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} : h \in \mathcal{D}_{Dir} \setminus \{0\}, h \in (\text{span} \{v_1, \dots, v_{n-1}\})^\perp \right\} \end{aligned}$$

dove  $v_j$  è l'autofunzione relativa all'autovalore  $\mu_j$  per ogni  $j = 1, \dots, n-1$ .

Sempre in virtù dell'Osservazione 6.2.17, i **Principi del min-max** e **del max-min** di Fischer-Courant per gli autovalori del problema (6.9) si ottengono applicando i punti (ii) e (iv) del Teorema 6.1.5, tenendo conto di (6.14). Pertanto, per ogni  $n \geq 1$ , risulta

$$\begin{aligned} \mu_n &= \min_{\substack{\Sigma_n \subset \mathcal{D}_{Dir} \\ \dim \Sigma_n = n}} \max_{h \in \Sigma_n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} \right\} \\ &= \max_{\substack{\Sigma_{n-1} \subset \mathcal{D}_{Dir} \\ \dim \Sigma_{n-1} = n-1}} \min_{h \in \Sigma_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_a^b (h'^2 + qh^2) dx}{\int_a^b h^2 dx} \right\}. \end{aligned}$$

### 6.3 Esempi di problemi agli autovalori

**Esempio 6.3.1 (condizioni ai limiti di Dirichlet omogenee).** Consideriamo l'operatore  $L(h) = -h''$  in  $[0, 1]$  con condizioni omogenee di Dirichlet negli estremi, cioè il problema ai limiti<sup>6</sup>

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = h(1) = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

Abbiamo già provato nella Sezione 6.2.1 che risulta  $\mu > 0$ . Inoltre, l'integrale generale dell'equazione  $-h'' - \mu h = 0$  è  $h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x)$ . Per le condizioni ai limiti

$$h(0) = c_1 = 0, \quad h(1) = c_2 \sin(\sqrt{\mu}) = 0,$$

con  $c_2 \neq 0$ , e quindi  $\sin(\sqrt{\mu}) = 0$ , ossia  $\mu_n = \pi^2 n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e le autofunzioni sono  $v_n(x) = \sin(n\pi x)$ , che costituiscono un sistema ortogonale completo in  $L^2([0, 1])$  (ortonormale, considerando le funzioni  $\sqrt{2}v_n$ ), di cui gli zeri sono in  $x = 0$ ,  $x = 1$  e, se  $n \geq 2$ , anche in  $x_k = \frac{k}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Per il Teorema 6.2.11(d), se  $\mu = \pi^2 n^2$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ , per ogni  $f \in L^2([0, 1])$  il problema

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = f & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = h(1) = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni non nulle se e solo se  $(f, v_n)_{L^2([0,1])} = \int_0^1 \sin(n\pi x) f(x) dx = 0$ .

Per il Teorema 6.2.11(c), se  $\mu \neq \pi^2 n^2$ , il problema in esame ha un'unica soluzione per ogni  $f \in L^2([0, 1])$ . In particolare,  $\mu = 0$  non è autovalore; allora, per ogni  $f \in L^2([0, 1])$ , l'unica soluzione di

$$\begin{cases} h'' = f & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = h(1) = 0 \end{cases}$$

è data da (cfr. Osservazione 6.2.13)

$$h(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \quad \text{per ogni } x \in [0, 1],$$

<sup>6</sup>Col metodo di separazione delle variabili, se consideriamo la conduzione termica in una barra con gli estremi fissi

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } ]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \end{cases}$$

posto  $u(x, t) := h(x)v(t)$ , la funzione  $h$  della sola variabile spaziale  $x$  soddisfa il problema (6.15).

dove la funzione di Green per  $L$ , essendo

$$h_0(x) = x, \quad h_1(x) = 1 - x, \quad W(x) = -1,$$

è data da

$$G(x, y) = \begin{cases} -x(1-y) & \text{se } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ -y(1-x) & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$$

pertanto

$$h(x) = -(1-x) \int_0^x yf(y) dy - x \int_x^1 (1-y)f(y) dy.$$

**Osservazione 6.3.2.** Per lo stesso operatore differenziale dell'esempio precedente, gli autovalori variano con le specifiche condizioni ai limiti imposte.

**Esempio 6.3.3 (condizioni ai limiti di Neumann omogenee).** Consideriamo l'operatore  $L(h) = -h''$  in  $[0, \pi]$  con condizioni omogenee di Neumann negli estremi, cioè il problema ai limiti<sup>7</sup>

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, \pi[ \\ h'(0) = h'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

Gli autovalori  $\mu$  risultano tutti non negativi ( $\mu \geq 0$ ; se  $\mu < 0$ , allora non avremmo soluzioni non nulle). Le autofunzioni si trovano risolvendo l'equazione differenziale  $-h'' - \mu h = 0$ , il cui integrale generale è

$$h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x).$$

Derivando si ottiene

$$h'(x) = -c_1 \sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}x),$$

da cui, imponendo le condizioni al contorno, si ha

$$h'(0) = c_2 \sqrt{\mu} = 0 \implies c_2 = 0$$

---

<sup>7</sup>Col metodo di separazione delle variabili, se consideriamo la conduzione termica in una barra con gli estremi isolati in modo che non ci sia flusso termico

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } ]0, \pi[, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \end{cases}$$

posto  $u(x, t) := h(x)v(t)$ , la funzione  $h$  della sola variabile spaziale  $x$  soddisfa il problema (6.16).

e, poiché  $c_1 \neq 0$  (affinché sia  $h \neq 0$ ), si ha

$$h'(\pi) = -c_1 \sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0 \implies \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0 \implies \sqrt{\mu}\pi = 0, \pi, 2\pi, \dots,$$

perciò

$$\mu_n = (n-1)^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

In particolare, per  $\mu_1 = 0$ , le autofunzioni sono le funzioni costanti non nulle (ad esempio,  $v_1(x) = 1$  per ogni  $x \in [0, \pi]$ ) e, per ogni  $n \geq 2$ ,  $v_n(x) = \cos((n-1)x)$ , di cui gli zeri sono  $x_k = \frac{(2k-1)\pi}{2(n-1)}$ , con  $k = 1, \dots, n-1$ .

**Esempio 6.3.4 (condizioni ai limiti miste Dirichlet-Neumann).** Consideriamo l'operatore  $L(h) = -h''$  in  $[0, 1]$  con condizioni miste Dirichlet-Neumann negli estremi, cioè il problema ai limiti<sup>8</sup>

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = 0 \\ h'(1) = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

Questo problema ha soluzioni *non nulle* solo se

$$\mu_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

e le autofunzioni sono

$$v_n(x) = \sin \left[ \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right) x \right],$$

che costituiscono un sistema ortogonale completo in  $L^2([0, 1])$ . Per il Teorema 6.2.11(d), se  $\mu = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ , per ogni  $f \in L^2([0, 1])$  il problema

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = f & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = 0 \\ h'(1) = 0 \end{cases}$$

<sup>8</sup>Col metodo di separazione delle variabili, se consideriamo la conduzione termica in una barra con l'estremo 0 fisso e l'estremo 1 isolato in modo che non ci sia flusso termico

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } ]0, \pi[, \\ u(0, t) = u_x(1, t) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \end{cases}$$

posto  $u(x, t) := h(x)v(t)$ , la funzione  $h$  della sola variabile spaziale  $x$  soddisfa il problema (6.17).

ha soluzioni non nulle se e solo se

$$(f, v_n)_{L^2([0,1])} = \int_0^1 \sin \left[ \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right) x \right] \cdot f(x) dx = 0;$$

mentre, per il Teorema 6.2.11(c), se  $\mu \neq \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), il problema

$$\begin{cases} -h'' - \mu = f & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = 0 \\ h'(1) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione per ogni  $f \in L^2([0, 1])$ . In particolare,  $\mu = 0$  non è autovalore; allora, per ogni  $f \in L^2([0, 1])$ , l'unica soluzione di

$$\begin{cases} h'' = f & \text{in } ]0, 1[ \\ h(0) = h'(1) = 0 \end{cases}$$

è data da

$$h(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \quad \text{per ogni } x \in [0, 1],$$

dove la funzione di Green per  $L$ , essendo, per ogni  $x \in [0, 1]$ ,

$$h_0(x) = x, \quad h_1(x) = 1, \quad W(x) = -1,$$

è data da

$$G(x, y) = \begin{cases} -x & \text{se } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ -y & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1; \end{cases}$$

pertanto

$$h(x) = - \int_0^x y f(y) dy - x \int_x^1 f(y) dy.$$

**Esempio 6.3.5 (condizioni ai limiti miste Dirichlet-Robin).** Consideriamo l'operatore  $L(h) = -h''$  in  $[0, \pi]$  con condizioni miste Dirichlet-Robin negli estremi, cioè il problema ai limiti<sup>9</sup>

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, \pi[ \\ h(0) = 0 \\ h(\pi) + h'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

<sup>9</sup>Col metodo di separazione delle variabili, se consideriamo la conduzione termica in una barra con l'estremo 0 fisso e l'estremo  $\pi$  parzialmente isolato

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } ]0, \pi[, \\ u(0, t) = u(\pi, t) + u_x(\pi, t) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \end{cases}$$

posto  $u(x, t) := h(x)v(t)$ , la funzione  $h$  della sola variabile spaziale  $x$  soddisfa il problema (6.18).

Consideriamo separatamente i casi in cui il parametro  $\mu$  è negativo, nullo o positivo.

Se  $\mu < 0$ , non ci sono soluzioni diverse da zero al problema, dunque non ci sono autovalori negativi.

Se  $\mu = 0$ , l'equazione differenziale si riduce a  $h'' = 0$ , da cui si ha

$$h(x) = c_1x + c_2.$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ottiene che l'unica soluzione del problema è  $h = 0$ , pertanto  $\mu = 0$  non è autovalore.

Se  $\mu > 0$ , l'equazione differenziale  $-h'' - \mu h = 0$  ha integrale generale dato da

$$h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x).$$

Imponendo la prima condizione ai limiti si ha

$$0 = h(0) = c_1$$

da cui, imponendo  $h(x) \neq 0$  si ha  $c_2 \neq 0$ ; derivando, si ottiene

$$h'(x) = c_2\sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}x)$$

e, imponendo la seconda condizione, si ha

$$0 = h(\pi) + h'(\pi) = c_2 \sin(\sqrt{\mu}\pi) + c_2\sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}\pi).$$

Quindi  $\mu$  è autovalore se e solo se è soluzione dell'equazione trascendente

$$\tan(\sqrt{\mu}\pi) = -\sqrt{\mu}.$$

Questa equazione non è risolvibile elementarmente, ma graficamente si osserva che essa ha un'infinità numerabile di soluzioni positive (autovalori)  $(\mu_n)_n$  tali che

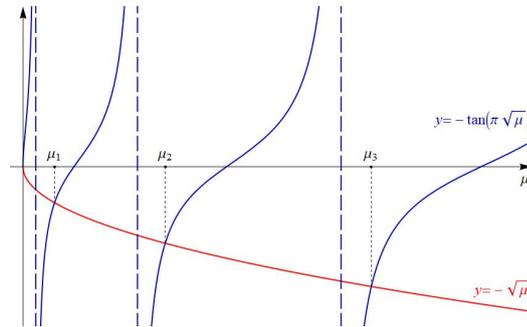
$$n - \frac{1}{2} < \sqrt{\mu_n} < n \quad (n \in \mathbb{N})$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\mu_n} - \left( n - \frac{1}{2} \right) \right) = 0$$

e le autofunzioni sono

$$v_n(x) = \sin(\sqrt{\mu_n}x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$



**Figura 6.1:** Risoluzione grafica dell'equazione  $\tan(\sqrt{\mu}\pi) = -\sqrt{\mu}$  per l'individuazione degli autovalori  $\mu_n$ . Gli asintoti verticali sono le rette di equazione  $\mu = (n - \frac{1}{2})^2$ , le intersezioni con l'asse  $\mu$  sono i punti con ascissa  $n^2$ : dal grafico si può dedurre anche la relazione  $n - \frac{1}{2} < \sqrt{\mu_n} < n$ .

**Esempio 6.3.6 (condizioni ai limiti miste Neumann-Robin).** Consideriamo l'operatore  $L(h) = -h''$  in  $[0, 1]$  con condizioni miste Neumann-Robin negli estremi, cioè il problema ai limiti<sup>10</sup>

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, 1[ \\ h'(1) = 0 \\ h(0) - h'(0) = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

Consideriamo separatamente i casi in cui il parametro  $\mu$  è negativo, nullo o positivo.

Se  $\mu < 0$ , non ci sono soluzioni diverse da zero al problema, dunque non ci sono autovalori negativi.

Se  $\mu = 0$ , l'equazione differenziale si riduce a  $h'' = 0$ , da cui si ha

$$h(x) = c_1 x + c_2.$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ottiene che l'unica soluzione del problema è  $h = 0$ , pertanto  $\mu = 0$  non è autovalore.

Se  $\mu > 0$ , l'equazione differenziale  $-h'' - \mu h = 0$  ha integrale generale dato da

$$h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x).$$

<sup>10</sup>Col metodo di separazione delle variabili, se consideriamo la conduzione termica in una barra con l'estremo 1 totalmente isolato e con una condizione di tipo Robin nel primo estremo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } ]0, 1[, \\ u_x(1, t) = u(0, t) - u_x(0, t) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \end{cases}$$

posto  $u(x, t) := h(x)v(t)$ , la funzione  $h$  della sola variabile spaziale  $x$  soddisfa il problema (6.19).

Imponendo la seconda condizione ai limiti si ha

$$0 = h(0) - h'(0) = c_1 - c_2\sqrt{\mu}$$

da cui (osserviamo che né  $c_1$  né  $c_2$  può essere zero, altrimenti, se una delle due costanti fosse nulla lo sarebbe anche l'altra, e quindi avremmo  $h(x) = 0$ )

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Imponendo la prima condizione, si ha

$$0 = h'(1) = -c_1\sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}) + c_2\sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}),$$

da cui otteniamo

$$\tan \sqrt{\mu} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

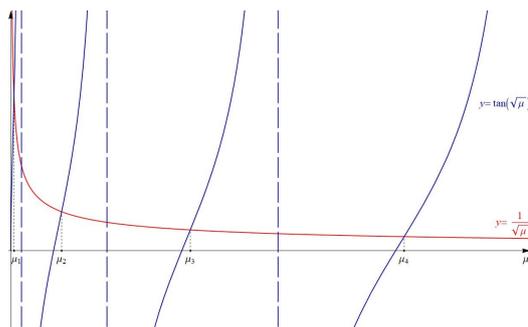
Quindi  $\mu$  è autovalore se e solo se è soluzione dell'equazione trascendente

$$\tan \sqrt{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Questa equazione non è risolubile elementarmente, ma graficamente si osserva che essa ha un'infinità numerabile di soluzioni positive (autovalori)  $(\mu_n)_n$  tali che

$$(n-1)\pi < \sqrt{\mu_n} < \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n \in \mathbb{N})$$

e le autofunzioni sono



**Figura 6.2:** Risoluzione grafica dell'equazione  $\tan \sqrt{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$  per l'individuazione degli autovalori  $\mu_n$ . Gli asintoti verticali sono le rette di equazione  $\mu = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$ , le intersezioni con l'asse  $\mu$  sono i punti con ascissa  $n^2 \pi^2$ : dal grafico si può dedurre anche la relazione  $(n-1)\pi < \sqrt{\mu_n} < \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ .

$$v_n(x) = \sin(\sqrt{\mu_n}x) + \sqrt{\mu_n} \cos(\sqrt{\mu_n}x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \sin(\sqrt{\mu_n}x) + \sqrt{\mu_n} \cos(\sqrt{\mu_n}x) = \sin(\sqrt{\mu_n}x) + \cot(\sqrt{\mu_n}) \cos(\sqrt{\mu_n}x) \\ &= \frac{\cos(\sqrt{\mu_n}(1-x))}{\sin \sqrt{\mu_n}}. \end{aligned}$$

**Esempio 6.3.7 (condizioni ai limiti periodiche).** <sup>11</sup> Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -h'' - \mu h = 0 & \text{in } ]-\pi, \pi[, \\ h(-\pi) = h(\pi), \\ h'(-\pi) = h'(\pi). \end{cases}$$

La condizione (6.8) è soddisfatta.

Consideriamo separatamente i casi in cui il parametro  $\mu$  è negativo, nullo o positivo.

Se  $\mu < 0$ , non ci sono soluzioni non nulle al problema, dunque non esistono autovalori negativi.

Se  $\mu = 0$ , l'equazione differenziale si riduce a  $h'' = 0$ , da cui si ha

$$h(x) = c_1x + c_2.$$

Imponendo la prima condizione ai limiti si ottiene

$$h(-\pi) = -c_1\pi + c_2 = h(\pi) = c_1\pi + c_2 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow h(x) = c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

è così soddisfatta anche la seconda condizione ai limiti, per cui  $\mu = 0$  è autovalore semplice il cui autospazio è lo spazio delle funzioni costanti non nulle in  $]-\pi, \pi[$ .

