

Capitolo 1

Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dei numeri complessi

In questo capitolo richiamiamo brevemente i numeri complessi, già noti da insegnamenti precedenti, con l'aggiunta di alcuni approfondimenti.

1.1 Numeri complessi: richiami e complementi

Consideriamo \mathbb{R}^2 munito della struttura di spazio vettoriale euclideo, con prodotto scalare che induce la distanza euclidea.

Su tale spazio vettoriale è definita l'operazione di somma:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

e $(\mathbb{R}^2, +)$ è un gruppo abeliano. Su \mathbb{R}^2 definiamo anche il prodotto interno:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1); \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano e \cdot è distributivo rispetto a $+$: in definitiva $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un campo.

Definizione 1.1.1 (campo dei numeri complessi). Il campo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è detto *campo dei numeri complessi* e si indica con $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Gli elementi di \mathbb{C} sono detti *numeri complessi*.

Talvolta \mathbb{C} si dice piano complesso. In maniera naturale, si identifica \mathbb{R} con l'insieme delle coppie $(x, 0)$ (cioè $(x, 0) \equiv x \in \mathbb{R}$). In questo modo, come vedremo in seguito, \mathbb{C} risulta essere la chiusura algebrica di \mathbb{R} .

Definizione 1.1.2 (unità immaginaria). Si dice *unità immaginaria* i la coppia $(0, 1)$.

Tale numero complesso gode della proprietà $i^2 = -1$; infatti, per come è definito il prodotto in \mathbb{C} :

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$$

Come accennato in precedenza, \mathbb{C} è la chiusura algebrica di \mathbb{R} , cioè vale il seguente:

Teorema 1.1.3 (fondamentale dell'Algebra). *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$ ha n radici complesse, contate con la loro molteplicità.*

Osservazione 1.1.4 (rappresentazione dei numeri complessi). Oltre che come coppia ordinata, un numero complesso $z = (x, y)$ si può rappresentare in altri tre modi:

- *Forma algebrica.* Ricordando l'identificazione di \mathbb{R} con l'asse x del piano complesso si può scrivere:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy \quad (1.1)$$

In questo caso si dice che z è espresso in *forma algebrica*. Tale rappresentazione è particolarmente utile per eseguire addizioni e sottrazioni; x e y sono dette rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* di z e si scrive:

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

Il modulo di z è definito da:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- *Forma trigonometrica.* Sia $z \neq 0$ ed esprimiamo la coppia (x, y) nelle coordinate polari (ρ, ϑ) :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nella (1.1) otteniamo:

$$z = \rho \cos \vartheta + i(\rho \sin \vartheta) = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \quad (1.2)$$

In questo caso si dice che z è espresso in *forma trigonometrica*. Il parametro $\rho \geq 0$ si dice *modulo* di z ; il parametro $\vartheta \in \mathbb{R}$ si dice *argomento* di z . Osserviamo che, in questo modo, la determinazione di ϑ non è univoca (la differenza tra due diversi valori è un multiplo intero di 2π); tra questi indicheremo con $\text{Arg}(z)$ l'*argomento principale* di z , appartenente all'intervallo $]-\pi, \pi]$.

In questo modo rendiamo univoca la rappresentazione trigonometrica, ma perdiamo la continuità di $\text{Arg}(z)$ lungo \mathbb{R}_- , il semiasse negativo delle x . Infatti, per $\text{Re}(z) < 0$, si ha:

$$\lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^+} \text{Arg}(z) = \pi, \quad \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^-} \text{Arg}(z) = -\pi.$$

Se scegliamo $\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$ perdiamo la continuità dell'argomento principale di z lungo \mathbb{R}_+ , il semiasse positivo delle x .

- *Forma esponenziale*. Per prima cosa definiamo:

$$e^{i\vartheta} := \cos \vartheta + i \sin \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

Sostituendo in (1.2) otteniamo la cosiddetta *forma esponenziale* di z :

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho e^{i\vartheta} \quad (1.3)$$

Tale rappresentazione è particolarmente utile quando si eseguono prodotti tra numeri complessi.

