

## CAPITOLO 3

### Superfici regolari di $\mathbb{R}^3$

In questo Capitolo iniziamo lo studio delle superfici regolari introducendo gli strumenti e i concetti di base, tra questi spicca sicuramente per importanza la prima forma fondamentale che gioca un ruolo fondamentale per la geometria intrinseca delle superfici.

#### 3.1. Definizione, osservazioni ed esempi

Al fine di studiare le superfici di  $\mathbb{R}^3$  dal punto di vista della geometria differenziale introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 3.1.** *Sia  $M$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  che assumiamo connesso.  $M$  si dice **superficie regolare** di  $\mathbb{R}^3$  se per ogni  $p_0 \in M$  esiste un aperto (connesso)  $D$  di  $\mathbb{R}^2$  e un'applicazione*

$$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

*tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni.*

- (a)  $\varphi$  è differenziabile, cioè  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  sono differenziabili.
- (b)  $\varphi(D)$  è un aperto di  $M$ , cioè  $\varphi(D) = M \cap V$  dove  $V$  è un aperto di  $\mathbb{R}^3$  contenente  $p_0$ . Inoltre,  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  è un omeomorfismo. Siccome la condizione a) implica che  $\varphi$  è continua, in questo caso  $\varphi$  omeomorfismo significa che  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  è bigettiva e  $\varphi^{-1} : \varphi(D) \rightarrow D$  è continua, ossia  $\varphi^{-1}$  è la restrizione a  $\varphi(D)$  di un'applicazione continua  $W \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dove  $W$  è un aperto di  $\mathbb{R}^3$  che contiene  $\varphi(D)$ .
- (c) Per ogni  $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  la matrice jacobiana

$$J(\varphi)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(u,v)} \quad \text{ha rango } 2,$$

dove  $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$ , e analogamente per  $y_u, y_v, z_u, z_v$ .

La coppia  $(D, \varphi)$  si dice *parametrizzazione locale*, o *sistema coordinato*, o *carta locale*. L'aperto  $D$  si dice dominio dei parametri e l'applicazione  $\varphi$  applicazione coordinata. Se  $p \in \varphi(D) \subseteq M$ ,  $p = \varphi(u, v)$ , allora  $(u, v)$  si dicono *coordinate* (o *parametri*) del punto  $p$  rispetto al fissato sistema coordinato  $(D, \varphi)$ . In breve, un sottoinsieme  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  è una superficie regolare se esiste una famiglia di parametrizzazioni regolari  $\{(D_i, \varphi_i)_i\}$  i cui codomini  $\varphi_i(D_i)$  ricoprono  $M$ . Si può facilmente vedere che, se  $M_1$  è un aperto di una superficie regolare  $M$ , ossia

$M_1 = M \cap V$  con  $V$  aperto di  $\mathbb{R}^3$ , allora anche  $M_1$  è una superficie regolare. In particolare, se  $(D, \varphi)$  è una parametrizzazione regolare di  $M$ , allora  $\varphi(D)$  è una superficie regolare.

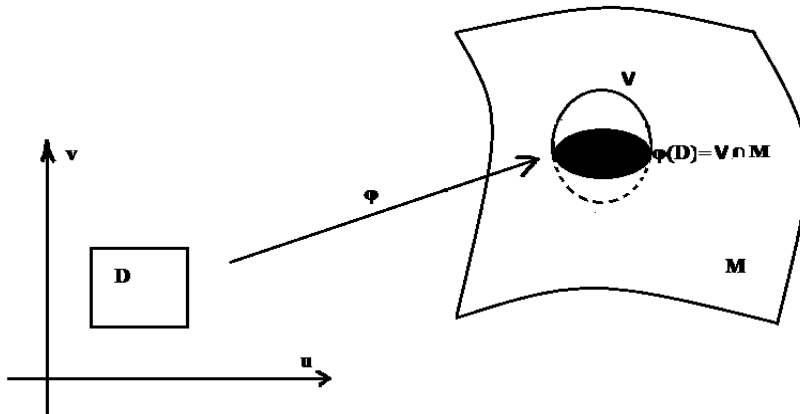


FIGURA 1. Una parametrizzazione.

Riguardo alla definizione di superficie regolare, osserviamo che la condizione (a) è naturale se uno vuole fare geometria differenziale, la condizione (b) ci dice che la superficie non ha autointersezioni ed è un oggetto 2-dimensionale; infine la condizione (c), come vedremo, garantisce l'esistenza del piano tangente in ogni punto della superficie.

**Osservazione 3.2.** Sia  $M$  una superficie regolare e sia  $D$  un aperto (connesso) di  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'applicazione iniettiva, con  $\varphi(D) \subset M$ , che verifica (a) e (c) della Definizione 3.1, allora  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  è un omeomorfismo e quindi  $(D, \varphi)$  è una parametrizzazione locale di  $M$  (cf. [9], p.64).

**Osservazione 3.3.** Se  $(D, \varphi)$  è una parametrizzazione locale di una superficie regolare  $M$ , ed  $f : D_1 \rightarrow D$  è un diffeomorfismo tra aperti di  $\mathbb{R}^2$ , allora è facile vedere che anche  $(D_1, \varphi_1 = \varphi \circ f)$  è una parametrizzazione locale di  $M$ .

**Definizione 3.4.** Sia  $D$  un aperto (connesso) di  $\mathbb{R}^2$ . Un'applicazione differenziabile  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice che è un'immersione se la matrice jacobiana  $J(\varphi)$  ha rango 2 in ogni punto di  $D$ , ovvero è soddisfatta la (c) della Definizione 3.1. In tal caso,  $\varphi$  dice **superficie immersa** e la sua immagine  $\varphi(D)$  è il sostegno della superficie immersa. Se  $\varphi$  è anche iniettiva, allora  $\varphi$  si dice superficie immersa iniettiva.

In generale, se  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'immersione (anche iniettiva), non è detto che  $M = \varphi(D)$  sia una superficie regolare, cioè non è detto che  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  sia un omeomorfismo come risulta dal seguente esempio.

**Esempio 3.5.** Consideriamo l'applicazione

$$f : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2, u \mapsto f(u) = (2\cos(u - \frac{\pi}{2}), \sin 2(u - \frac{\pi}{2})),$$

è un'immersione iniettiva, la sua immagine è una "figura a otto" (cf. Figura 2).



FIGURA 2

L'applicazione

$$\varphi : D = ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (f(u), v),$$

è un'immersione iniettiva, ma  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D)$  non è un omeomorfismo. Infatti  $\varphi(]0, 2\pi[ \times ]0, 1[)$  non è un aperto in  $\varphi(D)$ .

Tuttavia, abbiamo la seguente

**Proposizione 3.6.** *Se  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'immersione, allora per ogni fissato  $p_0 = (u_0, v_0) \in D$  esiste un intorno  $D_0 \subset D$  di  $p_0$  tale che  $\varphi : D_0 \rightarrow \varphi(D_0)$  sia un omeomorfismo, e quindi  $M = \varphi(D_0)$  sia una superficie regolare. In altre parole, una superficie immersa è localmente una superficie regolare.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome la matrice jacobiana  $J(\varphi)$  ha rango 2 in ogni punto di  $D$ , possiamo assumere ad esempio che sia  $\det \begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \neq 0$  nel punto  $p_0 = (u_0, v_0)$ . Consideriamo la funzione  $F : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$(u, v, t) \mapsto F(u, v, t) = \varphi(u, v) + (t, 0, 0) = (x(u, v) + t, y(u, v), z(u, v)).$$

Allora  $F$  è differenziabile e  $\det J(F) = \det \begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \neq 0$  nel punto  $(p_0, 0)$ , e quindi dal Teorema della funzione inversa segue che esiste un intorno  $U$  di  $(p_0, 0)$  in  $D \times \mathbb{R}$  e un intorno  $V$  di  $F(p_0, 0) = \varphi(p_0)$  in  $\mathbb{R}^3$  tali che  $F : U \rightarrow V$  sia un diffeomorfismo. Posto  $D_0 = U \cap D$ , siccome  $\varphi|_{D_0} = F|_{D_0 \times \{0\}}$ , abbiamo che  $\varphi : D_0 \rightarrow \varphi(D_0)$  è un omeomorfismo.  $\square$

**Osservazione 3.7.** Dalla Proposizione 3.6 segue che una superficie immersa localmente è una superficie regolare. Però non è detto che una superficie immersa (iniettiva) sia una superficie regolare. Tuttavia, tutti gli oggetti geometrici che permettono di studiare la geometria locale di una superficie regolare si possono considerare anche per superfici immerse. D'altronde, in alcuni testi, come ad esempio in [15], col termine di superficie regolare si intende una superficie immersa.

**Esempio 3.8. Superfici semplici**

Sia  $D$  un aperto (connesso) di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile. Consideriamo il sottoinsieme  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  definito dal grafico di  $f$ :

$$M := G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

L'applicazione

$$\varphi : D \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)),$$

è chiaramente differenziabile. L'applicazione  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D) = M$  è bigettiva, inoltre l'inversa  $\varphi^{-1} : M = \varphi(D) \rightarrow D$  è continua in quanto restrizione a  $\varphi(D) = M$  della proiezione  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$  che è continua. Infine, la matrice jacobiana  $J(\varphi)$  ha chiaramente rango 2. Quindi,  $M$  è una superficie regolare che si ricopre con una sola carta (parametrizzazione)  $(D, \varphi)$ . Per tale motivo  $M$  si dice *superficie semplice*. Gli esempi di superfici semplici sono numerosi. I piani sono i primi esempi. Si vede facilmente che *ogni piano*  $\pi : ax + by + cz + d = 0$  con  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  è una *superficie semplice*. Infatti, supposto  $c \neq 0$ ,  $\pi$  è il grafico della funzione

$$f : D = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = -(a/c)x - (b/c)y - d/c.$$

**Osservazione 3.9.** Si può provare che ogni superficie regolare  $M$  è localmente il grafico di una funzione, ossia per ogni  $p_0 \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $p_0$  in  $M$  che si rappresenta con una delle seguenti forme (cf. [9], p.63):

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z),$$

dove  $f, g, h$  sono funzioni differenziabili definite in qualche aperto di  $\mathbb{R}^2$ .

**Esempio 3.10.** Un esempio significativo di superficie non regolare è dato dal *cono rotondo* di equazione cartesiana  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . In questo caso  $M = f^{-1}(0)$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ , ma  $\nabla f = (2x, 2y, -2z)$  si annulla nell'origine  $O \in M$ . Tuttavia, la superficie  $M_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0$ , è una superficie regolare. Infatti,  $M_0$  è una superficie semplice di equazione cartesiana  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Analogamente per l'altro semicono  $\bar{M}_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z < 0$ .

**Esempio 3.11. La sfera**

Consideriamo la sfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  di centro l'origine  $O$  e raggio 1, per sfere di centro  $C$  e raggio  $r$  si procede in modo analogo. Poniamo

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x > 0\}, & U_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x < 0\}, \\ U_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : y > 0\}, & U_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : y < 0\}, \\ U_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}, & U_6 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < 0\}. \end{aligned}$$

Consideriamo l'aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^2$  definito da

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\},$$

e sia  $\varphi_1$  l'applicazione

$$\varphi_1 : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U_1 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v)$$

Osserviamo che

- (a)  $\varphi_1$  è differenziabile;  
 (b)  $\varphi_1 : D \rightarrow U_1 = \varphi_1(D)$  è un omeomorfismo. Infatti  $\varphi_1$  è bigettiva e  $\varphi_1^{-1} : U_1 \rightarrow D$  è continua (in quanto restrizione a  $U_1$  della proiezione ortogonale  $(x, y, z) \mapsto (y, z)$  che è continua);  
 (c)  $J(\varphi_1) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ha rango 2.

Quindi  $(D, \varphi_1)$  è una parametrizzazione locale di  $\mathbb{S}^2$ . In modo analogo si vede che  $(D, \varphi_i)_{i=2, \dots, 6}$  sono parametrizzazioni locali regolari di  $\mathbb{S}^2$ , dove

- $\varphi_2 : D \rightarrow U_2 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v),$
- $\varphi_3 : D \rightarrow U_3 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v),$
- $\varphi_4 : D \rightarrow U_4 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v),$
- $\varphi_5 : D \rightarrow U_5 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}),$
- $\varphi_6 : D \rightarrow U_6 \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}).$

Siccome gli aperti  $U_i$  ricoprono  $\mathbb{S}^2$ , possiamo concludere che  $\mathbb{S}^2$  è una superficie regolare.

**Esercizio 3.12.** Parametrizzare la sfera  $\mathbb{S}^2$  in termini di *coordinate geografiche*  $(u, v)$ .

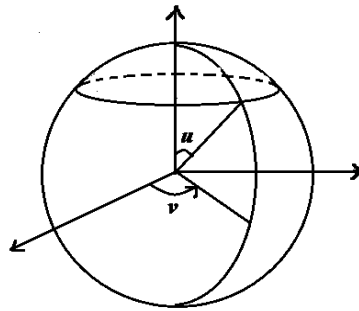


FIGURA 3. Coordinate geografiche.

**Soluzione.** Consideriamo l'aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^2$  definito dall'insieme

$$D = \{(u, v) : 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\} = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[,$$

e l'applicazione

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = ((\sin u) \cos v, (\sin u) \sin v, \cos u).$$

Il parametro  $u$  è la *colatitudine* (la *latitudine* è  $\frac{\pi}{2} - u$ ) e il parametro  $v$  è la *longitudine* del punto  $p = \varphi(u, v)$  della sfera. Le curve di colatitudine  $u = \text{cost.} = u_0$  sono circonferenze di raggio minore o uguale al raggio della sfera, mentre le curve di longitudine  $v = \text{cost.} = v_0$  sono semicirconferenze di raggio massimo. Osserviamo che sono soddisfatte le seguenti proprietà:

- (a)  $\varphi$  è differenziabile poiché le sue componenti lo sono.  
 (c) La matrice  $(J(\varphi))^t = \begin{pmatrix} (\cos u)\cos v & (\cos u)\sin v & -\sin u \\ -(\sin u)\sin v & (\sin u)\cos v & 0 \end{pmatrix}$  ha rango 2.

Infatti, se il rango fosse 1 si avrebbe

$$(\sin u \cos u (\cos^2 v + \sin^2 v), \sin^2 u \sin v, \sin^2 u \cos v) = (0, 0, 0),$$

cioè  $(\sin u \cos u, \sin^2 u \sin v, \sin^2 u \cos v) = (0, 0, 0)$ , e quindi risulterebbe

$$0 = \sin^2 u \cos^2 u + \sin^4 u \sin^2 v + \sin^4 u \cos^2 v = \sin^2 u,$$

ma ciò è un assurdo in quanto  $u \in ]0, \pi[$ . Quindi  $J(\varphi)$  ha rango 2 per ogni  $(u, v) \in D$ . Inoltre,  $\varphi$  è iniettiva su  $D$  e dunque per l'Osservazione 3.2 la coppia  $(D, \varphi)$  è una parametrizzazione locale di  $\mathbb{S}^2$ . Osserviamo che per  $u = 0$  si ottiene il punto  $P_1(0, 0, 1)$ , per  $u = \pi$  si ottiene  $P_2(0, 0, -1)$ , e per  $v = 0$  (o  $2\pi$ ) si ottiene la semicirconferenza  $\gamma(u) = (\sin u, 0, \cos u)$ ,  $u \in ]0, \pi[$ . Quindi  $\varphi(D)$  è la sfera  $\mathbb{S}^2$  privata della semicirconferenza  $\gamma(u)$  con  $u \in [0, \pi]$ . Per ricoprire tutta la sfera sono necessarie almeno due parametrizzazioni di questo tipo. Consideriamo la coppia  $(D, \psi)$ , dove  $D = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  e

$$\psi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \psi(u, v) = ((\sin u)\cos v, \cos u, (\sin u)\sin v).$$

Come prima si prova che  $(D, \psi)$  è una parametrizzazione locale di  $\mathbb{S}^2$ . Inoltre, in questo caso,  $\psi(D)$  è la sfera  $\mathbb{S}^2$  privata della semicirconferenza  $\beta(u) = (\sin u, \cos u, 0)$  con  $u \in [0, \pi]$ . Il codominio di questa carta locale insieme al codominio della precedente carta ricoprono l'intera sfera. Pertanto, ogni punto della sfera si può rappresentare con coordinate geografiche.

**Osservazione 3.13.** Altre carte locali che parametrizzano la sfera si possono ottenere, ad esempio, con le proiezioni stereografiche.

### Esempi 3.14. Superfici di livello

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile, dove  $A$  è aperto di  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo l'insieme (non vuoto)

$$M := \{(x, y, z) \in A : f(x, y, z) = c\}, \text{ ovvero } M := f^{-1}(c), c \in \mathbb{R}.$$

Se per ogni punto  $p \in M$  si ha  $(\nabla f)_p = (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \neq (0, 0, 0)$ , allora ogni componente connessa di  $M$  è una superficie regolare (detta *superficie di livello*). La dimostrazione si può ottenere procedendo nel modo seguente. Fissato  $p \in M$ , una derivata parziale di  $f$  in  $p$  è non nulla, assumiamo ad esempio che sia  $f_z(p) \neq 0$ . Consideriamo la funzione

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ definita da } F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

La matrice jacobiana di  $F$  ha chiaramente rango 3 nel fissato punto  $p$ . Applicando il Teorema della funzione inversa, esistono  $V$  intorno aperto di  $p$  e  $W$

intorno aperto di  $F(p)$  in  $\mathbb{R}^3$  tali che  $F : V \rightarrow W$  sia un diffeomorfismo. L'insieme  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u, v, c) \in W\} \equiv W \cap \{z = c\}$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$ . Inoltre per ogni  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  si ha  $F^{-1}(u, v, c) \in f^{-1}(c)$ , ovvero  $f(F^{-1}(u, v, c)) = c$ . Infatti, posto  $F^{-1}(u, v, c) = (x, y, z)$ , per come definita la  $F$  si ha

$$\begin{aligned}(u, v, c) &= F(F^{-1}(u, v, c)) = F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)) \\ &= (x, y, f(F^{-1}(u, v, c)))\end{aligned}$$

e quindi  $x = u, y = v$  e  $f(F^{-1}(u, v, c)) = c$ . Allora, possiamo considerare l'applicazione

$$\varphi : D \rightarrow \varphi(D) = V \cap f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = F^{-1}(u, v, c),$$

e verificare che  $(D, \varphi)$  è una carta locale per  $M$ . Pertanto, possiamo concludere che  $M$  è una superficie regolare.

Di seguito riportiamo alcuni esempi di superfici di livello (regolari).

- (1) Il **piano**  $\pi : ax + by + cz - d = 0$  è una superficie di livello. Infatti  $\pi = f^{-1}(d)$  con  $f(x, y, z) = ax + by + cz$  e  $(\nabla f)_p = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  per ogni  $p$ .  $\{f^{-1}(d)\}_{d \in \mathbb{R}}$  è un insieme di piani paralleli.
- (2) La **sfera**  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  è una superficie di livello. Infatti  $\mathbb{S}^2 = f^{-1}(r^2)$  con  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  e  $(\nabla f)_p = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$  per ogni  $p \in \mathbb{S}^2$ . In questo caso  $\{f^{-1}(r^2)\}_{r \in \mathbb{R}_+}$  è un insieme di sfere concentriche.
- (3) **Superfici semplici**  $M : z = g(x, y)$ , con  $g(x, y)$  differenziabile, possono essere viste come superfici di livello:  $M = f^{-1}(0)$ ,  $f(x, y, z) = z - g(x, y)$ .
- (4) **Superfici cilindriche**. Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto f(x, y)$ , un'applicazione differenziabile con  $(f_x, f_y, 0) \neq (0, 0, 0)$ . Allora la superficie cilindrica (cf. Esempio 3.18)

$$M : f(x, y) = 0, \text{ ovvero } M = f^{-1}(0),$$

è una superficie di livello. In particolare, se  $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$  è una curva algebrica (del piano  $\pi_{xy}$ ) priva di punti singolari, allora la superficie  $M : f(x, y) = 0$  è una superficie di livello. Di conseguenza, il *cilindro circolare retto*

$$M : x^2 + y^2 = r^2$$

è una superficie di livello (al variare di  $r$  si ottengono cilindri coassiali). Una parametrizzazione locale di tale cilindro è data da

$$\varphi(u, v) = (r \cos v, r \sin v, u), (u, v) \in D = \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[.$$

La carta locale  $(D, \varphi)$  parametrizza il cilindro privato della retta generatrice  $\varphi(u, 0) = (r, 0, u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , parallela all'asse del cilindro.

