

UNIVERSITÀ DEL SALENTO  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA  
“ENNIO DE GIORGI”

**Michele Carriero**  
**Simone Cito**

Introduzione alla  
Analisi Complessa



**Quaderno 2/2015**  
Università del Salento - Coordinamento SIBA

# QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA “ENNIO DE GIORGI”  
UNIVERSITÀ DEL SALENTO

---

## Comitato di Redazione

Angela Albanese  
Francesco Catino  
Domenico Perrone

---

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi” della Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell’attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

- (1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
- (2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
- (3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all’approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 2/2015: e-ISBN 978–88–8305–117–3

Università del Salento - Coordinamento SIBA

# Prefazione

Questi appunti sono una versione ampliata delle lezioni tenute da Michele Carriero nel Corso di Analisi Complessa per gli Studenti della Laurea Magistrale in Matematica dell'Università del Salento.

Il secondo autore è uno dei partecipanti al Corso nell'a.a. 2011-2012; a lui va riconosciuto l'impegno per la cura di questa versione, a partire dagli appunti delle lezioni tenute in diversi anni.

Lecce, maggio 2015

Michele Carriero  
Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi"  
`michele.carriero@unisalento.it`

Simone Cito  
Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi"  
`simone.cito@unisalento.it`

Gli autori ringraziano il Referee.



# Indice

<b>1</b>	<b>Il campo <math>(\mathbb{C}, +, \cdot)</math> dei numeri complessi</b>	<b>11</b>
1.1	Numeri complessi: richiami e complementi . . . . .	11
1.2	Radici algebriche, logaritmi naturali in $\mathbb{C}$ e potenza ad esponente complesso. Polidromia e superficie di Riemann . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Funzioni olomorfe</b>	<b>27</b>
2.1	La derivazione in senso complesso. Teorema di Cauchy-Riemann . . . . .	27
2.2	Regole di derivazione. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa . . . . .	32
2.3	Integrale curvilineo delle funzioni complesse . . . . .	38
2.4	Primitive di una funzione complessa. Forme differenziali . . . . .	39
2.5	Logaritmo olomorfo . . . . .	40
2.6	Funzioni armoniche e armoniche coniugate . . . . .	41
2.7	Funzioni olomorfe e trasformazioni conformi . . . . .	43
2.8	Teorema dell'integrale nullo e formula integrale di Cauchy . . . . .	46
2.9	Teorema di Morera. Teorema della media integrale di Gauss. Principio del massimo (minimo) modulo . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Olomorfia e analiticit�</b>	<b>53</b>
3.1	Olomorfia di integrali curvilinei rispetto a parametri complessi. Formula integrale di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa . . . . .	53
3.2	Serie di potenze in $\mathbb{C}$ . . . . .	56
3.3	Teorema di Taylor. Teorema di convergenza di Weierstrass. Olomorfia della somma di una serie di potenze nel disco aperto di convergenza . . . . .	57

3.4	Prodotto e divisione di serie di potenze . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Funzioni intere e teoremi di Liouville. Zeri di una funzione olomorfa. Prolungamento olomorfo</b>	<b>67</b>
4.1	Primo e secondo teorema di Liouville . . . . .	67
4.2	Teorema fondamentale dell'Algebra . . . . .	68
4.3	Zeri di una funzione olomorfa . . . . .	69
4.4	Prolungamento olomorfo: unicità . . . . .	70
4.5	Esistenza di almeno un punto di non prolungabilità olomorfa sulla frontiera del disco aperto di convergenza di un serie di potenze . . . . .	71
4.6	Prolungamento olomorfo attraverso una curva. Principio di riflessione di Schwarz . . . . .	73
4.7	Trasformazione conforme del disco aperto unitario su sé stesso	76
<b>5</b>	<b>Serie di Laurent</b>	<b>81</b>
5.1	Sviluppo in una corona circolare . . . . .	81
5.2	Sviluppo in serie di Laurent in un punto singolare isolato al finito. Teorema di Riemann sulle singolarità isolate eliminabili	84
5.3	Caratterizzazione delle singolarità isolate . . . . .	87
5.4	Comportamento di una funzione olomorfa all'infinito (complesso) . . . . .	90
5.5	Comportamento in un intorno di una singolarità essenziale isolata: Teorema di Casorati -Weierstrass e Teorema di Picard	91
<b>6</b>	<b>Teoria dei residui</b>	<b>95</b>
6.1	Residuo integrale di una funzione in un suo punto singolare isolato . . . . .	95
6.2	Calcolo dei residui . . . . .	96
6.3	Primo e secondo Teorema dei residui . . . . .	103
6.4	Indice di avvolgimento di una curva ed estensione del primo Teorema dei residui . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Applicazione del calcolo dei residui</b>	<b>107</b>
7.1	Calcolo di integrali curvilinei . . . . .	107
7.2	Calcolo di integrali definiti tra 0 e $2\pi$ di funzioni razionali di $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$ . . . . .	112

---

7.3	Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali . . . . .	115
7.4	Teoremi di Jordan del grande e del piccolo cerchio. Lemma di Jordan . . . . .	121
7.5	Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali moltiplicate per una funzione esponenziale. Formula di Heaviside . . . . .	127
7.6	Integrandi che presentano singolarità sulla retta reale . . . . .	129
7.7	Integrali di funzioni polidrome . . . . .	139
7.8	Integrali di Fresnel . . . . .	145
7.9	Somma di alcune serie . . . . .	149
7.10	Indicatore logaritmico. Principio dell'argomento. Teorema di Rouché. Un'altra dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra . . . . .	153
<b>8</b>	<b>Integrali Euleriani di I e II specie. Trasformata di Laplace</b>	<b>161</b>
8.1	Integrali Euleriani di I e II specie (funzioni Beta e Gamma): definizione e proprietà . . . . .	161
8.2	Trasformata di Laplace: definizione e proprietà . . . . .	168
8.3	Cenni sull'inversione della trasformata di Laplace . . . . .	184
8.4	Alcune applicazioni: il metodo della Trasformata di Laplace per le equazioni differenziali e per le equazioni integrali di Volterra . . . . .	189
<b>9</b>	<b>Esercizi proposti</b>	<b>201</b>



# Elenco delle tabelle

8.1	Trasformate di Laplace di alcune funzioni elementari . . . . .	178
8.2	Regole di trasformazione algebriche . . . . .	180
8.3	Regole di trasformazione analitiche . . . . .	184



# Capitolo 1

## Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dei numeri complessi

In questo capitolo richiamiamo brevemente i numeri complessi, già noti da insegnamenti precedenti, con l'aggiunta di alcuni approfondimenti.

### 1.1 Numeri complessi: richiami e complementi

Consideriamo  $\mathbb{R}^2$  munito della struttura di spazio vettoriale euclideo, con prodotto scalare che induce la distanza euclidea.

Su tale spazio vettoriale è definita l'operazione di somma:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

e  $(\mathbb{R}^2, +)$  è un gruppo abeliano. Su  $\mathbb{R}^2$  definiamo anche il prodotto interno:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1); \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$  è un gruppo abeliano e  $\cdot$  è distributivo rispetto a  $+$ : in definitiva  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  è un campo.

**Definizione 1.1.1** (campo dei numeri complessi). Il campo  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  è detto *campo dei numeri complessi* e si indica con  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ . Gli elementi di  $\mathbb{C}$  sono detti *numeri complessi*.

Talvolta  $\mathbb{C}$  si dice piano complesso. In maniera naturale, si identifica  $\mathbb{R}$  con l'insieme delle coppie  $(x, 0)$  (cioè  $(x, 0) \equiv x \in \mathbb{R}$ ). In questo modo, come vedremo in seguito,  $\mathbb{C}$  risulta essere la chiusura algebrica di  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 1.1.2** (unità immaginaria). Si dice *unità immaginaria*  $i$  la coppia  $(0, 1)$ .

Tale numero complesso gode della proprietà  $i^2 = -1$ ; infatti, per come è definito il prodotto in  $\mathbb{C}$ :

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$$

Come accennato in precedenza,  $\mathbb{C}$  è la chiusura algebrica di  $\mathbb{R}$ , cioè vale il seguente:

**Teorema 1.1.3** (fondamentale dell'Algebra). *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado  $n \geq 1$  ha  $n$  radici complesse, contate con la loro molteplicità.*

**Osservazione 1.1.4** (rappresentazione dei numeri complessi). Oltre che come coppia ordinata, un numero complesso  $z = (x, y)$  si può rappresentare in altri tre modi:

- *Forma algebrica.* Ricordando l'identificazione di  $\mathbb{R}$  con l'asse  $x$  del piano complesso si può scrivere:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy \quad (1.1)$$

In questo caso si dice che  $z$  è espresso in *forma algebrica*. Tale rappresentazione è particolarmente utile per eseguire addizioni e sottrazioni;  $x$  e  $y$  sono dette rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* di  $z$  e si scrive:

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

Il modulo di  $z$  è definito da:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- *Forma trigonometrica.* Sia  $z \neq 0$  ed esprimiamo la coppia  $(x, y)$  nelle coordinate polari  $(\rho, \vartheta)$ :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nella (1.1) otteniamo:

$$z = \rho \cos \vartheta + i(\rho \sin \vartheta) = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \quad (1.2)$$

In questo caso si dice che  $z$  è espresso in *forma trigonometrica*. Il parametro  $\rho \geq 0$  si dice *modulo* di  $z$ ; il parametro  $\vartheta \in \mathbb{R}$  si dice *argomento* di  $z$ . Osserviamo che, in questo modo, la determinazione di  $\vartheta$  non è univoca (la differenza tra due diversi valori è un multiplo intero di  $2\pi$ ); tra questi indicheremo con  $\text{Arg}(z)$  l'*argomento principale* di  $z$ , appartenente all'intervallo  $]-\pi, \pi]$ .

In questo modo rendiamo univoca la rappresentazione trigonometrica, ma perdiamo la continuità di  $\text{Arg}(z)$  lungo  $\mathbb{R}_-$ , il semiasse negativo delle  $x$ . Infatti, per  $\text{Re}(z) < 0$ , si ha:

$$\lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^+} \text{Arg}(z) = \pi, \quad \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^-} \text{Arg}(z) = -\pi.$$

Se scegliamo  $\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$  perdiamo la continuità dell'argomento principale di  $z$  lungo  $\mathbb{R}_+$ , il semiasse positivo delle  $x$ .

- *Forma esponenziale*. Per prima cosa definiamo:

$$e^{i\vartheta} := \cos \vartheta + i \sin \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

Sostituendo in (1.2) otteniamo la cosiddetta *forma esponenziale* di  $z$ :

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \rho e^{i\vartheta} \quad (1.3)$$

Tale rappresentazione è particolarmente utile quando si eseguono prodotti tra numeri complessi.