Definizione 1.1.5 (coniugato di un numero complesso). Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$; definiamo *coniugato* di z il numero complesso:

- in forma algebrica:

$$\bar{z} := x - iy,$$

- in forma trigonometrica:

$$\bar{z} = \rho(\cos \vartheta - i \sin \vartheta)$$

- in forma esponenziale:

$$\bar{z} = \rho e^{-i\vartheta},$$

dove abbiamo utilizzato per z le espressioni (1.2) e (1.3). L'operatore $\bar{\cdot}$ è detto *coniugio* e gode delle seguenti proprietà:

- (i) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
- (ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R} : \bar{x} = x$.

Per le prime due proprietà, il coniugio è un automorfismo di \mathbb{C} ; per la terza proprietà, tutti e soli i punti fissi di questo automorfismo sono i numeri reali. Osserviamo, infine, che $|\bar{z}| = |z|$.

Esaminiamo ora un altro aspetto dei numeri complessi. \mathbb{R} è un campo ordinato, mentre su \mathbb{C} non è possibile definire alcuna relazione d'ordine compatibile con le operazioni interne ($i^2 = -1$). Pertanto, se in \mathbb{R} si definiscono i concetti di $+\infty$ e $-\infty$, in \mathbb{C} non si possono introdurre nozioni del genere.

Definizione 1.1.6 (infinito complesso). Definiamo *infinito complesso* (simbolo ∞) l'unico punto con argomento indeterminato e modulo uguale a $+\infty$. L'insieme $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ si dice *campo complesso ampliato*.

Un intorno di ∞ in $\overline{\mathbb{C}}$ è il complementare di un qualsiasi disco di raggio $R > 0$ centrato nell'origine.

Osserviamo che, se $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con A non limitato:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l \in \overline{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = l \in \overline{\mathbb{C}}$$

L'introduzione dell'infinito complesso trova la adeguata rappresentazione geometrica che illustriamo di seguito. Consideriamo ora la sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ di equazione:

$$S^2 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

Sia $N = (0, 0, 1)$ il cosiddetto polo nord di S^2 . Per ogni punto $P = (\xi, \eta, \zeta) \in S^2 \setminus \{N\}$, è ben definita la retta \overline{NP} , che incontra il piano $\zeta = 0$ in un unico punto. Identificando quest'ultimo piano con il piano complesso, è ben posta la seguente definizione.

Definizione 1.1.7 (proiezione stereografica). Sia $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sfera unitaria di centro l'origine e N il suo polo nord. L'applicazione:

$$\begin{aligned} \phi : S^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ P &\mapsto \overline{NP} \cap \mathbb{C} \end{aligned}$$

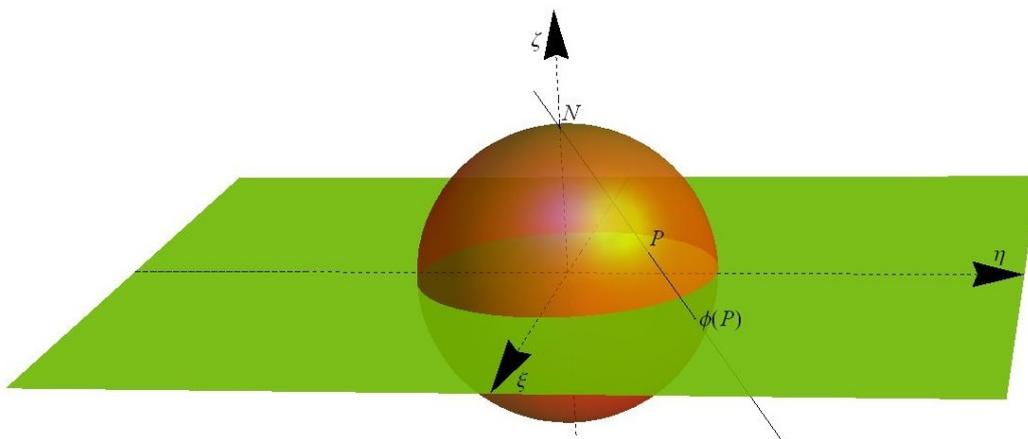


Figura 1.1: Proiezione stereografica della sfera S^2 sul piano complesso \mathbb{C} .

si dice *proiezione stereografica* della sfera S^2 sul piano complesso \mathbb{C} . Tale funzione stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $S^2 \setminus \{N\}$ e \mathbb{C} .

Si può estendere la proiezione stereografica a tutta la sfera, definendo:

$$\bar{\phi} : S^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, \quad P \mapsto \begin{cases} \overline{NP} \cap \mathbb{C}, & P \neq N \\ \infty, & P = N \end{cases}$$

Tale applicazione stabilisce una corrispondenza biunivoca tra S^2 e $\bar{\mathbb{C}}$.