Se  $\mu > 0$ , l'integrale generale dell'equazione differenziale  $-h'' - \mu h = 0$  è

$$h(x) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}x).$$

Imponendo la prima condizione ai limiti si ottiene

$$h(-\pi) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}\pi) - c_2 \sin(\sqrt{\mu}\pi) = h(\pi) = c_1 \cos(\sqrt{\mu}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{\mu}\pi)$$

<sup>11</sup>Un esempio interessante di problema di Sturm-Liouville periodico in  $[0, \pi]$  è il seguente

$$\begin{cases} -h'' + qh - \mu h = 0 & \text{in } ]0, \pi[, \\ h(0) = h(\pi), \\ h'(0) = h'(\pi), \end{cases}$$

introdotto da G.W. Hill per lo studio sul movimento della Luna. Per semplicità, qui tratteremo il problema sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$  con  $q = 0$ .

da cui si ha

$$c_2 \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0.$$

Imponendo, ora, la seconda condizione ai limiti si ottiene

$$\begin{aligned} h'(-\pi) &= c_1\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\pi) + c_2\sqrt{\mu}\cos(\sqrt{\mu}\pi) \\ &= h'(\pi) = -c_1\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\pi) + c_2\sqrt{\mu}\cos(\sqrt{\mu}\pi) \end{aligned}$$

da cui si ha

$$c_1 \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0.$$

Poiché  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ , risulta  $\sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0$ , quindi  $\sqrt{\mu}\pi = n\pi$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , da cui

$$\mu_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dunque le autofunzioni per  $\mu_n$  sono

$$v_n(x) = c_1 \cos(nx) + c_2 \sin(nx)$$

con  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ ;  $\cos(nx)$  e  $\sin(nx)$  sono due autofunzioni linearmente indipendenti associate al medesimo autovalore  $\mu_n$ , pertanto gli autospazi associati a  $\mu_n \neq 0$  hanno tutti dimensione due.

**Esempio 6.3.8.** Consideriamo il problema

$$\begin{cases} -h'' + h' - \mu h = 0 & \text{in } ]0, 1[, \\ h(0) = h(1) = 0. \end{cases}$$

Si tratta di un problema di Dirichlet omogeneo, ma è diverso dai problemi considerati finora a causa del termine  $h'$  presente nell'equazione.

Moltiplichiamo l'equazione per una funzione  $\varphi$  da determinare in modo da presentare il primo membro *in forma di divergenza*, cioè nella forma  $-(\varphi h)'$ . Otteniamo

$$-\varphi h'' + \varphi h' - \mu \varphi h = 0$$

e raggiungiamo lo scopo se il coefficiente di  $-h''$  è uguale alla derivata del coefficiente di  $-h''$ , cioè se  $-\varphi = \varphi'$ . Scegliamo, allora,  $\varphi(x) = e^{-x}$  (questo procedimento, almeno nel caso unidimensionale, è di carattere generale, cfr. [19]). Il problema proposto si riscrive nella forma

$$\begin{cases} -(e^{-x}h)' - \mu(e^{-x}h) = 0 & \text{in } ]0, 1[, \\ h(0) = h(1) = 0. \end{cases}$$

Per poter applicare la teoria sviluppata in precedenza e affinché le autofunzioni costituiscano un sistema ortogonale, occorre sostituire all'usuale prodotto scalare in  $L^2([0, 1])$  il prodotto scalare definito da

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(x)v(x)e^{-x} dx,$$

la cui norma è equivalente a quella di  $L^2([0, 1])$ , come è assicurato dalla disuguaglianza  $e^{-1} < e^{-x} < 1$  per ogni  $x \in ]0, 1[$ . Per il calcolo effettivo degli autovalori e delle autofunzioni conviene comunque riferirsi alla prima equazione differenziale, i cui coefficienti sono costanti. Procedendo in maniera analoga ai precedenti esempi, gli autovalori e le autofunzioni sono, rispettivamente

$$\mu_n = n^2\pi^2 + \frac{1}{4}, \quad v_n(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin(n\pi x), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Osserviamo che, per  $n \neq m$ , risulta

$$\begin{aligned} \langle v_m, v_n \rangle &= \int_0^1 e^{\frac{x}{2}} \sin(n\pi x) \cdot e^{\frac{x}{2}} \sin(m\pi x) \cdot e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 \sin(n\pi x) \cdot \sin(m\pi x) dx = 0. \end{aligned}$$

**Osservazione 6.3.9.** Altri problemi agli autovalori si incontrano anche per determinare lo spettro puntuale (i.e. gli autovalori) di operatori compatti ed autoaggiunti in spazi di Hilbert (cfr., ad esempio, gli esercizi n. 35, 36, 37 e 38 nella sezione 5.11 del Cap. 5).

### 6.3.1 Approssimazioni

Negli esempi di problemi agli autovalori studiati nella sezione precedente, abbiamo agevolmente determinato l'integrale generale dell'equazione a coefficienti costanti  $L(h) = h'' + \mu h = 0$ . Tuttavia, possiamo riscontrare che, imponendo le condizioni ai limiti del problema, in alcuni casi abbiamo potuto determinare esattamente gli autovalori  $\mu_n$  (e quindi le rispettive autofunzioni  $v_n$ ), mentre in alcuni altri esempi (in presenza di equazioni trascendenti) abbiamo potuto stimare solo limitazioni inferiori e superiori per gli autovalori  $\mu_n$ .

Limitiamoci ora a considerare il primo autovalore  $\mu_1$ , che risulta essere il più interessante nelle applicazioni.

Partiamo dalla considerazione che, in generale, il quoziente di Rayleigh  $R(\cdot)$  non può essere usato per valutare

$$\mu_1 = \min_{u \in \text{span}\{v_1\} \setminus \{0\}} R(u),$$

perché  $\mu_1$  è noto solo se lo è  $v_1$ .

Allora, per ottenere una “buona stima” di  $\mu_1$ , l’idea è quella di valutare il quoziente di Rayleigh  $R(\cdot)$  per una *opportuna* funzione  $v$  (non nulla, che non necessariamente verifichi l’equazione, ma che soddisfi le condizioni ai limiti assegnate nello specifico problema considerato e sia senza zeri nell’intervallo aperto fissato) tale che il valore  $R(v)$  possa portare il quoziente di Rayleigh “più prossimo” al suo valore minimo (cioè  $\mu_1$ ).

Possiamo ragionevolmente aspettarci che quanto più  $R(v)$  è “vicino” a  $\mu_1$ , tanto più la funzione scelta  $v$  sarà “vicina” all’autofunzione  $v_1$ .

Diamo alcuni Esempi.

### Esempio (1).

Nell’esempio 6.3.1 abbiamo provato che  $\mu_1 = \pi^2$ .

Per vedere come questo valore è confermato dal metodo esposto prima, scegliamo la funzione  $v(x) = x(1-x)$ , che soddisfa le condizioni ai limiti e non ha zeri in  $]0,1[$ . Otteniamo

$$R(v) = \frac{\int_0^1 (1-2x)^2 dx}{\int_0^1 (x-x^2)^2 dx} = 10,$$

che è una buona approssimazione del valore (esatto)  $\pi^2 = 9,8596\dots$

### Esempio (2).

Nell’esempio 6.3.5 abbiamo ottenuto per  $\mu_1$  solo la stima  $\frac{1}{4} < \mu_1 < 1$ .

Per trovare una migliore approssimazione del primo autovalore di questo problema, scegliamo la funzione

$$v(x) = \begin{cases} 2 \sin x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 1 + \sin x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \end{cases}$$

che soddisfa le condizioni ai limiti e non ha zeri in  $]0, \pi[$ . Risulta

$$R(v) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x)^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \sin x)^2 dx} = 0,5237 < 1.$$

Evidentemente  $0,25 < 0,5237 < 1$ .

### Esempio (3).

Nell’esempio 6.3.6 abbiamo ottenuto per  $\mu_1$  solo la stima  $0 < \mu_1 < \frac{\pi^2}{4}$ .

Per trovare una migliore approssimazione del primo autovalore di questo problema, scegliamo la funzione  $v(x) = 2\pi + 4 \sin(\frac{\pi}{2}x)$  che soddisfa le condizioni

ai limiti e non ha zeri in  $]0, 1[$ . Risulta

$$R(v) = \frac{\int_0^1 4\pi^2 \cos^2(\frac{\pi}{2}x) dx}{\int_0^1 [2\pi + 4 \sin(\frac{\pi}{2}x)]^2 dx} = 0,2483 < \frac{\pi^2}{4} = 2,4649\dots$$

## 6.4 Analisi spettrale dell'operatore di Laplace con condizione omogenea di Dirichlet

Nella sezione 6.3 abbiamo considerato il problema di determinare la soluzione di una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine assegnate per essa delle condizioni negli estremi del suo intervallo di definizione.

Passiamo ora a considerare il problema analogo per l'operatore di Laplace (prototipo degli operatori alle derivate parziali di tipo "ellittico") con condizione omogenea di Dirichlet.

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un aperto limitato,<sup>12</sup> e consideriamo il problema agli autovalori per l'operatore di Laplace<sup>13</sup> con condizione omogenea di Dirichlet su  $\partial\Omega$ .

**Problema 1.** Esistono  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $h \neq 0$  tali che

$$\begin{cases} -\Delta h = \mu h & \text{in } \Omega \\ h = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad ? \quad (\mathcal{D}_1)$$

Poiché

$$-\int_{\Omega} (\Delta h)v \, dx = \mu \int_{\Omega} hv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

integrando per parti il primo membro, si può riformulare il Problema 1 in forma variazionale:

**Problema 2.** Esistono  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $h \neq 0$  tali che

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \, dx = \mu \int_{\Omega} hv \, dx & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ h \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad ? \quad (\mathcal{D}_2)$$

<sup>12</sup>L'ambiente funzionale è lo spazio di Sobolev  $H_0^1(\Omega)$ , notazione usata per indicare lo spazio  $H_0^{1,2}(\Omega)$ . Per gli spazi di Sobolev cfr., ad esempio, [5], [6] e [7].

<sup>13</sup>L'operatore di Laplace  $\Delta$  è definito da

$$\Delta := \operatorname{div} \nabla = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

(traccia della matrice Hessiana).

La funzione  $h \neq 0$  (quando esiste) è una autofunzione relativa all'autovalore  $\mu$ .

**Osservazione 6.4.1.** Da  $(\mathcal{D}_2)$ , preso  $v = h$  abbiamo

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla h \, dx = \mu \int_{\Omega} h^2 \, dx$$

e quindi

$$\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx = \mu \int_{\Omega} h^2 \, dx,$$

sicché

$$\mu = \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx}{\int_{\Omega} h^2 \, dx};$$

pertanto, gli autovalori  $\mu$  di  $(\mathcal{D}_2)$  (e  $(\mathcal{D}_1)$ ) sono reali positivi.

Consideriamo l'operatore di Laplace-Dirichlet

$$-\Delta : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

con dominio  $D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .

**Definizione 6.4.2.** L'inverso dell'operatore di Laplace-Dirichlet è l'operatore  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  definito per ogni  $f \in L^2(\Omega)$  da:

$K(f) \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  è l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla (K(f)) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ K(f) \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Equivalentemente,  $K(f)$  è la soluzione variazionale del problema con condizione omogenea su  $\partial\Omega$

$$\begin{cases} -\Delta (K(f)) = f & \text{in } \Omega, \\ K(f) = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Risulta quindi

$$(-\Delta) \circ K = I_{L^2(\Omega)}$$

$(-\Delta (K(f)) = f$  per ogni  $f \in L^2(\Omega)$ ), cioè  $K$  è l'inverso destro di  $-\Delta$ .

**Teorema 6.4.3.** *L'operatore  $K = (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  verifica le seguenti proprietà:*

- (i)  $K$  è un operatore lineare e continuo;
- (ii)  $K$  è autoaggiunto in  $L^2(\Omega)$ ;
- (iii)  $K$  è compatto da  $L^2(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ ;
- (iv)  $K$  è definito positivo.

*Dimostrazione.*

- (i) Siano  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Dalla definizione di  $K$  risulta

$$\int_{\Omega} \nabla (K(f_1)) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f_1 v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} \nabla (K(f_2)) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f_2 v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Prendendo una combinazione lineare delle due precedenti uguaglianze si ha

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla (c_1 K(f_1) + c_2 K(f_2)) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (c_1 f_1 + c_2 f_2) v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ c_1 K(f_1) + c_2 K(f_2) \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Per l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet, si ha

$$K(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 K(f_1) + c_2 K(f_2),$$

cioè la linearità di  $K$ .

Proviamo che  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  è continuo. Nella definizione di  $K$ , prendendo  $v = K(f) \in H_0^1(\Omega)$ , risulta

$$\int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 \, dx = \int_{\Omega} f K(f) \, dx. \quad (6.20)$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 \, dx \leq \left( \int_{\Omega} f^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} (K(f))^2 \, dx \right)^{1/2}. \quad (6.21)$$

Per la disuguaglianza di Poincaré<sup>14</sup>

$$\left( \int_{\Omega} (K(f))^2 dx \right)^{1/2} \leq C(\Omega, N, 2) \left( \int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 dx \right)^{1/2} \quad (6.22)$$

Da (6.21) e (6.22) si ottiene

$$\int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 dx \leq C(\Omega, N, 2) \left( \int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Quindi

$$\left( \int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 dx \right)^{1/2} \leq C(\Omega, N, 2) \left( \int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2}, \quad (6.23)$$

che, tenuto conto di (6.22), dà

$$\left( \int_{\Omega} (K(f))^2 dx \right)^{1/2} \leq C^2(\Omega, N, 2) \left( \int_{\Omega} f^2 dx \right)^{1/2}. \quad (6.24)$$

Pertanto, per ogni  $f \in L^2(\Omega)$

$$\|K(f)\|_{L^2(\Omega)} \leq C^2(\Omega, N, 2) \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

ed è così provato che  $K$  è un operatore lineare e continuo da  $L^2(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ .

Inoltre, da (6.23) e (6.24) deduciamo che per ogni  $f \in L^2(\Omega)$

$$\|K(f)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\Omega, N, 2) \sqrt{1 + C^2(\Omega, N, 2)} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6.25)$$

- (ii) Proviamo ora che  $K$  è operatore autoaggiunto in  $L^2(\Omega)$ , cioè, per ogni  $f, g \in L^2(\Omega)$ :

$$(K(f), g)_{L^2(\Omega)} = (f, K(g))_{L^2(\Omega)}.$$

Dalla definizione di  $K(f)$  e  $K(g)$  abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla (K(f)) \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} f v dx & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla (K(g)) \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} g v dx & \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Cfr., ad esempio, [2], Theorem 5.3.1.

Scelto  $v = K(g) \in H_0^1(\Omega)$  nella prima uguaglianza e  $v = K(f) \in H_0^1(\Omega)$  nella seconda uguaglianza, otteniamo

$$\int_{\Omega} \nabla (K(f)) \cdot \nabla (K(g)) \, dx = \int_{\Omega} f K(g) \, dx = (f, K(g))_{L^2(\Omega)},$$

$$\int_{\Omega} \nabla (K(g)) \cdot \nabla (K(f)) \, dx = \int_{\Omega} g K(f) \, dx = (g, K(f))_{L^2(\Omega)}.$$

Quindi, dall'uguaglianza dei primi membri, segue

$$(f, K(g))_{L^2(\Omega)} = (g, K(f))_{L^2(\Omega)} = (K(f), g)_{L^2(\Omega)},$$

per cui  $K$  è autoaggiunto in  $L^2(\Omega)$ .

- (iii) Proviamo che  $K$  è compatto da  $L^2(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ . Sia  $B$  un insieme limitato in  $L^2(\Omega)$ . Da (6.25), poiché  $K$  è operatore lineare e continuo da  $L^2(\Omega)$  in  $H_0^1(\Omega)$ , l'insieme  $K(B)$  è limitato in  $H_0^1(\Omega)$ .

Essendo  $\Omega$  limitato, per il Teorema di compattezza di Rellich-Kondrakov<sup>15</sup> concludiamo che  $K(B)$  è relativamente compatto in  $L^2(\Omega)$ .

- (iv) Da (6.20) si ha per ogni  $f \in L^2(\Omega)$

$$(K(f), f)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla (K(f))|^2 \, dx \geq 0,$$

cioè  $K$  è un operatore positivo.

Inoltre, se  $(K(f), f)_{L^2(\Omega)} = 0$  allora  $\nabla (K(f)) = 0$ , cioè  $K(f)$  è localmente costante. Poiché  $K(f) \in H_0^1(\Omega)$ , segue che  $K(f) = 0$ . Per la definizione di  $K(f)$ ,  $K(f) = 0$  significa  $\int_{\Omega} f v \, dx = 0$  per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ . In virtù della densità di  $H_0^1(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$ , concludiamo che  $f = 0$ .