**Definizione 1.1.5** (coniugato di un numero complesso). Sia  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ; definiamo *coniugato* di  $z$  il numero complesso:

- in forma algebrica:

$$\bar{z} := x - iy,$$

- in forma trigonometrica:

$$\bar{z} = \rho(\cos \vartheta - i \sin \vartheta)$$

- in forma esponenziale:

$$\bar{z} = \rho e^{-i\vartheta},$$

dove abbiamo utilizzato per  $z$  le espressioni (1.2) e (1.3). L'operatore  $\bar{\cdot}$  è detto *coniugio* e gode delle seguenti proprietà:

- (i)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ;
- (ii)  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ;
- (iii)  $\forall x \in \mathbb{R} : \bar{x} = x$ .

Per le prime due proprietà, il coniugio è un automorfismo di  $\mathbb{C}$ ; per la terza proprietà, tutti e soli i punti fissi di questo automorfismo sono i numeri reali. Osserviamo, infine, che  $|\bar{z}| = |z|$ .

Esaminiamo ora un altro aspetto dei numeri complessi.  $\mathbb{R}$  è un campo ordinato, mentre su  $\mathbb{C}$  non è possibile definire alcuna relazione d'ordine compatibile con le operazioni interne ( $i^2 = -1$ ). Pertanto, se in  $\mathbb{R}$  si definiscono i concetti di  $+\infty$  e  $-\infty$ , in  $\mathbb{C}$  non si possono introdurre nozioni del genere.

**Definizione 1.1.6** (infinito complesso). Definiamo *infinito complesso* (simbolo  $\infty$ ) l'unico punto con argomento indeterminato e modulo uguale a  $+\infty$ . L'insieme  $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  si dice *campo complesso ampliato*.

Un intorno di  $\infty$  in  $\overline{\mathbb{C}}$  è il complementare di un qualsiasi disco di raggio  $R > 0$  centrato nell'origine.

Osserviamo che, se  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $A$  non limitato:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l \in \overline{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = l \in \overline{\mathbb{C}}$$

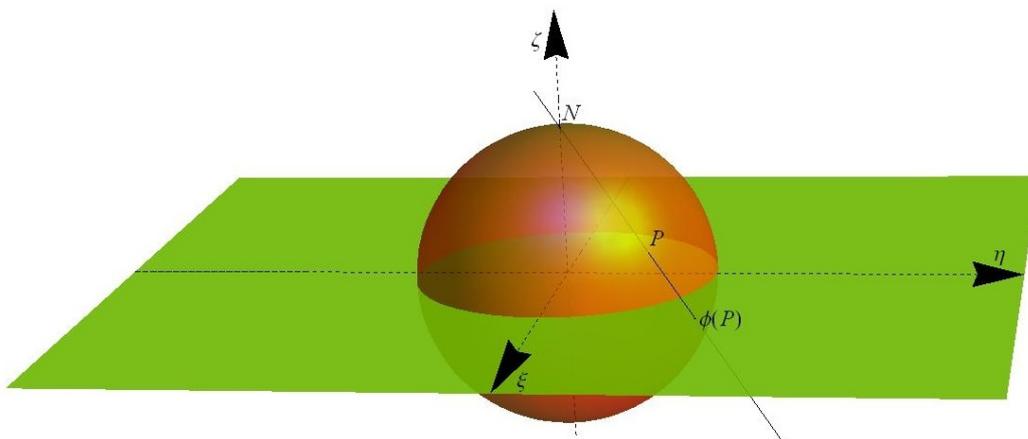
L'introduzione dell'infinito complesso trova la adeguata rappresentazione geometrica che illustriamo di seguito. Consideriamo ora la sfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  di equazione:

$$S^2 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

Sia  $N = (0, 0, 1)$  il cosiddetto polo nord di  $S^2$ . Per ogni punto  $P = (\xi, \eta, \zeta) \in S^2 \setminus \{N\}$ , è ben definita la retta  $\overline{NP}$ , che incontra il piano  $\zeta = 0$  in un unico punto. Identificando quest'ultimo piano con il piano complesso, è ben posta la seguente definizione.

**Definizione 1.1.7** (proiezione stereografica). Sia  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  la sfera unitaria di centro l'origine e  $N$  il suo polo nord. L'applicazione:

$$\begin{aligned} \phi : S^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ P &\mapsto \overline{NP} \cap \mathbb{C} \end{aligned}$$



**Figura 1.1:** Proiezione stereografica della sfera  $S^2$  sul piano complesso  $\mathbb{C}$ .

si dice *proiezione stereografica* della sfera  $S^2$  sul piano complesso  $\mathbb{C}$ . Tale funzione stabilisce una corrispondenza biunivoca tra  $S^2 \setminus \{N\}$  e  $\mathbb{C}$ .

Si può estendere la proiezione stereografica a tutta la sfera, definendo:

$$\bar{\phi} : S^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, \quad P \mapsto \begin{cases} \overline{NP} \cap \mathbb{C}, & P \neq N \\ \infty, & P = N \end{cases}$$

Tale applicazione stabilisce una corrispondenza biunivoca tra  $S^2$  e  $\bar{\mathbb{C}}$ .

**Osservazione 1.1.8** (formula di De Moivre). Consideriamo  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , in forma trigonometrica:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1), \quad z_2 = \rho_2 (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$$

Allora, applicando le formule di prostaferesi, si ha:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)]$$

Naturalmente la precedente espressione si può iterare a  $n$  fattori  $z_1, \dots, z_n$ ; in particolare, se  $z_1 = \dots = z_n = z$  otteniamo la seguente *formula di De Moivre*:

$$z^n = \rho^n [\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)] = \rho^n e^{in\vartheta} \quad (1.4)$$

**Osservazione 1.1.9** (formule di Eulero). La formula di De Moivre si estende in modo naturale anche agli esponenti interi relativi, ricordando che:

$$e^{-i\vartheta} = \cos \vartheta - i \sin \vartheta, \quad (1.5)$$

dove abbiamo sfruttato:

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \quad (1.6)$$

applicata a  $-i\vartheta$  tenendo conto che le funzioni coseno e seno sono rispettivamente pari e dispari.

Ora, sommando (1.5) e (1.6) si ottiene

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2 \cos \vartheta$$

da cui

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \quad (1.7)$$

Invece, sottraendo (1.5) da (1.6) si ha

$$e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} = 2i \sin \vartheta$$

da cui

$$\sin \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \quad (1.8)$$

(1.7) e (1.8) sono dette *formule di Eulero* rispettivamente per il coseno e per il seno.

Le formule appena introdotte hanno numerose applicazioni.

1. Calcoliamo

$$\int \cos^3 y \, dy.$$

Per (1.7) risulta:

$$\begin{aligned} \cos^3 y &= \left( \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3iy} + 3e^{2iy}e^{-iy} + 3e^{iy}e^{-2iy} + e^{-3iy}) = \\ &= \frac{1}{8} [(e^{3iy} + e^{-3iy}) + 3(e^{iy} + e^{-iy})] = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{e^{i(3y)} + e^{-i(3y)}}{2} \right) + 3 \left( \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4} (\cos 3y + 3 \cos y). \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 y \, dy &= \frac{1}{4} \int (\cos 3y + 3 \cos y) \, dy = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\sin 3y}{3} + 3 \sin y \right) + c \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2. Calcoliamo

$$\int \sin^5 y \, dy.$$

Per (1.8) risulta:

$$\begin{aligned} \sin^5 y &= \left( \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \right)^5 = \frac{1}{32i} (e^{5iy} - 5e^{3iy} + 10e^{iy} - 10e^{-iy} + 5e^{-3iy} + \\ &\quad - e^{-5iy}) = \\ &= \frac{1}{16} \left[ \left( \frac{e^{i(5y)} - e^{-i(5y)}}{2i} \right) - 5 \left( \frac{e^{i(3y)} - e^{-i(3y)}}{2i} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 10 \left( \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{16} (\sin 5y - 5 \sin 3y + 10 \sin y). \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \int \sin^5 y \, dy &= \frac{1}{16} \int (\sin 5y - 5 \sin 3y + 10 \sin y) \, dy = \\ &= -\frac{\cos 5y}{80} + \frac{5 \cos 3y}{48} - \frac{5 \cos y}{8} + c \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

**Definizione 1.1.10** (Esponenziale complesso).

Sia  $z = x + iy$ ; definiamo *esponenziale in base  $e$*  di  $z$ :

$$e^z := e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Fondamentali proprietà:

- $|e^z| = e^x$
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
- $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $e^{z+2\pi i} = e^z$ , cioè la funzione esponenziale in  $\mathbb{C}$  è periodica di periodo  $2\pi i$  e assume tutti i valori complessi tranne lo zero.

## 1.2 Radici algebriche, logaritmi naturali in $\mathbb{C}$ e potenza ad esponente complesso.

### Polidromia e superficie di Riemann

**Definizione 1.2.1** (radice algebrica  $n$ -esima di un numero complesso). Siano  $n \in \mathbb{N}, n > 1$  e  $z \in \mathbb{C}$ . Consideriamo l'equazione nell'incognita  $w$ :

$$w^n = z \quad (1.9)$$

Diciamo che  $w$  è una *radice algebrica  $n$ -esima di  $z$*  (e scriviamo  $w = \sqrt[n]{z}$ ) se è soluzione di (1.9).

Osserviamo che se  $z = 0$  allora la (1.9) ha solo la soluzione  $w = 0$ . Se  $z \neq 0$ , per risolvere (1.9), siano:

$$z = |z|e^{i\vartheta}, \quad w = |w|e^{i\eta}$$

Applicando la formula di De Moivre (1.4), l'equazione (1.9) diventa:

$$|w|^n e^{in\eta} = |z|e^{i\vartheta},$$

dando luogo al sistema:

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\eta = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pertanto:

$$|w| = |z|^{\frac{1}{n}}, \quad \eta = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

dove  $|z|^{\frac{1}{n}}$  è la radice aritmetica  $n$ -esima di  $|z|$ .

Poniamo:

$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.10)$$

**Osservazione 1.2.2** (polidromia della radice  $n$ -esima). La funzione radice algebrica  $n$ -esima

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\phantom{z}} : \mathbb{C} &\rightarrow 2^{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \left\{ w_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

è *polidroma*, cioè ad ogni numero complesso associa un insieme.

Osserviamo, ancora, che le determinazioni distinte  $w_k$  di  $\sqrt[n]{z}$  non sono infinite; infatti:

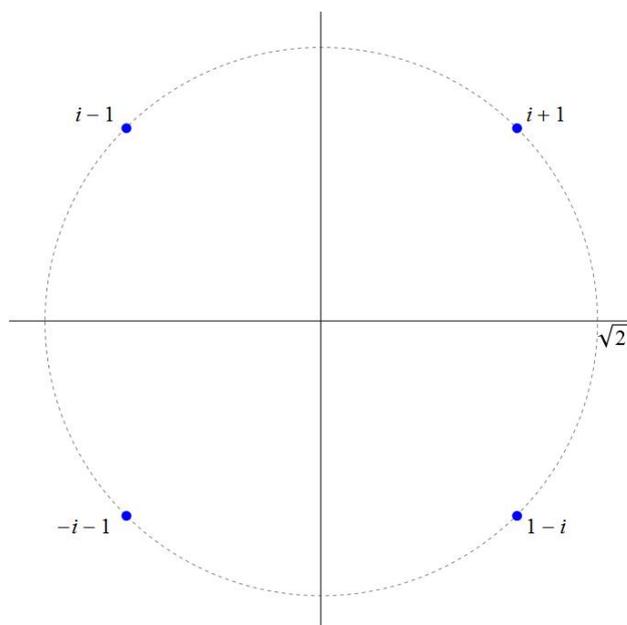
$$\begin{aligned} w_{k_1} = w_{k_2} &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : \frac{\vartheta + 2k_1\pi}{n} - \frac{\vartheta + 2k_2\pi}{n} = 2h\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z} : k_1 - k_2 = hn. \end{aligned}$$

Ne segue che le radici algebriche  $n$ -esime distinte di  $z \neq 0$  sono esattamente  $n$ , e si ottengono attribuendo a  $k$  i valori  $0, \dots, n-1$ .