Osservazione 1.1.8 (formula di De Moivre). Consideriamo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, in forma trigonometrica:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1), \quad z_2 = \rho_2 (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$$

Allora, applicando le formule di prostaferesi, si ha:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)]$$

Naturalmente la precedente espressione si può iterare a n fattori z_1, \dots, z_n ; in particolare, se $z_1 = \dots = z_n = z$ otteniamo la seguente *formula di De Moivre*:

$$z^n = \rho^n [\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)] = \rho^n e^{in\vartheta} \quad (1.4)$$

Osservazione 1.1.9 (formule di Eulero). La formula di De Moivre si estende in modo naturale anche agli esponenti interi relativi, ricordando che:

$$e^{-i\vartheta} = \cos \vartheta - i \sin \vartheta, \quad (1.5)$$

dove abbiamo sfruttato:

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \quad (1.6)$$

applicata a $-i\vartheta$ tenendo conto che le funzioni coseno e seno sono rispettivamente pari e dispari.

Ora, sommando (1.5) e (1.6) si ottiene

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2 \cos \vartheta$$

da cui

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \quad (1.7)$$

Invece, sottraendo (1.5) da (1.6) si ha

$$e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} = 2i \sin \vartheta$$

da cui

$$\sin \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \quad (1.8)$$

(1.7) e (1.8) sono dette *formule di Eulero* rispettivamente per il coseno e per il seno.

Le formule appena introdotte hanno numerose applicazioni.

1. Calcoliamo

$$\int \cos^3 y \, dy.$$

Per (1.7) risulta:

$$\begin{aligned} \cos^3 y &= \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3iy} + 3e^{2iy}e^{-iy} + 3e^{iy}e^{-2iy} + e^{-3iy}) = \\ &= \frac{1}{8} [(e^{3iy} + e^{-3iy}) + 3(e^{iy} + e^{-iy})] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{e^{i(3y)} + e^{-i(3y)}}{2} \right) + 3 \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4} (\cos 3y + 3 \cos y). \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 y \, dy &= \frac{1}{4} \int (\cos 3y + 3 \cos y) \, dy = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\sin 3y}{3} + 3 \sin y \right) + c \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2. Calcoliamo

$$\int \sin^5 y \, dy.$$

Per (1.8) risulta:

$$\begin{aligned} \sin^5 y &= \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \right)^5 = \frac{1}{32i} (e^{5iy} - 5e^{3iy} + 10e^{iy} - 10e^{-iy} + 5e^{-3iy} + \\ &\quad - e^{-5iy}) = \\ &= \frac{1}{16} \left[\left(\frac{e^{i(5y)} - e^{-i(5y)}}{2i} \right) - 5 \left(\frac{e^{i(3y)} - e^{-i(3y)}}{2i} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 10 \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{16} (\sin 5y - 5 \sin 3y + 10 \sin y). \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \int \sin^5 y \, dy &= \frac{1}{16} \int (\sin 5y - 5 \sin 3y + 10 \sin y) \, dy = \\ &= -\frac{\cos 5y}{80} + \frac{5 \cos 3y}{48} - \frac{5 \cos y}{8} + c \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Definizione 1.1.10 (Esponenziale complesso).

Sia $z = x + iy$; definiamo *esponenziale in base e di z* :

$$e^z := e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Fondamentali proprietà:

- $|e^z| = e^x$
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
- $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$, cioè la funzione esponenziale in \mathbb{C} è periodica di periodo $2\pi i$ e assume tutti i valori complessi tranne lo zero.

1.2 Radici algebriche, logaritmi naturali in \mathbb{C} e potenza ad esponente complesso.

Polidromia e superficie di Riemann

Definizione 1.2.1 (radice algebrica n -esima di un numero complesso). Siano $n \in \mathbb{N}, n > 1$ e $z \in \mathbb{C}$. Consideriamo l'equazione nell'incognita w :

$$w^n = z \quad (1.9)$$

Diciamo che w è una *radice algebrica n -esima di z* (e scriviamo $w = \sqrt[n]{z}$) se è soluzione di (1.9).