### Esempio 3.15. Superficie di rotazione

Sia  $M$  la superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva regolare piana semplice  $\gamma$  intorno a una retta complanare con  $\gamma$  e che non incontra la stessa curva. Senza perdere in generalità, possiamo assumere che  $\gamma$  sia contenuta nel piano coordinato  $\pi_{xz} : y = 0$  e l'asse sia l'asse delle  $z$ . Sia quindi  $\gamma(u) =$

$(f(u), 0, g(u))$ ,  $u \in I = ]a, b[$  con  $f(u) > 0$ , una parametrizzazione regolare di  $\gamma$ . Allora, una parametrizzazione locale di  $M$  è data da

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \cos v \\ f(u) \sin v \\ g(u) \end{pmatrix},$$

$(u, v) \in D = ]a, b[ \times ]0, 2\pi[$ , dove  $v$  è l'angolo di rotazione intorno all'asse  $z$ . Le circonferenze descritte durante la rotazione dei punti di  $\gamma$  si dicono *paralleli* di  $M$ . Le varie posizioni che assume  $\gamma$  su  $M$  durante la rotazione, si dicono *meridiani*.

Vogliamo provare che  $(D, \varphi)$  è una parametrizzazione locale, ossia sono verificate le proprietà (a), (b), (c) della Definizione 3.1. La (a) è banale. Per

la (c), basta osservare che  $J(\varphi) = \begin{pmatrix} f'(u)\cos v & -f(u)\sin v \\ f'(u)\sin v & f(u)\cos v \\ g'(u) & 0 \end{pmatrix}$  e quindi con un

semplice calcolo, usando il fatto che  $\gamma(u)$  è regolare con  $f(u) > 0$ , si vede che tale matrice ha rango 2. Infine, proviamo la (b). Siccome  $\gamma(u)$  è semplice, il parametro  $u$  è univocamente determinato da  $z = g(u)$  e  $x^2 + y^2 = f^2(u)$ , e quindi  $\varphi$  è iniettiva. Inoltre,  $u$  è funzione continua di  $z$  e  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , e quindi funzione continua di  $x, y, z$ . Per la continuità di  $\varphi^{-1}$  rimane da provare che  $v$  è funzione continua di  $x, y, z$ . Se  $v \in ]0, \pi[ \cup ]\pi, 2\pi[$ , da

$$\begin{aligned} \tan(v/2) &= \frac{2(\sin v/2)(\cos v/2)}{2\cos^2 v/2} = \frac{\sin v}{1 + \cos v} \\ &= \frac{y/f(v)}{1 + x/f(v)} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

si ha

$$v = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

che è funzione continua di  $x, y, z$ . Analogamente, se  $v \in ]\pi/2, 3\pi/2[$ , da

$$\begin{aligned} \cot(v/2) &= \frac{2(\sin v/2)(\cos v/2)}{2\sin^2 v/2} = \frac{\sin v}{1 - \cos v} \\ &= \frac{y/f(v)}{1 - x/f(v)} = \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

si ha

$$v = 2 \cot^{-1} \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

che è funzione continua di  $x, y, z$ . Con due parametrizzazioni di questo tipo si può ricoprire l'intera superficie  $M$ .

In particolare, la parametrizzazione locale data per la superficie cilindrica  $M : x^2 + y^2 = r^2$  si ottiene considerando la curva



$$\gamma(u) = (r, 0, u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

La parametrizzazione locale data per la sfera  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (in termini di coordinate geografiche) si ottiene considerando la curva

$$\gamma(u) = (\sin u, 0, \cos u), \quad u \in ]0, \pi[.$$

**Esempio 3.16. Superficie torica.**

Sia  $\mathcal{C}$  una curva (del piano  $\pi_{xz}$ ) di equazioni cartesiane  $y = 0$  e  $f(x, z) = 0$ . Ricordiamo che la superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva  $\mathcal{C}$  intorno all'asse  $z$  ha equazione cartesiana  $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ . Ora sia  $\mathcal{C}$  la circonferenza di centro  $C(a, 0, 0)$  e raggio  $r$ , con  $0 < r < a$ , del piano  $\pi_{xz}$ , ossia  $\mathcal{C} : (x - a)^2 + z^2 = r^2, y = 0$ . Ruotando  $\mathcal{C}$  intorno all'asse  $z$  si ottiene la *superficie torica*  $T$  di equazione cartesiana

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2.$$

Osserviamo che

- (a)  $T = f^{-1}(r^2)$  dove  $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$  è differenziabile per  $(x, y) \neq (0, 0)$  e quindi per ogni  $p \in T$ ;
- (b)  $(\nabla f)_p = 2 \left( \frac{x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) \neq (0, 0, 0) \quad \forall p \in T.$

Infatti, se fosse  $(\nabla f)_p = 0$  in qualche punto  $p \in T$ , si avrebbe  $z = 0$  e quindi la contraddizione

$$\|(\nabla f)_p\| = \frac{2r}{\sqrt{x^2 + y^2}} \|(x, y, 0)\| = 2r \neq 0.$$

Dunque,  $T$  è una superficie regolare (di livello).

Siccome,  $T$  è in particolare una superficie di rotazione, come caso particolare dell'Esempio 3.15 considerando la curva

$$\gamma(u) = (a + r \cos u, 0, r \sin u), \quad u \in ]0, 2\pi[,$$

si ottiene che una parametrizzazione locale di  $T$  è data da

$$(3.1) \quad \varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

con  $(u, v) \in D = ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[.$

**Esempio 3.17. Superficie rigata**

Sia  $\gamma(u), u \in I$  (intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ), una curva semplice regolare di  $\mathbb{R}^3$  (cf. Osservazione 1.15) e sia  $V(u)$  un campo di vettori non nulli, definito lungo  $\gamma(u)$  e differenziabile. Sia  $M$  la superficie luogo delle  $\infty^1$  rette, dette rette generatrici, per  $\gamma(u)$  con la direzione di  $V(u)$ . La superficie  $M$ , detta *superficie rigata*, è parametrizzata da

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + v V(u), \quad \text{con } (u, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

In generale, tale  $\varphi$  può non essere una superficie regolare o immersa. Quando  $M$  è una superficie regolare, allora parleremo di superficie rigata regolare. I due esempi seguenti sono due speciali superfici rigate.

**Esempio 3.18. Cilindro generalizzato**

Sia  $\gamma(u)$ ,  $u \in I$  (intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ), una curva semplice regolare e sia  $\vec{w}$  un vettore unitario di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $M$  la superficie rigata luogo delle  $\infty^1$  rette per  $\gamma(u)$  con la direzione di  $\vec{w}$ . La superficie  $M$  è detta *cilindro generalizzato*. Quindi,  $M$  è parametrizzata da

$$(3.2) \quad \varphi(u, v) = \gamma(u) + v\vec{w}, \quad (u, v) \in D = I \times \mathbb{R}.$$

L'applicazione  $\varphi(u, v)$  è differenziabile. Assumiamo che le rette generatrici incontrino  $\gamma$  solo in un punto, ovvero il vettore  $\gamma(u_2) - \gamma(u_1)$  non può essere parallelo al vettore  $\vec{w}$ , allora

$$\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \Leftrightarrow \gamma(u_2) - \gamma(u_1) = (v_2 - v_1)\vec{w} \Leftrightarrow (u_2, v_2) = (u_1, v_1).$$

Infine, assumendo che  $\dot{\gamma}(u)$  e  $\vec{w}$  siano linearmente indipendenti per ogni  $u \in I$ , si ha che la matrice jacobiana  $J(\varphi)$  ha rango 2 in ogni punto di  $D$ . Possiamo quindi concludere che  $\varphi$  è una superficie immersa iniettiva.

**Esempio 3.19. Cono generalizzato**

Sia  $\gamma(u)$ ,  $u \in I$  (intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ), una curva semplice regolare e sia  $p_0$  un fissato punto di  $\mathbb{R}^3$  con la condizione che  $p_0 \notin \gamma(I)$ . Sia  $M$  la superficie rigata luogo delle  $\infty^1$  rette che congiungono  $p_0$  con  $\gamma(u)$ . La superficie  $M$  è detta *cono generalizzato* di vertice  $p_0$ . Quindi,  $M$  è parametrizzata da

$$\varphi(u, v) = (1 - v)p_0 + v\gamma(u), \quad \text{con } (u, v) \in I \times \mathbb{R}.$$

L'applicazione  $\varphi(u, v)$  è differenziabile. Assumiamo che le rette generatrici incontrino  $\gamma$  solo in un punto, ovvero comunque consideriamo due punti distinti di  $\gamma$  questi non siano collineari con il vertice  $p_0$ , allora

$$\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \Leftrightarrow v_2\gamma(u_2) - v_1\gamma(u_1) = (v_2 - v_1)p_0 \Leftrightarrow (u_2, v_2) = (u_1, v_1).$$

Infatti, se fosse  $(v_2 - v_1) \neq 0$  si avrebbe  $p_0$  allineato con  $\gamma(u_2)$  e  $\gamma(u_1)$ . Infine, assumendo che  $v > 0$ , ovvero il vertice  $p_0 \notin M$ , e che le rette generatrici non siano tangenti a  $\gamma$ , si ha che la matrice jacobiana  $J(\varphi)$  ha rango 2 in ogni punto di  $D = I \times \mathbb{R}_+$ . Possiamo quindi concludere che  $\varphi|_D$  è una superficie immersa iniettiva.

**Esercizi 3.20.**

- (1) Sia  $M_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0$ . Considerare  $M_0$  come una superficie di rotazione e determinare, usando l'Esempio 3.15, una parametrizzazione regolare  $(D, \varphi)$  di  $M_0$
- (2) Trovare due parametrizzazioni (locali) regolari  $(D_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2$ , del cilindro circolare retto  $M : x^2 + y^2 = r^2$  tale che sia  $\varphi_1(D_1) \cup \varphi_2(D_2) = M$ .
- (3) Ripetere l'Esercizio (2) per la superficie torica  $T : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$ .
- (4) Ripetere l'Esercizio (2) per il semicono rotondo  $M_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0$ .

**Esercizio 3.21.** Assumiamo che la curva  $\gamma(u)$  dell'Esempio 3.18 soddisfi l'ulteriore proprietà  $\gamma(u) \cdot \vec{w} = c$  (costante) per ogni  $u \in I$ . Si verifichi che in tal caso la superficie  $M = \varphi(D)$  è regolare, ovvero  $\varphi^{-1} : M \rightarrow D$  è continua.

**Esercizi 3.22.**

- (1) Esplicitare la (3.2) nel caso di  $\gamma(u)$  curva contenuta in un piano coordinato e  $\vec{w}$  vettore ortogonale al piano di  $\gamma$ .
- (2) Sia data la superficie regolare di livello  $M : f(x, y) = 0$ . Determinare una parametrizzazione locale di  $M$  del tipo (3.2).

**3.2. Superfici quadriche**

Le superfici quadriche, dopo i piani, sono i piú semplici esempi di superfici. Tuttavia, non tutte le superfici quadriche sono superfici regolari.

**3. 2-1. Classificazioni.**

**Definizione 3.23.** *Una superficie quadrica  $\mathcal{Q}$  è una superficie algebrica reale del secondo ordine.*

Quindi, una superficie quadrica  $\mathcal{Q}$  (che nel seguito chiameremo semplicemente quadrica) è l'insieme dei punti  $p$  dello spazio le cui coordinate  $(x, y, z)$  soddisfano un'equazione del tipo  $f(x, y, z) = 0$ , dove  $f(x, y, z)$  è un polinomio omogeneo di ordine due a coefficienti reali. Esplicitando abbiamo:

$$(3.3) \quad \mathcal{Q} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

dove i coefficienti  $a_{ij}$  sono numeri reali non tutti nulli per  $i, j = 1, 2, 3$ . Posto  $a_{ij} = a_{ji}$ , la matrice

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

detta *matrice associata alla quadrica  $\mathcal{Q}$* , è una matrice reale simmetrica di ordine 4, quindi è diagonalizzabile ed ammette quattro autovalori reali.

**Classificazione proiettiva delle quadriche.**

Una prima classificazione delle quadriche si ottiene esaminando il rango della matrice  $A$ . Tale classificazione, studiando le quadriche nello spazio proiettivo, è anche detta *classificazione proiettiva* in quanto  $rgA$  (il rango di  $A$ ) è invariante per trasformazioni proiettive. Quindi, esaminando il rango di  $A$ , otteniamo la seguente classificazione delle quadriche.

- $\mathcal{Q}$  si dice quadrica **generale** se  $rgA = 4$ .
- $\mathcal{Q}$  si dice quadrica **speciale** se  $rgA = 3$ .
- $\mathcal{Q}$  si dice quadrica **semplicemente degenere** se  $rgA = 2$ ; in tal caso  $\mathcal{Q} = \pi_1 \cup \pi_2$  (unione di due piani distinti) .
- $\mathcal{Q}$  si dice quadrica **doppiamente degenere** se  $rgA = 1$ ; in tal caso  $\mathcal{Q} = \pi_1 \cup \pi_1$  (unione di due piani coincidenti).

Naturalmente le quadriche interessanti da studiare sono le quadriche generali e quelle speciali.

### Classificazione affine delle quadriche.

Sia  $\mathcal{Q}$  una quadrica arbitraria e sia  $A = (a_{ij})$  la matrice reale simmetrica associata a  $\mathcal{Q}$ . Se indichiamo con  $P$  il vettore riga  $(x, y, z)$  (coordinate del punto  $p$ ), con  $\tilde{A}$  la matrice  $A_{44}$  minore complementare dell'elemento  $a_{44}$  della matrice  $A$ , ossia

$$\tilde{A} = A_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

con  $b$  la matrice riga  $(2a_{41}, 2a_{42}, 2a_{43}) = (2a_{14}, 2a_{24}, 2a_{34})$  e con  $c$  l'elemento  $a_{44}$ , allora possiamo scrivere l'equazione (3.3) di  $\mathcal{Q}$  in forma compatta

$$\mathcal{Q} : P\tilde{A}P^T + bP^T + c = 0.$$

La classificazione affine delle quadriche  $\mathcal{Q}$  (denominata in questo modo perchè è invariante per trasformazioni affini) si ottiene esaminando la forma quadratica data dal complesso dei termini di secondo grado

$$P\tilde{A}P^T = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

dell'equazione di  $\mathcal{Q}$ . La matrice associata a questa forma quadratica è la matrice  $\tilde{A} = A_{44}$ .  $\tilde{A}$  è una matrice reale e simmetrica di ordine 3, quindi è diagonalizzabile ed ammette tre autovalori reali che indichiamo con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Inoltre, consideriamo il valore assoluto  $\tilde{s} = |\tilde{k} - \tilde{\mu}|$  della segnatura  $(\tilde{k}, \tilde{\mu})$  della matrice  $\tilde{A}$  e il valore assoluto  $s = |k - \mu|$  della segnatura  $(k, \mu)$  della matrice  $A$ .

**Osservazione 3.24.** Nello studio delle quadriche dello spazio ampliato con i punti all'infinito (detti anche punti impropri), quindi mediante l'uso delle coordinate cartesiane omogenee  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , la classificazione affine delle quadriche generali e speciali si ottiene esaminando la *conica all'infinito*  $\mathcal{C}_\infty$  data dall'intersezione della quadrica

$$\mathcal{Q} : \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_i x_j = 0$$

con il piano improprio  $\pi_\infty : x_4 = 0$  (luogo di tutti i punti impropri). Quindi,  $\mathcal{C}_\infty$  ha equazioni

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

La matrice associata alla conica  $\mathcal{C}_\infty$  è la matrice  $\tilde{A}$ , quindi  $\mathcal{C}_\infty$  è degenera se e solo se  $rg\tilde{A} < 3$ . Ricordiamo che le coordinate cartesiane omogenee  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  sono definite a meno di un fattore  $\varrho \neq 0$  di proporzionalità, inoltre nel caso dei punti propri ( $x_4 \neq 0$ ) sono legate alle coordinate cartesiane non omogenee  $(x, y, z)$  da

$$x : y : z : 1 = x_1 : x_2 : x_3 : x_4.$$

**Classificazione affine delle quadriche degeneri** ( $rgA \leq 2$ ).

Sia  $\mathcal{Q}$  una quadrica degenera. Allora,

- $\mathcal{Q}$  è unione di due piani reali e distinti se  $rgA = rg\tilde{A} = 2$  e  $\tilde{s} = 0$ , ovvero i due autovalori non nulli della matrice  $\tilde{A}$  sono discordi;
- $\mathcal{Q}$  è unione di due piani complessi e coniugati se  $rgA = rg\tilde{A} = 2$  e  $\tilde{s} = 2$ , ovvero i due autovalori non nulli della matrice  $\tilde{A}$  sono concordi;
- $\mathcal{Q}$  è unione di due piani paralleli reali e distinti se  $rgA = 2$ ,  $rg\tilde{A} = 1$  e  $s = 0$ , ovvero i due autovalori non nulli della matrice  $A$  sono discordi;
- $\mathcal{Q}$  è unione di due piani paralleli complessi e coniugati se  $rgA = 2$ ,  $rg\tilde{A} = 1$  e  $s = 2$ , ovvero i due autovalori non nulli della matrice  $A$  sono concordi;
- $\mathcal{Q}$  è unione di due piani coincidenti se  $rgA = rg\tilde{A} = 1$ .

**Classificazione affine delle quadriche speciali** ( $rgA = 3$ ).

Sia  $\mathcal{Q}$  una quadrica speciale. Possiamo avere due casi:  $\det \tilde{A} \neq 0$  ( $\mathcal{C}_\infty$  è non degenera) oppure  $\det \tilde{A} = 0$  ( $\mathcal{C}_\infty$  è degenera).

Se  $\det \tilde{A} \neq 0$ ,  $\mathcal{Q}$  è un **cono** (quadrico) avente vertice  $(x_0, y_0, z_0)$  dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases}$$

Se  $\det \tilde{A} = 0$ ,  $\mathcal{Q}$  è un **cilindro** (quadrico) con generatrici parallele al vettore che ha componenti date dalla terna  $(v_1, v_2, v_3)$  soluzione (definita a meno di un coefficiente di proporzionalità) del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}v_3 + a_{12}v_2 + a_{13}v_1 = 0 \\ a_{21}v_3 + a_{22}v_2 + a_{23}v_1 = 0 \\ a_{31}v_3 + a_{32}v_2 + a_{33}v_1 = 0 \\ a_{41}v_3 + a_{42}v_2 + a_{43}v_1 = 0. \end{cases}$$

**Sia  $\mathcal{Q}$  un cono** quadrico ( $rgA = rg\tilde{A} = 3$ ), allora:

- (1)  $\mathcal{Q}$  è un *cono a punti reali* se  $\tilde{s} = 1$ , ovvero gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  non hanno tutti lo stesso segno. Ad esempio  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  è un cono a punti reali.
- (2)  $\mathcal{Q}$  è un *cono a punti immaginari* se  $\tilde{s} = 3$ , ovvero gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  hanno tutti lo stesso segno. Ad esempio  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  è un cono a punti immaginari.

**Sia  $\mathcal{Q}$  un cilindro** quadrico ( $rgA = 3$  e  $rg\tilde{A} < 3$ ). Allora,

- (1)  $\mathcal{Q}$  è un *cilindro iperbolico* se  $rg\tilde{A} = 2$  e  $\tilde{s} = 0$ , ovvero gli autovalori non nulli  $\lambda_1, \lambda_2$  di  $\tilde{A}$  sono discordi. Ad esempio,  $x^2 - y^2 = 1$  è un cilindro iperbolico.

- (2)  $\mathcal{Q}$  è un *cilindro ellittico a punti reali* se  $rg\tilde{A} = 2$ ,  $\tilde{s} = 2$  e  $s = 1$ , ovvero gli autovalori non nulli  $\lambda_1, \lambda_2$  di  $\tilde{A}$  sono concordi e gli autovalori non nulli di  $A$  non hanno tutti lo stesso segno. Ad esempio,  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  è un cilindro ellittico a punti reali
- (3)  $\mathcal{Q}$  è un *cilindro ellittico a punti immaginari* se  $rg\tilde{A} = 2$ ,  $\tilde{s} = 2$  e  $s = 3$ , ovvero gli autovalori non nulli  $\lambda_1, \lambda_2$  di  $\tilde{A}$  sono concordi e gli autovalori non nulli di  $A$  hanno tutti lo stesso segno. Ad esempio,  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  è un cilindro ellittico a punti immaginari
- (4)  $\mathcal{Q}$  è un *cilindro parabolico* se  $rg\tilde{A} = 1$ . Ad esempio,  $x^2 + y = 0$  è un cilindro parabolico.

### Classificazione affine delle quadriche generali ( $rgA = 4$ ).

Sia  $\mathcal{Q}$  una quadrica generale. Una prima distinzione si ha considerando i casi:

- $\det \tilde{A} \neq 0$  (ossia, la conica  $\mathcal{C}_\infty$  è non degenere),
- $\det \tilde{A} = 0$  (ossia, la conica  $\mathcal{C}_\infty$  è degenere).

Allora, abbiamo quanto segue.