□

**Corollario 6.4.4.** *Il numero reale  $\mu > 0$  è un autovalore dell'operatore di Laplace-Dirichlet se e solo se  $\frac{1}{\mu}$  è un autovalore di  $K = (-\Delta)^{-1}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mu > 0$  un autovalore dell'operatore di Laplace-Dirichlet, pertanto esiste  $h \in H_0^1(\Omega)$ ,  $h \neq 0$ , tale che

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \, dx = \mu \int_{\Omega} h v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

<sup>15</sup>Cfr., ad esempio, [2], Theorem 5.3.3.

Per la definizione di  $K = (-\Delta)^{-1}$ , ciò è equivalente a

$$h = K(\mu h).$$

Per la linearità di  $K$ , usando il fatto che  $\mu > 0$ , deduciamo che

$$K(h) = \frac{1}{\mu}h,$$

cioè  $\frac{1}{\mu}$  è un autovalore di  $K = (-\Delta)^{-1}$ .  $\square$

**Teorema 6.4.5 (Esistenza di una base Hilbertiana di autofunzioni dell'operatore di Laplace-Dirichlet).** *Esistono una successione reale  $(\mu_n)_n$  e una base di Hilbert (sistema ortonormale completo)  $(v_n)_n$  di  $L^2(\Omega)$  tali che*

- (a)  $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty$ ;  
 (b)  $v_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$  e  $-\Delta v_n = \mu_n v_n$  in  $\Omega$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .<sup>16</sup>

*Dimostrazione.*

- (a) Per i punti (i), (ii) e (iii) del Teorema 6.4.3, possiamo applicare il Teorema 5.10.1 all'operatore  $K$ . Esiste quindi una base Hilbertiana  $(v_n)_n$  di  $L^2(\Omega)$  tale che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  è una autofunzione di  $K$ . Precisamente

$$K(v_n) = \lambda_n v_n$$

con  $(\lambda_n)_n$  successione di numeri reali positivi (per (iv) del Teorema 6.4.3) che decresce a zero per  $n \rightarrow +\infty$ . Per il Corollario 6.4.4, deduciamo che  $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$  è un autovalore dell'operatore di Laplace-Dirichlet,

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty,$$

e  $v_n$  è una corrispondente autofunzione.

Quindi, per la linearità dell'operatore  $K$ ,

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \mu_n v_n & \text{in } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove la soluzione  $v_n$  è da intendersi in senso variazionale, cioè  $v_n \in H_0^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} \nabla v_n \cdot \nabla v \, dx = \mu_n \int_{\Omega} v_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

<sup>16</sup>Ciascun autovalore di  $-\Delta$ ,  $\mu_n$ , è ripetuto un numero di volte uguale alla sua molteplicità, che è finita.

- (b) Dai risultati di regolarità<sup>17</sup>  $v_n \in H^2(\omega)$  per ogni  $\omega \subset\subset \Omega$  ( $\omega$  a chiusura compatta contenuta in  $\Omega$ ). Ragionando analogamente, segue che  $v_n \in H^4(\omega)$  per ogni  $\omega \subset\subset \Omega$  e, allo stesso modo,  $v_n \in H^6(\omega)$  per ogni  $\omega \subset\subset \Omega$ , e così via. Pertanto  $v_n \in \bigcap_{m \geq 1} H^m(\omega)$  per ogni  $\omega \subset\subset \Omega$ . Di conseguenza,  $v_n \in C^\infty(\omega)$  per ogni  $\omega \subset\subset \Omega$ , cioè  $v_n \in C^\infty(\Omega)$ .

□

## 6.5 Caratterizzazione variazionale degli autovalori

Al fine di esplicitare i Principi del minimo e di min-max per l'operatore di Laplace-Dirichlet tramite il punto (ii) della Proposizione 6.1.4 e i punti (ii) e (iv) del Teorema 6.1.5, premettiamo la seguente osservazione.

**Osservazione 6.5.1.** Essendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aperto limitato, per la disuguaglianza di Poincaré le norme  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  e  $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$  sono equivalenti. Pertanto, per ogni  $h, g \in H_0^1(\Omega)$ , posto

$$(h, g)_{H_0^1(\Omega)} := (\nabla h, \nabla g)_{L^2(\Omega)} = (-\Delta h, g)_{L^2(\Omega)}, \quad (6.26)$$

risulta

$$(K(h), g)_{H_0^1(\Omega)} = (-\Delta K(h), g)_{L^2(\Omega)} = (h, g)_{L^2(\Omega)}. \quad (6.27)$$

Il quoziente di Rayleigh di  $-\Delta$ , per ogni  $h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$  è il rapporto

$$\frac{(-\Delta h, h)_{L^2(\Omega)}}{\|h\|_{L^2(\Omega)}^2} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx}.$$

Da (6.26) e (6.27), con la scelta  $g = h$ , deduciamo che

$$\frac{\|h\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{(K(h), h)_{H_0^1(\Omega)}} = \frac{(-\Delta h, h)_{L^2(\Omega)}}{\|h\|_{L^2(\Omega)}^2}, \quad (6.28)$$

cioè il reciproco del quoziente di Rayleigh di  $K$  in  $H_0^1(\Omega)$  coincide col quoziente di Rayleigh di  $-\Delta$  in  $L^2(\Omega)$ . Inoltre, ricordiamo che per il Corollario 6.4.4  $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$  è autovalore di  $-\Delta$  e  $\lambda_n$  è autovalore di  $K$ .

<sup>17</sup>Cfr., ad esempio, [5], Theorem 9.26.

In virtù della precedente osservazione, i **Principi del minimo** per gli autovalori  $\mu_n > 0$  del Problema ( $\mathcal{D}_2$ ) seguono dal punto (ii) della Proposizione 6.1.4, tenuto conto di (6.28).

Pertanto, il primo autovalore di  $-\Delta$  è dato da

$$\mu_1 = \min_{h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} \right\};$$

inoltre, per ogni  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \mu_n &= \min \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} : h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} h v_1 dx = 0, \dots, \int_{\Omega} h v_{n-1} dx = 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} : h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, \right. \\ &\quad \left. h \in (\text{span} \{v_1, \dots, v_{n-1}\})^\perp \right\}, \end{aligned}$$

dove  $v_j$  è l'autofunzione relativa all'autovalore  $\mu_j$  per ogni  $j = 1, \dots, n-1$ .

Ancora in virtù della precedente osservazione, i **Principi del min-max e del max-min** di Fischer-Courant per gli autovalori  $\mu_n > 0$  del Problema ( $\mathcal{D}_2$ ) seguono dai punti (ii) e (iv) del Teorema 6.1.5, tenendo conto di (6.28).

Pertanto, per ogni  $n \geq 1$ , risulta

$$\begin{aligned} \mu_n &= \max_{\substack{\Sigma_{n-1} \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_{n-1} = n-1}} \min_{h \in \Sigma_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} \right\} \\ &= \min_{\substack{\Sigma_n \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_n = n}} \max_{h \in \Sigma_n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx}{\int_{\Omega} h^2 dx} \right\}. \end{aligned}$$

## 6.6 Molteplicità e proprietà asintotiche degli autovalori dell'operatore di Laplace-Dirichlet

Valgono i seguenti risultati.

**Teorema 6.6.1.** *Sia  $\Omega$  un aperto, limitato, connesso e regolare di  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ).*

- (i) *Il primo autovalore  $\mu_1$  dell'operatore di Laplace-Dirichlet ha molteplicità uguale a uno ( $\mu_1$  è semplice); l'autospazio relativo a  $\mu_1$  è generato da una funzione  $v_1 \in H_0^1(\Omega)$  tale che  $v_1 > 0$  in  $\Omega$ . Gli autovalori diversi da  $\mu_1$  possono avere molteplicità maggiore di uno.<sup>18</sup>*
- (ii) *Ogni autofunzione  $v_j$  corrispondente all'autovalore  $\mu_j > \mu_1$  ha segno non costante in  $\Omega$ .*
- (iii) *(Weyl, 1911) Esistono due costanti positive  $a_\Omega$  e  $b_\Omega$ , dipendenti solo da  $\Omega$ , tali che, per ogni  $n \geq 1$*

$$a_\Omega n^{2/N} \leq \mu_n \leq b_\Omega n^{2/N}.$$

*Dimostrazione.*

- (i) Supponiamo, per assurdo,<sup>19</sup> che  $h_1$  e  $h_2$  siano due autofunzioni linearmente indipendenti appartenenti all'autospazio  $E_{\mu_1}$  relativo all'autovalore  $\mu_1$ .

Poiché  $\Omega$  è regolare,  $h_1$  e  $h_2$  sono funzioni regolari e ha senso considerare i loro valori in ogni punto  $x \in \Omega$ . Siano, allora,  $x_1, x_2 \in \Omega$  tali che

$$\alpha_1 h_1(x_1) + \alpha_2 h_2(x_1) = 0,$$

$$\alpha_1 h_1(x_2) + \alpha_2 h_2(x_2) \neq 0$$

per qualche  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

Poiché  $h_1, h_2 \in E_{\mu_1}$ , anche  $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \in E_{\mu_1}$  e  $w := |\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2| \in E_{\mu_1}$ .<sup>20</sup> La funzione  $w$  soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} w \in E_{\mu_1} & (\text{cioè } -\Delta w = \mu_1 w \text{ in } \Omega), \\ w \geq 0, \\ w(x_1) = 0, \\ w(x_2) \neq 0. \end{cases}$$

<sup>18</sup>Cfr., ad esempio, [2], Remark 8.5.1.

<sup>19</sup>Per una dimostrazione alternativa cfr. [5], Theorem 6.13 (Krein-Rutman) e Problem 41.

<sup>20</sup>Per il Principio del minimo, le autofunzioni  $h \in E_{\mu_1}, h \neq 0$ , sono le soluzioni del problema di minimo  $\min_{h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla h|^2 dx}{\int_\Omega h^2 dx} \right\}$ . Di conseguenza, da questa formula, anche  $|h| \in E_{\mu_1}$ , perché  $|h| \in H_0^1(\Omega)$  e il quoziente di Rayleigh per  $h$  è uguale al quoziente di Rayleigh per  $|h|$ .

Dall'equazione  $-\Delta w = \mu_1 w$ , essendo  $w \geq 0$  e  $\mu_1 > 0$ , deduciamo che

$$\begin{cases} -\Delta w \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ w(x_1) = 0, & x_1 \in \Omega. \end{cases}$$

Il Principio del massimo forte di Hopf<sup>21</sup> implica che  $w \equiv 0$  in  $\Omega$ , in contraddizione con  $w(x_2) \neq 0$ ,  $x_2 \in \Omega$ . Pertanto la dimensione di  $E_{\mu_1}$  è uno.

Ancora per il Principio del massimo forte, presa una funzione  $h \in E_{\mu_1} \setminus \{0\}$ , posto  $v_1 := |h|$ , risulta  $v_1 \in E_{\mu_1}$  e  $v_1 > 0$ .<sup>22</sup>

(ii) Poiché  $\mu_j \neq \mu_1$ , risulta  $E_{\mu_j} \perp E_{\mu_1}$  e  $\int_{\Omega} v_j(x)v_1(x) dx = 0$ . Poiché  $v_1 > 0$  in  $\Omega$ , necessariamente  $v_j$  cambia segno in  $\Omega$ .

(iii) Per brevità, per la dimostrazione di (iii), diretta conseguenza dei Principi di max-min di Fischer-Courant, rinviamo, ad esempio, a [2], Theorem 8.5.2.

□

**Osservazione 6.6.2.** Evidenziamo il fatto che, in dimensione  $N \geq 2$ , il primo autovalore  $\mu_1$  dell'operatore di Laplace-Dirichlet, su un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  **aperto, limitato, regolare e connesso**, ha la notevole proprietà di essere semplice, mentre gli altri autovalori possono avere molteplicità maggiore di 1. Inoltre, l'autofunzione  $v_1$  è l'unica ad avere segno costante in  $\Omega$ .

**Osservazione 6.6.3.** L'ipotesi topologica “ **$\Omega$  connesso**” nel teorema 6.6.1 non può essere eliminata. Per mostrare ciò, forniamo un esempio di insieme aperto, limitato, regolare, ma non connesso,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , il cui primo autovalore relativo all'operatore di Laplace-Dirichlet  $\mu_1(\Omega)$  non è semplice.<sup>23</sup>

<sup>21</sup>Cfr., ad esempio, [5], Theorem 9.36 (Hopf) e Corollary 9.37.

<sup>22</sup>Si può provare la tesi anche nel seguente modo. Sia  $v_1 \in E_{\mu_1} \setminus \{0\}$ . Poiché anche  $|v_1| \in E_{\mu_1} \setminus \{0\}$  e  $\dim(E_{\mu_1}) = 1$ ,  $v_1$  e  $|v_1| > 0$  sono linearmente dipendenti; ne deduciamo che o  $v_1 \equiv |v_1| > 0$  oppure  $v_1 \equiv -|v_1| < 0$ ; in ogni caso,  $v_1$  è di segno costante in  $\Omega$ .

<sup>23</sup>Per comprendere come trovare facilmente esempi di questo fenomeno, forniamo un esempio di insieme aperto, limitato, regolare, ma non connesso  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  avente primo autovalore  $\mu_1(\Omega)$  di molteplicità due. L'argomento presentato è facilmente replicabile in dimensione qualsiasi e permette di costruire, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , un insieme aperto, limitato, regolare, ma non connesso  $\Omega$  avente primo autovalore con molteplicità  $k$ .

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  l'unione di due cerchi uguali e disgiunti, ad esempio<sup>24</sup>

$$\Omega = B_1((-2, 0)) \cup B_1((2, 0)).$$

Sia  $v \in H_0^1(\Omega)$  un'autofunzione per  $\mu_1(\Omega)$ . Allora,  $v$  può avere supporto in un solo cerchio oppure in entrambi.

Se il supporto di  $v$  è contenuto in un solo cerchio, ad esempio  $\text{spt}(v) \subseteq B_1((-2, 0))$ , consideriamo la funzione definita da

$$\tilde{v}(x_1, x_2) := v(-x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in B_1((2, 0)).$$

Osserviamo che  $\tilde{v}$  realizza lo stesso quoziente di Rayleigh di  $v$ , cioè

$$R(\tilde{v}) = R(v) = \mu_1(\Omega),$$

pertanto anche  $\tilde{v}$  è autofunzione per  $\mu_1(\Omega)$  e risulta

$$(v, \tilde{v})_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Pertanto,  $v$  e  $\tilde{v}$  risultano ortogonali e dunque linearmente indipendenti.

Se, invece,  $\text{spt}(v) \cap B_1((-2, 0)) \neq \emptyset$  e  $\text{spt}(v) \cap B_1((2, 0)) \neq \emptyset$ , consideriamo le due funzioni  $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$  definite da

$$v_1(x) := \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in B_1((-2, 0)) \\ 0 & \text{se } x \in B_1((2, 0)) \end{cases},$$

$$v_2(x) := \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in B_1((2, 0)) \\ 0 & \text{se } x \in B_1((-2, 0)) \end{cases}.$$

Dalla relazione algebrica

$$\frac{a+b}{c+d} \geq \min \left\{ \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right\} \quad \forall a, b, c, d > 0,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} R(u) &= \mu_1(\Omega) = R(v) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2 dx} \\ &= \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_1|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v_2|^2 dx}{\int_{\Omega} v_1^2 dx + \int_{\Omega} v_2^2 dx} \\ &\geq \min \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_1|^2 dx}{\int_{\Omega} v_1^2 dx}, \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_2|^2 dx}{\int_{\Omega} v_2^2 dx} \right\} = \min\{R(v_1), R(v_2)\}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

<sup>24</sup>La posizione reciproca dei due cerchi disgiunti non lede la generalità della dimostrazione; le componenti connesse di  $\Omega$  possono anche trovarsi a distanza 0, in questo esempio con condizione omogenea di Dirichlet.

Osserviamo, inoltre, che

$$\min\{R(v_1), R(v_2)\} \geq \mu_1(B_1((-2, 0))) = \mu_1(B_1((2, 0))).$$

In altre parole, almeno una tra le funzioni test  $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$  realizza un quoziente di Rayleigh minore o uguale di  $R(v) = \mu_1(\Omega) = \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} R(u)$  e maggiore o uguale del primo autovalore di ciascuna componente connessa. Ne segue, allora, che anche  $v_1$  e  $v_2$  sono autofunzioni per  $\mu_1(\Omega)$ : se fosse  $v_1$  a realizzare il minimo in (6.29), allora essa sarebbe autofunzione, ma lo sarebbe anche  $v - v_1 = v_2$  (o viceversa). In ogni caso, le autofunzioni  $v_1$  e  $v_2$  per  $\mu_1(\Omega)$  sono linearmente indipendenti (e, come la coppia  $(v, \tilde{v})$  del caso precedente, sono ortogonali).

In entrambi i casi, è possibile trovare due autofunzioni linearmente indipendenti, pertanto l'autovalore  $\mu_1(\Omega)$  ha molteplicità maggiore o uguale a due.