Osserviamo che se $z = 0$ allora la (1.9) ha solo la soluzione $w = 0$. Se $z \neq 0$, per risolvere (1.9), siano:

$$z = |z|e^{i\vartheta}, \quad w = |w|e^{i\eta}$$

Applicando la formula di De Moivre (1.4), l'equazione (1.9) diventa:

$$|w|^n e^{in\eta} = |z|e^{i\vartheta},$$

dando luogo al sistema:

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\eta = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pertanto:

$$|w| = |z|^{\frac{1}{n}}, \quad \eta = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

dove $|z|^{\frac{1}{n}}$ è la radice aritmetica n -esima di $|z|$.

Poniamo:

$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.10)$$

Osservazione 1.2.2 (polidromia della radice n -esima). La funzione radice algebrica n -esima

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} &\rightarrow 2^{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \left\{ w_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

è *polidroma*, cioè ad ogni numero complesso associa un insieme.

Osserviamo, ancora, che le determinazioni distinte w_k di $\sqrt[n]{z}$ non sono infinite; infatti:

$$\begin{aligned} w_{k_1} = w_{k_2} &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : \frac{\vartheta + 2k_1\pi}{n} - \frac{\vartheta + 2k_2\pi}{n} = 2h\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : k_1 - k_2 = hn. \end{aligned}$$

Ne segue che le radici algebriche n -esime distinte di $z \neq 0$ sono esattamente n , e si ottengono attribuendo a k i valori $0, \dots, n-1$.

Osservazione 1.2.3 (rappresentazione geometrica delle radici). Per rappresentare le radici n -esime di un numero complesso z osserviamo, da (1.10), che le w_k hanno lo stesso modulo ($|z|^{\frac{1}{n}}$), perciò appartengono tutte a $\partial B_{|z|^{\frac{1}{n}}}(0)$. Ora, le n distinte w_k sono individuate dagli angoli:

$$\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Allora w_{k+1} si determina a partire da w_k , percorrendo, in senso antiorario, su $\partial B_{|z|^{\frac{1}{n}}}(0)$ un arco di ampiezza $\frac{2\pi}{n}$. Dunque i punti w_k sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in $\partial B_{|z|^{\frac{1}{n}}}(0)$. In figura sono riportate le radici algebriche quarte di -4 in campo complesso.

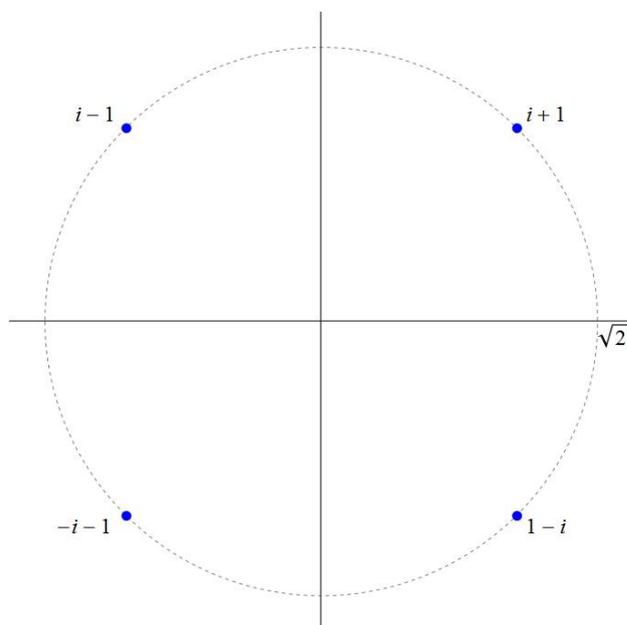


Figura 1.2: Radici algebriche quarte di -4

Per dare l'idea di come si costruisce la superficie di Riemann per $\sqrt[n]{z}$, consideriamo in particolare le radici quadrate algebriche distinte di $z = |z|e^{i\vartheta}$:

$$w_0 = |z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\vartheta}{2}}, \quad w_1 = |z|^{\frac{1}{2}}e^{i(\frac{\vartheta}{2}+\pi)} = -w_0$$