- (1)  $\mathcal{Q}$  è un **ellissoide** se  $\det \tilde{A} \neq 0$  e  $\tilde{s} = 3$ , ovvero gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  hanno lo stesso segno (quindi, la conica  $\mathcal{C}_\infty$  è a punti immaginari).

Più precisamente:

**1a)**  $\mathcal{Q}$  è un *ellissoide a punti reali* se inoltre  $\det A < 0$ . In questo caso esiste il modello di rotazione.

**1b)**  $\mathcal{Q}$  è un *ellissoide a punti immaginari* se inoltre  $\det A > 0$ .

- (2)  $\mathcal{Q}$  è un **iperboloide** se  $\det \tilde{A} \neq 0$  e  $\tilde{s} = 1$ , ovvero gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  non hanno lo stesso segno (quindi, la conica  $\mathcal{C}_\infty$  è a punti reali).

Più precisamente:

**2a)**  $\mathcal{Q}$  è un *iperboloide iperbolico* se inoltre  $\det A > 0$ . In questo caso esiste il modello di rotazione (iperboloide ad una falda);

**2b)**  $\mathcal{Q}$  è un *iperboloide ellittico* se inoltre  $\det A < 0$ . In questo caso esiste il modello di rotazione (iperboloide a due falde).

- (3)  $\mathcal{Q}$  è un **paraboloide** se  $\det \tilde{A} = 0$ . Più precisamente:

**3a)**  $\mathcal{Q}$  è un *paraboloide iperbolico* detto “a sella” se inoltre  $\det A > 0$ . In questo caso non esiste il modello di rotazione;

**3b)**  $\mathcal{Q}$  è un *paraboloide ellittico* se inoltre  $\det A < 0$ . In questo caso esiste il modello di rotazione.

**Osservazione 3.25.** Osserviamo che, data una quadrica  $\mathcal{Q}$  con matrice associata  $A = (a_{ij})$ , gli **invarianti** (affini) di  $\mathcal{Q}$  sono: il rango di  $A$ , il rango di  $\tilde{A} = A_{44}$ , il segno del determinante di  $A$ , il valore assoluto  $\tilde{s} = |\tilde{k} - \tilde{\mu}|$  della segnatura  $(\tilde{k}, \tilde{\mu})$  della matrice  $\tilde{A}$  e il valore assoluto  $s = |k - \mu|$  della segnatura  $(k, \mu)$  della matrice  $A$ .

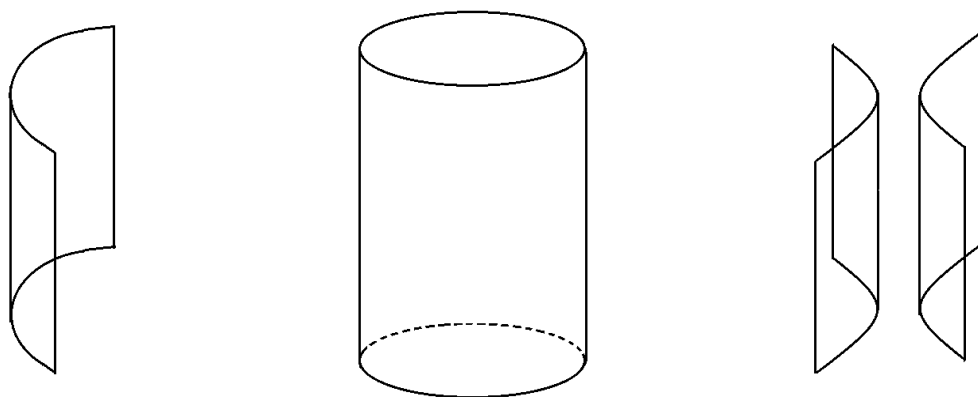


FIGURA 4. Cilindri quadrici.

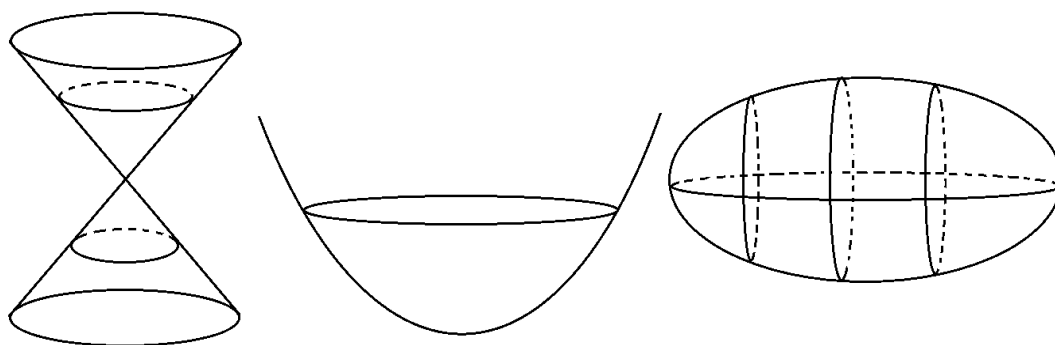


FIGURA 5. Cono quadrico -Paraboloide ellittico - Ellissoide.

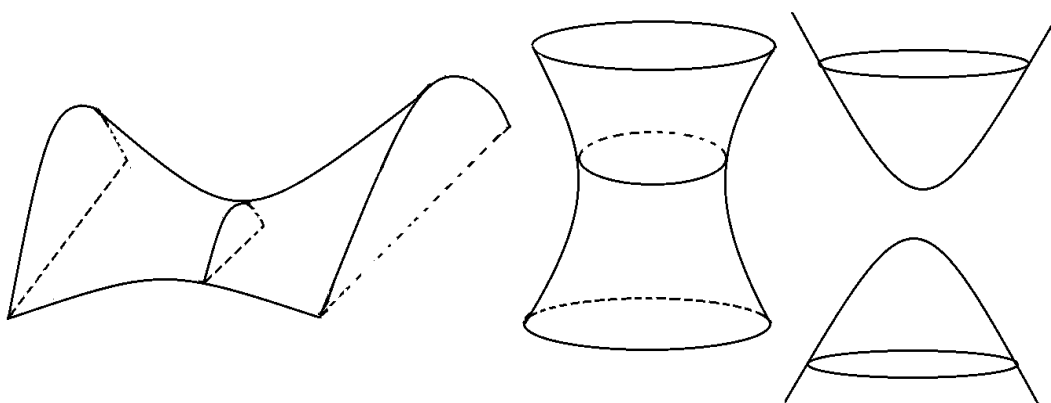


FIGURA 6. Paraboloide a sella - Iperboloidi a 1 e 2 falde.

### Natura dei punti di $\mathcal{Q}$ .

Sia  $\mathcal{Q} : f(x, y, z) = 0$  una quadrica a punti reali, generale oppure speciale. Un punto  $p_0 \in \mathcal{Q}$  si dice *punto semplice* se il vettore gradiente  $(\nabla f)_{p_0}$  è non nullo. Tutti i punti di  $\mathcal{Q}$ , ad eccezione del vertice nel caso in cui  $\mathcal{Q}$  è un cono, sono punti semplici (ciò si vede facilmente esprimendo  $\mathcal{Q}$  con equazione canonica). Sia  $p_0 \in \mathcal{Q}$  un punto semplice. Allora, come vedremo nella Proposizione 3.52, esiste il piano tangente in  $p_0$  e ha equazione cartesiana:

$$\pi_0 : f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) + f_z^0(z - z_0) = 0,$$

dove  $f_x^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{p_0}$ ,  $f_y^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{p_0}$  e  $f_z^0 = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{p_0}$ . Sia  $\mathcal{C}_0$  la conica sezione della quadrica  $\mathcal{Q}$  con  $\pi_0$ , ovvero  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{Q} \cap \pi_0$ . Allora,  $\mathcal{C}_0$  è una conica degenera e

- $p_0$  si dice **punto iperbolico** se  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette reali e distinte;
- $p_0$  si dice **punto ellittico** se  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette complesse coniugate;
- $p_0$  si dice **punto parabolico** se  $\mathcal{C}_0$  è unione di due rette coincidenti.

Si dimostra che tutti i punti di  $\mathcal{Q}$  sono dello stesso tipo. Più precisamente si ha che:

- le quadriche con  $rgA = 3$  (coni e cilindri) sono a punti parabolici;
- una quadrica con  $rgA = 4$  può essere a punti iperbolici oppure a punti ellittici.

In particolare, le quadriche a punti iperbolici sono quadriche rigate.

**Esercizio 3.26.** Data la quadrica  $\mathcal{Q} : y^2 - z = 1$ , verificare che  $p_0 = (0, 1, 0) \in \mathcal{Q}$  è un punto parabolico, e quindi  $\mathcal{Q}$  è a punti parabolici.

**Esercizio 3.27.** Data la quadrica  $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , verificare che  $p_0 = (1, 0, 0) \in \mathcal{Q}$  è un punto iperbolico, e quindi  $\mathcal{Q}$  è a punti iperbolici.

**Esercizio 3.28.** Data  $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , verificare che il punto  $p_0(1, 0, 0) \in \mathcal{Q}$  è un punto ellittico e quindi  $\mathcal{Q}$  è a punti ellittici.

**3. 2-2. Equazioni canoniche metriche.** Il seguente teorema classifica tutte le quadriche con equazione in forma canonica.

**Teorema 3.29.** *Sia  $\mathcal{Q}$  una quadrica arbitraria. Allora, esiste un riferimento cartesiano rispetto al quale la quadrica  $\mathcal{Q}$  si può rappresentare con una delle seguenti forme canoniche.*

**Caso delle quadriche generali** ( $rgA = 4$ ).

(1)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , ellissoide a punti reali (cf. Fig. 5);

(2)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ , ellissoide a punti immaginari;

(3)  $\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ , iperboloide iperbolico a una falda (cf. Fig. 6);



$$(4) \quad \mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = 1, \text{ iperboloide ellittico a due falde (cf. Fig. 6);}$$

$$(5) \quad \mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad \text{paraboloide iperbolico detto a sella (cf. Fig. 6);}$$

$$(6) \quad \mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad \text{paraboloide ellittico (cf. Fig. 5).}$$

**Caso delle quadriche speciali** ( $rgA = 3$ ).

$$(7) \quad \mathcal{Q} : \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0, \quad \alpha, \beta > 0, \gamma < 0, \text{ cono a punti reali (Fig. 5);}$$

$$(8) \quad \mathcal{Q} : \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad \text{cono a punti immaginari;}$$

$$(9) \quad \mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{cilindro ellittico a punti reali (cf. Fig. 4);}$$

$$(10) \quad \mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad \text{cilindro ellittico a punti immaginari;}$$

$$(11) \quad \mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{cilindro iperbolico (cf. Fig. 4);}$$

$$(12) \quad \mathcal{Q} : y^2 = 2az, \quad \text{cilindro parabolico (cf. Fig. 4).}$$

**Caso delle quadriche degeneri** ( $rgA \leq 2$ ).

$$(13) \quad \mathcal{Q} : x^2 - k^2 = 0, \quad k \neq 0, \quad \text{due piani paralleli reali e distinti;}$$

$$(14) \quad \mathcal{Q} : x^2 + k^2 = 0, \quad k \neq 0, \quad \text{due piani paralleli complessi e coniugati;}$$

$$(15) \quad \mathcal{Q} : \alpha x^2 + \beta y^2 = 0, \quad \alpha\beta > 0, \quad \text{due piani complessi e coniugati;}$$

$$(16) \quad \mathcal{Q} : \alpha x^2 + \beta y^2 = 0, \quad \alpha\beta < 0, \quad \text{due piani reali e distinti;}$$

$$(17) \quad \mathcal{Q} : x^2 = 0, \quad (rgA=1) \quad \text{due piani reali coincidenti.}$$

DIMOSTRAZIONE. Usando le notazioni precedentemente introdotte, una arbitraria quadrica  $\mathcal{Q}$  si può rappresentare con l'equazione

$$(3.4) \quad \mathcal{Q} : P\tilde{A}P^T + bP^T + c = 0$$

rispetto a un fissato riferimento cartesiano  $RC(O, e_1, e_2, e_3)$ . Siccome  $\tilde{A}$  è una matrice simmetrica con autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , allora esiste una matrice ortogonale  $B$ , con  $\det B = +1$ , tale che

$$B^T \tilde{A} B = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Sia  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  la base ortonormale di autovettori di  $\tilde{A}$  definita dalle colonne di  $B$ . Se indichiamo con  $P'$  il vettore riga  $(x', y', z')$ , delle coordinate del punto  $p$  nel riferimento cartesiano  $RC(O, e'_1, e'_2, e'_3)$ , allora  $P^T = BP'^T$  e quindi  $P = P'B^T$ . Sostituendo nella (3.4), si ha

$$\mathcal{Q} : P'B^T \tilde{A} B P'^T + bB P'^T + c = 0.$$

Siccome  $B^T \tilde{A} B = D$ , posto  $b' = bB$ , si ha  $\mathcal{Q} : P' D P'^T + b' P'^T + c = 0$ . Pertanto, nel riferimento cartesiano  $RC(O, e'_1, e'_2, e'_3)$ , la quadrica  $\mathcal{Q}$  ha equazione (indicando con  $(x, y, z)$  anche le nuove coordinate) del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + c = 0.$$

Se  $\lambda_1 \neq 0$ , consideriamo la traslazione definita da  $x' = x + a_1/(2\lambda_1)$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ . Rispetto a queste nuove coordinate, che indichiamo sempre con  $(x, y, z)$ , abbiamo

$$\mathcal{Q} : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_2 y + a_3 z + c' = 0.$$

Adesso esaminiamo i diversi casi che si possono avere.

- Gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$  (quindi  $rg \tilde{A} = 3$ ). In questo caso, procedendo come sopra, si trova un riferimento cartesiano rispetto al quale si ha

$$(3.5) \quad \mathcal{Q} : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \delta = 0.$$

Se  $\mathcal{Q}$  è generale ( $rg A = 4$ ), dall'equazione (3.5) si hanno i casi (1), (2), (3), (4). Se  $\mathcal{Q}$  è speciale ( $rg A = 3$ ), quindi  $\delta = 0$ , dall'equazione (3.5) si hanno i casi (7), (8).

- Esattamente uno degli autovalori  $\lambda_i$  è nullo (diciamo  $\lambda_3 = 0$ , quindi  $rg \tilde{A} = 2$ ). Procedendo come sopra, si trova un riferimento cartesiano rispetto al quale si ha

$$(3.6) \quad \mathcal{Q} : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2\gamma z + \delta = 0, \quad (\det A = -\lambda_1 \lambda_2 \gamma^2).$$

Se  $\mathcal{Q}$  è generale ( $rg A = 4$ ), dall'equazione (3.6), applicando una traslazione lungo l'asse  $z$ , si hanno i casi (5), (6).

Se  $\mathcal{Q}$  è speciale ( $rg A = 3$ ), quindi  $\gamma = 0$  e  $\delta \neq 0$  (altrimenti si avrebbe  $rg A = 2$ ), dall'equazione (3.6) si hanno i casi (9), (10), (11).

Se  $\mathcal{Q}$  ha  $rg A = 2$ , quindi  $\gamma = \delta = 0$ , dall'equazione (3.6) si hanno i casi (15), (16).

- Esattamente uno degli autovalori  $\lambda_i$  è non nullo (diciamo  $\lambda_3 \neq 0$ , quindi  $rg \tilde{A} = 1$ ). Procedendo come sopra, si trova un riferimento cartesiano rispetto al quale si ha

$$(3.7) \quad \mathcal{Q} : \lambda_3 z^2 + a_1 x + a_2 y + \delta = 0, \quad (\det A = 0).$$

Se  $a_1 = 0$  e  $a_2 \neq 0$ , con una traslazione lungo l'asse  $y$ , l'equazione (3.7) diventa del tipo

$$(3.8) \quad \mathcal{Q} : \lambda_3 z^2 + \alpha y = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Se  $a_1, a_2 \neq 0$ , con una traslazione nel piano  $xy$  ci riconduciamo al caso  $\delta = 0$ . Successivamente, con una rotazione, sempre nel piano  $xy$ , possiamo ricondurci al caso  $a_1 = 0$  oppure  $a_2 = 0$ , e quindi a un'equazione del tipo (3.8). Dall'equazione (3.8), si ha il caso (12) ( $rg A = 3, rg \tilde{A} = 1$ ).

Infine, se  $a_1 = a_2 = 0$ , dall'equazione (3.7) si hanno i casi (13), (14) quando  $\delta \neq 0$ , e il caso (17) quando  $\delta = 0$ .  $\square$

**Corollario 3.30.** *Tutte le quadriche generali a punti reali : (1), (3), (4), (5), (6), e tutti le quadriche speciali a punti reali: (7), (9), (11), (12) (nel caso del cono è necessario eliminare il vertice), sono superfici di livello regolari (qualcuna con due componenti connesse).*

**Esempio 3.31.** Abbiamo osservato che le quadriche a punti iperbolici sono rigate. Facciamo vedere che il paraboloido iperbolico (detto anche paraboloido a sella)

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad \text{ovvero} \quad \mathcal{Q} : \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z,$$

è una quadrica rigata. Difatti, possiamo scrivere

$$\frac{2z}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad \text{e} \quad \frac{2z}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}.$$

Di conseguenza, otteniamo le due schiere di rette del paraboloido:

$$2z = \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

e

$$2z = \mu \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Rette della stessa schiera sono sghembe e rette di schiere diverse sono complanari, inoltre per ogni punto  $p$  del paraboloido passano due rette appartenenti alle due diverse schiere. Tali rette sono l'intersezione del paraboloido col piano tangente in  $p$ .

**Esercizi 3.32.** -

1. Classificare ed esprimere con equazione canonica le seguenti quadriche

$$\mathcal{Q}_1 : x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2 - 4x + 6y + 2z - 1 = 0,$$

$$\mathcal{Q}_2 : x^2 + y^2 - z^2 + xy + x - 3 = 0,$$

$$\mathcal{Q}_3 : y^2 - 2x + 2z + 1 = 0, \quad \mathcal{Q}_4 : \alpha z^2 + 2x + 3y + 1 = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

2. Verificare che la quadrica

$$\mathcal{Q} : x^2 + y^2 + 2xy + 2yz - 2x + y + 1 = 0$$

è un cono, e determinare il suo vertice.

3. Classificare la quadriche

$$\mathcal{Q}_1 : 2x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + k = 0,$$

$$\mathcal{Q}_2 : 2x^2 + ky^2 - 2ky + k = 0,$$

$$\mathcal{Q}_3 : 2x^2 + ky^2 - 2yz + z^2 - 1 = 0,$$

al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.33.** Verificare che le seguenti applicazioni sono parametrizzazioni locali delle superfici accanto indicate.

- (1)  $\varphi(u, v) = (a(\sin u)\cos v, b\cos u, c(\sin u)\sin v)$ , ellissoide,
- (2)  $\varphi(u, v) = (a(\sinh u)\sinh v, b\cosh u, c(\sinh u)\cosh v)$ , iperboloido iperbolico,
- (3)  $\varphi(u, v) = (a(\sinh u)\cos v, b(\sinh u)\sin v, c\cosh u)$ , iperboloido ellittico,
- (4)  $\varphi(u, v) = (au\cos v, bu\sin v, u^2)$ , paraboloido ellittico,
- (5)  $\varphi(u, v) = (au\cosh v, bu\sinh v, u^2)$ , paraboloido iperbolico,

dove  $a, b, c$  sono costanti positive. Inoltre, dire quali condizioni devono soddisfare le costanti  $a, b, c$  affinché, nei casi (1) – (4), le corrispondenti superfici siano di rotazione.

### 3.3. Funzioni differenziabili su superfici

Il seguente teorema è essenziale per poter poi definire il concetto di funzione differenziabile su una superficie, indipendentemente dalla parametrizzazione che uno considera.