Osserviamo, infine, che la molteplicità di  $\mu_1(\Omega)$  è esattamente due e, in particolare

$$\mu_1(\Omega) = \mu_1(B_1((-2, 0))) = \mu_1(B_1((2, 0))).$$

Infatti, considerando gli autospazi  $E_1$  e  $E_2$  relativi, rispettivamente, ai cerchi  $\mu_1(B_1((-2, 0)))$  e  $\mu_1(B_1((2, 0)))$ , si ha che  $\dim(E_1) = \dim(E_2) = 1$ , poiché ciascuno dei due insiemi è connesso. Pertanto, per ogni  $h_1 \in E_1$  e  $h_2 \in E_2$  (estese a zero sul resto di  $\Omega$ ), la funzione  $h \in H_0^1(\Omega)$  definita da  $h := h_1 + h_2$  realizza su  $\Omega$  un quoziente di Rayleigh tale che

$$\begin{aligned} \mu_1(\Omega) &= \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} R(u) \leq R(h) = R(h_1 + h_2) \\ &= \frac{\int_{B_1((-2,0))} |\nabla h_1|^2 dx + \int_{B_1((2,0))} |\nabla h_2|^2 dx}{\int_{B_1((-2,0))} h_1^2 dx + \int_{B_1((2,0))} h_2^2 dx} \\ &= \frac{2 \int_{B_1((-2,0))} |\nabla h_1|^2 dx}{2 \int_{B_1((-2,0))} h_1^2 dx} \left( = \frac{2 \int_{B_1((2,0))} |\nabla h_2|^2 dx}{2 \int_{B_1((2,0))} h_2^2 dx} \right) \\ &= \mu_1(B_1((-2, 0))) (= \mu_1(B_1((2, 0)))) . \end{aligned} \quad (6.30)$$

Viceversa, da (6.29), si ha che  $\mu_1(\Omega) \geq \mu_1(B_1((-2, 0))) (= \mu_1(B_1((2, 0))))$ .

In definitiva,  $\mu_1(\Omega) = \mu_1(B_1((-2, 0))) = \mu_1(B_1((2, 0)))$  e ogni autofunzione è combinazione lineare di due funzioni linearmente indipendenti, ciascuna delle quali è autofunzione relativa ad una componente connessa.

## 6.7 Il riarrangiamento di Schwarz

Il riarrangiamento di Schwarz è lo strumento principale usato da G. Faber e E. Krahn per provare il notevole teorema che porta il loro nome.

**Definizione 6.7.1.** Sia  $u$  una funzione misurabile non-negativa definita su un insieme misurabile  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , nulla su  $\partial\Omega$ . Denotiamo con

$$\Omega(c) := \{x \in \Omega : u(x) \geq c\}$$

i suoi insiemi di livello. **Il riarrangiamento di Schwarz** di  $u$  è la funzione  $u^*$  definita su

$$\Omega^* := \text{la palla avente lo stesso volume di } \Omega$$

da

$$u^*(x) = \sup\{c \in \mathbb{R} : x \in \Omega^*(c)\}.$$

In altre parole,  $u^*$  è costruita a partire da  $u$  riarrangiando gli insiemi di livello di  $u$  in palle aventi lo stesso volume.

Per costruzione, sono evidenti le seguenti proprietà di  $u^*$  :

- $u^*$  è radialmente simmetrica, non-crescente come funzione di  $|x|$ ;
- $\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega^*} u^*$ ;
- $u$  e  $u^*$  hanno insiemi di livello della stessa misura.

Vale il seguente risultato:

**Teorema 6.7.2.** *Sia  $\Omega$  un insieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e  $u$  una funzione misurabile non-negativa definita su  $\Omega$  e nulla su  $\partial\Omega$ ; sia  $\varphi$  una funzione misurabile da  $\mathbb{R}^+$  in  $\mathbb{R}$ . Allora,*

$$\int_{\Omega} \varphi(u(x)) dx = \int_{\Omega^*} \varphi(u^*(x)) dx.$$

Un risultato più profondo è il seguente, che esprime una relazione tra gli integrali dei gradienti di  $u$  e di  $u^*$ . La dimostrazione si basa sulla classica disuguaglianza isoperimetrica (cfr., ad esempio, [14]).

**Teorema 6.7.3** (Disuguaglianza di Pólya-Szegö). *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e  $u$  una funzione non-negativa,  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Allora,*

$$u^* \in H_0^1(\Omega^*)$$

e

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

## 6.8 Teorema di Faber-Krahn

Per evidenziare la dipendenza del primo autovalore  $\mu_1$  rispetto a  $\Omega$ , indichiamo con  $\mu_1(\Omega)$  il primo autovalore di Laplace-Dirichlet relativo all'aperto limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ .

Sussiste il seguente risultato (già congetturato da Rayleigh).

**Teorema 6.8.1 (di Faber-Krahn).** <sup>25</sup> *Se  $Vol(\Omega) = Vol(B)$ , dove  $B$  è la palla di  $\mathbb{R}^N$ , allora*

$$\mu_1(\Omega) \geq \mu_1(B),$$

*e l'uguaglianza vale se e solo se  $\Omega = B$  q.o..*

Quindi,

$$\mu_1(B) = \min\{\mu_1(\Omega); \Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^N, Vol(\Omega) = Vol(B)\}$$

(cioè, tra tutti gli aperti limitati di  $\mathbb{R}^N$  aventi lo stesso volume,  $\mu_1$  assume il minimo quando l'aperto è una palla, a meno di un insieme di misura trascurabile).

*Dimostrazione.* La dimostrazione classica usa il riarrangiamento di Schwarz. Sia  $\Omega$  un aperto limitato avente lo stesso volume di  $B =: \Omega^*$ . Sia  $v_1$  l'autofunzione relativa a  $\mu_1(\Omega)$  e  $v_1^*$  il suo riarrangiamento di Schwarz.

Risulta, rispettivamente, per i Teoremi 6.7.2 e 6.7.3:

$$\int_{\Omega^*} v_1^*(x)^2 dx = \int_{\Omega} v_1(x)^2 dx$$

e

$$\int_{\Omega^*} |\nabla v_1^*(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla v_1(x)|^2 dx.$$

Allora,

$$\mu_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla v_1^*(x)|^2 dx}{\int_{\Omega^*} v_1^*(x)^2 dx}$$

e (per il Principio del minimo)

$$\mu_1(\Omega) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_1(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} v_1(x)^2 dx}.$$

Ne segue la tesi. □

Nel caso  $N = 2$ , il teorema di Faber-Krahn afferma essenzialmente che, tra tutti i tamburi di uguale area, quello di forma circolare ha il tono più basso.

<sup>25</sup>Provato indipendentemente da Faber nel 1923 e da Krahn nel 1925

## 6.9 Uno sguardo all'analisi spettrale dell'equazione biarmonica con condizioni omogenee di Dirichlet.

Sia  $\Delta^2 := \Delta \circ \Delta$  l'operatore biarmonico in  $\mathbb{R}^N$  (se  $N = 2$ :

$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$ ). Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un aperto limitato e consideriamo il problema agli autovalori per l'equazione biarmonica con condizioni omogenee di Dirichlet:

**Problema 1'**. Esistono  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $h \neq 0$  tali che

$$\begin{cases} (-\Delta)^2 h = \mu h & \text{in } \Omega \\ h = |\nabla h| = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad ? \quad (6.31)$$

Questo problema può essere riformulato in forma variazionale.

**Problema 2'**. Esistono  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $h \neq 0$  tali che

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \Delta h \Delta v \, dx = \mu \int_{\Omega} h v \, dx & \forall v \in H_0^2(\Omega) \\ h \in H_0^2(\Omega) \end{cases} \quad ? \quad (6.32)$$

Il primo autovalore di (6.31) è definito da

$$\mu_{2,1}(\Omega) = \min_{h \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|h\|_{H_0^2(\Omega)}^2}{\|h\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Diversamente dalle proprietà valide per  $\mu_1$  e  $v_1$  (cfr. Teorema 6.6.1), il primo autovalore  $\mu_{2,1}(\Omega)$  è semplice e la corrispondente autofunzione ha segno costante solo se  $\Omega = B$ , ma, in generale, ciò è falso per  $\Omega \neq B$ . Sussistono infatti i seguenti risultati.<sup>26</sup>

**Teorema 6.9.1.** *Se  $\Omega = B$ , allora il primo autovalore  $\mu_{2,1}(B)$  è semplice e la corrispondente autofunzione  $v_1$  ha segno costante.*

**Teorema 6.9.2.** *Per  $\Omega = (0, 1)^2$  il problema (6.31) ha una autofunzione relativa all'autovalore  $\mu_{2,1}(\Omega)$  di segno non costante.*

<sup>26</sup>Cfr., ad esempio, F. Gazzola, H.C. Grunau, G. Sweers: *Polyharmonic boundary value problems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2010), Theorem 3.7, Theorem 3.8.

## 6.10 Congettura di Rayleigh per la piastra fissa al bordo (“incastrata”)

Un risultato simile al Teorema 6.8.1 di Faber-Krahn era congetturato da Rayleigh nel 1894, relativamente alla minimizzazione del primo autovalore  $\mu_{2,1}$  su aperti a misura fissata. Vale il seguente risultato.<sup>27</sup>

**Teorema 6.10.1.** (*Nadirashvili-Ashbaugh-Benguria*) *In dimensione  $N = 2$  o  $N = 3$  la palla  $B$  è l'unico minimo del primo autovalore  $\mu_{2,1}$  della piastra “incastrata” tra gli aperti limitati di assegnata misura. Risulta*

$$\mu_{2,1}(\Omega) \geq \mu_{2,1}(B)$$

se  $N = 2$  o  $N = 3$ , con l'uguaglianza se e solo se  $\Omega = B$  q.o.

Della congettura di Rayleigh è un problema aperto la dimostrazione della validità della relazione  $\mu_{2,1}(\Omega) \geq \mu_{2,1}(B)$  in ogni spazio  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 4$ .

---

<sup>27</sup> Per la dimostrazione cfr., ad esempio, ibidem, Theorem 3.13, o Cap. 11 in [14].



# Capitolo 7

## Teoria dei Semigrupperi di operatori lineari

### 7.1 Semigrupperi e semigrupperi di contrazione: proprietà differenziali. Generatori.

Sia  $A$  una matrice  $N \times N$ . Assegnato  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ , il problema di Cauchy

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = A\mathbf{u}(t) (t \geq 0), \mathbf{u}(0) = \mathbf{b}$$

ha un'unica soluzione

$$\mathbf{u}(t) = \exp(tA)\mathbf{b},$$

dove

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

(serie di Taylor assolutamente convergente). Evidentemente

$$A^0 = I,$$

$$\exp(tA) \exp(sA) = \exp((t+s)A),$$

per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$  (la famiglia  $\{\exp(tA); t \in \mathbb{R}\}$  ha la "proprietà di gruppo"). Se  $A$  è un operatore lineare limitato il cui dominio è un sottospazio di uno spazio a dimensione infinita, la formula

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

esprime ancora una serie di Taylor assolutamente convergente.

La teoria dei Semigrupp di operatori lineari rappresenta una estensione del precedente risultato agli *operatori  $A$  lineari non limitati in spazi a dimensione infinita* (ad esempio,  $A$  operatore di derivazione, o più in generale  $A$  operatore a derivate parziali coinvolgente variabili anche spaziali oltre che  $t$ , lineare, necessariamente chiuso (cfr. Capitolo 8).

Se  $A$  è lineare ma non limitato in  $X$  spazio di Banach, la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$  non può utilizzarsi per definire  $\exp(tA)$ , in quanto il dominio di  $A^k$  diviene più piccolo al crescere di  $k$ . La formula

$$\exp(tA) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( I + \frac{t}{k} A \right)^k$$

non è utile per lo stesso motivo. Una buona definizione è

$$\exp(tA) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( I - \frac{t}{k} A \right)^{-k}$$

in quanto, a meno di un fattore costante, l'operatore  $(I - \frac{t}{k} A)^{-1}$  è il risolvente di  $A$  (cfr. Paragrafo 7.3), e può essere iterato anche se  $A$  non è limitato.

In dimensione infinita, se  $A$  è lineare ma non limitato in  $X$  spazio di Banach,  $\exp(tA)$  può essere costruito anche usando un opportuno metodo di approssimazione per  $A$  con operatori  $A_\lambda$  lineari e limitati, utilizzando *stime indipendenti da  $\lambda$*  (cfr., ad esempio, *le regolarizzanti di  $A$  (di Yosida)*,  $A_\lambda$ , *definite nella dimostrazione del Teorema 7.4.1*).

Ora, prima di dare la definizione di semigrupp e di generatore (infinitesimale) del semigrupp, assumiamo, in modo informale, che  $u : [0, +\infty[ \rightarrow X$  ( $X$  spazio di Banach reale) sia l'unica soluzione di

$$\frac{d}{dt} u(t) = Au(t) (t \geq 0), u(0) = u_0 \quad (7.1)$$

dove  $A : D(A) \rightarrow X$  è un assegnato operatore lineare, possibilmente non limitato,  $D(A)$  è un sottospazio di  $X$  e  $u_0 \in X$  è il dato iniziale assegnato. Per evidenziare esplicitamente la dipendenza di  $u(t)$  dal dato iniziale  $u_0$ , poniamo

$$u(t) = S(t)u_0.$$

Allora

$$\frac{d}{dt} S(t)u_0 = AS(t)u_0,$$

cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} = AS(t)u_0. \quad (7.2)$$

Per ogni  $t \geq 0$  possiamo riguardare  $S(t)$  come operatore da  $X$  in  $X$ . Evidentemente  $S(t) : X \rightarrow X$  è lineare. Inoltre  $S(0)u_0 = u_0$  ( $u_0 \in X$ ), e la condizione che rifletta l'assunzione che il problema (7.1) abbia un'unica soluzione per ogni dato  $u_0$  assegnato sarà data da

$$S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 \quad (t, s \geq 0, u_0 \in X). \quad (7.3)$$

Infine, è ragionevole supporre che per ogni  $u_0 \in X$  l'applicazione  $t \mapsto S(t)u_0$  sia continua da  $[0, +\infty[$  in  $X$ . Da (7.2), assunta la (7.3), si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)S(t)u_0 - S(t)u_0}{h} = AS(t)u_0$$

e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} = Au,$$

e questo motiva la successiva definizione di  $A$  quale generatore (infinitesimale) del semigruppò  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Definizione 7.1.1.** Sia  $X$  uno spazio di Banach reale. Una famiglia  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  di operatori lineari e limitati da  $X$  in  $X$  si chiama **semigruppò** se soddisfa le seguenti condizioni:

- (1)  $S(0)u = u$  ( $u \in X$ ),
- (2)  $S(t+s)u = S(t)S(s)u = S(s)S(t)u$  ( $t, s \geq 0, u \in X$ ),
- (3) l'applicazione  $t \mapsto S(t)u$  è continua da  $[0, +\infty[$  in  $X$ .

Inoltre, si dice che  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  è un **semigruppò di contrazione (o contrattivo)** se risulta anche  $\|S(t)\|_{B(X)} \leq 1$ , ( $t \geq 0$ ).

Assumiamo d'ora in avanti che  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  sia un semigruppò di contrazione su  $X$ .

**Definizione 7.1.2.** Posto

$$Au := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}$$

con  $u \in D(A) := \{u \in X : \exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \in X\}$ , l'operatore lineare

$$A : D(A) \rightarrow X$$

si chiama il **generatore (infinitesimale)** del semigruppò  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Osservazione 7.1.3.** Il generatore (infinitesimale)  $A$  del semigruppoo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  è (essenzialmente) la derivata destra nel punto  $t = 0$  di  $t \rightarrow S(t)u$ , cioè  $S'_+(0)u = Au$ .

**Teorema 7.1.4 (Proprietà differenziali dei semigruppoo).**

Sia  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un semigruppoo di contrazione su  $X$  con generatore  $A$ .

Se  $u \in D(A)$ , allora:

- (i)  $S(t)u \in D(A)$  per ogni  $t \geq 0$ ;
- (ii)  $AS(t)u = S(t)Au$  per ogni  $t > 0$ ;
- (iii) l'applicazione  $t \mapsto S(t)u$  è differenziabile per ogni  $t > 0$ , e risulta
- (iv)  $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$  ( $t > 0$ ).

*Dimostrazione.*

1. Sia  $u \in D(A)$ , allora

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(s)S(t)u - S(t)u}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(t)S(s)u - S(t)u}{s} =$$

$$S(t) \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(s)u - u}{s} = S(t)Au.$$

Pertanto  $S(t)u \in D(A)$  e  $AS(t)u = S(t)Au$ . Risultano così provate (i) e (ii).