Calcoliamo, per $Re(z) < 0$, i seguenti limiti:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \pi^-} w_0 = |z|^{\frac{1}{2}} \lim_{\vartheta \rightarrow \pi^-} e^{i\frac{\vartheta}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}}i \quad (1.11)$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow -\pi^+} w_0 = |z|^{\frac{1}{2}} \lim_{\vartheta \rightarrow -\pi^+} e^{i\frac{\vartheta}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -|z|^{\frac{1}{2}}i \quad (1.12)$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \pi^-} w_1 = |z|^{\frac{1}{2}} \lim_{\vartheta \rightarrow \pi^-} e^{i(\frac{\vartheta}{2}+\pi)} = |z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -|z|^{\frac{1}{2}}i \quad (1.13)$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow -\pi^+} w_1 = |z|^{\frac{1}{2}} \lim_{\vartheta \rightarrow -\pi^+} e^{i(\frac{\vartheta}{2}+\pi)} = |z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}}i \quad (1.14)$$

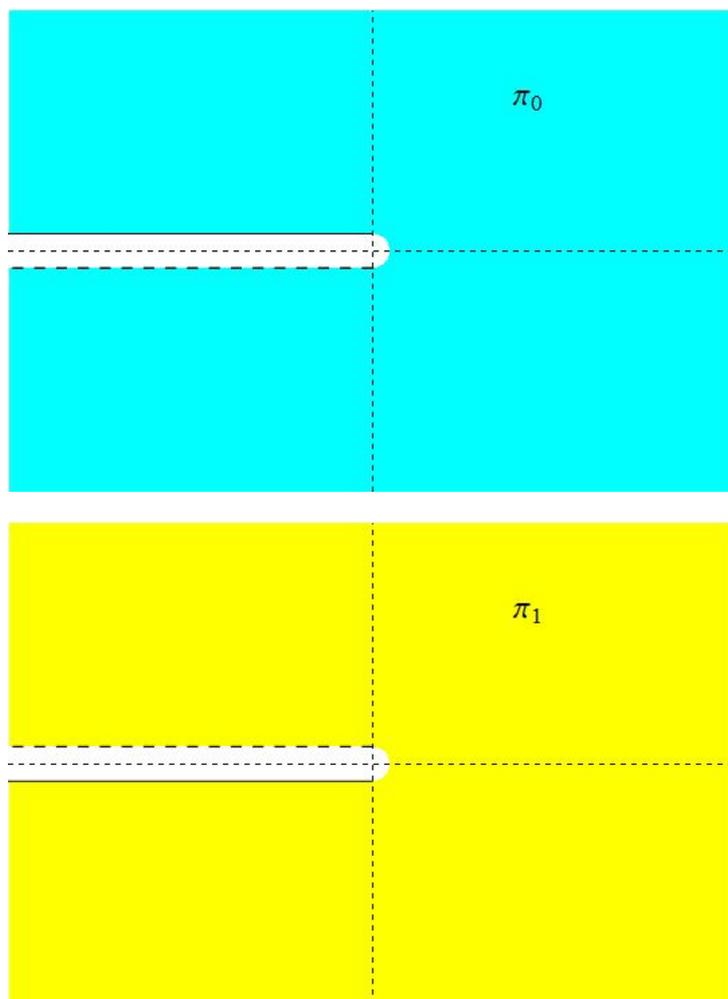
Osserviamo che:

- (1.11)=(1.14), cioè facendo crescere ϑ fino a π , w_0 tende allo stesso limite a cui tende w_1 quando ϑ decresce a $-\pi$, quindi w_0 e w_1 si saldano con continuità sul semiasse reale negativo;
- (1.13)=(1.12), cioè facendo crescere ϑ fino a π , w_1 tende allo stesso limite a cui tende w_0 quando ϑ decresce a $-\pi$, quindi w_1 e w_0 si saldano con continuità sul semiasse reale negativo.

Nelle due figure seguenti (che rappresentano i piani complessi π_0 e π_1 , collocati uno sopra l'altro, su cui è stato eseguito un taglio lungo ciascuna semiasse reale negativo) sono evidenziati i limiti uguali di cui sopra con il medesimo tratteggio.

Definizione 1.2.4 (superficie di Riemann a 2 fogli). Considerati π_0 e π_1 , due piani complessi tagliati lungo il semiasse negativo delle x , uno relativo a w_0 e l'altro a w_1 , la superficie a due fogli ottenuta raccordando π_0 e π_1 lungo i 'tagli' in modo tale da avere la continuità della radice quadrata in funzione di ϑ si chiama *superficie di Riemann di \sqrt{z}* .

Girando intorno al punto 0, si passa da w_0 a w_1 con continuità. Per questo motivo il punto 0 viene chiamato *punto di diramazione* della funzione polidroma \sqrt{z} .