**Teorema 3.34. (cambiamento di parametri)**

Sia  $M$  una superficie regolare. Siano

$$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

e

$$\bar{\varphi} : \bar{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3, (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = (x(\bar{u}, \bar{v}), y(\bar{u}, \bar{v}), z(\bar{u}, \bar{v}))$$

due parametrizzazioni (locali) regolari di  $M$ , con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) = W \neq \emptyset$ . Allora, le applicazioni

$$\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi} : \bar{\varphi}^{-1}(W) \xrightarrow{\bar{\varphi}} W \xrightarrow{\varphi^{-1}} \varphi^{-1}(W), (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$$

e

$$\bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\bar{\varphi}^{-1}} \bar{\varphi}^{-1}(W), (u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$$

sono diffeomorfismi tra aperti di  $\mathbb{R}^2$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Proviamo che  $f = \varphi^{-1} \circ \bar{\varphi}$  è un diffeomorfismo. Intanto  $f$  è un omeomorfismo in quanto composizione di omeomorfismi. Procediamo provando che  $f$  e  $f^{-1}$  sono differenziabili. Per provare che  $f$  è differenziabile basta vedere che è differenziabile in un generico punto di  $\bar{\varphi}^{-1}(W)$ . Sia  $\bar{q} \in \bar{\varphi}^{-1}(W)$ , quindi  $\bar{\varphi}(\bar{q}) \in W \subset M$ ,  $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{v})$ . Sia  $q = f(\bar{q}) = \varphi^{-1}(\bar{\varphi}(\bar{q})) = (u, v) \in D$ , allora  $q$  e  $\bar{q}$  sono punti di  $D$  e  $\bar{D}$  che individuano lo stesso punto  $\varphi(q) = \bar{\varphi}(\bar{q})$  di  $M$ . Siccome lo jacobiano  $J(\varphi)_q$  ha rango 2, possiamo assumere ad esempio che  $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$  abbia rango 2 in  $q$ . Consideriamo la funzione

$$F : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(u, v, t) \mapsto F(u, v, t) = \varphi(u, v) + (0, 0, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

Risulta  $F|_{D \times \{0\}} = \varphi$  e in particolare  $F(q, 0) = \varphi(q) = \bar{\varphi}(\bar{q})$ . Siccome lo jacobiano

$$J(F) = \begin{pmatrix} x_u & x_v & 0 \\ y_u & y_v & 0 \\ z_u & z_v & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 in  $q$ , dal Teorema della funzione inversa segue che esiste un intorno  $U$  di  $F(q, 0) = \varphi(q) = \bar{\varphi}(\bar{q})$  in  $\mathbb{R}^3$  ed esiste un intorno  $V$  di  $(q, 0)$  in  $D \times \mathbb{R}$  tali che

$$F^{-1} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V \subset D \times \mathbb{R}$$

sia un diffeomorfismo. Inoltre, per come definita la  $F$ , risulta

$$F^{-1}|_{U \cap M} : U \cap M \rightarrow V \cap D \quad \text{e} \quad F^{-1}|_{U \cap M} = \varphi^{-1}|_{U \cap M}.$$

Inoltre,  $\bar{\varphi} : \bar{D} \rightarrow M$  è continua e  $U \cap M$  è intorno di  $\varphi(q) = \bar{\varphi}(\bar{q})$  in  $M$ , per cui esiste  $\bar{D}_1$  intorno di  $\bar{q}$  in  $\bar{D}$  con  $\bar{\varphi}(\bar{D}_1) \subset U \cap M$ . Allora

$$f|_{\bar{D}_1} = \varphi^{-1} \circ \bar{\varphi}|_{\bar{D}_1} = F^{-1} \circ \bar{\varphi}|_{\bar{D}_1} : \bar{D}_1 \rightarrow U \cap M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow D$$

è differenziabile in quanto composizione di applicazioni differenziabili, e quindi  $f$  è differenziabile in  $\bar{q}$ . In modo analogo si prova che anche  $f^{-1}$  è differenziabile.  $\square$

**Esempio 3.35.** Un cambiamento di parametri sulla sfera  $\mathbb{S}^2$ . Consideriamo su  $\mathbb{S}^2$  le seguenti parametrizzazioni locali

$$\varphi : D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\} \rightarrow \varphi(D) = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\},$$

$$(u, v) \mapsto \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right),$$

e

$$\bar{\varphi} : \bar{D} = ]0, \frac{\pi}{2}[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \bar{\varphi}(\bar{D}) \subset \mathbb{S}^2,$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\text{sen } \bar{u} \cos \bar{v}, \text{sen } \bar{u} \text{sen } \bar{v}, \cos \bar{u}).$$

Il cambiamento di parametri su  $W = \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) = \bar{\varphi}(\bar{D})$  è dato da

$$\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\text{sen } \bar{u} \cos \bar{v}, \text{sen } \bar{u} \text{sen } \bar{v}, \cos \bar{u}) \mapsto (\text{sen } \bar{u} \cos \bar{v}, \text{sen } \bar{u} \text{sen } \bar{v}).$$

Tale applicazione è differenziabile e invertibile (un diffeomorfismo), in quanto la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} \cos \bar{u} \cos \bar{v} & -\text{sen } \bar{u} \text{sen } \bar{v} \\ \cos \bar{u} \text{sen } \bar{v} & \text{sen } \bar{u} \cos \bar{v} \end{pmatrix}$$

ha rango 2 per ogni  $(\bar{u}, \bar{v}) \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \times ]0, 2\pi[$ .

**Definizione 3.36.** Siano  $M$  una superficie regolare e  $p_0$  un punto di  $M$ . Un'applicazione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  si dice differenziabile in  $p_0$  se esiste  $(D, \varphi)$  parametrizzazione locale con  $p_0 \in \varphi(D)$  tale che

$$\tilde{f} = f \circ \varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(D) \subset M \rightarrow \mathbb{R}$$

sia differenziabile. La funzione  $\tilde{f}$  è la funzione  $f$  in termini di coordinate locali. Si dice che  $f$  è differenziabile su  $M$  (rispettivamente su un aperto  $A$  di  $M$ ) se è differenziabile in  $p$  per ogni  $p \in M$  (rispettivamente per ogni  $p \in A$ ).

La definizione data è ben posta, ossia non dipende dalla parametrizzazione locale scelta. Infatti, se  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  è un'altra parametrizzazione locale con  $p_0 \in \bar{\varphi}(\bar{D})$ , allora

$$f \circ \bar{\varphi} = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \bar{\varphi}$$

è differenziabile in quanto dal Teorema 3.34 segue che è composizione di applicazioni differenziabili. Siccome  $f(p) = (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))$ , si pone

$$\frac{\partial f}{\partial u} := \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v} := \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial v} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v},$$

e risulta

$$(3.9) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}.$$

A volte, con abuso di notazione, si usa scrivere  $f(u, v)$  al posto di  $\tilde{f}(u, v)$ . L'insieme  $\mathcal{F}(M)$  di tutte le funzioni differenziabili definite su  $M$  ha una struttura naturale, così come visto nel caso di  $\mathbb{R}^n$  (cf. Sezione 1.3), di algebra reale commutativa. Analogamente per  $\mathcal{F}(A)$  con  $A$  aperto di  $M$ .

**Definizione 3.37.** Sia  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  con  $M$  superficie regolare. L'applicazione  $F$  si dice differenziabile in un punto  $p_0 \in M$  se esiste una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di  $M$  con  $p_0 \in \varphi(D)$  tale che  $F \circ \varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$  sia differenziabile. Equivalentemente,

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \mapsto F(p) = (F_1(p), \dots, F_k(p)),$$

è differenziabile se le sue funzioni componenti  $F_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  sono differenziabili.

$F$  si dice differenziabile su un aperto  $A$  di  $M$  se è differenziabile in  $p$  per ogni  $p \in A$ .

**Definizione 3.38.** Sia  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , con  $M$  superficie regolare, e sia  $p_0 \in \mathbb{R}^k$ .  $F$  si dice differenziabile in  $p_0$  se esiste  $U$  intorno di  $p_0$  ed esiste  $(D, \varphi)$  parametrizzazione locale di  $M$  con  $F(U) \subset \varphi(D)$  tali che

$$\tilde{F} = \varphi^{-1} \circ F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow F(U) \subset \varphi(D) \subset M \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$$

sia differenziabile.

Anche questa definizione è ben posta:

$$\bar{\varphi}^{-1} \circ F = \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ F.$$

$F$  si dice differenziabile su un aperto  $\tilde{A}$  di  $\mathbb{R}^k$  se è differenziabile in  $p$  per ogni  $p \in \tilde{A}$ . In particolare, può essere  $k = 1$  ed  $\tilde{A}$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ .

### Esempi 3.39.

(1) Sia  $M$  una superficie regolare. L'inclusione  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, p \mapsto p$ , è differenziabile. Infatti, in coordinate locali, l'applicazione

$$i \circ \varphi : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

è differenziabile.

(2) Se  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^k$  è differenziabile e  $M$  è una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , allora la restrizione  $f = F|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  è differenziabile. Infatti,

$$f = F|_M = F \circ i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^k$$

è differenziabile in quanto composizione di applicazioni differenziabili.

(3) L'applicazione

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow M = \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}, (u, v) \mapsto (re^{iv}, u),$$

è differenziabile ( $M$  è il cilindro di equazione cartesiana  $x^2 + y^2 = r^2$ ). Consideriamo la parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di  $M$ , dove

$$\varphi : D = \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[ \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (r \cos v, r \sin v, u).$$

L'applicazione  $F$  in coordinate locali, ovvero l'applicazione

$$\varphi^{-1} \circ F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(D) \rightarrow D, (u, v) \mapsto (r \cos v, r \sin v, u) \mapsto (u, v),$$

è l'identità su  $\mathbb{R}^2$  e quindi è differenziabile. Pertanto, la  $F$  è differenziabile.

**Osservazione 3.40.** Se  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^3$  è differenziabile con  $F(\mathbb{R}^k) \subset M$  superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ , allora si può provare che  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow M$  è differenziabile (cf. [17] Theorem 3.2, p.145).

Introduciamo ora il concetto di applicazione differenziabile tra superfici.

**Definizione 3.41.** Siano  $M, \bar{M}$  superfici regolari ed  $F : M \rightarrow \bar{M}$ .  $F$  si dice differenziabile in un fissato punto  $p_0 \in M$ , se esiste una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di  $M$  con  $p_0 \in \varphi(D)$  ed esiste una parametrizzazione locale  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$  di  $\bar{M}$  con  $F(\varphi(D))$  contenuto in  $\bar{\varphi}(\bar{D})$ , tali che

$$\tilde{F} := \bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi : D \rightarrow \bar{D}$$

sia un'applicazione differenziabile (tra aperti di  $\mathbb{R}^2$ ). Inoltre,  $F$  si dice differenziabile su  $A$  aperto di  $M$  se è differenziabile in  $p$  per ogni  $p \in A$ .  $F : M \rightarrow \bar{M}$  si dice che è un diffeomorfismo se  $F$  è bigettiva con  $F$  ed  $F^{-1}$  applicazioni differenziabili, e in tal caso  $M$  e  $\bar{M}$  si dicono diffeomorfe.  $F$  si dice che è un diffeomorfismo locale se per ogni  $p_0 \in M$  esiste  $U$  intorno aperto di  $p_0$  in  $M$  ed esiste  $V$  intorno aperto di  $F(p_0)$  in  $\bar{M}$  tali che  $F|_U : U \rightarrow V$  sia un diffeomorfismo.

Osserviamo che anche la Definizione 3.41 è ben posta, ovvero non dipende dalle parametrizzazioni locali considerate. Infatti, prendendo (in modo opportuno) altre parametrizzazioni locali, si ha

$$\bar{\psi}^{-1} \circ F \circ \psi = (\bar{\psi}^{-1} \circ \bar{\varphi}) \circ (\bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi).$$

**Esempio 3.42.** L'applicazione  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, p = (x, y, z) \mapsto x + y + z$ , è differenziabile, dove  $\mathbb{S}^2$  è la sfera unitaria di centro l'origine. Sia  $(D, \varphi)$  la parametrizzazione locale su  $\mathbb{S}^2$  definita da

$$D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}, \varphi : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}).$$

La  $f$  in coordinate locali è l'applicazione

$$\tilde{f} = f \circ \varphi : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \mapsto u + v + \sqrt{1 - u^2 - v^2}$$

che è differenziabile su  $D$ . Si poteva anche osservare che

$$f = F \circ i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

è differenziabile in quanto

$$i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3, p \mapsto p, \text{ ed } F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto (x + y + z),$$

sono differenziabili.

**Esempio 3.43.** L'applicazione  $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2, p \mapsto \frac{p}{\|p\|}$ , è differenziabile, dove  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  e  $\mathbb{S}^2$  è la sfera unitaria di centro l'origine. Consideriamo su  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  la parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  dove

$$D = \mathbb{R}_+ \times ]0, 2\pi[, \quad \varphi : (u, v) \mapsto (\cos v, \sin v, u).$$

Sia  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$  la parametrizzazione locale su  $\mathbb{S}^2$  definita da

$$\bar{D} = \{(\bar{u}, \bar{v}) : \bar{u}^2 + \bar{v}^2 < 1\}, \quad \bar{\varphi} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \left(\bar{u}, \bar{v}, \sqrt{1 - (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)}\right).$$

Per come scelte le parametrizzazioni locali si ha  $f(\varphi(D)) \subset \bar{\varphi}(\bar{D})$ . Siccome

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi : (u, v) &\xrightarrow{\varphi} p = (\cos v, \sin v, u) \\ &\xrightarrow{f} \frac{p}{\|p\|} = \left(\frac{\cos v}{\sqrt{1 + u^2}}, \frac{\sin v}{\sqrt{1 + u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\right) \\ &\xrightarrow{\bar{\varphi}^{-1}} (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)) = \left(\frac{\cos v}{\sqrt{1 + u^2}}, \frac{\sin v}{\sqrt{1 + u^2}}\right), \end{aligned}$$

possiamo concludere che  $\bar{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi$  è differenziabile.

**Esempio 3.44.** La sfera  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e l'ellissoide  $M : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$  sono superfici diffeomorfe. L'applicazione

$$f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M, (x, y, z) \mapsto (x', y', z') = (ax, by, cz),$$

è un diffeomorfismo (si noti che  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  implica  $(x'/a)^2 + (y'/b)^2 + (z'/c)^2 = 1$ ). Si verifichi che  $F$  è effettivamente un diffeomorfismo.

**Esercizio 3.45.** Sia  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ . Verificare che l'applicazione

$$f : \mathbb{S}^2(1) \rightarrow \mathbb{S}^2(|\lambda|), (x, y, z) \mapsto \lambda(x, y, z),$$

è un diffeomorfismo. Osservare che, in particolare, l'applicazione antipodale  $f : \mathbb{S}^2(1) \rightarrow \mathbb{S}^2(1), (x, y, z) \mapsto -(x, y, z)$ , è un diffeomorfismo della sfera.

### 3.4. Curve su una superficie

Sia  $M$  una superficie regolare.

**Definizione 3.46.** Una **curva differenziabile** della superficie  $M$  è un'applicazione differenziabile  $\gamma : I \rightarrow M$ , dove  $I$  è un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ . In altre parole, fissato  $t_0 \in I$ , esiste  $J = ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \subset I$ , ed esiste  $(D, \varphi)$  parametrizzazione locale di  $M$ , con  $\gamma(J) \subset \varphi(D)$ , tali che



$$\tilde{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \gamma : J \rightarrow \gamma(J) \subset \varphi(D) \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^2$$

sia differenziabile.

Dalla definizione data segue che  $\tilde{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t)) = (u(t), v(t))$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^2$  contenuta in  $D$ . Di conseguenza, risulta

$$\gamma(t) = \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))),$$

ovvero

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

con

$$x(t) = x(u(t), v(t)), \quad y(t) = y(u(t), v(t)) \quad \text{e} \quad z(t) = z(u(t), v(t))$$

differenziabili. Quindi, una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $M$  è anche una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^3$ , per cui si può considerare il vettore tangente  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^3$ . D'altronde, se  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^3$  con  $\gamma(I) \subset M$ , allora  $\gamma : I \rightarrow M$  è una curva differenziabile della superficie  $M$  (cf. Osservazione 3.40). Quindi, una curva differenziabile di  $M$  la possiamo anche definire come un'applicazione differenziabile  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\gamma(I) \subset M$ .

Un ruolo fondamentale nello studio della geometria differenziale di una superficie regolare è svolto da due curve speciali che adesso introduciamo.

### Curve coordinate

Fissato  $p_0 \in M$ , sia  $(D, \varphi)$  una parametrizzazione locale di  $M$  con  $p_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \varphi(D)$ . Consideriamo su  $M$  le seguenti curve:

$$\gamma_1 : I_1 \rightarrow M, \quad \gamma_1(u) = \varphi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)),$$

$$\gamma_2 : I_2 \rightarrow M, \quad \gamma_2(v) = \varphi(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)).$$

$\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono curve differenziabili di  $M$ . Infatti,

$$\tilde{\gamma}_1 = \varphi^{-1} \circ \gamma_1 : I_1 \rightarrow D, \quad u \mapsto \varphi(u, v_0) \mapsto (u, v_0),$$

e

$$\tilde{\gamma}_2 = \varphi^{-1} \circ \gamma_2 : I_2 \rightarrow D, \quad v \mapsto \varphi(u_0, v) \mapsto (u_0, v),$$

sono curve differenziabili del dominio  $D$  di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\tilde{\gamma}_1$  è il segmento  $v = v_0$  di  $D$  e  $\tilde{\gamma}_2$  è il segmento  $u = u_0$  di  $D$ . Le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si dicono *curve coordinate* di  $M$  per  $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$  (rispetto alla parametrizzazione scelta). Più precisamente:

- $\gamma_1$  è detta **curva delle u** per  $p_0$  (definita da  $v = v_0$ ),
- $\gamma_2$  è detta **curva delle v** per  $p_0$  (definita da  $u = u_0$ ).

I vettori velocità  $\dot{\gamma}_1(u_0), \dot{\gamma}_2(v_0) \in T_{p_0} \mathbb{R}^3$  si dicono *vettori tangenti coordinati* in  $p_0$ . Risulta

$$\dot{\gamma}_1(u_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)_{(u_0, v_0)} = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0)),$$

$$\dot{\gamma}_2(v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{(u_0, v_0)} = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0)).$$

Nel seguito indicheremo il vettore  $\dot{\gamma}_1(u_0)$  con  $\varphi_u^0$  e il vettore  $\dot{\gamma}_2(v_0)$  con  $\varphi_v^0$ . Con  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  denoteremo i vettori tangenti coordinati nel generico punto  $p = \varphi(u, v) \in \varphi(D)$ .

Dalla proprietà c) della Definizione di superficie regolare, segue la seguente proposizione.

**Proposizione 3.47.** *I vettori tangenti coordinati  $\varphi_u^0, \varphi_v^0 \in T_{p_0} \mathbb{R}^3$  sono linearmente indipendenti*

**Esempio 3.48.** Sia  $\gamma(u)$  una curva semplice regolare del piano  $\pi_{xz}$ ,  $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u)$ ,  $u \in ]a, b[$ . Poichè la curva è regolare,  $(f'(u), g'(u)) \neq (0, 0)$ . Sia  $\Sigma$  la **superficie di rotazione** ottenuta ruotando  $\gamma(u)$  intorno all'asse  $z$ . Sappiamo che  $\Sigma$  è una superficie regolare (cf. Esempio 3.15). Una parametrizzazione locale di  $\Sigma$  è data da  $(D, \varphi)$ , dove

$$D = ]a, b[ \times ]0, 2\pi[ \quad \text{e} \quad \varphi : (u, v) \in D \mapsto \varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)).$$

Troviamo le curve coordinate  $\gamma_1(u)$  e  $\gamma_2(v)$  e i corrispondenti vettori velocità rispetto alla fissata parametrizzazione locale. Dato  $p_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \varphi(D)$ , la curva delle  $u$  per  $p_0$  è il *meridiano* per  $p_0$ , ossia

$$\gamma_1(u) = \varphi(u, v_0) = (f(u)\cos v_0, f(u)\sin v_0, g(u)).$$

Analogamente, la curva delle  $v$  per  $p_0$  è il *parallelo* per  $p_0$ , ovvero

$$\gamma_2(v) = \varphi(u_0, v) = (f(u_0)\cos v, f(u_0)\sin v, g(u_0)).$$

I corrispondenti vettori velocità sono:

$$\varphi_u^0 = \dot{\gamma}_1(u_0) = (f'(u_0)\cos v_0, f'(u_0)\sin v_0, g'(u_0)),$$

$$\varphi_v^0 = \dot{\gamma}_2(v_0) = (-f(u_0)\sin v_0, f(u_0)\cos v_0, 0).$$

Osserviamo che  $\varphi_u^0 \cdot \varphi_v^0 = 0$ , cioè i vettori  $\varphi_u^0, \varphi_v^0$  sono ortogonali. Inoltre,

$$\|\varphi_u^0\|^2 = (f'(u_0))^2 + (g'(u_0))^2 = \|\dot{\gamma}_1(u_0)\|^2 > 0 \quad \text{e} \quad \|\varphi_v^0\|^2 = f^2(u_0) > 0.$$

Nel **caso della sfera**  $\mathbb{S}^2$ , parametrizzata localmente con coordinate geografiche  $(u, v) \in D = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$ ,  $u$  colatitudine e  $v$  longitudine:

$$\varphi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u),$$

le curve delle  $u$  ( $v = v_0$ ) sono semicirconferenze di raggio massimo, e le curve delle  $v$  ( $u = u_0$ ) sono circonferenze contenute in piani ortogonali all'asse  $z$ .

