Prefazione

Queste note riflettono, in una versione molto ampliata, gli argomenti del corso di Geometria III svolto negli ultimi cinque anni accademici presso il corso di Laurea in Matematica dell'Universitá del Salento (Lecce). Lo scopo é quello di dare un'introduzione allo studio delle geometria differenziale classica delle curve e delle superfici dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Un importante ruolo, per meglio capire i concetti introdotti, é svolto dai numerosi esempi (ed esercizi) che sono stati scelti con particolare attenzione. Data la natura degli argomenti trattati, queste note sono adatte oltre che per gli studenti di Matematica anche per quelli di Fisica. Inoltre, alcuni argomenti potrebbero essere inseriti in un corso della Laurea Magistrale. Riguardo ai prerequisiti necessari per la comprensione del contenuto di questo quaderno, si richiede una buona conoscenza dell'algebra lineare e dell'analisi reale a piú variabili, inoltre si richiedono le conoscenze di base della teoria delle equazioni differenziali ordinarie e della topologia generale.

Il Capitolo 1 é dedicato ad alcuni aspetti del calcolo differenziale nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Nello studio della geometria differenziale delle curve di $\mathbb{R}^3$ (Capitolo 2) un ruolo fondamentale é svolto dal riferimento di Frenet e quindi dalle funzioni curvatura e torsione, tali funzioni determinano la "forma"della curva in $\mathbb{R}^3$. Nello stesso capitolo, un'attenzione particolare é rivolta, vista la loro importanza anche in Fisica e non solo (cf., ad esempio, [**2**]–[**6**]), alle eliche cilindriche (dette anche curve di Lancret) e alle curve magnetiche di $\mathbb{R}^3$.

Nello studio delle superfici, si é cercato di enfatizzare in modo particolare le differenze tra geometria intrinseca e geometria estrinseca. Nel Capitolo 3 vengono introdotti gli strumenti e i concetti di base sulle superfici regolari, tra questi spicca, per importanza, la prima forma fondamentale la quale gioca un ruolo fondamentale per la geometria intrinseca di una superficie.

Il Capitolo 4 é dedicato al concetto di curvatura su una superficie regolare. Nel caso di una curva $\gamma(s)$, s ascissa curvilinea, la curvatura é definita come la lunghezza del vettore accelerazione $\ddot{\gamma}(s)$. Nel caso di una superficie, la situazione é ovviamente piú articolata, basti pensare che una superficie puó curvarsi lungo piú direzioni (quelle che determinano il piano tangente) e in modo diverso. L'operatore forma, che é definito come la variazione del campo normale lungo le diverse direzioni del piano tangente, e quindi studia la variazione dello stesso piano tangente, é lo strumento tecnico che permette di definire le curvature per una superficie.

Nel Capitolo 5 studiamo principalmente proprietá e concetti di natura intrinseca di una superficie regolare, ossia proprietá e concetti che dipendono soltanto dalla prima forma fondamentale e quindi sono invarianti per isometrie. Ad esempio, sono concetti di natura intrinseca: la distanza intrinseca, la derivata covariante (di Levi-Civita), curve geodetiche e curvatura gaussiana (Teorema egregium di Gauss). Proprietá che dipendono dall'operatore forma, ovvero dalla seconda forma fondamentale, e quindi dalla loro "forma" in $\mathbb{R}^3$, si dicono proprietá estrinseche. Il capitolo si chiude con una breve presentazione delle curve magnetiche su superfici regolari orientabili. Dal punto di vista dei sistemi dinamici, una geodetica corrisponde alla traiettoria di una particella che si muove senza l'azione di un campo magnetico. In questo contesto, le curve magnetiche generalizzano le curve geodetiche.

Nel Capitolo 6 si introducono i domini riemanniani (D, g), dove D é un dominio di $\mathbb{R}^2$ e g é una metrica riemanniana su D, ovvero una matrice simmetrica definita positiva di ordine 2 i cui coefficienti sono funzioni differenziabili su D. Quindi, si studiano isometrie e geodetiche di modelli di geometria iperbolica come esempi di domini riemanniani.

Nel Capitolo 7 diamo una presentazione del Teorema di Gauss-Bonnet nel caso delle superfici connesse compatte di $\mathbb{R}^3$. Il Teorema di Gauss-Bonnet, il piú elegante teorema di geometria differenziale globale, evidenzia un sorprendente legame tra due nozioni a priori molto distanti tra loro: la caratteristica di Eulero-Poicaré (invariante topologico) e la curvatura gaussiana (invariante metrico).

Nel Capitolo 8 viene data una presentazione "elementare" del Teorema di Lancret sulla sfera $\mathbb{S}^3$, come una estensione del classico Teorema di Lancret sulle curve (studiato nel Capitolo 2).

Ulteriori approfondimenti, su quasi tutti gli argomenti trattati in questo quaderno, si possono trovare sui testi classici [**9**], [**17**], [**20**]. Per approfondimenti su curve magnetiche e curve di Lancret generalizzate si rinvia agli articoli riportati in bibliografia. Infine, per uno studio della geometria differenziale di curve e superfici con l'aiuto del programma di manipolazione simbolica *Mathematica* si consiglia [**7**].

Guagnano, 1 Luglio 2017

Domenico Perrone

Dipartimento di Matematica e Fisica "E. de Giorgi"
Universitá del Salento, Lecce, Italy
domenico.perrone@unisalento.it