**Osservazione 1.2.3** (rappresentazione geometrica delle radici). Per rappresentare le radici  $n$ -esime di un numero complesso  $z$  osserviamo, da (1.10), che le  $w_k$  hanno lo stesso modulo ( $|z|^{\frac{1}{n}}$ ), perciò appartengono tutte a  $\partial B_{|z|^{\frac{1}{n}}}(0)$ . Ora, le  $n$  distinte  $w_k$  sono individuate dagli angoli:

$$\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Allora  $w_{k+1}$  si determina a partire da  $w_k$ , percorrendo, in senso antiorario, su  $\partial B_{|z|^{\frac{1}{n}}}(0)$  un arco di ampiezza  $\frac{2\pi}{n}$ . Dunque i punti  $w_k$  sono i vertici di un poligono regolare di  $n$  lati inscritto in  $\partial B_{|z|^{\frac{1}{n}}}(0)$ . In figura sono riportate le radici algebriche quarte di  $-4$  in campo complesso.



**Figura 1.2:** Radici algebriche quarte di  $-4$

Per dare l'idea di come si costruisce la superficie di Riemann per  $\sqrt[n]{z}$ , consideriamo in particolare le radici quadrate algebriche distinte di  $z = |z|e^{i\vartheta}$ :

$$w_0 = |z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\vartheta}{2}}, \quad w_1 = |z|^{\frac{1}{2}}e^{i(\frac{\vartheta}{2}+\pi)} = -w_0$$

Calcoliamo, per  $\operatorname{Re}(z) < 0$ , i seguenti limiti:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \pi^-} w_0 = |z|^{\frac{1}{2}} \lim_{\vartheta \rightarrow \pi^-} e^{i\frac{\vartheta}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}}i \quad (1.11)$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow -\pi^+} w_0 = |z|^{\frac{1}{2}} \lim_{\vartheta \rightarrow -\pi^+} e^{i\frac{\vartheta}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -|z|^{\frac{1}{2}}i \quad (1.12)$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \pi^-} w_1 = |z|^{\frac{1}{2}} \lim_{\vartheta \rightarrow \pi^-} e^{i(\frac{\vartheta}{2}+\pi)} = |z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -|z|^{\frac{1}{2}}i \quad (1.13)$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow -\pi^+} w_1 = |z|^{\frac{1}{2}} \lim_{\vartheta \rightarrow -\pi^+} e^{i(\frac{\vartheta}{2}+\pi)} = |z|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}}i \quad (1.14)$$

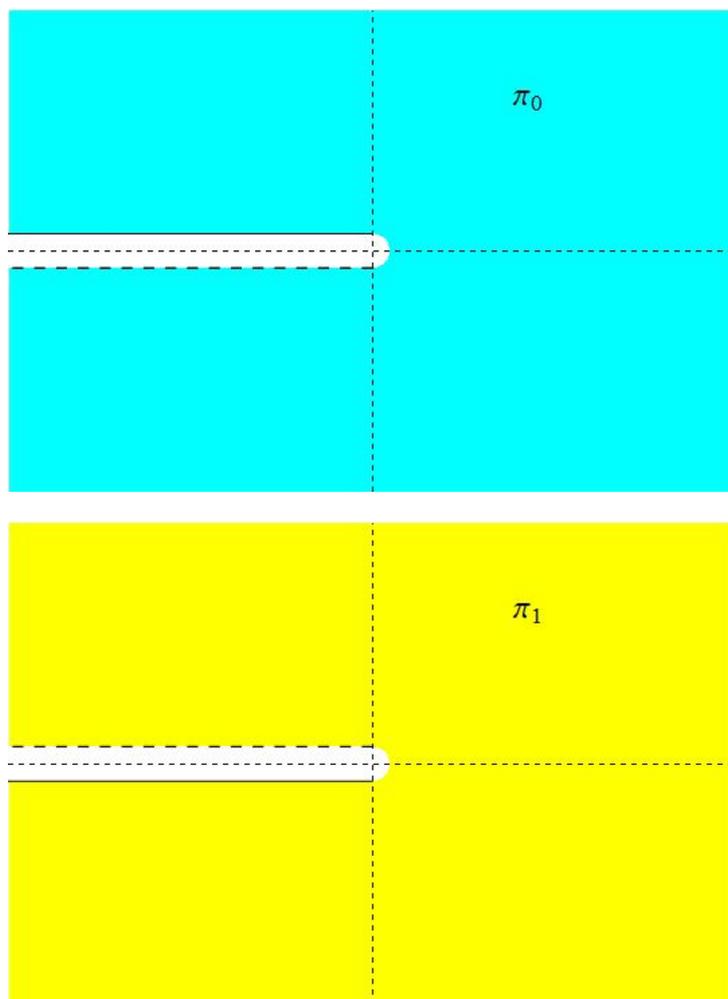
Osserviamo che:

- (1.11)=(1.14), cioè facendo crescere  $\vartheta$  fino a  $\pi$ ,  $w_0$  tende allo stesso limite a cui tende  $w_1$  quando  $\vartheta$  decresce a  $-\pi$ , quindi  $w_0$  e  $w_1$  si saldano con continuità sul semiasse reale negativo;
- (1.13)=(1.12), cioè facendo crescere  $\vartheta$  fino a  $\pi$ ,  $w_1$  tende allo stesso limite a cui tende  $w_0$  quando  $\vartheta$  decresce a  $-\pi$ , quindi  $w_1$  e  $w_0$  si saldano con continuità sul semiasse reale negativo.

Nelle due figure seguenti (che rappresentano i piani complessi  $\pi_0$  e  $\pi_1$ , collocati uno sopra l'altro, su cui è stato eseguito un taglio lungo ciascuna semiasse reale negativo) sono evidenziati i limiti uguali di cui sopra con il medesimo tratteggio.

**Definizione 1.2.4** (superficie di Riemann a 2 fogli). Considerati  $\pi_0$  e  $\pi_1$ , due piani complessi tagliati lungo il semiasse negativo delle  $x$ , uno relativo a  $w_0$  e l'altro a  $w_1$ , la superficie a due fogli ottenuta raccordando  $\pi_0$  e  $\pi_1$  lungo i 'tagli' in modo tale da avere la continuità della radice quadrata in funzione di  $\vartheta$  si chiama *superficie di Riemann di  $\sqrt{z}$* .

Girando intorno al punto 0, si passa da  $w_0$  a  $w_1$  con continuità. Per questo motivo il punto 0 viene chiamato *punto di diramazione* della funzione polidroma  $\sqrt{z}$ .



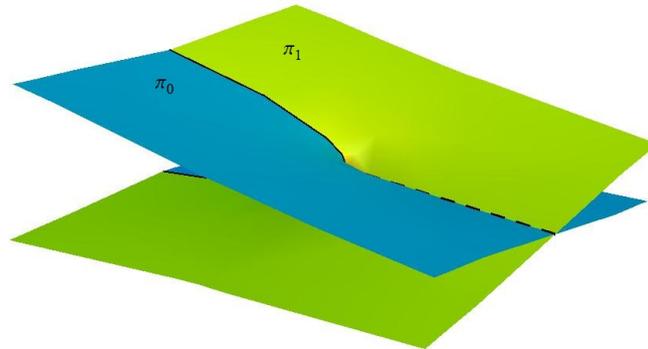
**Definizione 1.2.5** (superficie di Riemann a  $n$  fogli). Nel caso di radici algebriche  $n$ -esime, si itera il procedimento agli  $n$  piani tagliati relativi alle  $n$  radici distinte, definendo la *superficie di Riemann a  $n$  fogli*.

Un altro esempio notevole di applicazione polidroma è la funzione logaritmo in campo complesso.

**Definizione 1.2.6** (logaritmo naturale di un numero complesso). Sia  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Consideriamo l'equazione nell'incognita  $w$ :

$$e^w = z \tag{1.15}$$

Diciamo che  $w$  è *logaritmo naturale di  $z$*  (e scriviamo  $w = \log z$ ) se  $w$  è soluzione di (1.15).



**Figura 1.3:** Superficie di Riemann a due fogli. Le linee continue rappresentano i raccordi tra  $\pi_0$  e  $\pi_1$ ; la linea tratteggiata è di autointersezione

Per risolvere (1.15) esprimiamo  $z$  in forma trigonometrica e  $w$  in forma algebrica:

$$z = |z|e^{i\vartheta}, \quad w = u + iv$$

Ora, esplicitando il primo membro:

$$e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv},$$

l'equazione (1.15) dà luogo al sistema:

$$\begin{cases} e^u = |z| \\ v = \vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pertanto:

$$u = \log |z|, \quad v = \vartheta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

In definitiva scriviamo:

$$w_k = \log |z| + i(\vartheta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.16}$$

**Osservazione 1.2.7** (polidromia del logaritmo). La funzione logaritmo

$$\begin{aligned} \log : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow 2^{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \{w_k = \log |z| + i(\vartheta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

è *polidroma*; le determinazioni  $w_k$  di  $\log z$  sono infinite (una per ciascun numero intero relativo). Per indicare che consideriamo il valore di  $\log z$  relativo ad un fissato  $k \in \mathbb{Z}$  scriveremo:

$$\log^{[k]} z := w_k = \log |z| + i(\vartheta + 2k\pi)$$

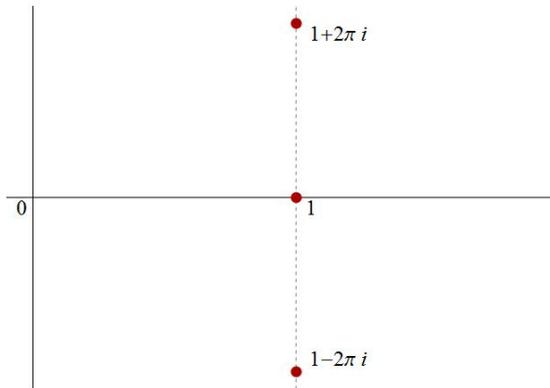
(determinazione di indice  $k \in \mathbb{Z}$  del logaritmo naturale di  $z$ ).  $\log^{[0]} z$  è noto in letteratura come *logaritmo principale di  $z$*  e si può indicare con:

$$\text{Log}z := \log^{[0]} z = \log |z| + i\text{Arg}(z).$$

**Osservazione 1.2.8** (rappresentazione geometrica dei logaritmi). Notiamo, da (1.16), che le determinazioni  $w_k$  del logaritmo di un numero complesso  $z$  hanno la stessa parte reale ( $\log |z|$ ): tali punti appartengono alla retta verticale  $\text{Re}(w) = \log |z|$ . Ora,  $w_k$  ha parte immaginaria:

$$\vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Allora  $w_{k+1}$  si determina a partire da  $w_k$ , considerando il punto della retta  $\text{Re}(w_k) = \log |z|$  che ha parte immaginaria data da  $\text{Im}(w_k) + 2\pi$ . In figura sono riportate le determinazioni di  $\text{Log}e$ ,  $\log^{[1]} e$  e  $\log^{[-1]} e$  di  $\log e$  in campo complesso.