Nel **caso della superficie torica**  $\mathbf{T}$ , una parametrizzazione locale è data da

$$\varphi(u, v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

con  $(u, v) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$ . Rispetto a tale parametrizzazione, le curve delle  $u$  ( $v = v_0$ ) sono circonferenze date dalle intersezioni di  $T$  con semipiani contenenti l'asse, e le curve delle  $v$  ( $u = u_0$ ) sono circonferenze date dall'intersezione di  $T$  con piani ortogonali all'asse.

Nel **caso del cilindro circolare**  $M : x^2 + y^2 = r^2$ , una parametrizzazione locale è data da

$$\varphi(u, v) = (r\cos v, r\sin v, u)$$

con  $(u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[$ . Rispetto a tale parametrizzazione, le curve delle  $u$  ( $v = v_0$ ) sono rette date dalle intersezioni di  $M$  con semipiani contenenti l'asse, e le curve delle  $v$  ( $u = u_0$ ) sono circonferenze date dall'intersezione di  $M$  con piani ortogonali all'asse.

### 3.5. Piano tangente a una superficie

Sia  $M$  una superficie regolare.

**Definizione 3.49.** Sia  $p \in M$ . Un vettore  $v_p \in T_p \mathbb{R}^3$  si dice **vettore tangente** in  $p$  alla superficie  $M$  se esiste  $\gamma : I \rightarrow M$  curva differenziabile di  $M$  ed esiste  $t_0 \in I$  tali che

$$\gamma(t_0) = p \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(t_0) = v_p.$$

In particolare, i vettori coordinati  $\varphi_u^0$  e  $\varphi_v^0$  sono vettori tangenti alla superficie. Poniamo

$$T_p M := \{v_p \in T_p \mathbb{R}^3 : v_p \text{ tangente in } p \text{ alla superficie } M\}.$$

**Teorema 3.50.** L'insieme  $T_p M$  è un sottospazio vettoriale 2-dimensionale di  $T_p \mathbb{R}^3$ , che viene detto piano tangente in  $p$  alla superficie  $M$ . Più precisamente, data una carta locale  $(D, \varphi)$ , si ha

$$T_p M = \text{span}(\varphi_u^0, \varphi_v^0).$$

Inoltre, se  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  è una curva differenziabile di  $M$  con sostegno in  $\varphi(D)$ , si ha

$$(3.10) \quad \dot{\gamma}(t) = u'(t) \varphi_u(u(t), v(t)) + v'(t) \varphi_v(u(t), v(t)).$$

In particolare, se  $p = \gamma(t_0)$ , il vettore  $v_p = \dot{\gamma}(t_0) = u'(t_0) \varphi_u^0 + v'(t_0) \varphi_v^0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(D, \varphi)$  è una fissata carta locale. Siccome  $\varphi_u^0$  e  $\varphi_v^0$  sono vettori tangenti linearmente indipendenti, per provare il teorema basta provare che  $T_p M = \text{span}(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$ .

“ $\subseteq$ ” Sia  $v_p \in T_p M$  e sia  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(t_0) = p$  e  $\dot{\gamma}(t_0) = v_p$ . Poniamo

$$\tilde{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t)) = (u(t), v(t)),$$

con  $\gamma(I) \subset \varphi(D)$ . Posto  $p = \varphi(u_0, v_0)$ ,

$$\varphi(u_0, v_0) = p = \gamma(t_0) = \varphi(\tilde{\gamma}(t_0)) = \varphi(u(t_0), v(t_0))$$

implica, essendo  $\varphi$  iniettiva,  $u(t_0) = u_0$  e  $v(t_0) = v_0$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi(u(t), v(t)) \\ &= (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) = (x(t), y(t), z(t)). \end{aligned}$$

Allora,

$$\dot{\gamma}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

dove

$$x'(t) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} = x_u u'(t) + x_v v'(t),$$

e analogamente

$$y'(t) = y_u u'(t) + y_v v'(t), \quad z'(t) = z_u u'(t) + z_v v'(t).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= u'(t) \left( x_u(u(t), v(t)), y_u(u(t), v(t)), z_u(u(t), v(t)) \right) \\ &\quad + v'(t) \left( x_v(u(t), v(t)), y_v(u(t), v(t)), z_v(u(t), v(t)) \right), \end{aligned}$$

da cui segue la (3.10). Inoltre, la (3.10) implica

$$v_p = \dot{\gamma}(t_0) = u'(t_0) \varphi_u^0 + v'(t_0) \varphi_v^0,$$

e quindi  $v_p \in \text{span}(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$ .

“ $\supseteq$ ” Sia  $v_p \in \text{span}(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$ ,  $v_p = \lambda \varphi_u^0 + \mu \varphi_v^0$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Per provare che  $v_p$  è un vettore tangente a  $M$ , occorre trovare una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $M$  tale che  $\gamma(t_0) = p$  e  $\dot{\gamma}(t_0) = v_p$ . Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = \varphi(u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t), \quad |t| < \varepsilon.$$

Prendendo  $\varepsilon$  abbastanza piccolo, si ha che

$$\tilde{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t)) = (u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t) \in D$$

e quindi  $\gamma([- \varepsilon, \varepsilon]) \subset \varphi(D) \subset M$ , cioè  $\gamma(t)$  è una curva differenziabile di  $M$ . Tale curva soddisfa  $\gamma(0) = \varphi(u_0, v_0) = p$  e, per la (3.10), il vettore tangente è dato da

$$\dot{\gamma}(0) = u'(0) \varphi_u^0 + v'(0) \varphi_v^0 = \lambda \varphi_u^0 + \mu \varphi_v^0 = v_p.$$

Pertanto,  $v_p \in T_p M$ . □

**Osservazione 3.51.** Dal Teorema 3.50 segue che il piano tangente  $T_p M$  nel punto  $p = \varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ , è il piano per  $p$  e parallelo ai vettori  $\varphi_u^0$  e  $\varphi_v^0$ . Quindi  $T_p M$  (come insieme di punti) ha equazione cartesiana

$$T_p M : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0.$$

In particolare, un vettore  $v_p \in T_p M$  se e solo se  $\varphi_u^0 \wedge \varphi_v^0 \cdot v_p = 0$ .

**Proposizione 3.52.** *Sia  $M$  una superficie di livello regolare, quindi di equazione cartesiana  $f(x, y, z) = c$  e con  $(\nabla f)_p \neq (0, 0, 0)$  per ogni  $p \in M$ . Allora, se  $p = (x_0, y_0, z_0)$  è un fissato punto di  $M$ , il piano tangente  $T_p M$  (come insieme di punti) ha equazione cartesiana*

$$(3.11) \quad f_x^0(x - x_0) + f_y^0(y - y_0) + f_z^0(z - z_0) = 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per provare che  $T_p M$  ha equazione cartesiana (3.11), basta provare che

$$T_p M = (\nabla f)_p^\perp,$$

ovvero i coefficienti di giacitura del piano  $T_p M$  sono le componenti di  $(\nabla f)_p$ . Sia  $v_p \in T_p M$  e sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v_p$ . Possiamo scrivere, rispetto a una fissata parametrizzazione locale,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))),$$

e quindi  $v_p = \dot{\gamma}(0) = (x'(0), y'(0), z'(0))_p$ . Poichè  $\gamma$  è una curva di  $M$ , si ha  $f(x(t), y(t), z(t)) = c$  per ogni  $t$ , e quindi

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t).$$

In particolare, per  $t = 0$ , si ha

$$f_x^0 x'(0) + f_y^0 y'(0) + f_z^0 z'(0) = 0, \text{ ovvero } (\nabla f)_p \cdot v_p = 0.$$

Ciò implica che  $v_p \in (\nabla f)_p^\perp$ , ovvero  $T_p M \subseteq (\nabla f)_p^\perp$ . Ma  $T_p M$  e  $(\nabla f)_p^\perp$  sono entrambi sottospazi di dimensione 2, per cui possiamo concludere che  $T_p M = (\nabla f)_p^\perp$ .  $\square$

**Osservazione 3.53.** Siano  $(D, \varphi, (u, v))$  e  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  due parametrizzazioni locali con intersezione  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  non vuota. Su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  consideriamo il **cambiamento di parametri**

$$\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi} : (\bar{u}, \bar{v}) \xrightarrow{\bar{\varphi}} p = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) \xrightarrow{\varphi^{-1}} (u, v) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})).$$

Allora, per ogni  $p \in \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  abbiamo

$$\begin{aligned} p &= \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= (x(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), y(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), z(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))), \\ p &= \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = (x(\bar{u}, \bar{v}), y(\bar{u}, \bar{v}), z(\bar{u}, \bar{v})), \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} x(\bar{u}, \bar{v}) &= x(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), & y(\bar{u}, \bar{v}) &= y(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) & \text{e} \\ z(\bar{u}, \bar{v}) &= z(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})). \end{aligned}$$

Derivando, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{\bar{u}} &= (x_{\bar{u}}, y_{\bar{u}}, z_{\bar{u}}) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right), \\ \bar{\varphi}_{\bar{v}} &= (x_{\bar{v}}, y_{\bar{v}}, z_{\bar{v}}) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right). \end{aligned}$$

Pertanto,

$$(3.12) \quad \bar{\varphi}_{\bar{u}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \varphi_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \varphi_v, \quad \bar{\varphi}_{\bar{v}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \varphi_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \varphi_v.$$

Quindi la matrice del cambiamento di base, nel generico punto  $p \in \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$ , è data da

$$(3.13) \quad J_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}$$

che è la matrice jacobiana del cambiamento di parametri.

Adesso, poniamo

$$(x_1, x_2) = (u, v) \quad \text{e} \quad (y_1, y_2) = (\bar{u}, \bar{v}).$$

Inoltre, fissato un punto  $p \in \bar{\varphi}(\bar{D}) \cap \varphi(D)$ , poniamo

$$\partial_1^0 = \varphi_u^0, \quad \partial_2^0 = \varphi_v^0, \quad \bar{\partial}_1^0 = \bar{\varphi}_{\bar{u}}^0, \quad \bar{\partial}_2^0 = \bar{\varphi}_{\bar{v}}^0.$$

Allora,

$$T_p M = \text{span}(\partial_1^0, \partial_2^0) = \text{span}(\bar{\partial}_1^0, \bar{\partial}_2^0).$$

Posto

$$v_p = \sum_{i=1}^2 a_i \partial_i^0 \quad \text{e} \quad v_p = \sum_{i=1}^2 b_i \bar{\partial}_i^0,$$

dalla (3.12) segue che

$$(3.14) \quad \bar{\partial}_j^0 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \partial_i^0 \quad \text{e quindi} \quad a_i = \sum_{j=1}^2 b_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p).$$

### 3.6. Differenziale e derivata direzionale

Siano  $M_1, M_2$  superfici regolari,  $F : M_1 \rightarrow M_2$  un'applicazione differenziabile e  $p \in M_1$ .

**Definizione 3.54.** Il differenziale di  $F$  in  $p$  è definito dall'applicazione

$$F_{*p} : T_p M_1 \rightarrow T_{F(p)} M_2, \quad w_p = \dot{\gamma}(0) \mapsto F_{*p} w_p := \dot{\sigma}(0),$$

dove  $\gamma(t)$  è una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = w_p$ , e  $\sigma(t) = F(\gamma(t))$ . Si noti che  $\sigma(t)$  soddisfa  $\sigma(0) = F(\gamma(0)) = F(p)$ .

**Proposizione 3.55.** La definizione di  $F_{*p} w_p$  non dipende dalla scelta di  $\gamma$  e  $F_{*p}$  è un'applicazione lineare.

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $(D, \varphi, (u, v))$  e  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  parametrizzazioni locali di  $M_1$  e  $M_2$  rispettivamente, con  $p = \varphi(u_0, v_0) \in \varphi(D)$  e  $F(\varphi(D)) \subset \bar{\varphi}(\bar{D})$ . L'applicazione

$$\tilde{F} = \bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi : D \rightarrow \bar{D}, \quad (u, v) \mapsto (F_1(u, v), F_2(u, v))$$

è differenziabile poiché lo è la  $F$ . Sia  $w_p = a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0 \in T_p M_1$ , e quindi sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M_1$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = w_p$ . Allora,

$$\gamma(t) = \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi(u(t), v(t)) \quad \text{e} \quad w_p = \dot{\gamma}(0) = u'(0) \varphi_u^0 + v'(0) \varphi_v^0.$$

Pertanto,  $\sigma(t) = F(\gamma(t))$  soddisfa

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(t) &= \bar{\varphi}^{-1}(\sigma(t)) = \bar{\varphi}^{-1}(F(\gamma(t))) = \bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi(\tilde{\gamma}(t)) \\ &= \bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi(u(t), v(t)) = (F_1(u(t), v(t)), F_2(u(t), v(t))),\end{aligned}$$

ovvero

$$\tilde{\sigma}(t) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t)) \text{ con } \bar{u}(t) = F_1(u(t), v(t)) \text{ e } \bar{v}(t) = F_2(u(t), v(t)).$$

Di conseguenza,

$$\dot{\sigma}(0) = \bar{u}'(0) \bar{\varphi}_u^0 + \bar{v}'(0) \bar{\varphi}_v^0,$$

dove

$$\bar{u}'(0) = \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) u'(0) + \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) v'(0)$$

e

$$\bar{v}'(0) = \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) u'(0) + \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) v'(0).$$

Pertanto, siccome  $a_1 = u'(0)$  e  $a_2 = v'(0)$ , si ha

$$(3.15) \quad F_{*p} w_p = \dot{\sigma}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

La (3.15) implica che  $F_{*p} w_p$  non dipende da  $\gamma$  ma solo da  $w_p$  e da  $F$ . Inoltre, la stessa formula implica che  $F_{*p}$  è un'applicazione lineare.  $\square$

Si noti che per definire  $F_{*p}$  basta la differenziabilità nel punto  $p$ . Dalla dimostrazione della proposizione precedente segue che la matrice jacobiana  $J(F)_p := J(\tilde{F})_{(u,v)}$  è la matrice associata a  $F_{*p}$  rispetto alle basi coordinate  $(\varphi_u^0, \varphi_v^0)$  e  $(\bar{\varphi}_u^0, \bar{\varphi}_v^0)$ :

$$F_{*p} \varphi_u^0 = \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) \bar{\varphi}_u^0 + \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) \bar{\varphi}_v^0,$$

e

$$F_{*p} \varphi_v^0 = \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) \bar{\varphi}_u^0 + \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) \bar{\varphi}_v^0.$$

In particolare,  $F$  è un diffeomorfismo locale se e solo se  $F_{*p}$  è un isomorfismo per ogni  $p \in M$ .

Siano ora  $M$  una superficie regolare ed  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione a valori reali differenziabile (in  $p \in M$ ). Sia  $w_p \in T_p M$ ,  $w_p = a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0$ , e quindi  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$ ,  $w_p = \dot{\gamma}(0) = u'(0) \varphi_u^0 + v'(0) \varphi_v^0$ . In tal caso  $\sigma(t) = f(\gamma(t)) = (f \circ \varphi)(u(t), v(t)) = \tilde{f}(u(t), v(t))$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}$ ,  $T_{\sigma(t)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(0) &= \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = u'(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u_0, v_0) + v'(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u_0, v_0) \\ &= a_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u_0, v_0) + a_2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u_0, v_0) = w_p(\tilde{f}),\end{aligned}$$

dove  $w_p(\tilde{f})$  è la derivata direzionale di  $\tilde{f} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  rispetto a  $w_p = (a_1, a_2)_p$ .

**Definizione 3.56.** La *derivata direzionale* di  $f$  rispetto a  $w_p$  è definita da

$$w_p(f) := a_1 \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + a_2 \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0),$$

$$\text{dove } \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) := \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) := \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Tale definizione non dipende dalla parametrizzazione scelta. Infatti, considerando due parametrizzazioni e facendo uso delle notazioni introdotte nella Osservazione 3.53, posto  $w_p = \sum_{i=1}^2 a_i \partial_i^0 = \sum_{i=1}^2 b_i \bar{\partial}_i^0$ , la (3.9) e la (3.14) implicano

$$\sum_{i=1}^2 a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{j=1}^2 b_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^2 b_j \frac{\partial f}{\partial y_j}(p).$$

L'applicazione

$$(3.16) \quad (df)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, w_p \mapsto (df)_p(w_p) := \dot{\sigma}(0) = w_p(f),$$

è il **differenziale** di  $f$  in  $p$ , ed è chiaramente una forma lineare su  $T_p M$ , ovvero  $(df)_p$  è un elemento dello spazio duale  $T_p^* M$ . In particolare,

$$(df)_p(\varphi_u^0) = \varphi_u^0(f) \quad \text{e} \quad (df)_p(\varphi_v^0) = \varphi_v^0(f),$$

dove

$$(3.17) \quad \varphi_u^0(f) = \frac{\partial f}{\partial u}(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \text{e} \quad \varphi_v^0(f) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Di conseguenza, se  $w_p = a_1 \varphi_u^0 + a_2 \varphi_v^0$ , considerate le applicazioni coordinate

$$u : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto u(p) \quad \text{e} \quad v : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto v(p),$$

si ha  $a_1 = w_p(u)$  e  $a_2 = w_p(v)$ , ovvero

$$(3.18) \quad w_p = w_p(u) \varphi_u^0 + w_p(v) \varphi_v^0.$$

Usando le notazioni  $(x_1, x_2) = (u, v)$  e  $\partial_1^0 = \varphi_u^0$ ,  $\partial_2^0 = \varphi_v^0$ , possiamo anche scrivere

$$w_p = w_p(x_1) \partial_1^0 + w_p(x_2) \partial_2^0 = \sum_{i=1}^2 w_p(x_i) \partial_i^0.$$

Inoltre, per ogni  $f_1, f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$  applicazioni differenziabili (in un intorno di  $p$ ) e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & w_p(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 w_p(f_1) + \lambda_2 w_p(f_2), \\ \text{(ii)} \quad & w_p(f_1 f_2) = f_1(p) w_p(f_2) + f_2(p) w_p(f_1). \end{aligned}$$

Le proprietà (i) e (ii) ci dicono che  $w_p$  è una derivazione di  $\mathcal{F}(p)$  (algebra delle funzioni differenziabili in un intorno di  $p$ ).

Infine, siccome

$$(du)_p(\varphi_u^0) = (dv)_p(\varphi_v^0) = 1 \quad \text{e} \quad (du)_p(\varphi_v^0) = 0 = (dv)_p(\varphi_u^0),$$



allora  $\{(du)_p, (dv)_p\}$  è la base di  $T_p^*M$  duale della base coordinata  $\{\varphi_u^0, \varphi_v^0\}$  di  $T_pM$ . Inoltre,

$$(df)_p = \frac{\partial f}{\partial u}(p) (du)_p + \frac{\partial f}{\partial v}(p) (dv)_p.$$

**Definizione 3.57.** Un **campo vettoriale tangente** alla superficie  $M$  è un'applicazione

$$X : M \rightarrow \dot{\bigcup}_{p \in M} T_pM, p \mapsto X_p \in T_pM.$$

$X$  si dice **differenziabile** se per ogni funzione differenziabile  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , la funzione

$$X(f) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto X(f)(p) := X_p(f),$$

è differenziabile.

Rispetto a una fissata carta locale  $(D, \varphi)$ , i campi vettoriali locali  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  sono differenziabili. Infatti, dalla (3.17) si ha

$$\varphi_u(f) = \frac{\partial f}{\partial u} \quad \text{e} \quad \varphi_v(f) = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Inoltre, dalla (3.18) segue che un campo vettoriale tangente alla superficie  $M$  si esprime (localmente) con

$$X = a_1\varphi_u + a_2\varphi_v,$$

dove le funzioni componenti  $a_1, a_2$  sono date da

$$a_1 = X(u) \quad \text{e} \quad a_2 = X(v).$$

Quindi, tenendo anche conto della (3.14), si ha che  $X$  è differenziabile se e solo se le sue funzioni componenti  $a_1, a_2$  (rispetto a una fissata carta locale) lo sono.

Dalle proprietà della derivata direzionale  $w_p(f)$ , si ottiene che un campo vettoriale (differenziabile) tangente  $X$  si può pensare come una **derivazione** di  $\mathcal{F}(M)$  (algebra delle funzioni differenziabili su  $M$ ), ovvero come un operatore

$$X : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), f \mapsto X(f),$$

che soddisfa le seguenti proprietà

(i)  $X(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 X(f_1) + \lambda_2 X(f_2)$  e (ii)  $X(f_1 f_2) = f_1 X(f_2) + f_2 X(f_1)$  per ogni  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . In tal caso, per ogni  $p \in M$ , il vettore tangente  $X_p = X(p)$  è definito da

$$X_p = \mu_1 \varphi_u^0 + \mu_2 \varphi_v^0,$$

dove le costanti  $\mu_1, \mu_2$  sono definite da

$$\mu_1 = X(u)(p) \quad \text{e} \quad \mu_2 = X(v)(p).$$

Denotiamo con  $\mathfrak{X}(M)$  l'insieme di tutti i campi vettoriali tangenti (differenziabili) definiti su  $M$ . Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $f \in \mathcal{F}(M)$ , si possono definire in modo naturale i campi vettoriali  $X + Y, \lambda X, fX \in \mathfrak{X}(M)$ . Inoltre, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  si può definire il campo vettoriale tangente **parentesi di Lie**

$$[X, Y] : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), f \mapsto [X, Y](f) = XY(f) - YX(f).$$

In effetti, si può vedere che  $[X, Y]$  verifica (i) e (ii) e quindi è un elemento di  $\mathfrak{X}(M)$ . Naturalmente quanto detto si può ripetere per campi vettoriali tangenti a  $M$  ma definiti su un aperto  $A$  di  $M$ .