2. Sia  $u \in D(A)$  e  $t > 0$ . Allora, per le proprietà dei semigruppoo,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au \right] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ S(t-h) \left( \frac{S(h)u - u}{h} \right) - S(t)Au \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ S(t-h) \left( \frac{S(h)u - u}{h} - Au \right) + (S(t-h)Au - S(t)Au) \right] = 0,$$

poiché  $\frac{S(h)u - u}{h} \rightarrow Au$  e  $\|S(t-h)\|_{B(X)} \leq 1$ . Inoltre, poiché  $Au \in X$  è ben definita, l'applicazione  $s \mapsto S(s)Au$  è continua.

La stima del limite precedente mostra che l'applicazione  $t \mapsto u(t) = S(t)u$  ha derivata sinistra

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au.$$

Per la derivata destra si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} = S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} = S(t)Au.$$

Pertanto, per ogni  $t > 0$ , l'applicazione  $t \mapsto S(t)u$  è differenziabile, con derivata  $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$ . Risultano così provate le (iii) e (iv).  $\square$

**Osservazione 7.1.5.** Per (ii) il semigruppò di contrazione su  $X$   $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  e il suo generatore  $A$  commutano su  $D(A)$ .

Inoltre, poiché l'applicazione  $t \mapsto AS(t)u = S(t)Au$  è continua, l'applicazione  $t \mapsto S(t)u$  è  $C^1$  per  $t > 0$ , se  $u \in D(A)$ .

**Osservazione 7.1.6.** Dal Teorema 7.1.4, si deduce che:

per ogni  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_0 \in D(A)$ , l'unica soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = Au & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

è la funzione

$$u(x, t) = (S(t))(u_0(x)).$$

Infatti,  $\frac{d}{dt}u(x, t) = \frac{d}{dt}(S(t))(u_0(x)) \underset{7.1.4(iv)}{=} A \underbrace{(S(t))(u_0(x))}_{=u(x,t)} = Au(x, t)$

e  $u(x, 0) = (S(0))(u_0(x)) \underset{7.1.1(1)}{=} u_0(x)$ .

## 7.2 Proprietà dei generatori

Sussiste il seguente risultato.

**Teorema 7.2.1 (Proprietà dei generatori).**

Sia  $A : D(A) \rightarrow X$  il generatore infinitesimale del semigruppò  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

Allora:

(i) Il dominio  $D(A)$  è denso in  $X$ ;

(ii)  $A$  è un operatore chiuso. <sup>1</sup>

<sup>1</sup> $A : D(A) \rightarrow X$  **operatore chiuso** se e solo se per ogni  $u_k \in D(A)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) e  $u_k \rightarrow u$ ,  $Au_k \rightarrow v$  per  $k \rightarrow +\infty \Rightarrow u \in D(A)$  e  $Au = v$ .

Ovviamente un operatore continuo è chiuso, ma un operatore chiuso non è necessariamente continuo. L'operatore di derivazione  $T = \frac{d}{dt}$  non è continuo (cfr. 1.6.11), ma è un operatore chiuso.

Infatti, siano  $u_k \in D(T) = C^1([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty + \|\cdot'\|_\infty)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $u_k \rightarrow u$ ,  $Tu_k \rightarrow v$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Poiché la convergenza in  $C^0([0, 1]; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$  è uniforme, si ha :

$$\int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t \lim_{k \rightarrow +\infty} Tu_k(\tau) d\tau = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^t Tu_k(\tau) d\tau = \lim_{k \rightarrow +\infty} [u_k(t) - u_k(0)] = u(t) - u(0),$$

cioè

$$u(t) = u(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Quindi  $u \in D(T)$  e  $Tu = v$ .

*Dimostrazione.*

1. Fissiamo  $u \in X$  e consideriamo l'approssimazione

$$U_\epsilon := \epsilon^{-1} \int_0^\epsilon S(s)u ds.$$

Poiché l'applicazione  $t \mapsto S(t)u$  è continua, si ha

$$U_\epsilon \rightarrow u$$

per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

Per provare (i) dimostriamo che  $U_\epsilon \in D(A)$  per ogni  $\epsilon > 0$ .

Poiché  $D(A)$  è un sottospazio vettoriale, è sufficiente provare che

$$u_\epsilon := \epsilon U_\epsilon = \int_0^\epsilon S(s)u ds \in D(A).$$

Per  $0 < h < \epsilon$  risulta

$$\begin{aligned} \frac{S(h)u_\epsilon - u_\epsilon}{h} &= \frac{1}{h} \left[ S(h) \left( \int_0^\epsilon S(s)u ds \right) - \left( \int_0^\epsilon S(s)u ds \right) \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\epsilon (S(s+h)u - S(s)u) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_\epsilon^{\epsilon+h} S(s)u ds - \frac{1}{h} \int_0^h S(s)u ds \rightarrow S(\epsilon)u - u \quad \text{per } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Questo prova che  $u_\epsilon \in D(A)$  per ogni  $\epsilon > 0$ .

2. Per dimostrare (ii), sia  $(u_k, Au_k)_k$  con  $u_k \in D(A)$  e  $u_k \rightarrow u$ ,  $Au_k \rightarrow v$ , per qualche  $u, v \in X$ .

Proviamo che  $u \in D(A)$  e  $Au = v$ .

Per  $k \geq 1$ , poiché  $u_k \in D(A)$ , il teorema precedente implica

$$S(h)u_k - u_k = \int_0^h \left( \frac{d}{dt} S(t)u_k \right) dt = \int_0^h S(t)Au_k dt.$$

Per  $k \rightarrow +\infty$ , si ha

$$S(h)u - u = \int_0^h S(t)v dt.$$

Pertanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)v dt = v.$$

Per definizione, questo significa che  $u \in D(A)$  e  $Au = v$ . □

**Osservazione 7.2.2.** Ora, il problema fondamentale è quello di determinare quali operatori  $A$  generano semigruppì di contrazione (la risposta a questa questione sarà data dal Teorema di Hille-Yosida 7.4.1).

Il legame cruciale tra un semigruppò  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  e il suo generatore  $A$  è dato dall' "operatore risolvente".

### 7.3 Risolventi e proprietà

**Definizione 7.3.1.** Sia  $A$  un operatore lineare, chiuso in uno spazio di Banach  $X$ , con dominio  $D(A)$ .

Un numero reale  $\lambda$  appartiene a  $\rho(A)$ , l'insieme risolvente di  $A$ , se l'operatore

$$\lambda I - A : D(A) \rightarrow X$$

è iniettivo e suriettivo.

Richiamiamo, ora, che, se  $\lambda \in \rho(A)$ , l'operatore risolvente di  $A$ ,  $R_\lambda : X \rightarrow X$  è definito da

$$R_\lambda u = R(\lambda, A)u := (\lambda I - A)^{-1}u.$$

Per il Teorema del Grafico Chiuso,  $R_\lambda : X \rightarrow D(A) \subseteq X$  è un operatore lineare e limitato. Inoltre,

$$AR_\lambda u = R_\lambda Au, \quad \text{se } u \in D(A).$$

**Teorema 7.3.2 (Proprietà degli operatori risolventi).**

(i) Se  $\lambda$  e  $\mu \in \rho(A)$ , valgono le *identità*

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$$

e

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

(ii) (**Formula integrale per l'operatore risolvente**)

Sia  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un semigruppò di contrazione e sia  $A$  il suo generatore. Allora per ogni  $\lambda > 0$  si ha

$$\lambda \in \rho(A)$$

e

$$R_\lambda u = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) u dt \quad (u \in X).$$

Inoltre,

$$\|R_\lambda\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $u \in X$  si ha

$$v := R_\lambda u - R_\mu u = (\lambda I - A)^{-1}u - (\mu I - A)^{-1}u \in D(A),$$

$$(\lambda I - A)v = u - (\lambda I - \mu I + \mu I - A)(\mu I - A)^{-1}u = (\mu - \lambda)(\mu I - A)^{-1}u.$$

Applicando l'operatore  $(\lambda I - A)^{-1}$  ad entrambi i membri dell'identità precedente, otteniamo

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu.$$

Ora, usando l'identità provata prima, per ogni  $\lambda \neq \mu \in \rho(A)$  si ha

$$R_\lambda R_\mu = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu - \lambda} = \frac{R_\mu - R_\lambda}{\lambda - \mu} = R_\mu R_\lambda.$$

È così provata la (i).

Dimostriamo (ii).

**1.** Per ipotesi il semigruppoo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  è contrattivo, cioè  $\|S(t)\|_{B(X)} \leq 1$ , e  $\lambda > 0$ , pertanto l'operatore

$$Q_\lambda u := \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) u dt$$

è ben definito. Infatti

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) u dt \right\|_X &\leq \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) \|S(t)\|_{B(X)} \|u\|_X dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) \|u\|_X dt = \frac{1}{\lambda} \|u\|_X. \end{aligned} \quad (7.4)$$

La stima (7.4) mostra che  $Q_\lambda$  è un operatore lineare e limitato, con norma  $\|Q_\lambda\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ .

**2.** Proviamo, ora, che

$$(\lambda I - A)Q_\lambda u = u \quad \text{per ogni } u \in X. \quad (7.5)$$

Infatti, per ogni  $h > 0$  e per ogni  $u \in X$ , si ha

$$\begin{aligned}
\frac{S(h)Q_\lambda u - Q_\lambda u}{h} &= \frac{1}{h} \left( \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t+h) u dt - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) u dt \right) \\
&= \frac{1}{h} \left( \int_h^{+\infty} \exp(-\lambda(s-h)) S(s) u ds - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) u dt \right) \\
&= \frac{1}{h} \left( \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda(s-h)) S(s) u ds - \int_0^h \exp(-\lambda(s-h)) S(s) u ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) u dt \right) \\
&= \left( \frac{\exp(\lambda h) - 1}{h} \right) \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) S(s) u ds \\
&\quad - \left( \frac{\exp(\lambda h)}{h} \right) \int_0^h \exp(-\lambda s) S(s) u ds.
\end{aligned}$$

Per  $h \rightarrow 0^+$  si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)Q_\lambda u - Q_\lambda u}{h} = \lambda Q_\lambda u - u.$$

Per la definizione di generatore, questo significa che

$$Q_\lambda u \in D(A) \quad \text{e} \quad A Q_\lambda u = \lambda Q_\lambda u - u,$$

e ciò prova la (7.5).

**3.** La (7.5) mostra che l'applicazione

$$v \mapsto (\lambda I - A)v : D(A) \rightarrow X$$

è suriettiva. Proviamo che questa applicazione è anche iniettiva.

Se  $u \in D(A)$ , allora

$$\begin{aligned}
A Q_\lambda u &= A \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) u dt = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) A S(t) u dt \\
&= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) A u dt = Q_\lambda A u.
\end{aligned}$$

(Il passaggio di  $A$  sotto il segno di integrale è giustificato dal fatto che  $A$  è un operatore chiuso). Ciò prova la relazione commutativa

$$Q_\lambda (\lambda I - A)u = (\lambda I - A)Q_\lambda u \quad \text{per ogni } u \in D(A). \quad (7.6)$$

Se, ora,  $(\lambda I - A)u = (\lambda I - A)v$ , per la (7.6) e la (7.5) si ha

$$u = Q_\lambda (\lambda I - A)u = Q_\lambda (\lambda I - A)v = v,$$

e ciò prova la iniettività della precedente applicazione.  
Concludiamo che

$$\lambda \in \rho(A) \quad \text{e} \quad Q_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda.$$

□

**Osservazione 7.3.3.** Per (ii) del teorema precedente, l'operatore risolvente  $R_\lambda$  è la Trasformata di Laplace del semigruppato  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

## 7.4 Teorema (di Hille-Yosida) di esistenza (ed unicità) del semigruppato di contrazione generato da un operatore lineare

Il teorema che segue esprime una caratterizzazione dei generatori di semigruppato di contrazione, stabilendo sotto quali condizioni esiste un semigruppato di contrazione  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  generato da un operatore  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ , (cioè, il teorema mostra come ricostruire il semigruppato di contrazione  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  dal suo generatore  $A$ ). Il risultato è di grande utilità per risolvere equazioni alle derivate parziali di tipo evolutivo (cfr. Capitolo 8).

**Teorema 7.4.1 (di Hille-Yosida).** *Sia  $X$  uno spazio di Banach e  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$  un operatore lineare. Allora, sono equivalenti le proposizioni:*

- (i)  $A$  è il generatore di un semigruppato di contrazione.
- (ii)  $A$  è un operatore densamente definito e chiuso. Inoltre,

$$(0, +\infty) \subset \rho(A)$$

e

$$\|R_\lambda\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda} \quad \text{per ogni } \lambda > 0.$$

*Dimostrazione.* Il fatto che (i) implica (ii) è stato già provato (cfr. Proprietà dei generatori 7.2.1 e formula integrale per l'operatore risolvente 7.3.2, (ii)). Assumiamo allora che valga (ii) e per provare (i) costruiamo un semigruppato di contrazione avente  $A$  come generatore.

1. Per l'ipotesi, fissato  $\lambda > 0$ , l'operatore risolvente  $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)$  è ben definito. Definiamo l'operatore lineare e limitato

$$\boxed{A_\lambda := -\lambda I + \lambda^2 R_\lambda} = \lambda A R_\lambda$$

( $A_\lambda$  regolarizzanti di Yosida di  $A$ ).

2. Proviamo preliminarmente che

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda u = Au \quad \text{per ogni } u \in D(A)}. \quad (7.7)$$

Infatti, dall'identità  $\lambda R_\lambda u - u = AR_\lambda u = R_\lambda Au$  ( $u \in D(A)$ ), segue

$$\|\lambda R_\lambda u - u\|_X \leq \|R_\lambda\|_{B(X)} \cdot \|Au\|_X \leq \frac{1}{\lambda} \|Au\|_X \rightarrow 0 \quad \text{per } \lambda \rightarrow +\infty,$$

e quindi

$$\lambda R_\lambda u \rightarrow u \quad \text{per } \lambda \rightarrow +\infty, \quad u \in D(A). \quad (7.8)$$

Poiché  $\|\lambda R_\lambda\|_{B(X)} \leq 1$  e  $D(A)$  è denso in  $X$ , il limite precedente vale per ogni  $u \in X$ , cioè

$$\boxed{\lambda R_\lambda u \rightarrow u \quad \text{per } \lambda \rightarrow +\infty, \quad u \in X}. \quad (7.9)$$

<sup>2</sup> Ora, se  $u \in D(A)$ , allora

$$A_\lambda u = \lambda AR_\lambda u = \lambda R_\lambda Au.$$

Per (7.9), considerato  $Au$  al posto di  $u$ , resta provata la (7.7).

3. Poiché ciascun operatore  $A_\lambda$  è limitato, possiamo costruire l'esponenziale

$$\exp(tA_\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A_\lambda^k = \exp(-\lambda t) \exp(\lambda^2 t R_\lambda) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k.$$

Definiamo

$$\begin{aligned} S_\lambda(t) &:= \exp(tA_\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A_\lambda^k = \exp(-\lambda t) \exp(\lambda^2 t R_\lambda) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> Infatti, per ogni  $u \in X$  e ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $v \in D(A)$  tale che  $\|u - v\|_X < \epsilon$ . Risulta:

$$\begin{aligned} \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\lambda R_\lambda u - u\|_X &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\lambda R_\lambda u - \lambda R_\lambda v\|_X + \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\lambda R_\lambda v - v\|_X + \|v - u\|_X \\ &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\lambda R_\lambda\|_{B(X)} \cdot \|u - v\|_X + 0 + \|u - v\|_X \leq 1 \cdot \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Poiché  $\epsilon > 0$  è arbitrario, resta provata la (7.9).

Essendo, per ipotesi,  $\|R_\lambda\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ , risulta

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)\|_{B(X)} &= \|\exp(tA_\lambda)\|_{B(X)} \\ &\leq \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} \|R_\lambda\|_{B(X)}^k \leq \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1. \end{aligned}$$

Di conseguenza  $\{S_\lambda(t)\}_{t \geq 0}$  è un semigruppato di contrazione, ed è facile provare che il suo generatore è  $A_\lambda$ , con  $D(A_\lambda) = X$ .

4. Dimostriamo che, per  $\lambda \rightarrow +\infty$ , la famiglia di operatori uniformemente limitati  $\exp(tA_\lambda)$  converge a un operatore limitato  $S(t)$ . Siano allora  $\lambda, \mu > 0$  e stimiamo la differenza  $\exp(tA_\lambda) - \exp(tA_\mu)$ . La relazione di commutatività  $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ , implica  $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ ; quindi  $A_\mu \exp(tA_\lambda) = \exp(tA_\lambda) A_\mu$  per ogni  $t > 0$ . Per ogni  $u \in X$  si ha:

$$\begin{aligned} \exp(tA_\lambda)u - \exp(tA_\mu)u &= \int_0^t \frac{d}{ds} [\exp((t-s)A_\mu) \cdot \exp(sA_\lambda)u] ds \\ &= \int_0^t [\exp((t-s)A_\mu) \cdot \exp(sA_\lambda)(A_\lambda u - A_\mu u)] ds, \end{aligned}$$

essendo

$$\frac{d}{dt} (\exp(tA_\lambda)u) = A_\lambda \exp(tA_\lambda)u = \exp(tA_\lambda)A_\lambda u.$$

Ne segue che (tenuto conto di (7.7))

$$\|\exp(tA_\lambda) - \exp(tA_\mu)\|_{B(X)} \leq t \|A_\lambda u - A_\mu u\|_X \rightarrow 0 \quad \text{per } \lambda, \mu \rightarrow +\infty.$$

Quindi è ben definito il seguente limite

$$S(t)u := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_\lambda(t)u \quad \text{per ogni } t \geq 0, u \in D(A). \quad (7.10)$$

Inoltre, poiché  $\|S_\lambda(t)\|_{B(X)} \leq 1$ , il limite (7.10) esiste per ogni  $u \in X$ , uniformemente in  $t$  sugli intervalli limitati.