Vediamo ora come si costruisce la superficie di Riemann per la funzione polidroma  $\log z$ .

Consideriamo i seguenti limiti per  $\text{Re}(z) < 0$ :

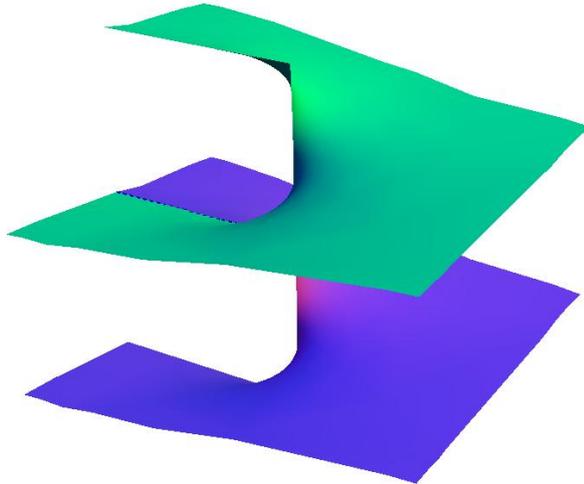
$$\begin{aligned} \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^+} \log^{[k]} z &= \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^+} [\log |z| + i(\vartheta + 2k\pi)] = \\ &= \log |\text{Re}(z)| + i(\pi + 2k\pi); \\ \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^-} \log^{[k+1]} z &= \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow 0^-} [\log |z| + i(\vartheta + 2k\pi + 2\pi)] = \\ &= \log |\text{Re}(z)| + i(\pi + 2k\pi). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Osserviamo che, per  $\operatorname{Re}(z) < 0$ , risulta:

$$\lim_{\operatorname{Im}(z) \rightarrow 0^+} \log^{[k]} z = \lim_{\operatorname{Im}(z) \rightarrow 0^-} \log^{[k+1]} z$$

Pertanto, possiamo affermare che: girando intorno all'origine nel verso antiorario, la determinazione  $\log^{[k]} z$  si salda con continuità, attraverso il semiasse reale negativo, alla determinazione  $\log^{[k+1]} z$ .

**Definizione 1.2.9** (superficie di Riemann a infiniti fogli). Considerato, per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ , il piano complesso  $\pi_k$  tagliato lungo il semiasse reale negativo relativo a  $\log^{[k]} z$ , la superficie a infiniti fogli ottenuta raccordando, per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\pi_k$  con  $\pi_{k+1}$  lungo i tagli, in modo tale da avere la continuità del logaritmo in funzione di  $\vartheta$ , si chiama *superficie di Riemann di  $\log z$* .



**Figura 1.4:** Superficie di Riemann per il logaritmo. Il foglio inferiore è relativo alla determinazione di indice  $k$  di  $\log z$ , mentre il foglio superiore è relativo alla determinazione di indice  $k + 1$  di  $\log z$ .

**Osservazione 1.2.10.** A differenza di quanto avviene in campo reale, in generale:

$$\log^{[k]} \left( \prod_{j=1}^l z_j \right) \neq \sum_{j=1}^l \log^{[k]} z_j \quad (1.18)$$

e la differenza è sempre un multiplo di  $2\pi i$ . Vale l'uguaglianza se la somma degli argomenti resta compresa in  $]-\pi, \pi]$ . Per semplicità, proviamo che

$$\log(z_i z_2) = \log z_1 + \log z_2 + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Infatti:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

e

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi;$$

quindi

$$\begin{aligned} \log(z_i z_2) &= \log |z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2) = \\ &= \log |z_1| + \log |z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi) = \\ &= \log z_1 + \log z_2 + 2k\pi i. \end{aligned}$$

Esempio. Se  $k = 0$ ,  $l = 2$  e  $z_1 = z_2 = -1 + i$  si ha:

$$\text{Log}(-1 + i) = \log \sqrt{2} + i \frac{3\pi}{4}$$

ma

$$\text{Log}(-1 + i)^2 = \log 2 - i \frac{\pi}{2} \neq 2 \text{Log}(-1 + i)$$

1. Calcolare:

$$\text{Log } i, \quad \text{Log}(-5), \quad \text{Log}(-\sqrt{3} + 1).$$

**Definizione 1.2.11** (potenza ad esponente complesso). Fissato  $w \in \mathbb{C}$ , per  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  definiamo:

$$z^w := e^{w \log z}$$

(potenza ad esponente complesso).

Osserviamo che, per la polidromia della funzione logaritmo, anche la potenza ad esponente complesso è un'applicazione polidroma.

2. Calcoliamo  $i^i$ :

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



# Capitolo 2

## Funzioni olomorfe

In questo capitolo introdurremo un'importante classe di funzioni di una variabile complessa: le funzioni olomorfe.

Poiché  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$  sono spazi vettoriali (su  $\mathbb{R}$ ) isometrici, per indicare una funzione  $f$  della variabile  $z = x + iy$  utilizzeremo equivalentemente le notazioni  $f(z)$  e  $f(x, y)$ . Nel seguito, inoltre, a meno che non sia specificato diversamente, denoteremo con  $\Omega$  un aperto, non vuoto, connesso di  $\mathbb{C}$ .

Alla luce della suddetta isometria, per  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , la continuità equivale alla continuità di  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

### 2.1 La derivazione in senso complesso.

#### Teorema di Cauchy-Riemann

L'identificazione tra  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$  è possibile solo a livello di spazio vettoriale metrico (su  $\mathbb{R}$ ); ma  $\mathbb{C}$  è dotato altresì della struttura di campo, che permette moltiplicazioni e divisioni tra numeri complessi. È ragionevole allora pensare di estendere la nozione di derivata, così come è stata introdotta per funzioni reali di una variabile reale, alle funzioni complesse di una variabile complessa.

**Definizione 2.1.1** (funzione derivabile in senso complesso).

Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , e sia  $z_0 \in \Omega$ .  $f$  si dice *derivabile* (in senso complesso) in  $z_0$  se esiste in  $\mathbb{C}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.1)$$

In tal caso (2.1) si dice *derivata* (in senso complesso) di  $f$  in  $z_0$  e si indica con  $f'(z_0)$  o  $\frac{df}{dz}(z_0)$ .

**Osservazione 2.1.2.** Così come nel caso reale, se  $f$  è derivabile in senso complesso in un punto  $z_0$ , allora essa è continua in  $z_0$  (la dimostrazione ricalca quella fatta per le funzioni reali). Il viceversa non vale.

Ad esempio, l'applicazione  $f(z) = \bar{z}$  (cioè  $f(x + iy) = x - iy$ ) è continua in  $\mathbb{C}$ , poiché parte reale e parte immaginaria sono funzioni reali continue; se ora fissiamo  $z_0$  in  $\mathbb{C}$  e calcoliamo il limite del rapporto incrementale di  $f$  in  $z_0$  otteniamo:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}$$

Posto  $w := z - z_0$  notiamo che il limite considerato non esiste. Infatti, calcolandolo sui due assi coordinati (se  $w = x + iy$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ x=0}} \frac{\bar{w}}{w} &= \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ x=0}} \frac{-iy}{iy} = -1; \\ \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{\bar{w}}{w} &= \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x}{x} = 1. \end{aligned}$$

Quindi  $f(z) = \bar{z}$  non è derivabile in senso complesso.

**Osservazione 2.1.3.** A partire dalla definizione 2.1.1 si ottiene:

$$\begin{aligned} (2.1) &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \\ &\Leftrightarrow f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = o(|z - z_0|) \text{ per } z \rightarrow z_0, \end{aligned}$$

cioè  $f$  è derivabile in senso complesso in  $z_0$  se e solo se in un intorno di  $z_0$ :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad (2.2)$$

**Definizione 2.1.4.** Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ;  $f$  si dice *olomorfa* in  $\Omega$  (si scrive  $f \in H(\Omega)$ ) se è derivabile in senso complesso in ogni punto di  $\Omega$ . In particolare, se  $f \in H(\mathbb{C})$ ,  $f$  si dice *intera*.

**Definizione 2.1.5.** Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , con  $u$  e  $v$  funzioni reali di due variabili reali, e sia  $z_0 = (x_0, y_0)$ .  $f$  si dice *differenziabile* in  $z_0 \in \Omega$  se  $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $(x_0, y_0)$ . Questo equivale a dire:

$$\begin{cases} u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ \quad + o(|(x, y) - (x_0, y_0)|) \\ v(x, y) = v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ \quad + o(|(x, y) - (x_0, y_0)|) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

in un intorno di  $z_0$ . Osservato che:

$$z = x + iy \Rightarrow x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

si ha, in un intorno di  $z_0$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f_x(z_0) \frac{(z - z_0) + \overline{(z - z_0)}}{2} + f_y(z_0) \frac{(z - z_0) - \overline{(z - z_0)}}{2i} + \\ &\quad + o(|z - z_0|) = \\ &= f(z_0) + \frac{1}{2} [f_x(z_0) - if_y(z_0)] (z - z_0) + \frac{1}{2} [f_x(z_0) + if_y(z_0)] \overline{(z - z_0)} + \\ &\quad + o(|z - z_0|) \end{aligned}$$

Definiamo ora la *derivata complessa di  $f$  rispetto a  $z$*  in  $z_0$ :

$$f_z(z_0) := \frac{1}{2} [f_x(z_0) - if_y(z_0)]$$

e la *derivata complessa di  $f$  rispetto a  $\bar{z}$*  in  $z_0$ :

$$f_{\bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2} [f_x(z_0) + if_y(z_0)]$$

In definitiva,  $f$  è differenziabile in  $z_0$  se e solo se, in un intorno di  $z_0$ :

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|) \quad (2.3)$$

**Teorema 2.1.6** (di Cauchy-Riemann). Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , poniamo  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , dove  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $z = x + iy$ .

Sono equivalenti le proposizioni:

- (i)  $f \in H(\Omega)$ ;

(ii)  $f$  differenziabile e  $f_{\bar{z}} = 0$  (cioè  $f_x = \frac{1}{i}f_y$ ) in  $\Omega$ .

In tal caso  $f' = f_z = f_x$  in  $\Omega$ .