**Osservazione 3.58.** Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Se un campo vettoriale  $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$  ha la proprietà che  $\bar{X}_p \in T_p M$  per ogni  $p \in M$ , allora si può dimostrare che  $X = \bar{X}|_M \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Esercizio 3.59.** verificare che  $\mathfrak{X}(M)$  ha una struttura algebrica di  $\mathcal{F}(M)$ -modulo indotta dalle operazioni

$$(X, Y) \mapsto X + Y, \quad (\lambda, X) \mapsto \lambda X \quad \text{e} \quad (f, X) \mapsto fX.$$

In particolare,  $(\varphi_u, \varphi_v)$  è base locale per  $\mathfrak{X}(M)$ .

Sia ora  $F : M \rightarrow \tilde{M}$  un diffeomorfismo tra due superfici regolari. Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , indichiamo con  $F_*X$  il campo vettoriale su  $\tilde{M}$  definito da

$$(3.19) \quad (F_*X)_q := F_{*p}X_p, \quad \text{per ogni } q \in \tilde{M}, q = F(p).$$

Dalla (3.15) segue che anche  $F_*X$  è differenziabile, quindi il differenziale definisce una corrispondenza biunivoca  $F_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(\tilde{M})$  che soddisfa (verificare per esercizio):

$$F_*(X + Y) = F_*(X) + F_*(Y), \quad F_*(fX) = (f \circ F^{-1})F_*(X) \quad \text{e} \\ (F_*(X))(g) = X(g \circ F) \circ F^{-1}, \quad \text{dove } g \in \mathcal{F}(\tilde{M}).$$

### 3.7. Prima forma fondamentale

Finora ci siamo occupati esclusivamente dell'aspetto differenziale delle superfici, adesso iniziamo a occuparci dell'aspetto metrico. A tal fine introduciamo la prima forma fondamentale.

Siano  $M$  una superficie regolare,  $p$  un punto di  $M$  e  $T_p M$  il piano tangente in  $p$  ad  $M$ . Il prodotto scalare di  $T_p \mathbb{R}^3$  induce un prodotto scalare su  $T_p M$  (che è un sottospazio vettoriale di  $T_p \mathbb{R}^3$ ), definito da

$$v_p \cdot w_p := v \cdot w, \quad \text{per ogni } v_p, w_p \in T_p M.$$

**Definizione 3.60.** La prima forma fondamentale di  $M$  in  $p$  è la forma quadratica  $\mathcal{I}_p$  associata al prodotto scalare indotto su  $T_p M$ . Quindi,

$$\mathcal{I}_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad v_p \mapsto \mathcal{I}_p(v_p) = v_p \cdot v_p = \|v_p\|^2 = \|v\|^2.$$

Si noti che  $\mathcal{I}_p$  determina il prodotto scalare

$$v_p \cdot w_p = \frac{1}{2} \{ \mathcal{I}_p(v_p + w_p) - \mathcal{I}_p(v_p) - \mathcal{I}_p(w_p) \}.$$

#### Coefficienti della prima forma fondamentale

Consideriamo una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  e un punto  $p = (u_0, v_0) \in \varphi(D) \subset M$ . Per ogni  $v_p, w_p \in T_p M$ , posto

$$v_p = a_1 \varphi_u^0 + b_1 \varphi_v^0 \quad \text{e} \quad w_p = a_2 \varphi_u^0 + b_2 \varphi_v^0,$$

si ha

$$v_p \cdot w_p = a_1 a_2 \varphi_u^0 \cdot \varphi_u^0 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \varphi_u^0 \cdot \varphi_v^0 + b_1 b_2 \varphi_v^0 \cdot \varphi_v^0,$$

e quindi

$$\mathcal{I}_p(v_p) = a_1^2 \varphi_u^0 \cdot \varphi_u^0 + 2a_1 b_1 \varphi_u^0 \cdot \varphi_v^0 + b_1^2 \varphi_v^0 \cdot \varphi_v^0.$$

I coefficienti

$$E(p) = \varphi_u^0 \cdot \varphi_u^0, \quad F(p) = \varphi_u^0 \cdot \varphi_v^0 \quad \text{e} \quad G(p) = \varphi_v^0 \cdot \varphi_v^0$$

determinano la prima forma fondamentale (e il prodotto scalare) nel punto  $p$ .  
Le tre funzioni differenziabili

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v$$

si dicono *coefficienti della prima forma fondamentale*  $\mathcal{I}$  (rispetto alla fissata parametrizzazione). Quindi, la matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

determina il prodotto scalare nel dominio  $D$ . Naturalmente le funzioni  $E, F, G$  si possono considerare definite anche su  $\varphi(D)$ , in tal caso si identificano con

$$E \circ \varphi^{-1}, \quad F \circ \varphi^{-1}, \quad G \circ \varphi^{-1}.$$

**Proposizione 3.61.** *Sia  $(\bar{\varphi}, \bar{D}, (\bar{u}, \bar{v}))$  un'altra parametrizzazione locale con intersezione  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  non vuota e sia  $J_c$  la matrice jacobiana del cambiamento di parametri definita dalla (3.13). Indicati con  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  i coefficienti di  $\mathcal{I}$  rispetto alla seconda parametrizzazione, si ha*

$$(3.20) \quad \begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = J_c^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J_c,$$

e quindi  $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = (\det(J_c))^2(EG - F^2)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Usiamo le notazioni introdotte nella Osservazione 3.53. Quindi, poniamo

$$(x_1, x_2) = (u, v), \quad (y_1, y_2) = (\bar{u}, \bar{v}), \quad \partial_1 = \varphi_u, \quad \partial_2 = \varphi_v, \quad \bar{\partial}_1 = \bar{\varphi}_{\bar{u}}, \quad \bar{\partial}_2 = \bar{\varphi}_{\bar{v}}.$$

Allora, la (3.12) e la matrice  $J_c$  diventano rispettivamente

$$\bar{\partial}_j = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \partial_k \quad \text{e} \quad J_c = (J_{kj}), \quad J_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial y_j}.$$

Inoltre, poniamo  $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j$  e  $\bar{g}_{ij} = \bar{\partial}_i \cdot \bar{\partial}_j$ . Allora,

$$\bar{g}_{ij} = \left( \sum_{k=1}^2 \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \partial_k \right) \cdot \left( \sum_{h=1}^2 \frac{\partial x_h}{\partial y_j} \partial_h \right) = \sum_{k,h=1}^2 J_{ki} J_{hj} g_{kh} = \sum_{k,h=1}^2 J_{ik}^T J_{hj} g_{kh},$$

e quindi  $(\bar{g}_{ij}) = J_c^T (g_{ij}) J_c$ , ovvero la (3.20).  $\square$

L'importanza della prima forma fondamentale viene dal fatto che la conoscenza di  $\mathcal{I}$  permette di studiare questioni metriche sulla superficie senza ulteriori riferimenti allo spazio ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Ad esempio, se  $\gamma(t)$  è una curva

differenziabile di  $M$  con  $\gamma(I) \subset \varphi(D)$ , si può definire la **lunghezza d'arco** in termini dei coefficienti della prima forma fondamentale:

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\mathcal{I}(\dot{\gamma}(t))} dt.$$

Se  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ , allora

$$\dot{\gamma}(t) = u'(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + v'(t)\varphi_v(u(t), v(t))$$

e quindi

$$\mathcal{I}(\dot{\gamma}(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = E(t)u'(t)^2 + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)v'(t)^2.$$

Facciamo vedere che l'espressione di  $\mathcal{I}(\dot{\gamma}(t))$  non dipende dalla particolare parametrizzazione considerata. Sia  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  un'altra parametrizzazione con  $\gamma(I) \subset \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$ . Poniamo  $(x_1(t), x_2(t)) = (u(t), v(t))$ ,  $(y_1(t), y_2(t)) = (\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ ,  $\partial_1 = \varphi_u$ ,  $\partial_2 = \varphi_v$ ,  $\bar{\partial}_1 = \bar{\varphi}_u$ ,  $\bar{\partial}_2 = \bar{\varphi}_v$ , quindi  $(g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j)$  è la matrice della prima forma fondamentale rispetto a  $(D, \varphi)$  e  $(\bar{g}_{ij} = \bar{\partial}_i \cdot \bar{\partial}_j)$  è la matrice della prima forma fondamentale rispetto a  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|_{\bar{\varphi}}^2 &= \sum_{h,k} \frac{dy_h}{dt} \frac{dy_k}{dt} \bar{g}_{hk}(t) = \sum_{h,k} \frac{dy_h}{dt} \frac{dy_k}{dt} (\bar{\partial}_h \cdot \bar{\partial}_k)(\gamma(t)) \\ &= \sum_{h,k} \frac{dy_h}{dt} \frac{dy_k}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_h} (\partial_i)_{\gamma(t)} \cdot \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_k} (\partial_j)_{\gamma(t)} \right) \\ &= \sum_{h,k,i,j} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} \frac{dy_h}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} g_{ij}(\gamma(t)) = \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} g_{ij}(\gamma(t)) \\ &= \|\dot{\gamma}(t)\|_{\varphi}^2. \end{aligned}$$

L'*angolo convesso*  $\vartheta$  determinato da due curve regolari  $\alpha, \beta : I \rightarrow M$  che si incontrano in  $p_0 = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$  è definito da

$$\cos \vartheta = \frac{\dot{\alpha}(t_0) \cdot \dot{\beta}(t_0)}{\|\dot{\alpha}(t_0)\| \|\dot{\beta}(t_0)\|}.$$

In particolare, l'angolo convesso  $\vartheta$  tra le curve coordinate per  $p_0$  è dato da

$$\cos \vartheta = \frac{\varphi_u^0 \cdot \varphi_v^0}{\|\varphi_u^0\| \|\varphi_v^0\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Quindi, le curve coordinate di una parametrizzazione locale sono ortogonali se e solo se  $F = 0$ . Le coordinate  $(u, v)$  di una parametrizzazione regolare  $(D, \varphi)$  per cui  $E = G$  e  $F = 0$  si dicono **coordinate isoterme**. Si può dimostrare (teorema non banale) che per ogni fissato punto  $p$  di una superficie regolare esiste una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di coordinate isoterme con  $p \in \varphi(D)$  (cf., ad esempio, [9] p.227).

Data la curva differenziabile  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ , possiamo considerare la lunghezza d'arco

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{Eu'^2 + 2Fuv' + Gv'^2}(t) dt,$$

da cui segue

$$ds/dt = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}(t),$$

e quindi

$$(ds/dt)^2 = E(t)(du/dt)^2 + 2F(t)(du/dt)(dv/dt) + G(t)(dv/dt)^2,$$

che in forma abbreviata si esprime con

$$(3.21) \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Spesso la prima forma fondamentale di una superficie regolare si esprime con la formula (3.21), e  $ds$  è detto *elemento di lunghezza d'arco*. In particolare, se  $E = G = 1$  e  $F = 0$ , allora  $ds^2 = du^2 + dv^2$  che è una “forma infinitesimale” del Teorema di Pitagora.

**Il gradiente su superfici regolari.** Sia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile definita su una superficie regolare  $M$ . Nella sezione precedente abbiamo definito il differenziale di  $f$ . Il **gradiente di  $f$**  è il campo vettoriale  $\nabla f$  (tangente a  $M$ ) che ad ogni punto  $p$  associa il vettore tangente  $(\nabla f)_p$  duale del differenziale  $(df)_p$ , ovvero  $(\nabla f)_p$  è definito da

$$(\nabla f)_p \cdot w_p = (df)_p(w_p) = w_p(f).$$

Posto  $(\nabla f)_p = a_1\varphi_u^0 + a_2\varphi_v^0$ , dalla (3.17) si ottiene

$$(\nabla f)_p \cdot \varphi_u^0 = \varphi_u^0(f) = (\partial f / \partial u)(p) = f_u^0,$$

$$(\nabla f)_p \cdot \varphi_v^0 = \varphi_v^0(f) = (\partial f / \partial v)(p) = f_v^0.$$

Inoltre,

$$(\nabla f)_p \cdot \varphi_u^0 = a_1E^0 + a_2F^0 \quad \text{e} \quad (\nabla f)_p \cdot \varphi_v^0 = a_1F^0 + a_2G^0.$$

Quindi,

$$a_1E^0 + a_2F^0 = f_u^0, \quad a_1F^0 + a_2G^0 = f_v^0.$$

Risolvendo tale sistema, si ottengono le componenti di  $(\nabla f)_p$  rispetto alla base  $\varphi_u^0, \varphi_v^0$ . Pertanto, localmente, il gradiente è dato dalla seguente formula

$$\nabla f = \frac{f_uG - f_vF}{EG - F^2}\varphi_u + \frac{f_vE - f_uF}{EG - F^2}\varphi_v.$$

In particolare, se la base  $(\varphi_u, \varphi_v)$  è ortonormale, si ha

$$\nabla f = f_u\varphi_u + f_v\varphi_v.$$

**Esempio 3.62.** Siano  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  e  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$  due vettori ortonormali di  $\mathbb{R}^3$ . Il piano  $M$  per  $p_0(x_0, y_0, z_0)$  e parallelo ai vettori  $\vec{a}, \vec{b}$ , è parametrizzato da

$$\varphi(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Quindi,

$$\varphi_u = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{e} \quad \varphi_v = (b_1, b_2, b_3).$$

I coefficienti della 1<sup>a</sup> forma fondamentale sono

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = \|\vec{a}\|^2 = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{e} \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = \|\vec{b}\|^2 = 1.$$

In particolare, se  $\vec{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{b} = (0, 1, 0)$  e  $p_0 = O(0, 0, 0)$ , allora  $M$  è il piano  $\mathbb{R}^2 : z = 0$ .

Se consideriamo l'aperto del piano  $\mathbb{R}^2$  parametrizzato con le coordinate polari:  $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0)$ ,  $(u, v) \in D = ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$ , allora

$$\varphi_u = (\cos v, \sin v, 0) \quad \text{e} \quad \varphi_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

e i corrispondenti coefficienti di  $\mathcal{I}$  sono  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = u^2$ .

**Esercizio 3.63.** Siano  $(u, v)$  le usuali coordinate cartesiane e denotiamo con  $(\bar{u}, \bar{v})$  le coordinate polari definite in  $D = ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$ . Si verifichi per tali parametrizzazioni la (3.20).

**Esempio 3.64.** Sia  $\Sigma$  la superficie di rotazione con la parametrizzazione locale (cf. Esempio 3.15 )

$$\varphi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad u \in ]a, b[ \text{ e } v \in ]0, 2\pi[.$$

Assumiamo che la curva regolare  $\gamma(u) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u)$ , sia parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Siccome i vettori  $\varphi_u, \varphi_v$  sono dati da

$$\varphi_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \quad \text{e} \quad \varphi_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0),$$

allora i coefficienti della 1<sup>a</sup> forma fondamentale sono

$$E = \|\varphi_u\|^2 = \|\dot{\gamma}(u)\|^2 = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0 \quad \text{e} \quad G = \|\varphi_v\|^2 = f^2(u) > 0.$$

In particolare, se consideriamo il cilindro circolare retto parametrizzato localmente da

$$\varphi(u, v) = (\cos v, \sin v, u), \quad \text{con } u \in ]a, b[ \text{ e } v \in ]0, 2\pi[,$$

otteniamo

$$E = \|\varphi_u\|^2 = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0 \quad \text{e} \quad G = \|\varphi_v\|^2 = 1.$$

Quindi piano e cilindro, pur essendo superfici distinte (come superfici immerse in  $\mathbb{R}^3$ ), hanno prima forma fondamentale uguale. In effetti, vedremo che le due superfici sono localmente isometriche.

**Esempio 3.65.** Sia data l'elica circolare  $\gamma(v) = (\cos v, \sin v, bv)$ ,  $b \neq 0$ . Per ogni punto di  $\gamma$  tracciamo una retta parallela al piano  $\pi_{xy} : z = 0$  e incidente l'asse  $z$ . La superficie rigata  $\Sigma$  generata da queste rette è regolare ed è detta **elicoide**. Determiniamo la prima forma fondamentale di  $\Sigma$  rispetto a una rappresentazione parametrica locale. Siano  $P(\cos v, \sin v, bv)$  il generico punto di  $\gamma$  e  $Q(0, 0, h)$  il generico punto dell'asse  $z$ . Imponendo che il vettore  $\vec{QP} = (\cos v, \sin v, bv - h)$  sia parallelo al piano  $\pi_{xy} : z = 0$ , si trova che  $h = bv$  e quindi  $\Sigma$  ha equazioni parametriche  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = bv$ . L'applicazione

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[.$$

definisce una rappresentazione parametrica locale di  $\Sigma$ . Infatti,  $\varphi$  è banalmente differenziabile e iniettiva. Inoltre,  $\varphi^{-1} : (x, y, z) \mapsto (u, v)$  è continua in quanto  $(u, v) = (x/\cos(z/b), z/b)$  se  $\cos(z/b) \neq 0$ , altrimenti  $(u, v) = (y/\sin(z/b), z/b)$ . Infine,

$$\varphi_u = (\cos v, \sin v, 0) \text{ e } \varphi_v = (-u \sin v, u \cos v, b),$$

e quindi la matrice jacobiana di  $\varphi$  ha rango 2. In particolare, i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = 1, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = u^2 + b^2.$$

**Esercizio 3.66.** La superficie  $M$  ottenuta ruotando la curva  $x = \cosh z$  (del piano  $\pi_{xz}$ ) intorno all'asse  $z$  è detta **catenoide**. Determinare i coefficienti della prima forma fondamentale di  $M$  rispetto a una fissata parametrizzazione locale.

*Suggerimento:* come caso particolare dell'Esempio 3.15 si ottiene la parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = ((\cosh u) \cos v, (\cosh u) \sin v, u), \quad (u, v) \in D = \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[.$$

**Esercizio 3.67.** Determinare la prima forma fondamentale della sfera  $\mathbb{S}^2$  rispetto alla parametrizzazione locale definita dalle coordinate geografiche (cf. Esercizio 3.12).

**Esercizio 3.68.** Determinare la prima forma fondamentale delle seguenti superfici

$$M_1 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad M_2 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$M_3 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1, \quad M_4 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} = z.$$

*Suggerimento:* le superfici  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sono quadriche di rotazione e quindi si possono trattare come nell'Esempio 3.64 (cf. anche Esercizio 3.33).

**Esercizio 3.69.** Determinare la prima forma fondamentale di una superficie regolare rigata rispetto alla parametrizzazione definita nell'Esempio 3.17.

### 3.8. Area

Un altro concetto metrico che può essere trattato con la prima forma fondamentale è quello di area di una regione limitata di una superficie regolare  $M$ .