Verifichiamo che  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  è un semigruppato di contrazione. Infatti,

$$S(0)u = u$$

e

$$\begin{aligned} S(t)S(s)u &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \exp(tA_\lambda) \exp(sA_\lambda)u \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \exp((t+s)A_\lambda)u = S(t+s)u. \end{aligned}$$

Per ogni fissato  $u \in X$ , l'applicazione  $t \mapsto S(t)u$  è continua essendo il limite delle applicazioni  $t \mapsto \exp(tA_\lambda)u$ , uniformemente per  $t$  in intervalli limitati. Infine, per ogni  $t \geq 0$  e  $u \in X$  con  $\|u\|_X \leq 1$ , si ha la stima

$$\begin{aligned} \|S(t)u\|_X &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\exp(tA_\lambda)u\|_X \\ &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\exp(tA_\lambda)\|_{B(X)} \|u\|_X \leq \|u\|_X \leq 1. \end{aligned}$$

5. Resta da dimostrare che  $A$  è il generatore del semigruppò di contrazione  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

Indichiamo con  $B$  questo generatore. Per quanto visto prima, sappiamo che  $B$  è operatore lineare, chiuso con  $D(B)$  denso in  $X$ . Proviamo che  $B = A$ .

Poiché  $A_\lambda$  è il generatore del semigruppò  $\{\exp(tA_\lambda)\}_{t \geq 0}$ , per ogni  $\lambda > 0$  si ha:

$$S_\lambda(t)u - u = \int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u \, ds. \quad (7.11)$$

Inoltre, se  $u \in D(A)$ , per la disuguaglianza triangolare, si ha:

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u - S(s)Au\|_X \leq \|S_\lambda(s)\|_{B(X)} \|A_\lambda u - Au\|_X + \|(S_\lambda(s) - S(s))Au\|_X \rightarrow 0$$

per  $\lambda \rightarrow +\infty$ , uniformemente per  $s$  in intervalli limitati. Passando al limite per  $\lambda \rightarrow +\infty$  in (7.11), deduciamo

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)A u \, ds, \quad \text{per ogni } t \geq 0, u \in D(A).$$

Di conseguenza,  $D(A) \subseteq D(B)$  e

$$Bu = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)A u \, ds = Au \quad (u \in D(A)).$$

Per provare che  $A = B$ , rimane da provare che  $D(B) \subseteq D(A)$ .

Ora, se  $\lambda > 0$ , allora  $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ . Inoltre, per l'ipotesi,

$$(\lambda I - B)(D(A)) = (\lambda I - A)(D(A)) = X.$$

Quindi l'operatore  $(\lambda I - B)|_{D(A)}$  è iniettivo e suriettivo, di conseguenza  $D(A) = D(B)$ .<sup>3</sup> Pertanto  $A = B$  e quindi  $A$  è effettivamente il generatore del semigruppò di contrazione  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .  $\square$

<sup>3</sup>Più in dettaglio: per provare che  $D(B) \subseteq D(A)$ , siano  $x \in D(B)$  e  $\lambda > 0$  (quindi  $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ ).

Posto  $z = \lambda x - Bx$  (per cui  $x = R(\lambda, B)z$ ), si ha  $z = (\lambda I - A)R(\lambda, A)z = \lambda R(\lambda, A)z - BR(\lambda, A)z = (\lambda I - B)R(\lambda, A)z$ .

Applicando  $R(\lambda, B)$  si ottiene  $x = R(\lambda, B)z = R(\lambda, A)z \in D(A)$ .

**Osservazione 7.4.2.** La precedente dimostrazione dell'implicazione (ii)  $\Rightarrow$  (i) è dovuta a Yosida.

Un'altra dimostrazione della stessa implicazione è dovuta a Hille ed è basata sulle **approssimazioni "backward" di Eulero**

$$\frac{W(t)x - W(t-h)x}{h} = AW(t)x, \quad h > 0$$

per l'equazione

$$\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$$

( $t > 0$ ),  $x \in D(A)$ .

Risolvendo per  $W(t)$  si ha:

$$W(t) = (I - hA)^{-1}W(t-h).$$

Posto  $h = \frac{t}{n}$  e  $t = h, 2h, \dots$ , si ottiene, per induzione,

$$W(t) = \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} W(t-h) =: S_n(t).$$

Si dimostra che :

- (1) ciascun  $S_n(t)$  è una contrazione,
- (2)  $S_n(t)$  converge fortemente a un semigruppato il cui generatore è  $A$ .

Mostriamo ora che, dato un operatore  $A$  soddisfacente le condizioni (ii) del Teorema di Hille-Yosida, il semigruppato generato da  $A$  è univocamente determinato.

**Teorema 7.4.3 (Unicità del semigruppato generato).** *Siano  $\{S_1(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{S_2(t)\}_{t \geq 0}$  due semigruppato di contrazione, aventi lo stesso generatore  $A$ . Allora*

$$\{S_1(t)\}_{t \geq 0} = \{S_2(t)\}_{t \geq 0}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $u \in D(A)$ . Allora  $S_2(s)u \in D(A)$  e  $S_1(t-s)S_2(s)u \in D(A)$ , per ogni  $0 \leq s \leq t$ .

Pertanto, risulta

$$\begin{aligned} S_2(t)u - S_1(t)u &= \int_0^t \frac{d}{ds}[S_1(t-s)S_2(s)u]ds \\ &= \int_0^t [S_1(t-s)(AS_2(s)u) - AS_1(t-s)(S_2(s)u)]ds = 0, \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds}[S_1(t-s)S_2(s)u] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_1(t-s-h)(S_2(s+h)u) - S_1(t-s)S_2(s)u}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_1(t-s-h)(S_2(s+h)u - S_2(s)u)}{h} \\
 &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_1(t-s-h)S_2(s)u - S_1(t-s)S_2(s)u}{h} \\
 &= S_1(t-s)(AS_2(s)u) - AS_1(t-s)(S_2(s)u) = 0.
 \end{aligned}$$

Quindi, per ogni  $t \geq 0$ , gli operatori lineari e limitati  $S_1(t)$  e  $S_2(t)$  coincidono sul sottoinsieme denso  $D(A)$ . Pertanto  $S_1(t) = S_2(t)$ .  $\square$

**Definizione 7.4.4.** Sia  $\omega \in \mathbb{R}$ . Un semigrupp  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  si dice  $\omega$ -contrattivo se  $\|S(t)\|_{B(X)} \leq \exp(\omega t)$  per ogni  $t \geq 0$ .

Una utile variante del precedente Teorema di Hille-Yosida è il risultato che segue (per la dimostrazione cfr., ad esempio, [4]).

**Teorema 7.4.5.** *Sia  $A$  un operatore lineare in uno spazio di Banach  $X$ .*

*Allora, sono equivalenti le proposizioni:*

(i)  *$A$  è il generatore di un semigrupp  $\omega$ -contrattivo.*

(ii)  *$A$  è un operatore densamente definito e chiuso. Inoltre,*

$$(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$$

e

$$\|R_\lambda\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \text{ per ogni } \lambda > \omega.$$



# Capitolo 8

## Applicazione a due prototipi dei problemi *evolutivi* relativi all'Equazione del calore e all'Equazione delle onde.

### 8.1 Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore

La teoria dei Semigruppı fornisce un metodo alternativo per costruire una soluzione del seguente **problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore**: determinare  $u(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfacente

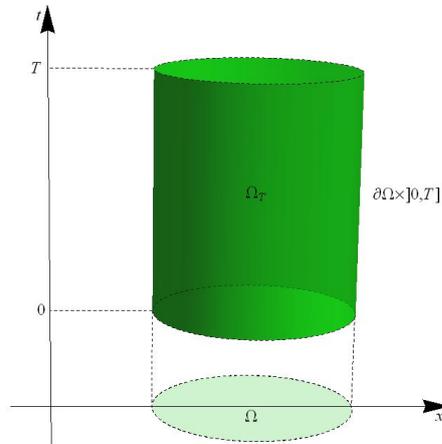
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \times ]0, T] \\ u = g & \text{in } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (8.1)$$

dove  $\Omega$  è aperto, limitato, connesso e regolare di  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Omega_T = \Omega \times ]0, T]$ ,  $T > 0$  fissato,  $g \in L^2(\Omega)$  assegnato (dato iniziale o di Cauchy).

Posto  $u(\cdot, t) := u(t)$  (sicché, per ogni  $t \in [0, T]$ ,  $u(t)$  è funzione della sola variabile  $x$ , cioè la funzione  $x \mapsto u(x, t)$ ), riformuliamo (8.1) come problema di Cauchy (astratto) nello spazio di Hilbert  $X = L^2(\Omega)$ , cioè

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = g, \end{cases}$$

dove  $u \in D(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  e  $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  è l'operatore non limitato definito da  $\boxed{Au := \Delta u}$ .



**Figura 8.1:** Cilindro parabolico

Notiamo che la condizione omogenea di Dirichlet è incorporata nella definizione di  $D(A)$ .

**Teorema 8.1.1 (Semigruppato di soluzioni del problema parabolico lineare (8.1)).**

Sia  $Au := -\Delta u$  con  $u \in D(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . L'operatore  $A$  genera un Semigruppato di contrazione  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  su  $L^2(\Omega)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la forma bilineare associata a  $-\Delta$  :

$$B[u, v] := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \text{per ogni } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Scelto  $v = u$ , risulta (per la disuguaglianza di Poincaré cfr. [2]) per ogni  $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \beta > 0.$$

Per dimostrare che  $A$  genera un semigruppato di contrazione su  $L^2(\Omega)$ , proviamo (in virtù del Teorema 7.4.1):

- (i)  $D(A)$  è denso in  $L^2(\Omega)$ ;
- (ii)  $A$  è operatore lineare, chiuso;
- (iii) ogni numero reale  $\lambda > 0$  appartiene all'insieme risolvente di  $A$ ,  $\rho(A)$ , e  $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{B(L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\lambda}$ .

**1.** Il dominio  $D(A)$  contiene  $C_0^\infty(\Omega)$  e perciò esso è denso in  $L^2(\Omega)$ . Ciò prova (i).

**2.** Sia  $(u_k) \subset D(A)$  con  $u_k \rightarrow u$  e  $Au_k \rightarrow v$  in  $L^2(\Omega)$ .

Per il teorema di regolarità (cfr., ad esempio, [6])

$$\|u_k - u_h\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\|Au_k - Au_h\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k - u_h\|_{L^2(\Omega)})$$

per ogni  $k, h \in \mathbb{N}$ . Ne segue che  $(u_k)_k$  è una successione di Cauchy in  $H^2(\Omega)$  e quindi

$$u_k \rightarrow u \quad \text{in } H^2(\Omega). \quad (8.2)$$

Allora  $u \in D(A)$  e, per (8.2),  $Au_k \rightarrow Au$  in  $L^2(\Omega)$ ; di conseguenza  $Au = v$ . Ciò prova (ii).

**3.** Per provare (iii), consideriamo il problema con condizione omogenea di Dirichlet per l'equazione *stazionaria*

$$\begin{cases} -Au + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.3)$$

Per ogni  $\lambda \geq 0$  il problema (8.3) ha un'unica soluzione debole  $u \in H_0^1(\Omega)$  per ogni  $f \in L^2(\Omega)$  (cfr., ad esempio, [7] Teorema 9.3.4 e Osservazione 9.3.5). In effetti, per la regolarità ellittica,  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Pertanto  $u \in D(A)$  e l'operatore  $\lambda I - A : D(A) \rightarrow L^2(\Omega)$  è iniettivo e suriettivo, purché  $\lambda \geq 0$ . Quindi  $[0, +\infty[ \subset \rho(A)$ . Consideriamo la forma debole del problema di Dirichlet (8.3):

$$B[u, v] + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega). \quad (8.4)$$

Tenendo presente che risulta  $\beta\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u]$ ,  $\beta > 0$ , posto  $v = u$  in (8.4), per  $\lambda > 0$  si ha

$$\lambda\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quindi, poiché  $u = R_\lambda f$ , abbiamo la stima

$$\|R_\lambda f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{per ogni } f \in L^2(\Omega),$$

e quindi

$$\|R_\lambda\|_{B(L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

□

**Osservazione 8.1.2.** Dalla dimostrazione del teorema precedente, si evince che il principale interesse del Teorema 7.4.1 risiede nel fatto di poter ridurre lo studio di un problema *evolutivo* allo studio del problema per una equazione *stazionaria* (cfr. (8.3)).

**Osservazione 8.1.3. (Rappresentazione di soluzioni del problema (8.1) in termini di autofunzioni di  $-\Delta$ )**

Essendo  $\Omega$  limitato, il problema (8.1) può essere risolto da una decomposizione in una base di Hilbert di  $L^2(\Omega)$ . Sia (cfr. 6.4.5)  $(v_n)$  una base ortonormale di Hilbert di autofunzioni dell'operatore  $-\Delta$  con condizione omogenea di Dirichlet:  $v_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$  e

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \mu_n v_n & \text{in } \Omega \\ v_n = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ricerchiamo una soluzione di (8.1) sotto forma di serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) v_n(x).$$

Si vede facilmente che le funzioni della sola variabile  $t$ ,  $a_n(t)$ , devono soddisfare

$$a_n'(t) + \mu_n a_n(t) = 0, \quad \mu_n > 0$$

pertanto

$$a_n(t) = a_n(0) \exp(-\mu_n t).$$

Le costanti  $a_n(0)$  sono determinate dalla relazione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) v_n(x) = g(x).$$

In altre parole, la soluzione  $u$  di (8.1) è  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) \exp(-\mu_n t) v_n(x)$ , dove le costanti  $a_n(0)$  sono le componenti di  $g$  nella base  $(v_n)$ , cioè  $a_n(0) = (g, v_n)_{L^2(\Omega)}$ . Quindi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\mu_n t) (g, v_n)_{L^2(\Omega)} v_n(x). \quad (8.5)$$

La (8.5) definisce, per ogni  $g \in L^2(\Omega)$  una applicazione  $t \mapsto u(t) = S(t)g$  da  $[0, +\infty[$  in  $L^2(\Omega)$ . Questa applicazione è continua per  $t \in [0, +\infty[$  e differenziabile per  $t > 0$ . Inoltre  $u(t) \in D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$  per ogni  $t > 0$  e

$$\frac{d}{dt} u(t) = Au(t) \quad \text{per ogni } t > 0. \quad (8.6)$$

Infatti, poiché  $g \in L^2(\Omega)$  e  $\mu_n > 0$ , risulta

$$|\exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq (g, v_n)_{L^2(\Omega)}^2$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (g, v_n)_{L^2(\Omega)}^2 = \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty.$$

Pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)} v_n(x)$$

è convergente, uniformemente per  $t \geq 0$ .

In particolare, poiché le somme parziali sono funzioni continue nella variabile  $t$ , l'applicazione  $t \mapsto u(t) = S(t)g$  è anch'essa continua.

Essendo  $\mu_n \exp(-\mu_n t) \leq \frac{1}{te}$ ,<sup>1</sup> risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu_n \exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \frac{1}{t^2 e^2} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Allora la serie che definisce  $Au(t)$  è convergente. Questo implica  $u(t) \in D(A)$ , per ogni  $t > 0$ . Differenziando la serie (8.5) termine a termine e osservando che la serie delle derivate è anche convergente, si ottiene la (8.6).

Una volta che si è costruito il semigruppoo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  generato da  $A$ , rimane da vedere **in che senso una traiettoria del semigruppoo**  $t \mapsto u(t) = S(t)g$  **fornisce una soluzione al problema** (8.1). La rappresentazione (8.5) contiene la risposta a questa domanda. Qui, per brevità, diamo alcune indicazioni.

**Condizione iniziale.** Poiché  $u(0) = S(0)g = g \in L^2(\Omega)$ , la condizione iniziale  $u(x, 0) = g(x)$  ( $x \in \Omega$ ) è soddisfatta come identità tra funzioni di  $L^2(\Omega)$ .

**Condizione di Dirichlet.** Poiché  $D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$ , allora  $u(t)$  soddisfa la condizione omogenea di Dirichlet, per ogni  $t \geq 0$ .