Definizione 1.2.5 (superficie di Riemann a n fogli). Nel caso di radici algebriche n -esime, si itera il procedimento agli n piani tagliati relativi alle n radici distinte, definendo la *superficie di Riemann a n fogli*.

Un altro esempio notevole di applicazione polidroma è la funzione logaritmo in campo complesso.

Definizione 1.2.6 (logaritmo naturale di un numero complesso). Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideriamo l'equazione nell'incognita w :

$$e^w = z \tag{1.15}$$

Diciamo che w è *logaritmo naturale di z* (e scriviamo $w = \log z$) se w è soluzione di (1.15).

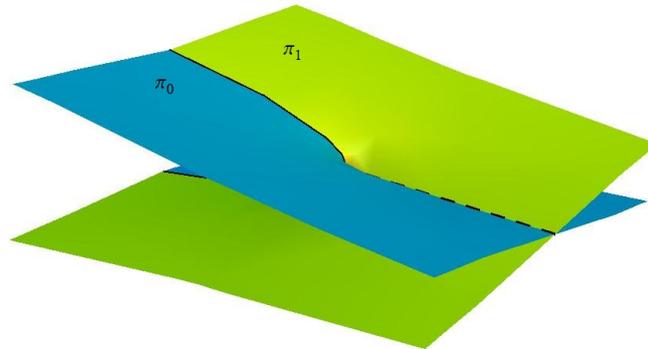


Figura 1.3: Superficie di Riemann a due fogli. Le linee continue rappresentano i raccordi tra π_0 e π_1 ; la linea tratteggiata è di autointersezione

Per risolvere (1.15) esprimiamo z in forma trigonometrica e w in forma algebrica:

$$z = |z|e^{i\vartheta}, \quad w = u + iv$$

Ora, esplicitando il primo membro:

$$e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv},$$

l'equazione (1.15) dà luogo al sistema:

$$\begin{cases} e^u = |z| \\ v = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pertanto:

$$u = \log |z|, \quad v = \vartheta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

In definitiva scriviamo:

$$w_k = \log |z| + i(\vartheta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.16}$$

Osservazione 1.2.7 (polidromia del logaritmo). La funzione logaritmo

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow 2^{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \{w_k = \log |z| + i(\vartheta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

è *polidroma*; le determinazioni w_k di $\log z$ sono infinite (una per ciascun numero intero relativo). Per indicare che consideriamo il valore di $\log z$ relativo ad un fissato $k \in \mathbb{Z}$ scriveremo:

$$\log^{[k]} z := w_k = \log |z| + i(\vartheta + 2k\pi)$$

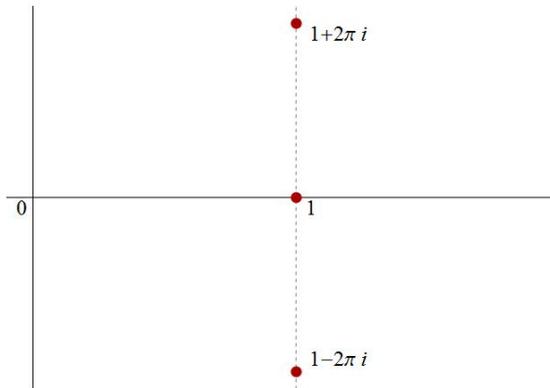
(determinazione di indice $k \in \mathbb{Z}$ del logaritmo naturale di z). $\log^{[0]} z$ è noto in letteratura come *logaritmo principale di z* e si può indicare con:

$$\text{Log}z := \log^{[0]} z = \log |z| + i\text{Arg}(z).$$

Osservazione 1.2.8 (rappresentazione geometrica dei logaritmi). Notiamo, da (1.16), che le determinazioni w_k del logaritmo di un numero complesso z hanno la stessa parte reale ($\log |z|$): tali punti appartengono alla retta verticale $\text{Re}(w) = \log |z|$. Ora, w_k ha parte immaginaria:

$$\vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Allora w_{k+1} si determina a partire da w_k , considerando il punto della retta $\text{Re}(w_k) = \log |z|$ che ha parte immaginaria data da $\text{Im}(w_k) + 2\pi$. In figura sono riportate le determinazioni di $\text{Log}e$, $\log^{[1]} e$ e $\log^{[-1]} e$ di $\log e$ in campo complesso.