Diciamo *dominio* di  $M$  un sottoinsieme aperto e connesso di  $M$  il cui bordo è immagine di una circonferenza mediante un omeomorfismo differenziabile, con differenziale non nullo eccetto in un numero finito di punti. Una *regione* di  $M$  è l'unione di un dominio e del suo bordo. Infine, una regione di  $M$  è *limitata* se è contenuta in una palla di  $\mathbb{R}^3$ . Data una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di una superficie regolare  $M$ , consideriamo una regione limitata  $R$  contenuta in  $\varphi(D)$ , quindi  $R$  è immagine tramite  $\varphi$  di una regione limitata  $Q \subset D \subseteq \mathbb{R}^2$ . E' noto che la funzione  $\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|$ , definita in  $D$ , misura l'area di un parallelogramma di lati  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$ . Osserviamo che l'integrale

$$\iint_Q \|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\| \, dudv$$

non dipende dalla parametrizzazione scelta. Infatti, se  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$  è una parametrizzazione locale con  $R \subset \bar{\varphi}(\bar{D})$ ,  $\bar{Q} = \bar{\varphi}^{-1}(R) \subset \bar{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ , e  $J_c$  è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate definita dalla (3.13), si ha

$$\iint_{\bar{Q}} \|\bar{\varphi}_u \wedge \bar{\varphi}_v\| d\bar{u}d\bar{v} = \iint_{\bar{Q}} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| |\det(J_c)| d\bar{u}d\bar{v} = \iint_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal teorema sul cambiamento di variabili per gli integrali doppi. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

**Definizione 3.70.** Sia  $R$  una regione limitata contenuta nel dominio  $\varphi(D)$  di una parametrizzazione locale  $(D, \varphi)$  di una superficie regolare  $M$ . Diciamo area di  $R$  la quantità

$$area(R) = \iint_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv, \quad \text{dove } Q = \varphi^{-1}(R).$$

Poichè vale l'identità

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2 = EG - F^2,$$

l'integrando di  $area(R)$  può essere scritto in termini dei coefficienti della prima forma quadratica fondamentale:

$$area(R) = \iint_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

**Esempio 3.71.** Calcoliamo l'area della superficie di una sfera  $\mathbb{S}^2(r)$  di raggio  $r$  centrata nell'origine. Consideriamo la parametrizzazione locale  $(D = ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[, \varphi)$  definita mediante le *coordinate geografiche* introdotte nell'Esercizio 3.12:

$$\varphi : D \rightarrow \mathbb{S}^2, (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (r(\sin u) \cos v, r(\sin u) \sin v, r \cos u).$$

Il parametro  $u$  è la *colatitudine* e il parametro  $v$  è la *longitudine* del punto  $p = \varphi(u, v)$  della sfera. Con un semplice calcolo si trova

$$\varphi_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u), \quad \varphi_v = (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0)$$

e quindi

$$E(u, v) = r^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = r^2 \sin^2 u, \\ \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^4 \sin^2 u} = r^2 \sin u.$$

Consideriamo la regione  $R_\varepsilon = \varphi(] \varepsilon, \pi - \varepsilon[ \times ] \varepsilon, 2\pi - \varepsilon[) \subset \mathbb{S}^2$  per  $\varepsilon > 0$  "piccolo", allora l'area

$$area(R_\varepsilon) = \iint_{D_\varepsilon} r^2(\sin u) dudv = r^2 \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left( \int_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \sin u du \right) dv \\ = (2\pi - 2\varepsilon)r^2 [-\cos u]_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}.$$

Notiamo che il dominio  $\varphi(D)$  non ricopre tutta la sfera, tuttavia la parte mancante (una semicirconferenza con i due poli) è un insieme di area nulla per cui

$$area(\mathbb{S}^2(r)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} area(R_\varepsilon) = 4\pi r^2.$$



**Esercizio 3.72.** Consideriamo la superficie torica  $T$  con la parametrizzazione introdotta nell'Esempio 3.16. Verificare che in questo caso

$$E(u, v) = r^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = (a + r \cos u)^2,$$

$$\text{area}(R_\varepsilon) = \iint_{D_\varepsilon} r(a + r \cos u) du dv = r \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left( \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (a + r \cos u) du \right) dv,$$

e quindi

$$\text{area}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{area}(R_\varepsilon) = 4ar\pi^2.$$

Per una superficie regolare  $M$  si può definire l'integrale rispetto all'elemento d'area

$$d\sigma = |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Sia  $\{(D_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$  una famiglia di parametrizzazioni locali, dove i  $D_\alpha$  sono domini limitati di integrazione tali che i corrispondenti domini  $U_\alpha = \varphi_\alpha(D_\alpha)$  ricoprono tutta la superficie  $M$ . Sia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con supporto compatto contenuto in qualche  $U_\alpha$ , allora si pone

$$(3.22) \quad \int_{U_\alpha} f d\sigma := \int_{D_\alpha} (f \circ \varphi_\alpha) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

dove  $(u, v)$  sono i parametri relativi alla parametrizzazione  $(D_\alpha, \varphi_\alpha)$ . Ora ricordiamo la formula del cambiamento di variabili nell'integrazione su domini di  $\mathbb{R}^2$ . Siano  $A, B$  due aperti di  $\mathbb{R}^2$ ,  $G : A \rightarrow B, x \mapsto y = G(x)$ , un diffeomorfismo e  $\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)$  il determinante del suo jacobiano. Se  $D \subset A$  e  $D' = G(D) \subset B$  sono domini limitati di integrazione con  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile, allora  $f \circ G : A \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(y(x))$  è integrabile e

$$(3.23) \quad \int_{D'} f(y) dy_1 dy_2 = \int_D f(G(x)) \left| \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) \right| dx_1 dx_2.$$

Se la funzione  $f$  ha supporto contenuto in  $U_\alpha \cap U_\beta$ , tenendo conto che dalla (3.20) si ha  $\sqrt{EG - F^2}(u, v) = |\det(J_c)^{-1}| \sqrt{EG - F^2}(\bar{u}, \bar{v})$ , dove  $J_c$  è la matrice jacobiana del cambiamento di parametri, applicando la (3.23) si ottiene

$$\int_{U_\alpha} f d\sigma = \int_{U_\beta} f d\bar{\sigma}.$$

Quindi la definizione (3.22) non dipende dalla scelta della parametrizzazione locale. Più in generale, utilizzando il concetto di partizione dell'unità subordinata a un ricoprimento localmente finito (cf., ad esempio, [18]), è possibile definire l'integrale  $\int_M f d\sigma$  per  $f$  continua a supporto contenuto in un compatto di  $M$ . In particolare, se  $M$  è compatta, si può definire l'area di  $M$ .

### 3.9. Superfici orientabili

In questa sezione introduciamo il concetto di orientazione su una superficie. Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo una parametrizzazione locale  $(D, \varphi, (u, v))$  di  $M$  e un punto  $p = \varphi(u, v) \in \varphi(D)$ . Ricordiamo che la base coordinata  $(\varphi_u, \varphi_v)$  di  $T_p M$ , in quanto base ordinata, determina un'orientazione su  $T_p M$ . Se  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  è un'altra parametrizzazione locale di  $M$  con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) \neq \emptyset$ , un problema naturale che si pone è il seguente

**Problema:** per  $p \in \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$ , le basi coordinate  $(\varphi_u, \varphi_v)$  e  $(\bar{\varphi}_{\bar{u}}, \bar{\varphi}_{\bar{v}})$  determinano la stessa orientazione su  $T_p M$ ?

Per poter rispondere alla domanda posta, dobbiamo esprimere una base in funzione dell'altra. Abbiamo visto che su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  il cambiamento di base è dato dalla (3.12), ovvero

$$\bar{\varphi}_{\bar{u}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \varphi_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \varphi_v, \quad \bar{\varphi}_{\bar{v}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \varphi_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \varphi_v.$$

Quindi, le due basi coordinate  $(\varphi_u, \varphi_v)$  e  $(\bar{\varphi}_{\bar{u}}, \bar{\varphi}_{\bar{v}})$  determinano la stessa orientazione su  $T_p M$  se e solo se la matrice  $J_c$  del cambiamento di base (che è la matrice jacobiana (3.13) del cambiamento di parametri) ha  $\det(J_c) > 0$ . Allora, possiamo dare la seguente definizione (che è di natura "intrinseca").

**Definizione 3.73.** Una superficie regolare  $M$  si dice orientabile se esiste una famiglia di parametrizzazioni locali  $\mathcal{F} = \{(D_i, \varphi_i)\}_i$  tale che

- (1)  $\bigcup_i \varphi_i(D_i) = M$ ,
- (2) per ogni  $(D_1, \varphi_1), (D_2, \varphi_2) \in \mathcal{F}$ , con  $\varphi_1(D_1) \cap \varphi_2(D_2) \neq \emptyset$ , la matrice jacobiana  $J_c$  del cambiamento di parametri ha  $\det > 0$ .

La scelta di una tale famiglia determina una **orientazione** su  $M$ . Una superficie regolare che si può ricoprire con una sola parametrizzazione è banalmente orientabile. In particolare, le superfici semplici sono orientabili.

Ora vogliamo esprimere l'orientabilità dal punto di vista "estrinseco", cioè pensando la superficie immersa nello spazio  $\mathbb{R}^3$ . Un *campo vettoriale*  $X$  su una superficie regolare  $M$  è una corrispondenza

$$X : M \rightarrow \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p \mathbb{R}^3, \quad p \mapsto X(p) \in T_p \mathbb{R}^3.$$

Da non confondere con la Definizione 3.57 di campo vettoriale tangente, in generale questo  $X$  non è tangente alla superficie. In ogni caso, se  $X$  è un campo vettoriale su  $M$ , poniamo  $X(p) = \sum_{i=1}^3 X^i(p) E_i(p)$ , dove le  $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  sono dette *funzioni componenti* di  $X$ .  $X$  si dice *campo vettoriale differenziabile* su  $M$  se le sue funzioni componenti  $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  sono differenziabili. Un campo vettoriale  $N$  definito su  $M$  si dice **campo vettoriale normale** alla superficie  $M$  se  $N(p) \perp T_p M$ ,  $N(p) \neq 0$ , per ogni  $p \in M$ . In tal caso

$$T_p \mathbb{R}^3 = T_p M \oplus \text{span}(N_p).$$

**Teorema 3.74.** *Sia  $M$  una superficie regolare. Allora,  $M$  è una superficie orientabile se e solo se esiste  $N$  campo vettoriale unitario differenziabile e normale alla superficie  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $M$  una superficie orientabile e sia  $\mathcal{A} = \{(D_i, \varphi_i)\}$  una famiglia di parametrizzazioni locali che orienta  $M$ . Consideriamo una parametrizzazione  $(D, \varphi) \in \mathcal{A}$ . Su  $\varphi(D)$  possiamo definire il campo vettoriale  $N$  ponendo

$$(3.24) \quad N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \quad \forall p \in \varphi(D),$$

dove

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = EG - F^2.$$

$N$  è un campo vettoriale definito su  $\varphi(D)$ , differenziabile, unitario e normale alla superficie  $M$ . Inoltre, poiché  $M = \bigcup_i \varphi_i(D_i)$ , è possibile definire  $N$  su tutta la superficie  $M$ . Proviamo ora che la definizione di  $N$  è ben posta, cioè non dipende dalla scelta di  $(\varphi, D)$ . Siano  $(D, \varphi, (u, v))$  e  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  due parametrizzazioni di  $\mathcal{A}$  con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) \neq \emptyset$ . Sia  $N$  il campo unitario normale definito per  $p \in \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  rispetto a  $(D, \varphi)$  e  $\bar{N}$  quello definito rispetto a  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$ . Allora,

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \quad \text{e} \quad \bar{N}(p) = \frac{\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}}{\|\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}\|}.$$

Dall'equazione (3.12), usando la matrice jacobiana  $J_c$  definita dalla (3.13), segue che

$$\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}} = \det(J_c) (\varphi_u \wedge \varphi_v),$$

e quindi

$$(3.25) \quad \bar{N}(p) = \frac{\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}}{\|\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}\|} = \frac{(\det(J_c) \varphi_u \wedge \varphi_v)}{|\det(J_c)| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \text{sign}(\det(J_c)) N(p).$$

Pertanto, tenendo conto che  $\mathcal{A}$  orienta  $M$ , si ha  $|\det(J_c)| = \det(J_c)$  e quindi

$$\bar{N}(p) = N(p) \quad \text{per ogni } p \in \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}).$$

Ora, essendo  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  differenziabili, dalla (3.24) segue  $N$  è differenziabile. Pertanto, esiste  $N$  campo vettoriale unitario differenziabile globalmente definito su  $M$  e normale alla stessa  $M$ .

Viceversa, sia  $N$  campo vettoriale unitario differenziabile globalmente definito su  $M$  e normale alla stessa  $M$ . Consideriamo una famiglia di parametrizzazioni locali  $\mathcal{A} = \{(D_i, \varphi_i)\}$  che ricopre  $M$ , con i domini  $D_i$  connessi. Sia  $(D, \varphi)$  un elemento di  $\mathcal{A}$ . Per ogni punto  $p = \varphi(u, v) \in \varphi(D)$ , risulta

$$f(p) := N(p) \cdot \left( \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \right)(p) = \pm 1.$$

Siccome la funzione  $f(p)$  è continua sul connesso  $\varphi(D)$ , allora  $f(p)$  deve essere costante e quindi, scambiando  $u$  con  $v$  se necessario, si ha

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(p).$$

Procedendo in questo modo con tutte le parametrizzazioni in  $\mathcal{A}$ , per ogni  $(D, \varphi), (\bar{D}, \bar{\varphi}) \in \mathcal{A}$  con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) \neq \emptyset$ , la matrice jacobiana  $J_c$  deve necessariamente avere  $\det > 0$ , altrimenti si avrebbe

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(p) = -\frac{\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}}{\|\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}\|}(p) = -N(p),$$

ovvero  $N(p) = 0$ , che è una contraddizione. Quindi la famiglia  $\mathcal{A}$  di parametrizzazioni, scambiando  $u$  con  $v$  in qualcuna di esse, soddisfa la condizione che definisce una superficie orientabile.  $\square$

Dal Teorema 3.74 segue che una superficie orientabile ha due orientazioni (definite da  $N$  e  $-N$ ). Osserviamo che se  $M$  non è orientabile, non esiste  $N$  globalmente, tuttavia localmente il campo vettoriale  $N$  si può sempre definire con la (3.24).

**Osservazione 3.75.** Le superfici connesse compatte orientabili sono tutte e sole: la sfera  $\mathbb{S}^2$ , la superficie torica  $T$  e le superfici somme connesse di  $\mathbb{S}^2$  con  $p$  tori ( $p \geq 1$ ), quest'ultime sono anche dette sfere con  $p$ -manici o  $p$ -tori.

**Osservazione 3.76.** Dalla dimostrazione del Teorema 3.74 segue che è sufficiente l'esistenza di un campo vettoriale continuo  $N$  per avere l'orientabilità della superficie, e tale campo vettoriale sarà poi di conseguenza differenziabile.

Non tutte le superfici sono orientabili. L'esempio più famoso è il seguente.

**Esempio 3.77. Il Nastro di Möebius (superficie non orientabile)**

Sia  $\gamma$  la circonferenza di centro  $O$  e raggio 2 del piano  $\pi_{xy}$ . Sia  $AB$  il segmento del piano  $\pi_{xz}$  definito da  $x = 2, y = 0, |z| \leq 1$ .  $C(2, 0, 0)$  è un punto di  $\gamma$  ed è il punto medio di  $AB$ . La superficie ottenuta sottoponendo il segmento  $AB$  a un movimento composto da una rotazione di  $C$  intorno all'asse  $z$  (lungo  $\gamma$ ) e contemporaneamente da una rotazione di  $AB$  intorno a  $C$  in modo tale che quando  $C$  ruota di un angolo  $v$ ,  $AB$  ruota intorno a  $C$  di un angolo  $v/2$ , è detta nastro di Möebius. Dopo una rotazione completa di  $C$  intorno all'asse  $z$ , il segmento  $AB$  è mandato in  $BA$ . Da questa costruzione, si ottiene una rappresentazione parametrica regolare locale data da

$$\begin{aligned} \varphi : D = ]-1, 1[ \times ]0, 2\pi[ &\rightarrow M, \\ (u, v) &\mapsto ((2 - u \sin(v/2)) \cos v, (2 - u \sin(v/2)) \sin v, u \cos(v/2)). \end{aligned}$$

Il nastro di Möebius è una superficie non orientabile. Intuitivamente, ci possiamo rendere conto della non orientabilità nel modo seguente. Se il nastro di Möebius fosse orientabile, allora dovrebbe esistere un campo unitario differenziabile  $N$  normale a  $M$ , e muovendo  $N$  lungo  $\gamma$  (supponiamo  $\gamma(0) = C = \gamma(1)$ ), si avrebbe (cf. Figura 7)

$$N_C = N_{\gamma(0)} = -N_{\gamma(1)} = -N_C \quad \text{e quindi } N_C = 0.$$

Ciò è una contraddizione in quanto  $N$  è unitario.

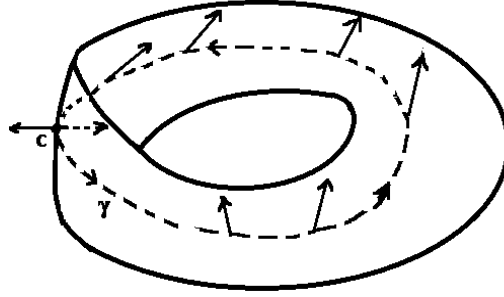


FIGURA 7. Il nastro di Möbius.

Un modo rigoroso per provare la non orientabilità del nastro di Möbius è il seguente. La parametrizzazione  $(D, \varphi)$  non ricopre tutta la superficie. Se consideriamo anche la parametrizzazione

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \bar{D} = ] - 1, 1[ \times ] \pi, 3\pi[ &\rightarrow M, \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto ((2 - \bar{u} \sin(\bar{v}/2)) \cos \bar{v}, (2 - \bar{u} \sin(\bar{v}/2)) \sin \bar{v}, \bar{u} \cos(\bar{v}/2)), \end{aligned}$$

allora  $\varphi(D) \cup \bar{\varphi}(\bar{D}) = M$ . Inoltre, l'intersezione  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  è costituita da due componenti connesse:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\varphi(u, v) : 0 < v < \pi\} = \{\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) : 2\pi < \bar{v} < 3\pi\}, \\ W_2 &= \{\varphi(u, v) : \pi < v < 2\pi\} = \{\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) : \pi < \bar{u} < 2\pi\}. \end{aligned}$$

I cambiamenti di coordinate sono dati da:

$$\begin{cases} \bar{u} = -u \\ \bar{v} = v + 2\pi \end{cases} \quad \text{in } W_1, \quad \begin{cases} \bar{u} = u \\ \bar{v} = v \end{cases} \quad \text{in } W_2.$$

Ne segue che:

$$J_c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in } W_1 \quad \text{e} \quad J_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in } W_2.$$

Ciò implica che la superficie non è orientabile. Infatti, se il nastro di Möbius fosse orientabile, dovrebbe esistere un campo  $N$  differenziabile di versori normali alla superficie. Scambiando  $u$  con  $v$  se necessario, si potrebbe assumere:

$$N(p) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

per ogni punto  $p \in \varphi(D)$ . Inoltre, si avrebbe:

$$N(p) = \pm \frac{\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}}{\|\bar{\varphi}_{\bar{u}} \wedge \bar{\varphi}_{\bar{v}}\|}$$

per ogni punto  $p \in \bar{\varphi}(\bar{D})$ , con segno costante in quanto  $\bar{D}$  connesso. D'altronde,  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) = W_1 \cup W_2$  e applicando la (3.25) a  $W_1$  e  $W_2$ , si avrebbero segni opposti per  $N$ , e quindi una contraddizione.

### Esempio 3.78. (Superfici di livello)

Ogni superficie di livello  $M : f(x, y, z) = c$ , con  $(\nabla f)_p \neq (0, 0, 0)$  per ogni  $p \in M$ , è orientabile. Infatti, nel corso della dimostrazione della Proposizione 3.52 abbiamo visto che per le superfici di livello, il gradiente  $\nabla f$  è un campo vettoriale su  $M$  ortogonale alla superficie  $M$ . Inoltre,  $\nabla f$  è differenziabile in quanto la  $f$  lo è. Pertanto,  $M$  è orientabile e

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

definisce un campo differenziabile unitario normale alla superficie  $M$ .

### Esempio 3.79. (Superficie sferica)

La sfera  $\mathbb{S}^2(r) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  è una superficie di livello con  $(\nabla f)_p = (2x, 2y, 2z)_p \neq (0, 0, 0)$  per ogni  $p \in \mathbb{S}^2$ . Pertanto,  $\mathbb{S}^2$  è orientabile e

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{r}(x, y, z), \text{ ossia } N_p = \frac{1}{r}\vec{p}.$$

### Esempio 3.80. (Cilindro circolare retto)

Il cilindro circolare retto  $M : x^2 + y^2 = r^2$  è una superficie di livello e quindi una superficie orientabile con

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{r}(x, y, 0).$$

### Esempio 3.81. (Superficie semplice)

Una superficie semplice  $M : z = g(x, y)$ , con  $g(x, y)$  differenziabile, è una superficie di livello e quindi una superficie orientabile con

$$N = \frac{(g_x, g_y, -1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}.$$

### Esempio 3.82. (Superficie di rotazione)

Sia  $M$  la superficie di rotazione considerata nell'Esempio 3.15. Verifichiamo che  $M$  è un esempio di superficie orientabile. Consideriamo le parametrizzazioni locali  $(D_1, \varphi_1)$ ,  $(D_2, \varphi_2)$ , dove

$$D_1 = ]a, b[ \times ]0, 2\pi[, \quad \varphi_1(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),$$

e

$$D_2 = ]a, b[ \times ]-\pi, \pi[, \quad \varphi_2(\bar{u}, \bar{v}) = (f(\bar{u})\cos \bar{v}, f(\bar{u})\sin \bar{v}, g(\bar{u})).$$

La matrice jacobiana del cambiamento di parametri  $(u, v) \mapsto (\bar{u} = u, \bar{v} = v - \pi)$  è l'identità. Pertanto,  $\mathcal{A} = \{(D_1, \varphi_1), (D_2, \varphi_2)\}$  è un atlante che orienta  $M$ .