---

<sup>1</sup>Per  $\xi \geq 0$  e  $t$  fissato, la funzione  $\xi \mapsto \xi \exp(-\xi t)$  ha massimo in  $\xi_0 = \frac{1}{t}$ . Perciò  $\mu_n \exp(-\mu_n t) \leq \max_{\xi \geq 0} \xi \exp(-\xi t) = \frac{1}{te}$ .

**Soluzioni deboli.** Con un procedimento di approssimazione, si può dimostrare che la funzione  $u = u(x, t)$  fornisce una soluzione all'equazione del calore nel senso delle distribuzioni, cioè : per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times ]0, +\infty[)$  risulta

$$\int_{\Omega} dx \int_0^{+\infty} (u\phi_t + u\Delta\phi)dt = 0.$$

**Osservazione 8.1.4.** Per ulteriori questioni relative a Principio del massimo, unicità e regolarità della soluzione, si rinvia a [5] e anche al Quaderno [7]. Qui non è superfluo richiamare il fatto che l'equazione del calore ha un *forte effetto regolarizzante*: la soluzione  $u(x, t)$  è  $C^\infty$  in  $x$  per ogni  $t > 0$ , anche se il dato iniziale  $g$  è discontinuo. Questo effetto implica, in particolare, che l'equazione del calore è *irreversibile rispetto alla variabile tempo  $t$*  (cfr. [7]).

### 8.1.1 Esempio unidimensionale: conduzione termica in una barra con gli estremi fissi

Sia  $\Omega = ]0, \pi[ \subset \mathbb{R}$  e assegnato  $g \in L^2(]0, \pi[)$ , consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = g(x), & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (8.7)$$

Gli autovalori dell'operatore  $-u_{xx}$  sono  $\mu_n = n^2$  e le rispettive autofunzioni (normalizzate) sono  $v_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ . Allora la formula (8.5) dà la soluzione del problema (8.7) come somma di una serie di Fourier di seni:

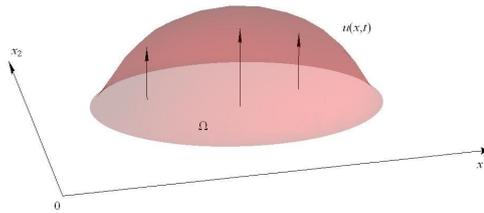
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \exp(-n^2 t) \left( \int_0^\pi g(y) \sin(ny) dy \right) \sin(nx).$$

## 8.2 Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde

Sia  $\Omega$  aperto, limitato, connesso e regolare di  $\mathbb{R}^N$  e consideriamo il seguente **problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde**: determinare  $u(x, t) : \overline{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfacente

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times ]0, T] \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \Omega, \end{cases} \quad (8.8)$$

assegnati  $g \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e  $h \in H_0^1(\Omega)$ .



**Figura 8.2:** Membrana elastica che occupa l'aperto limitato  $\Omega$  del piano, fissata lungo la frontiera  $\partial\Omega$ , soggetta a piccole vibrazioni verticali. La funzione  $u(x, t)$  rappresenta la configurazione di  $u$  nel punto  $x$  della membrana al tempo  $t$ .

**Osservazione 8.2.1.** La condizione  $u = 0$  su  $\partial\Omega \times [0, T]$  significa che la corda (o la membrana) è fissata su  $\partial\Omega$ ; la configurazione iniziale è descritta da  $g$  e la velocità iniziale è descritta da  $h$ . La coppia  $(g, h)$  rappresenta il dato di Cauchy.

Riscriviamo (8.8) come sistema del primo ordine, ponendo  $v := u_t$ .

Allora (8.8) diviene

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times ]0, T], \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \Omega, \\ v(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \Omega. \end{cases} \quad (8.9)$$

Applichiamo la teoria dei semigrupperi nello spazio  $X := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,<sup>2</sup> munito della norma<sup>3</sup>

$$\|(u, v)\|_X := (B[u, u] + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

dove  $B[u_1, u_2] := \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx$ , per ogni  $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$  e ricordiamo che risulta

$$\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (\text{energia potenziale elastica}) \quad (\beta > 0) \quad (8.10)$$

per ogni  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Definiamo l'operatore non limitato

$$A : D(A) \subseteq H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\boxed{A(u, v) := (v, \Delta u)}$$

$$\text{per ogni } (u, v) \in D(A) := [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega). \quad (8.11)$$

Proviamo che  $A$  verifica le ipotesi del Teorema 7.4.1.

**Teorema 8.2.2 (Semigruppero di soluzioni del problema iperbolico lineare (8.8)).**

L'operatore  $A$  genera un Semigruppero di contrazione  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  su  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

*Dimostrazione.*

(1)  $D(A)$  è chiaramente denso in  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

(2) Proviamo che  $A$  è chiuso. Sia  $((u_k, v_k))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D(A)$ , con

$$(u_k, v_k) \rightarrow (u, v), \quad A(u_k, v_k) \rightarrow (f_1, f_2)$$

in  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Poiché  $A(u_k, v_k) = (v_k, \Delta u_k)$ , concludiamo che

$$f_1 = v \quad \text{e} \quad \Delta u_k \rightarrow f_2 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega).$$

<sup>2</sup>Notiamo che la condizione  $u = 0$  su  $\partial\Omega \times [0, T]$  è incorporata nello spazio  $X$ . La condizione  $u_t = v = 0$  su  $\partial\Omega \times [0, T]$  è una conseguenza di  $u = 0$  su  $\partial\Omega \times [0, T]$ .

<sup>3</sup>La quantità  $\|(u, v)\|_X^2$  rappresenta la *energia totale della membrana vibrante*. Il termine  $B[u, u]$  rappresenta l'*energia potenziale elastica*, mentre  $\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2$  rappresenta l'*energia cinetica*.

Ne segue che

$$u_k \rightarrow u \quad \text{in } H^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \Delta u = f_2 \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Pertanto  $(u, v) \in D(A)$ ,  $A(u, v) = (v, \Delta u) = (f_1, f_2)$ .

**(3)** Sia  $\lambda > 0$ ,  $(f_1, f_2) \in X := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , e consideriamo l'equazione

$$\lambda(u, v) - A(u, v) = (f_1, f_2),$$

equivalente alle *due equazioni scalari*

$$\begin{cases} \lambda u - v = f_1 & (u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \\ \lambda v - \Delta u = f_2 & (v \in H_0^1(\Omega)). \end{cases} \quad (8.12)$$

Da (8.12) segue

$$\lambda^2 u - \Delta u = \lambda f_1 + f_2. \quad (8.13)$$

Poiché  $\lambda^2 > 0$ , la (8.10) e la teoria della regolarità implicano che esiste un'unica soluzione  $u$  di (8.13). Definito  $v := \lambda u - f_1 \in H_0^1(\Omega)$ , abbiamo provato che (8.12) ha un'unica soluzione  $(u, v)$ . Ne segue che  $\rho(A) \supseteq (0, +\infty)$ .

Utilizzando la (8.12), scriviamo  $(u, v) = R_\lambda(f_1, f_2)$ . Ora dalla seconda equazione in (8.12), deduciamo  $\lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[u, v] = (f_2, v)_{L^2(\Omega)}$ . Sostituendo  $v = \lambda u - f_1$ , otteniamo (per la disuguaglianza generalizzata di Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned} \lambda (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[u, u]) &= (f_2, v)_{L^2(\Omega)} + B[u, f_1] \\ &\leq (\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[f_1, f_1])^{\frac{1}{2}} (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[u, u])^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Allora, dalla definizione di norma in  $X$ ,

$$\|(u, v)\|_X \leq \frac{1}{\lambda} \|(f_1, f_2)\|_X,$$

quindi

$$\|R_\lambda\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

concludendo così la dimostrazione.  $\square$

**Osservazione 8.2.3 (Rappresentazione di soluzioni del problema (8.8) in termini di autofunzioni di  $-\Delta$ ).**

Essendo  $\Omega$  limitato, il problema (8.8) può essere risolto da una decomposizione in una base ortonormale di Hilbert di  $L^2(\Omega)$ , come è stato fatto per l'equazione del calore. Sia (cfr. 6.4.5)  $(v_n)$  una base ortonormale di Hilbert di autofunzioni dell'operatore  $-\Delta$  con condizione omogenea di Dirichlet:  $v_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$  e

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \mu_n v_n & \text{in } \Omega \\ v_n = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ricerchiamo una soluzione di (8.8) sotto forma di serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) v_n(x).$$

Si vede facilmente che le funzioni della sola variabile  $t$ ,  $a_n(t)$ , devono soddisfare

$$a_n''(t) + \mu_n a_n(t) = 0,$$

con  $\mu_n > 0$ ,  
pertanto

$$a_n(t) = a_n(0) \cos(\sqrt{\mu_n} t) + \frac{a_n'(0)}{\sqrt{\mu_n}} \sin(\sqrt{\mu_n} t).$$

Quindi, la soluzione  $u$  di (8.8) è

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n(0) \cos(\sqrt{\mu_n} t) + \frac{a_n'(0)}{\sqrt{\mu_n}} \sin(\sqrt{\mu_n} t) \right) v_n(x), \quad (8.14)$$

dove le costanti  $a_n(0)$  e  $a_n'(0)$  sono rispettivamente le componenti di  $g$  e di  $h$  nella base  $(v_n)_n$ , cioè  $a_n(0) = (g, v_n)_{L^2(\Omega)}$  e  $a_n'(0) = (h, v_n)_{L^2(\Omega)}$ . In altre parole,  $a_n(0)$  e  $a_n'(0)$  sono determinate dalle relazioni  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) v_n(x)$  e  $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(0) v_n(x)$

Poiché  $(g, h) \in X$ , la serie che esprime la soluzione  $u(x, t)$  è convergente.

Avendo costruito, in modo univoco, il semigruppoo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , occorre esplicitare **in che senso le traiettorie**  $t \mapsto u(t) = S(t)(g, h)$  **forniscono una soluzione del problema (8.8)**.

La (8.14) contiene la risposta a questa domanda. Qui, per brevità, diamo alcune indicazioni.

**Le condizioni di Cauchy e di Dirichlet sono soddisfatte.**

Sia  $(g, h) \in X$ . Poiché l'applicazione  $t \mapsto u(t) = S(t)(g, h)$  è continua per  $t \geq 0$ , segue che

$$\|u(t) - g\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|v(t) - h\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Quindi le condizioni di Cauchy in (8.8) sono soddisfatte. Inoltre, la condizione di Dirichlet in (8.8) è soddisfatta perché  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$  per ogni  $t \geq 0$ .

**L'equazione delle onde è soddisfatta nel senso delle distribuzioni.**

La traiettoria  $t \mapsto u(t) = S(t)(g, h)$  è di classe  $C^1$  e soddisfa

$$\frac{d}{dt}(u, u_t) = A(u, u_t) = (u_t, \Delta u) \quad \text{per ogni } t > 0$$

e

$$u(0) = g, u_t(0) = h.$$

Con un procedimento di approssimazione, si può dimostrare che la funzione  $u = u(x, t)$  fornisce una soluzione all'equazione delle onde nel senso delle distribuzioni, cioè : per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times ]0, +\infty[)$  risulta

$$\int_{\Omega} dx \int_0^{+\infty} (u\phi_{tt} + \nabla_x u \cdot \nabla_x \phi) dt = 0.$$

**Osservazione 8.2.4.** Per ulteriori questioni relative ad unicità, regolarità della soluzione, si rinvia, a [5] e anche al Quaderno [7]. Qui non è superfluo richiamare alcune peculiarità dell'equazione delle onde:

- (1) Diversamente dall'equazione del calore, l'equazione delle onde *non ha alcun effetto regolarizzante sui dati di Cauchy*; ad eccezione del caso unidimensionale  $N = 1$ , si ha che per la soluzione  $u(x, t)$  si può verificare la **perdita di almeno un ordine di derivazione, rispetto alla regolarità dei dati**.
- (2) Quando la dimensione  $N > 1$  è *dispari*, ad esempio  $N = 3$ , un segnale acustico o ottico concentrato in un punto  $x$  all'istante  $t = 0$  è concentrato all'istante  $t > 0$  sulla sfera di centro  $x$  e raggio  $t$  (**Principio di Huygens**). Se la dimensione  $N$  è *pari* (per esempio  $N = 2$ ) il segnale persiste in  $x$ , smorzandosi nel tempo, ma non svanendo completamente.
- (3) **La soluzione decade per tempi lunghi:**

$$u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{come} \quad \frac{1}{t} \quad \text{per} \quad t \rightarrow +\infty.$$

*“ Glory is like a circle in the water,  
which never ceaseth to enlarge itself,  
till by broad spreading, it disperses to naught.”*

William Shakespeare (Henry VI)

### 8.2.1 Esempio unidimensionale: movimenti di una corda omogenea con gli estremi fissi

Sia  $\Omega = ]0, \pi[ \subset \mathbb{R}$ , assegnati  $g \in H_0^1(]0, \pi[)$  e  $h \in L^2(]0, \pi[)$ , consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x), \quad 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (8.15)$$

La formula (8.14) dà la soluzione del problema (8.15) come somma di una serie di Fourier di seni:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \left[ \left( \int_0^\pi g(y) \sin(ny) dy \right) \cos(nt) \right. \\ & \left. + \left( \int_0^\pi h(y) \sin(ny) dy \right) \frac{\sin(nt)}{n} \right] \sin(nx). \end{aligned}$$

(cfr. anche [7] per una dimostrazione di questo esempio unidimensionale).

**Osservazione 8.2.5.** Anche più generali equazioni evolutive di tipo parabolico e di tipo iperbolico (con coefficienti regolari che non dipendono dalla variabile  $t$ ) possono essere studiate applicando la teoria dei Semigruppì di operatori lineari, usando, ove necessario, il Teorema 7.4.5 invece del Teorema 7.4.1.

## 8.3 Esercizi proposti per i Capitoli 6-8

1. Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un aperto, connesso, limitato e regolare. Scrivere la formulazione debole del problema di Neumann omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta h = \mu h & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial h}{\partial \nu} = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.16)$$

$h \in H^1(\Omega)$ , dove  $\nu$  è il versore normale uscente da  $\partial\Omega$ . Fornire, inoltre, la caratterizzazione variazionale degli autovalori.

*Soluzione.* Le proprietà dell'operatore  $(-\Delta, H^1(\Omega))$  (autoaggiunto, positivo e con inverso destro compatto) con condizione al bordo di Neumann omogenea si provano in maniera analoga a quanto fatto nel caso dell'operatore di Laplace-Dirichlet.

Per la formulazione debole di (8.16), si moltiplicano ambo i membri dell'equazione  $-\Delta h = \mu h$  per  $v \in H^1(\Omega)$  e si integra per parti (applicando le identità di Green, cfr. [7]); tenendo presente che  $\frac{\partial h}{\partial \nu} = 0$ , si ottiene:

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \, dx = \mu \int_{\Omega} h v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Per quanto riguarda la formulazione variazionale degli autovalori  $(\mu_n)_n$ , si ottiene, in analogia al caso Laplace-Dirichlet,

$$\begin{aligned} \mu_n &= \max_{\substack{\Sigma_{n-1} \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_{n-1} = n-1}} \min_{h \in \Sigma_{n-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx}{\int_{\Omega} h^2 \, dx} \right\} \\ &= \min_{\substack{\Sigma_n \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_n = n}} \max_{h \in \Sigma_n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx}{\int_{\Omega} h^2 \, dx} \right\}. \end{aligned}$$

□

2. Ripetere l'esercizio precedente per il problema di Robin omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta h = \mu h & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial h}{\partial \nu} + \beta h = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.17)$$

$\beta > 0, h \in H^1(\Omega)$ .

*Soluzione.* Si procede come nel precedente esercizio, osservando che  $\frac{\partial h}{\partial \nu} = -\beta h$ . Si ottiene che la formulazione debole di (8.17) è

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} h v \, d\mathcal{H}^{N-1} = \mu \int_{\Omega} h v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

dove  $\mathcal{H}^{N-1}$  è la misura di Hausdorff  $(N-1)$ -dimensionale, cfr. [7]. La formulazione variazionale degli autovalori  $(\mu_n)_n$  è data da:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \max_{\substack{\Sigma_{n-1} \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_{n-1} = n-1}} \min_{h \in \Sigma_{n-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} h^2 \, d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_{\Omega} h^2 \, dx} \right\} \\ &= \min_{\substack{\Sigma_n \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_n = n}} \max_{h \in \Sigma_n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} h^2 \, d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_{\Omega} h^2 \, dx} \right\}. \end{aligned}$$

□

3. Scrivere la caratterizzazione variazionale degli autovalori  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  per i problemi **unidimensionali**

- Problema di Dirichlet omogeneo in  $[0, 1]$ ;
- Problema di Neumann omogeneo in  $[0, \pi]$ ;
- Problema con condizioni miste Dirichlet-Neumann in  $[0, 1]$ ;
- Problema con condizioni periodiche in  $[-\pi, \pi]$ ;

e mostrare che, utilizzando tale caratterizzazione, si ottengono gli autovalori calcolati nella sezione 6.3.