Vediamo ora come si costruisce la superficie di Riemann per la funzione polidroma $\log z$.

Consideriamo i seguenti limiti per $\text{Re}(z) < 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^+} \log^{[k]} z &= \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^+} [\log |z| + i(\vartheta + 2k\pi)] = \\ &= \log |\text{Re}(z)| + i(\pi + 2k\pi); \\ \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^-} \log^{[k+1]} z &= \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^-} [\log |z| + i(\vartheta + 2k\pi + 2\pi)] = \\ &= \log |\text{Re}(z)| + i(\pi + 2k\pi). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Osserviamo che, per $Re(z) < 0$, risulta:

$$\lim_{Im(z) \rightarrow 0^+} \log^{[k]} z = \lim_{Im(z) \rightarrow 0^-} \log^{[k+1]} z$$

Pertanto, possiamo affermare che: girando intorno all'origine nel verso antiorario, la determinazione $\log^{[k]} z$ si salda con continuità, attraverso il semiasse reale negativo, alla determinazione $\log^{[k+1]} z$.

Definizione 1.2.9 (superficie di Riemann a infiniti fogli). Considerato, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, il piano complesso π_k tagliato lungo il semiasse reale negativo relativo a $\log^{[k]} z$, la superficie a infiniti fogli ottenuta raccordando, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, π_k con π_{k+1} lungo i tagli, in modo tale da avere la continuità del logaritmo in funzione di ϑ , si chiama *superficie di Riemann di $\log z$* .

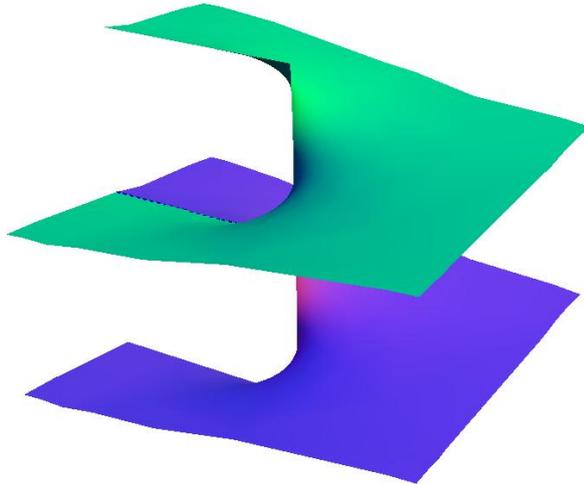


Figura 1.4: Superficie di Riemann per il logaritmo. Il foglio inferiore è relativo alla determinazione di indice k di $\log z$, mentre il foglio superiore è relativo alla determinazione di indice $k + 1$ di $\log z$.

Osservazione 1.2.10. A differenza di quanto avviene in campo reale, in generale:

$$\log^{[k]} \left(\prod_{j=1}^l z_j \right) \neq \sum_{j=1}^l \log^{[k]} z_j \quad (1.18)$$

e la differenza è sempre un multiplo di $2\pi i$. Vale l'uguaglianza se la somma degli argomenti resta compresa in $]-\pi, \pi]$. Per semplicità, proviamo che

$$\log(z_i z_2) = \log z_1 + \log z_2 + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Infatti:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

e

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi;$$

quindi

$$\begin{aligned} \log(z_i z_2) &= \log |z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2) = \\ &= \log |z_1| + \log |z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi) = \\ &= \log z_1 + \log z_2 + 2k\pi i. \end{aligned}$$

Esempio. Se $k = 0$, $l = 2$ e $z_1 = z_2 = -1 + i$ si ha:

$$\text{Log}(-1 + i) = \log \sqrt{2} + i \frac{3\pi}{4}$$

ma

$$\text{Log}(-1 + i)^2 = \log 2 - i \frac{\pi}{2} \neq 2 \text{Log}(-1 + i)$$

1. Calcolare:

$$\text{Log } i, \quad \text{Log}(-5), \quad \text{Log}(-\sqrt{3} + 1).$$

Definizione 1.2.11 (potenza ad esponente complesso). Fissato $w \in \mathbb{C}$, per $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiamo:

$$z^w := e^{w \log z}$$

(potenza ad esponente complesso).

Osserviamo che, per la polidromia della funzione logaritmo, anche la potenza ad esponente complesso è un'applicazione polidroma.

2. Calcoliamo i^i :

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