**Osservazione 3.83.** Intuitivamente, superfici orientabili e non orientabili si distinguono come superfici a due facce (quelle orientabili) e superfici a una sola faccia (quelle non orientabili). Basti pensare alla sfera come superficie a due facce, e al nastro di Möebius come superficie a una sola faccia.

### 3.10. Struttura complessa e 2-forma d'area

Iniziamo questa sezione introducendo la nozione di *r-forma differenziale* su una superficie regolare, nozione già introdotta nel caso di  $\mathbb{R}^n$  (cf. Sezione 2.8).

Una 1-forma su una superficie regolare  $M$  è una corrispondenza  $\alpha$  che ad ogni  $p \in M$  associa un elemento  $\alpha_p \in T_p^*M$ . La 1-forma  $\alpha$  si dice *1-forma differenziale* se per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , la funzione

$$\alpha(X) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \alpha(X)(p) := \alpha_p(X_p),$$

è differenziabile. Equivalentemente,

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), X \mapsto \alpha(X), \text{ è } \mathcal{F}\text{-lineare,}$$

ovvero  $\alpha$  è un elemento di  $\Lambda^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ . In particolare, per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$ , il differenziale  $(df)_p$  definito dalla (3.16) è un elemento di  $T_p^*M$ . Quindi,  $df \in \Lambda^1(M)$ . Localmente, posto  $\partial_u = \varphi_u$  e  $\partial_v = \varphi_v$ , per ogni  $\alpha \in \Lambda^1(M)$  si ha

$$\alpha = a_1 du + a_2 dv,$$

dove  $a_1 = \alpha(\partial_u)$  e  $a_2 = \alpha(\partial_v)$  sono funzioni differenziabili definite in un aperto di  $M$ . Dunque,  $(du, dv)$  è base locale per  $\Lambda^1(M)$ , duale della base locale  $(\partial_u, \partial_v)$  di  $\mathfrak{X}(M)$ .

Una 2-forma su  $M$  è una corrispondenza  $\omega$  che ad ogni  $p \in M$  associa una applicazione bilineare antisimmetrica  $\omega_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ . La 2-forma  $\omega$  si dice *2-forma differenziale* se per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , la funzione

$$\omega(X, Y) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \omega(X, Y)(p) := \omega_p(X_p, Y_p),$$

è differenziabile. Equivalentemente,

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

è un'applicazione  $\mathcal{F}$ -bilineare antisimmetrica. In particolare, per ogni 2-forma  $\omega$  si ha  $\omega(X, X) = 0$ . Denotiamo con  $\Lambda^2(M)$  l'insieme di tutte le 2-forme differenziali su  $M$ . Si noti che in generale un'applicazione  $\mathcal{F}$ -bilineare,  $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ , è un tensore covariante (differenziabile) di ordine 2. Per ogni  $\alpha, \beta \in \Lambda^1(M)$ , si può definire il *prodotto esterno*

$$\alpha \wedge \beta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), (X, Y) \mapsto (\alpha \wedge \beta)(X, Y),$$

dove

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) := \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X).$$

Chiaramente  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^2(M)$  (si noti che con lo stesso simbolo  $\wedge$  viene indicato anche il prodotto vettoriale tra campi vettoriali). Localmente, per ogni 2-forma  $\omega \in \Lambda^2(M)$ , si ha

$$\omega = \omega_{12} du \wedge dv$$

dove  $\omega_{12} = \omega(\partial_u, \partial_v) = -\omega(\partial_v, \partial_u)$  è una funzione differenziabile definita in un aperto di  $M$ . Infatti,  $\omega_{11} = \omega(\partial_u, \partial_u) = 0$ ,  $\omega_{22} = \omega(\partial_v, \partial_v) = 0$  e la sola componente di  $\omega$  che può essere non nulla è  $\omega_{12}$ . Inoltre, si ha

$$(du \wedge dv)(\partial_u, \partial_v) = +1.$$

Quindi,  $du \wedge dv$  è base locale per  $\Lambda^2(M)$ . In modo analogo, uno potrebbe definire una  $r$ -forma differenziale per  $r > 2$ , ma chiaramente un'applicazione  $r$ -multilineare antisimmetrica su uno spazio vettoriale di dimensione  $n < r$  è nulla. Pertanto, una  $r$ -forma differenziale su una superficie regolare  $M$ , con  $r > 2$ , è sempre nulla.

**Teorema 3.84.** *Una superficie regolare  $M$  è orientabile se e solo se esiste una 2-forma  $\omega \in \Lambda^2(M)$  non nulla in ogni punto di  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $M$  una superficie orientabile e sia  $\mathcal{A} = \{(D_i, \varphi_i)\}$  una famiglia di parametrizzazioni locali che orienta  $M$ . Consideriamo una parametrizzazione  $(D, \varphi) \in \mathcal{A}$ . Su  $\varphi(D)$  possiamo definire la 2-forma differenziale non nulla

$$(3.26) \quad \omega = \|\partial_u \wedge \partial_v\| du \wedge dv = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

Inoltre, poiché  $M = \bigcup_i \varphi_i(D_i)$ , possiamo definire con la (3.26) una 2-forma  $\omega$  non nulla su tutta la superficie  $M$ . Proviamo che tale definizione di  $\omega$  è ben posta, cioè non dipende dalla scelta di  $(D, \varphi)$ . Siano  $(D, \varphi, (u, v))$  e  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  due elementi di  $\mathcal{A}$  con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) \neq \emptyset$ . Sia  $\omega$  la 2-forma differenziale definita su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  rispetto a  $(D, \varphi)$  e  $\bar{\omega}$  quella definita rispetto a  $(\bar{D}, \bar{\varphi})$ . Allora,

$$\omega = \|\partial_u \wedge \partial_v\| du \wedge dv \quad \text{e} \quad \bar{\omega} = \|\partial_{\bar{u}} \wedge \partial_{\bar{v}}\| d\bar{u} \wedge d\bar{v}.$$

Dall'equazione (3.12), usando la matrice jacobiana  $J_c$  definita dalla (3.13), si ha

$$\|\partial_{\bar{u}} \wedge \partial_{\bar{v}}\| = |\det(J_c)| \|\partial_u \wedge \partial_v\|,$$

e

$$du \wedge dv = (du \wedge dv)(\partial_{\bar{u}}, \partial_{\bar{v}})(d\bar{u} \wedge d\bar{v}) = \dots = \det(J_c) (d\bar{u} \wedge d\bar{v}).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \omega &= \|\partial_u \wedge \partial_v\| du \wedge dv = |\det(J_c)|^{-1} \|\partial_{\bar{u}} \wedge \partial_{\bar{v}}\| \det(J_c) d\bar{u} \wedge d\bar{v} \\ &= \text{sign}(\det(J_c)) \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Siccome  $M$  è orientabile, si ha  $|\det(J_c)| = \det(J_c)$  e quindi

$$\bar{\omega} = \omega \quad \text{su} \quad \varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}).$$

Ora, essendo  $du$  e  $dv$  differenziabili, dalla (3.26) segue  $\omega$  è differenziabile. Pertanto, esiste una 2-forma differenziale globalmente definita su  $M$  e non nulla.

Viceversa, sia  $\omega$  una 2-forma differenziale globalmente definita su  $M$  e non nulla in ogni punto di  $M$ . Consideriamo una famiglia di parametrizzazioni



locali  $\mathcal{A} = \{(D_i, \varphi_i)\}$  che ricopre  $M$ . Sia  $(D, \varphi)$  un elemento di  $\mathcal{A}$ . Su  $\varphi(D)$  la forma  $\omega$  è data da

$$\omega = f_1 du \wedge dv,$$

dove  $f_1$  è una funzione differenziabile su  $\varphi(D)$  e non nulla. Scambiando  $u$  con  $v$ , se necessario, possiamo assumere  $f_1 > 0$ . Procediamo allo stesso modo con tutte le parametrizzazioni in  $\mathcal{A}$ . Allora, se  $(D, \varphi, (u, v))$  e  $(\bar{D}, \bar{\varphi}, (\bar{u}, \bar{v}))$  sono due parametrizzazioni di  $\mathcal{A}$  con  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D}) \neq \emptyset$ , su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  abbiamo

$$\omega = f_1 du \wedge dv \quad \text{e} \quad \bar{\omega} = f_2 d\bar{u} \wedge d\bar{v},$$

dove  $f_1, f_2$  sono funzioni differenziabili positive e definite su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$ . D'altronde, su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  abbiamo

$$du \wedge dv = \det(J_c) (d\bar{u} \wedge d\bar{v}).$$

Di conseguenza, su  $\varphi(D) \cap \bar{\varphi}(\bar{D})$  si ha

$$f_2 = f_1 \det(J_c).$$

Pertanto, la matrice jacobiana  $J_c$  deve necessariamente avere  $\det > 0$ . Quindi la famiglia di parametrizzazioni  $\mathcal{A}$  soddisfa la condizione che definisce una superficie orientabile.  $\square$

**Definizione 3.85.** Una 2-forma  $\Omega \in \Lambda^2(M)$  non nulla in ogni punto di  $M$  si dice **2-forma d'area** per  $M$  se (localmente) esiste una base ortonormale  $E_1, E_2$  di  $\mathfrak{X}(M)$  tale che  $\Omega(E_1, E_2) = +1$ .

Il nome di 2-forma d'area è giustificato dalle seguenti considerazioni. Sia  $\Omega$  una 2-forma d'area. Per quanto detto in precedenza, localmente la 2-forma  $\Omega$  si esprime con

$$\Omega = \Omega_{12} du \wedge dv$$

dove  $\Omega_{12} = \Omega(\partial_u, \partial_v) = -\Omega(\partial_v, \partial_u)$ . Siccome  $\Omega$  è una 2-forma d'area, esiste  $(E_1, E_2)$  base (locale) ortonormale di campi vettoriali tale che  $\Omega(E_1, E_2) = 1$ . Poniamo,

$$\partial_u = a_{11}E_1 + a_{21}E_2, \quad \partial_v = a_{12}E_1 + a_{22}E_2, \quad A = (a_{ij}).$$

Allora,

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= \Omega(\partial_u, \partial_v) = \Omega(a_{11}E_1 + a_{21}E_2, a_{12}E_1 + a_{22}E_2) \\ &= a_{11}a_{22}\Omega(E_1, E_2) + a_{12}a_{21}\Omega(E_2, E_1) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \det A. \end{aligned}$$

D'altronde, posto  $\partial_1 = \partial_u, \partial_2 = \partial_v$  e  $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j$ , si ha

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \partial_i \cdot \partial_j = \left( \sum_k a_{ki} E_k \right) \cdot \left( \sum_h a_{hj} E_h \right) = \left( \sum_{kh} a_{ki} a_{hj} \delta_{kh} \right) \\ &= \left( \sum_h a_{hi} a_{hj} \right) = \left( \sum_h a_{ih}^T a_{hj} \right), \end{aligned}$$

e quindi  $\det(g_{ij}) = (\det A)^2$ , ovvero  $(\det A)^2 = EG - F^2$ . Pertanto,

$$\Omega = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv = \|\partial_u \wedge \partial_v\| du \wedge dv$$

che si può confrontare con l'integrando nella Definizione 3.70 di area.

**Definizione 3.86.** Una **struttura complessa** su una superficie regolare  $M$  è un endomorfismo  $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , quindi  $\mathcal{F}$ -lineare, tale che  $J^2 = -I$ .

Si dice anche che  $J$  è un tensore (differenziabile) di tipo  $(1, 1)$  su  $M$  tale che  $J^2 = -I$ . Nel seguito l'ortogonalità e l'antisimmetria di  $J$  sarà sempre riferita alla prima forma fondamentale. Più precisamente, un endomorfismo  $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  si dice **antisimmetrico** se

$$JX \cdot Y = -X \cdot JY;$$

$J$  si dice **ortogonale** se

$$JX \cdot JY = X \cdot Y$$

(in tal caso si dice anche che il prodotto scalare è **hermitiano** rispetto a  $J$ ).

**Proposizione 3.87.** Siano  $M$  una superficie regolare e  $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  un endomorfismo. Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti:

- 1)  $J$  è una struttura complessa ortogonale;
- 2)  $J$  è una struttura complessa antisimmetrica;
- 3)  $J$  è un endomorfismo ortogonale e antisimmetrico.

**DIMOSTRAZIONE.** 1)  $\implies$  2). Sia  $J$  una struttura complessa ( $J^2 = -I$ ) ortogonale ( $JX \cdot JY = X \cdot Y$ ). Allora,  $J$  è antisimmetrica in quanto

$$JX \cdot Y = J^2X \cdot JY = -X \cdot JY.$$

2)  $\implies$  3). Sia  $J$  una struttura complessa ( $J^2 = -I$ ) antisimmetrica ( $JX \cdot Y = -X \cdot JY$ ). Allora,  $J$  è ortogonale in quanto

$$JX \cdot JY = -J^2X \cdot Y = X \cdot Y.$$

3)  $\implies$  1). Sia  $J$  un endomorfismo ortogonale ( $JX \cdot JY = X \cdot Y$ ) e antisimmetrico ( $JX \cdot Y = -X \cdot JY$ ). Allora,  $J$  è una struttura complessa. Infatti, fissato  $X$ , per ogni  $Y$

$$J^2X \cdot Y = -JX \cdot JY = -X \cdot Y$$

implica  $J^2X = -X$ , e quindi  $J^2 = -I$ . □

**Teorema 3.88.** Sia  $M$  una superficie regolare. Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti:

- 1)  $M$  è orientabile;
- 2) esiste  $J$  struttura complessa ortogonale su  $M$ ;
- 3) esiste  $\Omega$  2-forma d'area per  $M$ .

**DIMOSTRAZIONE.** 1)  $\implies$  2). Sia  $N$  un fissato campo vettoriale unitario normale che orienta  $M$  (cf. Teorema 3.74). Per ogni fissato  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , indichiamo con  $JX$  il campo vettoriale definito da

$$JX \cdot Y = \text{vol}(X, Y, N) = X \wedge Y \cdot N = N \wedge X \cdot Y \quad \text{per ogni } Y \in \mathfrak{X}(M),$$

quindi

$$JX = N \wedge X.$$

In particolare,  $JX$  è tangente alla superficie in quanto  $JX \cdot N = N \wedge X \cdot N = 0$ , ed è differenziabile in quanto  $N$  e  $X$  sono differenziabili. Dalla definizione di  $J$  segue facilmente che  $J(X_1 + X_2) = JX_1 + JX_2$  e  $J(fX) = fJX$ . Quindi, abbiamo un endomorfismo  $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  che soddisfa

$$JX \cdot Y = N \wedge X \cdot Y = -N \wedge Y \cdot X = -JY \cdot X = -X \cdot JY,$$

quindi  $J$  è un endomorfismo *antisimmetrico*. Inoltre, sempre dalla definizione di prodotto vettoriale segue che  $\|JX\| = \|X\|$ . Di conseguenza,  $\|J(X+Y)\|^2 = \|X+Y\|^2$  implica che

$$JX \cdot JY = X \cdot Y,$$

ovvero  $J$  è ortogonale. Pertanto, per la Proposizione 3.87,  $J$  è una struttura complessa. Naturalmente, se consideriamo l'orientazione definita da  $-N$ , la struttura complessa corrispondente è  $-J$ .

2)  $\implies$  3). Sia  $J$  una struttura complessa ortogonale. La forma bilineare antisimmetrica  $\Omega$  definita da

$$\Omega(X, Y) = JX \cdot Y$$

è una 2-forma non nulla in ogni punto di  $M$ . In particolare, rispetto a una base (locale) ortonormale  $(E_1, E_2 = JE_1)$  si ha

$$\Omega(E_1, E_2) = JE_1 \cdot E_2 = JE_1 \cdot JE_1 = E_1 \cdot E_1 = +1.$$

Quindi,  $\Omega$  è una 2-forma d'area per la superficie  $M$ .

3)  $\implies$  1). Siccome una 2-forma d'area è una 2-forma non nulla, l'implicazione segue dal Teorema 3.84.  $\square$

**Osservazione 3.89.** Una assegnata 2-forma d'area  $\Omega$  determina in modo intrinseco una struttura complessa ortogonale  $J$  su  $M$ . Basta definire l'endomorfismo  $J$  con la relazione

$$JX \cdot Y = \Omega(X, Y).$$

Se  $E_1, E_2$  è una base ortonormale locale positiva di campi vettoriali, ovvero  $\Omega(E_1, E_2) = +1$ , allora

$$JE_1 \cdot E_1 = \Omega(E_1, E_1) = 0 \text{ e } JE_1 \cdot E_2 = \Omega(E_1, E_2) = +1$$

implicano  $JE_1 = E_2$ . Analogamente,  $JE_2 = -E_1$ . Pertanto,  $J$  è una struttura complessa, ovvero  $J^2 = -I$ . Inoltre, è facile vedere che  $J$  è una trasformazione ortogonale:

$$JX \cdot JY = \Omega(X, JY) = -\Omega(JY, X) = -J^2Y \cdot X = Y \cdot X.$$

Naturalmente, se  $N$  è un campo vettoriale unitario normale che orienta la superficie  $M$ , la corrispondente 2-forma d'area  $\Omega$  è definita da

$$\Omega(X, Y) = JX \cdot Y = N \wedge X \cdot Y = X \wedge Y \cdot N.$$

**Osservazione 3.90.** Sia  $\Omega$  una 2-forma d'area su una superficie regolare orientabile  $M$ . Allora, per ogni 2-forma  $F \in \Lambda^2(M)$  si ha

$$F = f\Omega$$

con  $f$  funzione differenziabile su  $M$ . Più precisamente, rispetto a una fissata parametrizzazione locale  $(D, \varphi, (u, v))$  abbiamo  $F = F_{12} du \wedge dv$ ,  $\Omega = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$  e quindi  $f = F_{12}/\sqrt{EG - F^2}$ .

**Esercizio 3.91.** Sia  $\mathbb{S}^2$  la sfera unitaria di centro l'origine. Indichiamo con  $J$  la struttura complessa corrispondente a una fissata orientazione di  $\mathbb{S}^2$ . Siano  $X, Y$  i campi vettoriali definiti da  $X_p = (0, -z, y)$ ,  $Y_p = (-y, x, 0)$  per ogni  $p = (x, y, z) \in M$ . Dopo aver verificato che  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$  ed esplicitato  $JX$  e  $JY$ , si verifichi che  $JX \cdot JY = X \cdot Y$ .

*Soluzione.* Si considera su  $\mathbb{S}^2$  l'orientazione definita dal campo normale  $N_p = \vec{p} = (x, y, z)_p$ . Dall'Osservazione 3.58 segue che  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ . Infine,

$$JX = N \wedge X = (y^2 + z^2, -xy, -xz) \text{ e } JY = N \wedge Y = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$$

e

$$JX \cdot JY = -xz(y^2 + z^2) + xy^2z - x^3z - xy^2z = -xz(1 - x^2) - x^3z = -xz = X \cdot Y.$$

**Osservazione 3.92.** Un importante fatto da osservare è che del Teorema 3.88 si può dare una dimostrazione intrinseca, ossia senza fare uso del Teorema 3.74, del campo normale  $N$  e del prodotto vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ . In effetti, si può procedere nel modo seguente. Assumiamo  $M$  orientabile (si noti che la Definizione 3.73 è intrinseca). Dalla dimostrazione del Teorema 3.84 (si noti che tale Teorema è di natura intrinseca), segue che ponendo localmente

$$\Omega = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv,$$

si ottiene una 2-forma  $\Omega$  non nulla definita globalmente su tutta la superficie. Verifichiamo che tale 2-forma è una 2-forma d'area. Sia  $E_1, E_2$  una base ortonormale locale,  $E_i = \sum_k b_{ki} \partial_k$ , dove  $B = (b_{ki})$  è la matrice del cambiamento di base che possiamo assumere (scambiando, se necessario,  $E_1$  con  $E_2$ ) abbia  $\det B > 0$ . Indicata con  $(g_{ij})$  la matrice della prima forma fondamentale, un semplice calcolo prova che

$$B^T(g_{ij})B = I, \quad \text{e quindi} \quad (\det B)\sqrt{EG - F^2} = +1.$$

Allora,

$$\Omega(E_1, E_2) = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv(E_1, E_2) = \sqrt{EG - F^2} \det B = +1.$$

Pertanto,  $M$  orientabile implica l'esistenza di una 2-forma d'area. Poi, l'esistenza di una 2-forma d'area  $\Omega$  implica l'esistenza di una struttura complessa ortogonale  $J$ , basta definire  $JX$  con  $JX \cdot Y = \Omega(X, Y)$  (cf. Osservazione 3.89). Infine, se  $J$  è una struttura complessa ortogonale (e quindi antisimmetrica), ponendo  $\Omega(X, Y) = JX \cdot Y$  si ottiene una 2-forma non nulla e quindi, applicando il Teorema 3.84,  $M$  è orientabile.