4. Data la matrice  $A := \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a \neq 0$ , determinare la matrice esponenziale  $e^{tA}$ .

*Soluzione.* Risulta

$$A^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix};$$

$A^2$  è matrice diagonale, pertanto

$$A^{2j} = \begin{pmatrix} (-1)^j a^{2j} & 0 \\ 0 & (-1)^j a^{2j} \end{pmatrix},$$

e

$$A^{2j+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^j a^{2j+1} \\ (-1)^{j+1} a^{2j+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j A^j}{j!} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^j (at)^{2j}}{(2j)!} \dots & \frac{at}{1!} - \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^5}{5!} - \dots \\ \frac{-at}{1!} + \frac{(at)^3}{3!} - \frac{(at)^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^j (at)^{2j}}{(2j)!} \dots \end{pmatrix}.$$

In definitiva

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(at) & \sin(at) \\ -\sin(at) & \cos(at) \end{pmatrix}.$$

□

5. Ripetere l'esercizio precedente per la matrice  $B := \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}$ , con  $a, b \neq 0$ .

*Soluzione.* Risulta

$B = bI + A$ , dove  $A$  è la matrice data nell'esercizio precedente.

Allora

$$e^{tB} = e^{bIt} \cdot e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{bt} \cos(at) & e^{bt} \sin(at) \\ -e^{bt} \sin(at) & e^{bt} \cos(at) \end{pmatrix}.$$

□

6. Determinare il generatore infinitesimale  $A_1$  del semigrupp (verificare per esercizio)

$$(S_1(t))(u(x)) := u(e^t x),$$

$t > 0$ ,  $u \in C_b^0(\mathbb{R})$  (spazio delle funzioni continue e limitate su  $\mathbb{R}$ ).

Scrivere la soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = A_1 u & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = x & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

*Soluzione.*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(S_1(t))(u(x)) - u(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(e^t x) - u(x)}{t} \\ & \text{(per } t \rightarrow 0^+ : e^t = 1 + t + o(t)) \\ &= x \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x + tx) - u(x)}{tx} = x \frac{d}{dx} u(x) =: A_1 u \end{aligned}$$

La soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = x u_x & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = x & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

è (cfr. 7.1.6)  $u(x, t) = x e^t$ .

□

7. Determinare il generatore infinitesimale  $A_2$  del semigrupp (verificare per esercizio)

$$(S_2(t))(u(x)) := e^{tx^2} u(x), u \in C_b^0(\mathbb{R}).$$

Scrivere la soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = A_2 u & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = x^3 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

*Soluzione.*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(S_2(t))(u(x)) - u(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tx^2}u(x) - u(x)}{t} \\ &= x^2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tx^2}u(x) - u(x)}{tx^2} = x^2u(x) =: A_2u \end{aligned}$$

La soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = x^2u & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = x^3 & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

è (cfr. 7.1.6)  $u(x, t) = x^3e^{tx^2}$ .

□

8. Sia

$$(S_3(t))(u(x)) := (K_t * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y)u(y)dy, u \in C_b^0(\mathbb{R}^N),$$

(cfr., ad esempio, [7] per definizione e proprietà del prodotto di convoluzione  $*$ ) dove

$$K_t(z) = K(z, t) = \frac{\exp(-\frac{|z|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}},$$

$z \in \mathbb{R}^N, t > 0$  e poniamo  $(S_3(0))(u(x)) = u(x)$ .

Provare che  $\{S_3(t)\}_{t \geq 0}$  è un semigruppο contrattivo in  $C_b^0(\mathbb{R}^N)$

(**semigruppο del calore, o di Gauss-Weierstrass**, cfr., ad esempio, [7] Cap. 11),

$$\|S_3(t)\|_{B(C_b^0(\mathbb{R}^N))} = 1 \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

e determinarne il generatore infinitesimale  $A_3$ .

*Soluzione.* Proviamo che per ogni  $t, s > 0$  risulta  $(S_3(t+s))(u(x)) = (S_3(t)S_3(s))(u(x))$ .

Risulta  $(S_3(t+s))(u(x)) = (K_{t+s} * u)(x)$  e  $(S_3(t)S_3(s))(u(x)) = (K_t * (K_s * u))(x) = ((K_t * K_s) * u)(x)$ . Allora è sufficiente provare che:

$$K_{t+s}(z) = (K_t * K_s)(z),$$

per ogni  $t, s > 0$  e per ogni  $z \in \mathbb{R}^N$ .

Per provarlo, utilizziamo la trasformata (parziale) di Fourier  $\mathcal{F}$  rispetto alla variabile spaziale. <sup>4</sup>

$\mathcal{F}((K_t * K_s))(\xi) = \mathcal{F}(K_t)(\xi) \cdot \mathcal{F}(K_s)(\xi)$ <sup>5</sup> =  $\exp(-t|\xi|^2) \cdot \exp(-s|\xi|^2) = \exp(-(t+s)|\xi|^2) = \mathcal{F}(K_{t+s})(\xi)$ . Per l'iniettività della trasformata di Fourier, si ha

$(K_t * K_s)(z) = K_{t+s}(z)$ , per ogni  $t, s > 0$  e per ogni  $z \in \mathbb{R}^N$ .

Inoltre  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S_3(t)u - u\|_\infty = 0$ .

Proviamo che il semigruppoo  $S_3$  è contrattivo.

$$|(S_3(t)u)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\exp(-\frac{|x-y|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} |u(y)| dy \leq \|u\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\exp(-\frac{|x-y|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} dy$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$  e ogni  $t > 0$ , da cui  $\|S_3(t)\|_{B(C_b^0(\mathbb{R}^N))} \leq 1$  per ogni  $u \in C_b^0(\mathbb{R}^N)$ .

Preso  $v \equiv 1 \in C_b^0(\mathbb{R}^N)$ , risulta  $(S_3(t))v(x) = 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$ , pertanto  $\|S_3(t)\|_{B(C_b^0(\mathbb{R}^N))} = 1$  per ogni  $t > 0$ .

Per determinare il generatore infinitesimale  $A_3$ , applichiamo la trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$  a  $\frac{(S_3(t))(u(x)) - u(x)}{t}$ .

Risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{(S_3(t))(u(x)) - u(x)}{t}\right) &= \frac{\mathcal{F}(K_t)(\xi) \cdot \mathcal{F}(u)(\xi) - \mathcal{F}(u)(\xi)}{t} \\ &= \frac{\mathcal{F}(K_t)(\xi) - 1}{t} \mathcal{F}(u)(\xi) = \left(\frac{\exp(-t|\xi|^2) - 1}{t}\right) \mathcal{F}(u)(\xi) \\ &= \left(\frac{\exp(-t|\xi|^2) - 1}{t|\xi|^2}\right) |\xi|^2 \mathcal{F}(u)(\xi) \\ &\rightarrow (\text{per } t \rightarrow 0^+) - |\xi|^2 \mathcal{F}(u)(\xi) \quad \underbrace{\quad}_{\text{(cfr. [7] Prop.10.2.4)}} \quad \mathcal{F}(\Delta u)(\xi). \end{aligned}$$

Per l'iniettività di  $\mathcal{F}$ , deduciamo che il generatore infinitesimale  $A_3$  del semigruppoo del calore è l'operatore di Laplace  $\Delta$  con dominio  $D(\Delta) = \{u \in C_b^0(\mathbb{R}^N), \Delta u \in C_b^0(\mathbb{R}^N)\}$ .  $\square$

<sup>4</sup>Cfr., ad esempio, [7] cap.10, per definizione e proprietà di  $\mathcal{F}$ . Osserviamo esplicitamente che qui, a differenza di [7], prendiamo, nella definizione di trasformata di Fourier, come *carattere*  $\exp(-ix \cdot \xi)$  invece di  $\exp(-2\pi ix \cdot \xi)$ , cioè  $\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \exp(-ix \cdot \xi) dx$ .

<sup>5</sup> $\mathcal{F}(K_t)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\exp(-\frac{|x|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \exp(-ix \cdot \xi) dx = \exp(-t|\xi|^2), \xi \in \mathbb{R}^N$ .

9. Sia  $u \in C_b^2(\mathbb{R})$  (sottospazio di  $C_b^0(\mathbb{R})$  delle funzioni continue e limitate su  $\mathbb{R}$  con derivata prima e seconda continue e limitate),  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < t < +\infty$  e  $P_t(z)$  il nucleo di Poisson

$$P_t(z) := \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + z^2}.$$

Definiamo <sup>6</sup>

$$\begin{aligned} (S_4(t))(u(x)) &:= (P_t * u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x-y)u(y)dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + (x-y)^2} u(y)dy \end{aligned}$$

e poniamo  $(S_4(0))(u(x)) = u(x)$ .

Provare che  $\{S_4(t)\}_{t \geq 0}$  è un semigruppato contrattivo in  $C_b^2(\mathbb{R})$ ,

$$\|S_4(t)\|_{B(C_b^2(\mathbb{R}))} = 1$$

per ogni  $t \geq 0$ , determinarne il generatore infinitesimale  $A_4$  e provare che

$$A_4 u = -Hu',$$

dove  $H$  è la trasformata di Hilbert.<sup>7</sup>

*Soluzione.* Con il cambiamento di variabile  $x - y = z$ , si ha

$$(P_t * u)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + (x-y)^2} u(y)dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + z^2} u(x-z)dz.$$

<sup>6</sup>Questo integrale rappresenta una funzione armonica nel semipiano superiore con  $u$  valore alla frontiera.

<sup>7</sup>Se  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , la trasformata di Hilbert di  $u$  è definita da  $(Hu)(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y)}{x-y} dy$  (l'integrale esiste, a valor principale, per quasi ogni  $x$ ). Risulta  $Hu \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\|Hu\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$  e  $H(Hu) = -u$ . Pertanto  $H$  è una isometria di  $L^2(\mathbb{R})$  in  $L^2(\mathbb{R})$ , di periodo 4.

Risulta, per ogni  $t, s > 0$ :<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
 P_t(P_s * u)(x) &= \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_s u(x-z)}{t^2+z^2} dz \\
 &= \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+z^2} \left( \frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{s^2+(x-z-\xi)^2} u(\xi) d\xi \right) dz \\
 &= \frac{st}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+z^2)(s^2+(x-z-\xi)^2)} dz \right) u(\xi) d\xi \\
 &= \frac{st}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\pi}{st} \frac{(t+s)}{(t+s)^2+(x-\xi)^2} \right) u(\xi) d\xi \\
 &= \frac{t+s}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+s)^2+(x-\xi)^2} u(\xi) d\xi = (P_{t+s} * u)(x).
 \end{aligned}$$

Inoltre (verificare per esercizio):

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S_4(t)u - u\|_\infty = 0$ ,
- $\{S_4(t)\}_{t \geq 0}$  è semigruppoo contrattivo,
- $\|S_4(t)\|_{B(C_b^2(\mathbb{R}))} = 1$  per ogni  $t \geq 0$ .

---

<sup>8</sup>L'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+z^2)(s^2+(x-z-\xi)^2)} dz$$

può essere calcolato col teorema dei residui (cfr., ad esempio, [8] 7.3), applicato alla funzione della variabile complessa  $w$ ,  $f(w) = \frac{1}{(t^2+w^2)(s^2+(\tau-w)^2)}$ , considerando il dominio regolare

$$\overline{B}_R(0) \cap \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \geq 0\},$$

con  $R > 0$  sufficientemente grande in modo che  $\overline{B}_R(0) \cap \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \geq 0\}$  contenga i poli del primo ordine di  $f(w)$ ,  $w_1 = it$ ,  $w_3 = \tau + is$ , dove  $\tau := x - \xi$ .

Risulta

$$\text{Res}(f, w_1) = -\frac{i}{2t(\tau + is - it)(\tau - is - it)},$$

$$\text{Res}(f, w_3) = -\frac{i}{2s(\tau + is - it)(\tau + is + it)}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+z^2)(s^2+(x-z-\xi)^2)} dz &= 2\pi i [\text{Res}(f, w_1) + \text{Res}(f, w_3)] \\
 &= \frac{\pi}{st} \frac{\tau(t+s) + i(s-t)(t+s)}{(\tau + is - it)(\tau - is - it)(\tau + is + it)} = \frac{\pi}{st} \frac{(t+s)}{\tau^2 + (t+s)^2}.
 \end{aligned}$$

Per determinare il generatore infinitesimale  $A_4$ , osserviamo preliminarmente che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x-y)dy = 1$$

per ogni  $t > 0$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Allora,<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \frac{(S_4(t))(u(x)) - u(x)}{t} &= \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x-y)(u(y) - u(x))dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x)}{t^2 + (x-y)^2} dy \\ &\quad (\text{per } t \rightarrow 0^+, \text{ e per il teorema della convergenza dominata}) \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x)}{(x-y)^2} dy =: A_4 u. \end{aligned}$$

Proviamo che  $A_4 u = -Hu'$ .

Per questo è sufficiente provare che

$$v.p. \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x)}{(x-y)^2} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(y)}{x-y} dy \right) = 0,$$

cioè,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x) + u'(y)(x-y)}{(x-y)^2} dy = 0.$$

<sup>9</sup>L'integrale è convergente perché  $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ . Infatti,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x)}{(x-y)^2} dy \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|2u(x) - u(x-z) - u(x+z)|}{z^2} dz.$$

Risulta

$$\int_{-1}^{+1} \frac{|2u(x) - u(x-z) - u(x+z)|}{z^2} dz \leq \int_{-1}^{+1} \|u''\|_{\infty} dz = 2\|u''\|_{\infty} < +\infty$$

per ogni  $x$ . Inoltre,

$$\int_1^{+\infty} \frac{|2u(x) - u(x-z) - u(x+z)|}{z^2} dz \leq 4\|u\|_{\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{z^2} dz < +\infty$$

per ogni  $x$ , e analogamente  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{|2u(x) - u(x-z) - u(x+z)|}{z^2} dz < +\infty$  per ogni  $x$ .

Questo si verifica agevolmente, se si osserva che<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} & v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x) + u'(y)(x - y)}{(x - y)^2} dy \\ &= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[u(y) + u'(y)(x - y)] - u(x)}{(x - y)^2} dy \\ &= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d}{dy} \left( \frac{u(y)}{x - y} \right) - u(x) \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{x - y} \right) \right] dy = 0. \end{aligned}$$

□

---

<sup>10</sup>Si può provare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (a meno di un fattore moltiplicativo costante dipendente solo dalla dimensione spaziale uno e dall'esponente 1/2),

$$A_4 u(x) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u(x) - u(x - y) - u(x + y)}{y^2} dy = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$$

(operatore di Laplace frazionario) (cfr., A. Carbotti, S. Dipierro, E. Valdinoci, *Local Density Of Solutions To Fractional Equations*, De Gruyter Studies in Mathematics vol. 74, (2019)).



# Bibliografia

- [1] A. Albanese, E. Mangino, B. Moscatelli: *Elementi di analisi spettrale per operatori in spazi di Banach*, Quaderno 1/2009, Università del Salento - Coordinamento SIBA, e-ISBN 978-88-8305-067-1.
- [2] H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille: *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.
- [3] S. Banach: *Théorie des Opérations Linéaires*, Chelsea Pub. Company N. Y., 1952.
- [4] A. Bressan: *Lecture Notes on Functional Analysis with Applications to Linear Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 143, AMS, 2013.
- [5] H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [6] M. Carriero, L. De Luca: *Introduzione al Calcolo delle Variazioni*, Quaderno 1/2010, Università del Salento - Coordinamento SIBA, e-ISBN 978-88-8305-074-9.
- [7] M. Carriero, L. Anzilli: *Introduzione alle Equazioni a Derivate Parziali Lineari*, Quaderno 1/2015, Università del Salento - Coordinamento SIBA, e-ISBN 978-88-8305-110-4.
- [8] M. Carriero, S. Cito: *Introduzione alla Analisi Complessa*, Quaderno 2/2015, Università del Salento - Coordinamento SIBA, e-ISBN 978-88-8305-117-3.
- [9] E.A. Coddington, N. Levinson: *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, N.Y., 1955.
- [10] J.B. Conway: *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, N.Y., 1985.

- [11] R. Courant, D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, vol. I, Interscience Publishers, Inc., N.Y., 1953.
- [12] Y. Eidelman, V. Milman, A. Tzolomitis: *Functional Analysis, An Introduction*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 66, AMS, 2004.
- [13] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, AMS, 1998.
- [14] A. Henrot: *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [15] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin: *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale*, Ed. Mir, 1980.
- [16] S. Lang: *Algebra Lineare*, Boringhieri, 1977.
- [17] C. Miranda: *Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare vol. I e II*, Monografia U.M.I., 1978.
- [18] A.N. Tichonov, A.A. Samarskij: *Equazioni della Fisica Matematica*, Ed. Mir, 1981.
- [19] H.F. Weinberger: *A First Course in Partial Differential Equations*, Blaisdell, 1965.