Inoltre (ii) si esprime equivalentemente in forma reale:

(iii)  $u$  e  $v$  differenziabili e

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{in } \Omega. \quad (2.4)$$

*Dimostrazione.*

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). L'equivalenza tra differenziabilità di  $f$  e di  $u$  e  $v$  è data dalla definizione 2.1.5; inoltre:

$$f_{\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow f_x + if_y = 0 \Leftrightarrow u_x + iv_x + i(u_y + iv_y) = 0 \Leftrightarrow u_x - v_y + i(u_y + v_x) = 0$$

Perché sia valida l'ultima uguaglianza, devono essere nulle sia la parte reale che quella immaginaria, perciò dev'essere soddisfatto il sistema (2.4).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Per l'ipotesi:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|),$$

quindi  $f$  è differenziabile in  $z_0$  con  $f_z(z_0) = f'(z_0)$  e  $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$  (per confronto con (2.3)).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Se  $f$  è differenziabile in  $z_0 \in \Omega$  e  $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ , la (2.3) implica l'esistenza della derivata in senso complesso in  $z_0$  e l'uguaglianza  $f'(z_0) = f_z(z_0)$ .  $\square$

Il sistema (2.4) è un sistema di due equazioni alle derivate parziali dette *condizioni di monogeneità* o di *Cauchy-Riemann*.

1. Sia  $g \in H(\Omega)$ , definita da:

$$g(z) := u(x, y) - iv(x, y).$$

Provare che  $\operatorname{div} g(z) = 0$  e  $\operatorname{rot} g(z) = 0$  in  $\Omega$ .

Interpretazione fisica (delle condizioni di monogeneità): un fluido avente velocità vettoriale  $g(z) := u(x, y) - iv(x, y)$  è incompressibile (entro  $\Omega$  non vi sono né sorgenti né inghiottitoi) e il moto è irrotazionale.

**Osservazione 2.1.7.** Il teorema precedente afferma che una funzione olomorfa soddisfa contemporaneamente una condizione quantitativa (il sistema (2.4)) ed una qualitativa (la differenziabilità). Se manca uno di questi due requisiti, la funzione considerata non è olomorfa.

Ad esempio, la funzione  $f(z) = \bar{z}$  ( $f(x + iy) = x - iy$ ), non è olomorfa:  $f$  è differenziabile, in quanto  $u(x, y) = x$  e  $v(x, y) = -y$  sono differenziabili, ma non è soddisfatto il sistema di Cauchy-Riemann (2.4):

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y.$$

Consideriamo ora la funzione  $g(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , con

$$u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

e  $g(0, 0) = 0$ .

La funzione  $g$  non è olomorfa in  $(0, 0)$ : in  $(0, 0)$  valgono le condizioni di monogeneità<sup>1</sup>, ma  $u$  e  $v$  non sono differenziabili in  $(0, 0)$  in quanto positivamente omogenee di grado 1.

2. Sia  $f(z) = e^z$ ; allora  $u(x, y) = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = e^x \sin y$  sono differenziabili in  $\mathbb{C}$ :  $f$  è dunque differenziabile in  $\mathbb{C}$ . Le derivate parziali prime di  $u$  e  $v$  sono:

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y.$$

Sono soddisfatte le condizioni di monogeneità (2.4), per cui possiamo concludere che  $f$  è olomorfa in tutto  $\mathbb{C}$  (quindi è intera); la sua derivata in senso complesso è:

$$\frac{de^z}{dz} = f_x = e^x e^{iy} = e^z$$

3. Provare che la funzione  $g(z) = e^{iz}$  è olomorfa in  $\mathbb{C}$  e  $\frac{de^{iz}}{dz} = ie^{iz}$ , mentre  $h(z) = e^{\bar{z}}$  non è olomorfa in alcun punto di  $\mathbb{C}$ .

---

<sup>1</sup>Risulta:

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = 1, \quad u_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(0, k) - u(0, 0)}{k} = -1$$

e, analogamente,  $v_x(0, 0) = v_y(0, 0) = 1$ .

## 2.2 Regole di derivazione. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa

**Teorema 2.2.1.** *Siano  $f, g \in H(\Omega)$ , allora, per ogni  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ :*

- (i)  $c_1 f + c_2 g \in H(\Omega)$  (cioè  $H(\Omega)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ );
- (ii)  $f \cdot g \in H(\Omega)$  e  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ ;
- (iii) se  $g \neq 0$ , allora  $\frac{f}{g} \in H(\Omega)$  e  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

*Dimostrazione.* Analoga al caso reale. □

1. Calcolare la derivata in senso complesso di  $f(z) = z^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .

Siano  $P(z), Q(z)$  due polinomi; calcolare la derivata di  $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{Q(z) = 0\}$ .

2. Sussiste la seguente proposizione:

**Proposizione 2.2.2** (versione complessa della regola di L'Hôpital). *Siano  $f, g$  derivabili in senso complesso in  $z_0 \in \Omega$ , con  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  e  $g'(z_0) \neq 0$ . Allora:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

**Proposizione 2.2.3.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto, non vuoto, connesso e sia  $f$  una funzione reale definita in  $\Omega$ . Se  $f \in H(\Omega)$ , allora  $f$  è costante.*

*Dimostrazione.* Poiché  $f(x, y) = u(x, y)$  ( $f$  è a valori in  $\mathbb{R}$ ), per 2.1.6, punto (iii), risulta  $u_x = 0$  e  $u_y = 0$ . Perciò  $\nabla f = \nabla u = 0$  nel connesso  $\Omega$ , dunque  $f$  è costante in  $\Omega$ . □

**Osservazione 2.2.4.** Segue dalla proposizione precedente che le funzioni  $Re(z)$ ,  $Im(z)$  e  $|z|$  non sono olomorfe in  $\mathbb{C}$ , in quanto sono a valori in  $\mathbb{R}$  e non costanti.

Il Teorema 2.1.6 afferma che se  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  è olomorfa in  $\Omega$ , allora  $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $\Omega$ , quindi esistono  $u_x, v_x, u_y, v_y$ , ma nulla dice sulla loro continuità.

Sussiste il seguente fondamentale risultato.

**Teorema 2.2.5** (di Goursat). *Se  $f$  è olomorfa in  $\Omega$ , allora la funzione derivata in senso complesso  $z \mapsto f'(z)$  è olomorfa in  $\Omega$ .*<sup>2</sup>

Conseguenza importante di questo teorema è che una funzione olomorfa in  $\Omega$  è anche  $C^\infty(\Omega)$ : basta applicare 2.2.5 iterativamente alle derivate successive di  $f$ . Osserviamo che non esiste un corrispondente teorema nel campo reale.

Grazie al Teorema di Goursat 2.2.5, nel seguito considereremo la seguente equivalenza:

$$f \in H(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad f \in C^1(\Omega) \text{ e } f_{\bar{z}} = 0 \text{ in } \Omega.$$

**Teorema 2.2.6** (derivata della funzione composta). *Siano  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ ,  $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \in H(\Omega_1)$ ,  $g \in H(\Omega_2)$ . Allora  $g \circ f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C} \in H(\Omega_1)$  e, per ogni  $z_0 \in \Omega_1$ :*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

*Dimostrazione.* Sia  $f = u + iv$  e sia  $z_0 \in \Omega_1$ . Poiché  $f \in H(\Omega_1)$ , si ha  $f \in C^1(\Omega_1)$  e, da 2.1.6:

$$f_x = \frac{1}{i}f_y, \quad f' = f_x = u_x + iv_x \tag{2.5}$$

Risulta:

$$(g \circ f)(x, y) = g(u(x, y) + iv(x, y)) = g(u(x, y), v(x, y))$$

Dunque, poiché  $g \in H(\Omega_2)$ , si ha  $g \in C^1(\Omega_2)$  e:

$$g_u = \frac{1}{i}g_v, \quad g' = g_u \tag{2.6}$$

Poniamo ora  $F := g \circ f$ ; tale funzione è  $C^1(\Omega_1)$ . Le sue derivate parziali sono:

$$\begin{aligned} F_x &= g_u u_x + g_v v_x = g_u u_x + i g_u v_x = g_u(u_x + iv_x) = g_u f_x; \\ F_y &= g_u u_y + g_v v_y = g_u u_y + i g_u v_y = g_u(u_y + iv_y) = g_u f_y = g_u i f_x. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>La prova delicata del risultato profondo espresso dal Teorema di Goursat, si basa sulla dimostrazione del Teorema dell'integrale nullo e della formula integrale di Cauchy-Goursat, utilizzando la differenziabilità in  $\Omega$  della funzione  $f$ , olomorfa in  $\Omega$ . I teoremi 2.8.3 e 2.8.4, rispettivamente dell'integrale nullo e della formula integrale di Cauchy, saranno dimostrati nell'ipotesi che  $f$ , olomorfa in  $\Omega$ , sia anche di classe  $C^1(\Omega)$ .

dove abbiamo sfruttato (2.5) e (2.6). Notiamo che esse rispettano le condizioni di monogeneità (2.4): per il Teorema di Cauchy-Riemann 2.1.6  $g \circ f \in H(\Omega_1)$  e per la derivata in senso complesso risulta:

$$(g \circ f)'(z_0) = (g \circ f)_x(z_0) = g_u(f(z_0)) \cdot f_x(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

□

Diamo ora qualche esempio di derivazione di funzioni elementari.

### 3. (Definizione e derivazione delle funzioni trigonometriche complesse)

Definiamo:

$$z \mapsto \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \mapsto \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Tali funzioni sono intere, cioè olomorfe in tutto  $\mathbb{C}$ , poiché combinazione di funzioni intere. Allora esistono le rispettive derivate in senso complesso in ogni punto di  $\mathbb{C}$  e valgono:

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$$

Osserviamo che è ancora valida la relazione  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ , ma, a differenze delle corrispondenti funzioni reali, le funzioni intere seno e coseno in  $\mathbb{C}$  non sono limitate (cfr. 4.1.1).

Definiamo le funzioni seno e coseno iperbolico:

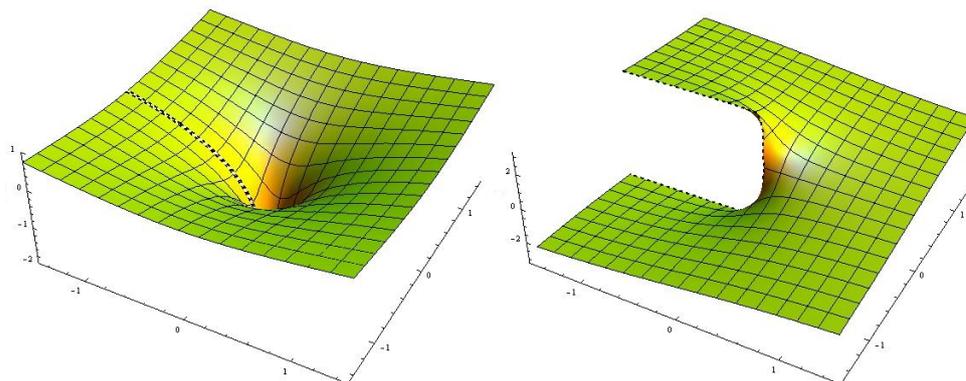
$$z \mapsto \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \mapsto \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Esse sono funzioni intere e si ha  $(\cosh z)' = \sinh z$ ,  $(\sinh z)' = \cosh z$  e  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ .

4. Provare che tutti e soli gli zeri della funzione complessa  $\sin z$  sono i punti della retta reale  $z_k = k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Di conseguenza la funzione  $\cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2})$  ha zeri solo nei punti della retta reale  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .
5. (Derivazione del logaritmo complesso) Analizziamo la funzione  $\log z$ , con  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_-$ : verifichiamo che essa è olomorfa (o meglio, che ogni sua determinazione è olomorfa) e calcoliamone la derivata. Per prima

cosa osserviamo che le infinite determinazioni del logaritmo complesso differiscono per una costante additiva: basterà quindi analizzare il logaritmo principale

$$\text{Log } z = \log |z| + i\text{Arg}(z)$$



**Figura 2.1:** A sinistra  $Re(\text{Log } z)$ ; a destra  $Im(\text{Log } z)$ .

Tale funzione è continua in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ; se  $z = x + iy$ , possiamo esplicitare l'espressione di  $\text{Log } z$ :

$$\text{Log}(x + iy) = \underbrace{\log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}_{u(x,y)} + i \underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{v(x,y)}$$

Le funzioni  $u$  e  $v$  sono  $C^1(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$ ; le rispettive derivate parziali sono:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x}{x^2 + y^2}; & u_y &= \frac{y}{x^2 + y^2}; \\ v_x &= -\frac{y}{x^2 + y^2}; & v_y &= \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Sono valide le condizioni di monogeneità: risulta allora  $\text{Log } z \in H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$  e si ha  $(\text{Log } z)' = (\text{Log } z)_x = \frac{1}{z}$ .

**Teorema 2.2.7** (derivata della funzione inversa di una funzione olomorfa).  
 Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \in H(\Omega)$ , con  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \Omega$ . Allora esiste localmente l'inversa  $f^{-1}$  di  $f$  di classe  $C^1$ , olomorfa e risulta:

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

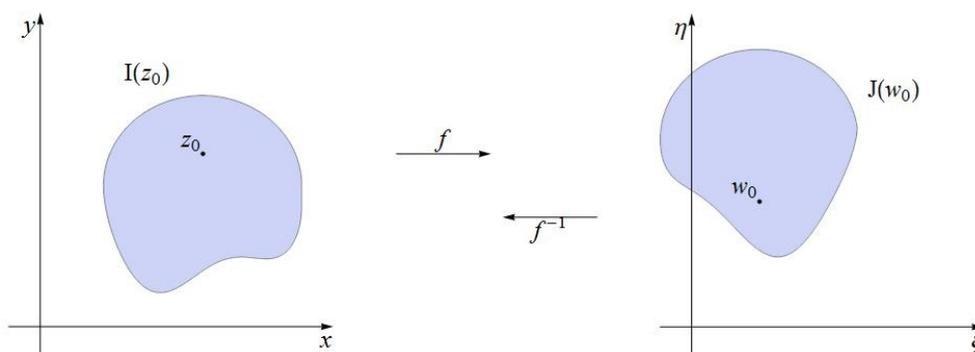
dove  $z = f^{-1}(w)$ .

*Dimostrazione.* Siano  $z_0 \in \Omega$  e  $w_0 = f(z_0)$ . Osserviamo per prima cosa che, se  $f = u + iv$ , valendo in  $z_0$  le condizioni di monogeneità si ha:

$$\begin{aligned} \det J_f(z_0) &= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}_{z=z_0} = u_x(z_0)v_y(z_0) - u_y(z_0)v_x(z_0) = \\ &= u_x^2(z_0) + v_x^2(z_0) = |f'(z_0)|^2 > 0 \end{aligned}$$

per l'ipotesi  $f'(z_0) \neq 0$ .

Da ciò segue, per il teorema di inversione locale, che esistono un intorno aperto  $I(z_0)$  di  $z_0$ , un intorno aperto  $J(w_0)$  di  $w_0$  e un'unica funzione  $f^{-1} : J(w_0) \rightarrow I(z_0)$ , con  $f^{-1} \in C^1(J(w_0))$  e  $f^{-1}(w_0) = z_0$ .(\*)



Consideriamo ora il rapporto incrementale di  $f^{-1}$  relativo al punto  $w_0$ ; si ha, per ogni  $w \in J(w_0) \setminus \{w_0\}$ :

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{f^{-1}(f(z)) - f^{-1}(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}$$

Per la continuità di  $f$  e  $f^{-1}$  rispettivamente in  $z_0$  e  $w_0$  si ha:

$$w \rightarrow w_0 \Leftrightarrow z \rightarrow z_0$$

Dunque:

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)},$$

il che prova il teorema.  $\square$

A partire da (\*) diamo un'altra dimostrazione della olomorfia di  $f^{-1}$  in  $J(w_0)$ , con i metodi propri dell'Analisi Complessa.

*Dimostrazione.* (\*) Per ogni  $w = (\xi, \eta) \in J(w_0)$ , posto

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = (\xi, \eta)$$

risulta:

$$f^{-1}(\xi, \eta) = (x, y) = g(\xi, \eta) + ih(\xi, \eta)$$

con  $g, h \in C^1(J(w_0))$  e quindi

$$\begin{cases} \xi = u(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \\ \eta = v(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \end{cases} \quad (2.7)$$

Proviamo che (omettendo per brevità le variabili)

$$\begin{cases} g_\xi = h_\eta \\ g_\eta = -h_\xi \end{cases}$$

Derivando (2.7) rispetto a  $\xi$  si ha (per le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) per  $u$  e  $v$ ):

$$\begin{cases} 1 = u_x g_\xi + u_y h_\xi = u_x g_\xi - v_x h_\xi \\ 0 = v_x g_\xi + v_y h_\xi = v_x g_\xi + u_x h_\xi \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} g_\xi = \frac{u_x}{u_x^2 + v_x^2} \\ h_\xi = -\frac{v_x}{u_x^2 + v_x^2} \end{cases}$$

Derivando (2.7) rispetto a  $\eta$ , si ha (per le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) per  $u$  e  $v$ ):

$$\begin{cases} 0 = u_x g_\eta + u_y h_\eta = u_x g_\eta - v_x h_\eta \\ 1 = v_x g_\eta + v_y h_\eta = v_x g_\eta + u_x h_\eta \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} g_\eta = \frac{v_x}{u_x^2 + v_x^2} \\ h_\eta = \frac{u_x}{u_x^2 + v_x^2} \end{cases}$$

Ciò prova che  $f^{-1}$  è olomorfa in  $J(w_0)$ . Inoltre:

$$(f^{-1})'(w) = f_\xi^{-1}(w) = g_\xi + ih_\xi = \frac{u_x}{u_x^2 + v_x^2} - \frac{iv_x}{u_x^2 + v_x^2} = \frac{1}{u_x + iv_x} = \frac{1}{f'(z)}$$

dove  $z = f^{-1}(w)$ . □

## 2.3 Integrale curvilineo delle funzioni complesse

**Definizione 2.3.1** (integrale curvilineo di funzione complessa).

Sia  $\gamma : [t', t''] \rightarrow \Omega$  una curva regolare orientata di primo estremo  $z_1 = \gamma(t')$  e di secondo estremo  $z_2 = \gamma(t'')$ . Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continua e  $\Omega$  contenga il sostegno di  $\gamma(z_1, z_2)$ .

Definiamo *integrale curvilineo* di  $f$  lungo l'arco orientato  $\gamma(z_1, z_2)$ :

$$\int_{\gamma(z_1, z_2)} f(z) dz := \int_{t'}^{t''} f[z(t)] \cdot z'(t) dt,$$

dove  $z(t) = (x(t), y(t))$ , con  $t \in [t', t'']$ , è la rappresentazione parametrica di  $\gamma(z_1, z_2)$ .

Se  $f = u + iv$ :

$$\begin{aligned} f[z(t)] \cdot z'(t) &= [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot (x'(t) + iy'(t)) = \\ &= u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) + \\ &+ i[v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] \end{aligned}$$

Pertanto, posto  $dz = dx + i dy$ :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(z_1, z_2)} f(z) dz &= \int_{t'}^{t''} [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt + \\ &+ i \int_{t'}^{t''} [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] dt = \\ &= \int_{\gamma(z_1, z_2)} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma(z_1, z_2)} (v dx + u dy) \end{aligned}$$

Ciò significa che l'integrale curvilineo di  $f(z)$  in  $dz$  ha per parte reale ed immaginaria gli integrali delle forme differenziali  $u dx - v dy$  e  $v dx + u dy$ .

Queste altro non sono che la parte reale e la parte immaginaria di  $f(z)dz = (u + iv)(dx + i dy)$ .

Per brevità, segnaliamo qui solo due proprietà:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(z_1, z_2)} f(z) dz &= - \int_{\gamma(z_2, z_1)} f(z) dz; \\ \left| \int_{\gamma(z_1, z_2)} f(z) dz \right| &\leq \int_{\gamma(z_1, z_2)} |f(z)| ds, \end{aligned}$$

dove:

$$ds = |dz| = |z'(t)| dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

1. Sia:

$$\gamma(t) = x_0 + r \cos t + i(y_0 + r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad r > 0$$

Risulta:

$$\gamma(t) = (x_0 + iy_0) + r(\cos t + i \sin t) = z_0 + re^{it},$$

dove  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Quest'ultima è la rappresentazione parametrica complessa della circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $r > 0$ .

## 2.4 Primitive di una funzione complessa. Forme differenziali

**Definizione 2.4.1** (Primitive di una funzione complessa continua). Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Una funzione  $F$  si dice *primitiva* di  $f$  in  $\Omega$  se  $F$  è olomorfa in  $\Omega$  e  $F' = f$  in  $\Omega$ .

Osserviamo che se  $F$  e  $G$  sono primitive di una stessa funzione  $f$ , esse differiscono di una costante additiva complessa; inoltre, dal Teorema di Goursat 2.2.5, si evince che, se  $f$  è dotata di primitiva in  $\Omega$ , necessariamente  $f$  deve essere olomorfa in  $\Omega$ .

**Proposizione 2.4.2.** Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Allora,  $f \in H(\Omega)$  se e solo se la forma differenziale  $f(z)dz = f(x, y)dx + if(x, y)dy$  è chiusa (irrotazionale).

*Dimostrazione.* Vale:

$$\begin{aligned} f \in H(\Omega) &\Leftrightarrow f \in C^1(\Omega) \text{ e } f_{\bar{z}}(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f \in C^1(\Omega) \text{ e } f_y = if_x \Leftrightarrow f(z)dz \text{ chiusa.} \end{aligned}$$

□

**Proposizione 2.4.3.** Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $\Omega$  aperto, non vuoto e semplicemente connesso<sup>3</sup>. Allora,  $f \in H(\Omega)$  se e solo se la forma differenziale  $f(z)dz = f(x, y)dx + if(x, y)dy$  è esatta (conservativa).

<sup>3</sup> $\Omega$  semplicemente connesso  $\Leftrightarrow \Omega$  connesso e ogni curva generalmente regolare, semplice e chiusa con sostegno in  $\Omega$  può essere deformata con continuità ad un punto di  $\Omega$  (senza uscire da  $\Omega$ ).

*Dimostrazione.* La tesi è conseguenza diretta della precedente proposizione, poiché in un insieme semplicemente connesso le forme differenziali chiuse sono anche esatte.  $\square$

**Proposizione 2.4.4.** *Sia  $f \in H(\Omega)$ , con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{C}$  non vuoto e semplicemente connesso. Allora esiste una primitiva di  $f$ .*

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $f$  è olomorfa in un insieme semplicemente connesso, perciò la forma differenziale  $f(z)dz$  è esatta. Allora esiste  $F \in C^1(\Omega)$  tale che  $dF = f dz$ , ovvero  $F_x dx + F_y dy = f dx + i f dy$ ; questa condizione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} F_x = f \\ F_y = i f \end{cases} \quad (2.8)$$

Proviamo che  $F \in H(\Omega)$  e che  $f = F'$ .  $F$  è già  $C^1(\Omega)$ : basta quindi verificare che soddisfa la condizione di Cauchy-Riemann; infatti, da (2.8) si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} [F_x + i F_y] = \frac{1}{2} [f - f] = 0.$$

Dunque  $F \in H(\Omega)$ . Inoltre, per la condizione di Cauchy-Riemann e per la prima in (2.8), otteniamo:

$$F' = F_x = f,$$

il che prova completamente la tesi.  $\square$

## 2.5 Logaritmo olomorfo

Proviamo l'olomorfia del logaritmo di una funzione olomorfa in  $\Omega$  aperto e semplicemente connesso.

**Proposizione 2.5.1** (esistenza del logaritmo olomorfo). *Sia  $\Omega$  aperto semplicemente connesso di  $\mathbb{C}$  e sia  $f \in H(\Omega)$ , con  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \Omega$ . Allora  $\log(f(z)) \in H(\Omega)$  e*

$$\frac{d}{dz} \log(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo

$$g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)} \in H(\Omega)$$

Per 2.4.4 esiste una primitiva  $h$  di  $g$  in  $\Omega$ , cioè:

$$\exists h \in H(\Omega) \ni h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad \forall z \in \Omega$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [e^{-h(z)} f(z)] &= -h'(z)e^{-h(z)} f(z) + e^{-h(z)} f'(z) = \\ &= -\frac{f'(z)}{f(z)} e^{-h(z)} f(z) + e^{-h(z)} f'(z) = 0, \end{aligned}$$

perciò:

$$e^{-h(z)} f(z) = c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Sia ora  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che  $e^{z_0} = c$ ; allora:

$$e^{-h(z)} f(z) = e^{z_0} \Rightarrow f(z) = e^{h(z)+z_0} \Rightarrow \log(f(z)) = h(z) + z_0 \in H(\Omega)$$

e

$$\frac{d}{dz} \log(f(z)) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

□

Diciamo *derivata logaritmica* di  $f \in H(\Omega)$  la funzione

$$z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}, \tag{2.9}$$

che risulta olomorfa negli stessi punti di  $f(z)$ , purché  $f(z) \neq 0$ .

## 2.6 Funzioni armoniche e armoniche coniugate

**Definizione 2.6.1** (funzione armonica). Sia  $h = h(x, y)$ ,  $h : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \in C^2(\Omega)$ . La funzione  $h$  si dice *armonica* in  $\Omega$  se:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \tag{2.10}$$

L'operatore:

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

è detto *operatore di Laplace* (o semplicemente *laplaciano*), mentre l'equazione (2.10) si dice *equazione di Laplace* ed è un'equazione alle derivate parziali lineare, del secondo ordine e omogenea.

**Proposizione 2.6.2.** *Sia  $f = u + iv \in H(\Omega)$ . Allora  $u$  e  $v$  sono armoniche in  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Per l'olomorfia di  $f$  le funzioni  $u$  e  $v$  rispettano le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) e, per il teorema di Goursat 2.2.5, sono  $C^\infty(\Omega)$ , quindi  $C^2(\Omega)$ ; derivando la prima equazione di (2.4) rispetto a  $x$  e la seconda rispetto a  $y$  si ha:

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{xy} \\ u_{yy} = -v_{yx} \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{yx} = v_{xy} - v_{xy} = 0$$

dove abbiamo applicato il Teorema di Schwartz:  $u$  è dunque armonica. In maniera analoga si prova che  $v$  è armonica.  $\square$

Consideriamo ora il seguente problema: data una funzione  $u = u(x, y)$  armonica nell'aperto connesso  $\Omega$ , determinare se esiste  $v = v(x, y)$  armonica in  $\Omega$  tale che  $f = u + iv \in H(\Omega)$ . Tale  $v$  si dice *armonica coniugata* di  $u$ .

**Proposizione 2.6.3.** *Sia  $u \in C^2(\Omega)$  armonica in  $\Omega$  aperto, non vuoto, semplicemente connesso. Allora esiste  $v$  armonica coniugata di  $u$ .*

*Dimostrazione.* L'esistenza di  $v$  significa che il sistema di equazioni (2.4) nella incognita  $v$  ha almeno una soluzione. Possiamo cercare  $v$  come primitiva della forma differenziale

$$v_x dx + v_y dy,$$

che, per le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4), coincide con la forma differenziale

$$-u_y dx + u_x dy,$$

che risulta essere esatta (in quanto  $-u_{yy} = u_{xx}$ , poiché  $u$  è armonica) in  $\Omega$  semplicemente connesso, e quindi dotata di primitiva in  $\Omega$ .  $\square$

1. Sia

$$u(x, y) = 2 + 3x - x^2 + y^2.$$

Risulta  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  e:

$$u_{xx}(x, y) = -2, \quad u_{yy}(x, y) = 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta u = 0,$$

dunque  $u$  è armonica. Costruiamo la funzione armonica  $v$  coniugata di  $u$ . Cerchiamo  $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$  tale che:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v_y = u_x \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene (a meno di costanti additive):

$$v(x, y) = 3y - 2xy$$

Naturalmente  $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , è armonica ed è la coniugata di  $u$ . La funzione

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = 2 + 3x - x^2 + y^2 + i(3y - 2xy)$$

è olomorfa in  $\mathbb{C}$ .

2. Stabilire se la funzione:

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

è armonica in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e costruirne l'eventuale armonica coniugata in  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_-$ .

## 2.7 Funzioni olomorfe e trasformazioni conformi

**Teorema 2.7.1.** *Sia  $f \in H(\Omega)$  e supponiamo  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \Omega$ . Allora  $f$  è conforme (conserva gli angoli nei punti di incidenza di due curve regolari).*

*Dimostrazione.* Siano  $I(z_0)$  e  $J(w_0)$  gli intorni aperti individuati dal teorema di inversione locale, dove  $z_0 = (x_0, y_0)$  e  $w_0 = f(z_0)$ . Sia  $\gamma$  una curva regolare di equazione parametrica  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , con  $t \in [a, b]$ , con sostegno in  $I(z_0)$ . Sia  $t_0 \in [a, b]$  e  $z_0 = z(t_0)$ . Dalla regolarità di  $\gamma$  segue che:

$$x'^2(t) + y'^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.11)$$

Sia ora  $\Gamma = f \circ \gamma$  di equazione parametrica  $w(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ , il cui sostegno è necessariamente contenuto nell'intorno aperto  $J(w_0)$ . Proviamo preliminarmente che anche  $\Gamma$  è regolare. Poiché  $\Gamma$  è immagine di  $\gamma$  tramite  $f$  si ha:

$$\xi(t) + i\eta(t) = w(t) = f(x(t), y(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t));$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria del primo e dell'ultimo membro risulta:

$$\begin{cases} \xi(t) = u(x(t), y(t)) \\ \eta(t) = v(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (2.12)$$

Poiché  $u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t)) \in C^1$ , rimane da provare che  $\xi'^2(t) + \eta'^2(t) > 0$  per ogni  $t \in [a, b]$ .

Derivando (2.12) rispetto a  $t$ :

$$\begin{cases} \xi' = u_x x' + u_y y' = u_x x' - v_x y' \\ \eta' = v_x x' + v_y y' = v_x x' + u_x y' \end{cases}$$

dove abbiamo usato le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4). Elevando al quadrato e sommando otteniamo:

$$\xi'^2 + \eta'^2 = (u_x^2 + v_x^2)(x'^2 + y'^2) > 0 \quad (2.13)$$

in quanto  $u_x^2 + v_x^2 = |f'|^2 > 0$  per ipotesi e  $x'^2 + y'^2 > 0$  per (2.11).

Indicato con  $\vartheta$  l'angolo tra la tangente a  $\gamma$  in  $z_0$  e il semiasse reale positivo, si ha:

$$\cos \vartheta = \frac{x'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}}, \quad \sin \vartheta = \frac{y'(t_0)}{\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}}$$

e, indicato con  $\Theta$  l'angolo tra la tangente a  $\Gamma$  in  $w_0$  e il semiasse reale positivo, si ha:

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{\xi'(t_0)}{\sqrt{\xi'^2(t_0) + \eta'^2(t_0)}} = \frac{u_x(x_0, y_0) \cos \vartheta - v_x(x_0, y_0) \sin \vartheta}{|f'(x_0, y_0)|}, \\ \sin \Theta &= \frac{\eta'(t_0)}{\sqrt{\xi'^2(t_0) + \eta'^2(t_0)}} = \frac{v_x(x_0, y_0) \cos \vartheta + u_x(x_0, y_0) \sin \vartheta}{|f'(x_0, y_0)|}, \end{aligned}$$

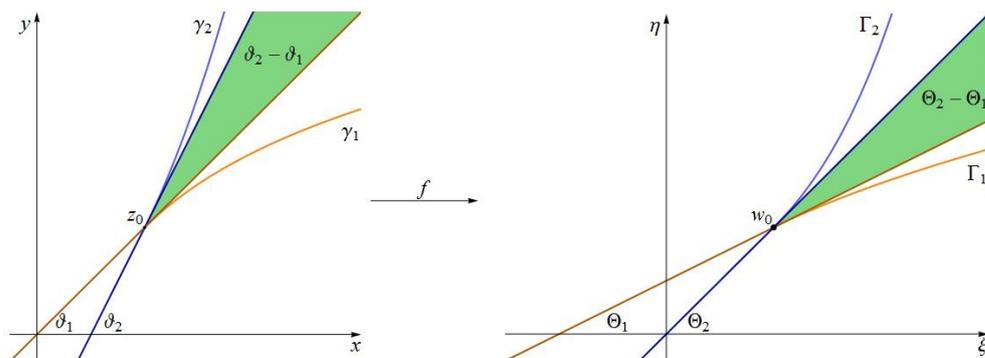
in cui abbiamo utilizzato (2.13) e sostituito le espressioni note di  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \vartheta$  e  $|f'(x_0, y_0)|$ . Sia ora  $\delta \in ]-\pi, \pi]$  tale che:

$$\cos \delta = \frac{u_x(x_0, y_0)}{|f'(x_0, y_0)|}, \quad \sin \delta = \frac{v_x(x_0, y_0)}{|f'(x_0, y_0)|}.$$

Evidentemente  $\delta$  è univocamente determinato, dipende da  $f$  e dal punto  $z_0 = (x_0, y_0)$ , ma *non dipende dalla curva  $\gamma$* . Per le formule di addizione e sottrazione di seno e coseno, risulta:

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \cos \delta \cos \vartheta - \sin \delta \sin \vartheta = \cos(\vartheta + \delta) \\ \sin \Theta &= \sin \delta \cos \vartheta + \cos \delta \sin \vartheta = \sin(\vartheta + \delta) \end{aligned}$$

Dunque  $\Theta = \vartheta + \delta$ . Consideriamo, allora, due curve per  $z_0$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , e i rispettivi angoli  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  formati dalle tangenti  $t_1$  e  $t_2$  in  $z_0$  e il semiasse reale positivo; consideriamo poi le curve  $\Gamma_1 = f \circ \gamma_1$  e  $\Gamma_2 = f \circ \gamma_2$ , passanti per  $w_0 = f(z_0)$ , le cui tangenti in  $w_0$ ,  $s_1$  e  $s_2$ , formano gli angoli  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  con il semiasse reale positivo.



L'angolo tra  $t_1$  e  $t_2$  è  $\vartheta_2 - \vartheta_1$ ; l'angolo tra  $s_1$  e  $s_2$  è:

$$\Theta_2 - \Theta_1 = (\vartheta_2 + \delta) - (\vartheta_1 + \delta) = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

Dunque  $f$  lascia invariati gli angoli formati tra le rette tangenti. □

**Osservazione 2.7.2.** L'ipotesi  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \Omega$  è essenziale. Infatti, per la funzione olomorfa in  $\mathbb{C}$

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \xi + i\eta,$$

si ha:

$$f'(z) = 2z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

e risulta  $f'(0) = 0$ . Le due semirette uscenti dall'origine nel piano  $\mathbb{C}_{(x,y)}$ , di equazioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

formano un angolo di  $\frac{\pi}{4}$  radianti. Le due semirette immagini tramite la  $f$ , uscenti dall'origine del piano  $\mathbb{C}_{(\xi,\eta)}$ , di equazioni:

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ \xi \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta \geq 0 \end{cases}$$

formano un angolo di  $\frac{\pi}{2}$  radianti.

## 2.8 Teorema dell'integrale nullo e formula integrale di Cauchy

**Definizione 2.8.1** (dominio di  $\mathbb{R}^2$ ). Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato;  $D$  si dice *dominio* di  $\mathbb{R}^2$  se

$$D = \overline{\overset{\circ}{D}}$$

( $\overset{\circ}{D}$  è la chiusura del suo interno).  $D$  si dice *dominio regolare* se la sua frontiera è costituita da un numero finito di curve regolari (o generalmente regolari), semplici e chiuse.

Per tali insiemi, in  $\mathbb{R}^2$  vale il seguente teorema.

**Teorema 2.8.2** (di Gauss-Green). Sia  $D$  dominio regolare di  $\mathbb{R}^2$  e siano  $X : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $Y : D \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^0(D)$ . Se  $X_x(x, y), Y_y(x, y) \in C^0(D)$ , allora vale la seguente uguaglianza:

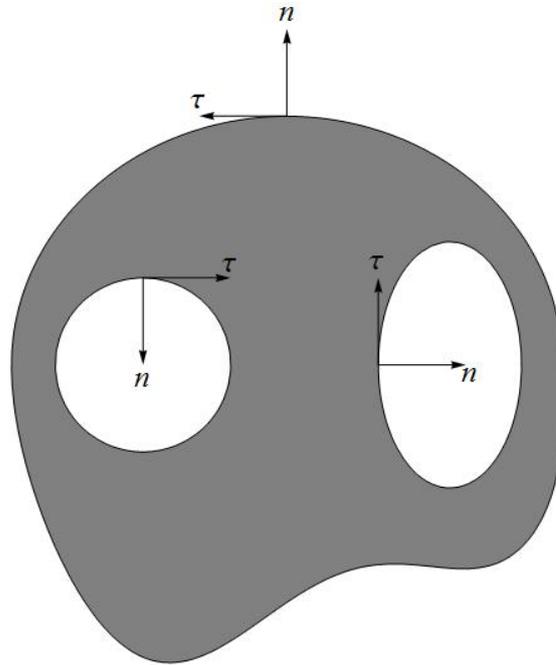
$$\iint_D (X_x + Y_y) dx dy = \int_{+\partial D} X dy - Y dx,$$

dove  $+\partial D$  indica che il verso di percorrenza di  $\partial D$  è scelto (convenzionalmente) in modo tale da avere sempre  $\overset{\circ}{D}$  sulla sinistra<sup>4</sup>.

**Teorema 2.8.3** (dell'integrale nullo di Cauchy). Siano  $f \in H(\Omega)$  e  $D \subset \Omega$  un dominio regolare. Allora:

$$\int_{+\partial D} f(z) dz = 0 \tag{2.14}$$

<sup>4</sup>Ciò corrisponde ad orientare il vettore tangente  $\tau$  in modo da farlo coincidere col vettore normale  $n$  a  $\partial D$  ed uscente da  $D$  ruotato di  $\pi/2$  radianti in senso antiorario.



*Dimostrazione.* Siano  $f = u + iv$  e  $dz = dx + i dy$ . Applicando il Teorema di Gauss-Green 2.8.2 e le condizioni di monogeneità otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} f(z) dz &= \int_{+\partial D} (u + iv)(dx + i dy) = \\ &= \int_{+\partial D} (u dx - v dy) + i \int_{+\partial D} (v dx + u dy) = \\ &= \iint_D (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

□

Osserviamo esplicitamente che la (2.14) vale per domini regolari  $D$  di connessione  $n$  qualsiasi. Infatti, da  $D$  a connessione  $n$  si può dedurre, con  $n - 1$  tagli, un dominio regolare semplicemente connesso.

**Teorema 2.8.4** (Formula integrale di Cauchy). *Siano  $f \in H(\Omega)$  e  $D \subset \Omega$  un dominio regolare. Allora:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) \quad \forall \zeta \in \mathring{D} \quad (2.15)$$

*Dimostrazione.* Siano  $\zeta \in \mathring{D}$ ,  $0 < \varepsilon < \text{dist}(\zeta, \partial D)$  e consideriamo  $B_\varepsilon(\zeta)$ , la cui frontiera ha equazione parametrica:

$$z(t) = \zeta + \varepsilon e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Definiamo l'insieme  $D_\varepsilon := D \setminus B_\varepsilon(\zeta)$ , la cui frontiera è  $\partial D_\varepsilon = \partial D \cup \partial B_\varepsilon(\zeta)$  (per orientare positivamente  $\partial D_\varepsilon$ ,  $\partial D$  e  $\partial B_\varepsilon(\zeta)$  sono orientate rispettivamente in senso antiorario ed orario). Allora  $D_\varepsilon$  è un dominio regolare in  $\Omega$  e la funzione

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z - \zeta}$$

è olomorfa in  $D_\varepsilon$  perchè  $z - \zeta \neq 0$  in  $D_\varepsilon$ . Applicando il teorema 2.8.3 a questa funzione e al dominio regolare  $D_\varepsilon$  otteniamo:

$$\int_{+\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 0 \quad (2.16)$$

per ogni  $0 < \varepsilon < \text{dist}(\zeta, \partial D)$ . Risulta:

$$\int_{+\partial B_\varepsilon(\zeta)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \cdot i\varepsilon e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(\zeta + \varepsilon e^{it}) dt.$$

Ora, la funzione  $f(\zeta + \varepsilon e^{it})$  è continua nella variabile  $t$  sul compatto  $[0, 2\pi]$ , per ogni  $\varepsilon > 0$ , dunque ivi uniformemente continua. Pertanto, con passaggio al limite sotto il segno d'integrale:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{+\partial B_\varepsilon(\zeta)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = i \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\zeta + \varepsilon e^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} f(\zeta) dt = 2\pi i f(\zeta).$$

Tenendo conto dell'orientazione di  $\partial D_\varepsilon$ , dalla (2.16) segue:

$$\int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_{+\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \int_{-\partial B_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_{+\partial B_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

e per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ :

$$\int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 2\pi i f(\zeta),$$

da cui la tesi. □

**Osservazione 2.8.5.** La funzione:

$$\frac{1}{z - \zeta}$$

si chiama *nucleo (integrale) di Cauchy*; essa è di classe  $C^\infty$  rispetto alle variabili  $z$  e  $\zeta$  purché  $z \neq \zeta$ . Inoltre, per  $z \in \partial D$  e  $\zeta \in \mathring{D}$ , il nucleo di Cauchy è olomorfo in  $\zeta$ .

## 2.9 Teorema di Morera. Teorema della media integrale di Gauss. Principio del massimo (minimo) modulo

Il seguente risultato esprime una condizione sufficiente (ma anche necessaria per 2.8.3) affinché una funzione continua sia olomorfa.

**Teorema 2.9.1** (di Morera). *Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \in C^0(\Omega)$ . Supponiamo che*

$$\int_{+\partial T} f(z) dz = 0$$

per ogni triangolo  $T$  tale che  $\overline{T} \subseteq \Omega$ . Allora  $f \in H(\Omega)$

*Dimostrazione.* Poiché il concetto di olomorfia è un concetto locale, siano  $z_0 \in \Omega$  e  $r > 0$  tale che  $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$ . Siano  $z, z+h$ , (con  $h \neq 0$ ) due punti distinti in  $B_r(z_0)$ . Sia  $F$  l'applicazione tale che:

$$z \in B_r(z_0) \mapsto F(z) := \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Detto  $\overline{T}_z$  il triangolo di vertici consecutivi (in senso antiorario)  $z_0, z+h, z$ , si ha per ipotesi:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{+\partial T_z} f(z) dz = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta + \int_{z+h}^z f(\zeta) d\zeta + \int_z^{z_0} f(\zeta) d\zeta = \\ &= F(z+h) + \int_{z+h}^z f(\zeta) d\zeta - F(z). \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta \Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.$$

Per la continuità di  $f$  in  $\Omega$ , al tendere di  $h$  a 0, dall'ultima uguaglianza si ha:

$$F'(z) = f(z).$$

Pertanto esiste la derivata in senso complesso di  $F$  in ogni punto di  $B_r(z_0)$ , e quindi, per l'arbitrarietà di  $z_0$ , in ogni punto di  $\Omega$ . Dunque  $F \in H(\Omega)$  e, per il Teorema di Goursat 2.2.5,  $f = F' \in H(\Omega)$ .  $\square$

**Teorema 2.9.2** (della media integrale di Gauss). *Siano  $f \in H(\Omega)$ ,  $z_0 \in \Omega$  e  $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$ . Allora:*

(i)

$$\int_{+\partial B_r(z_0)} f(z) dz = 0$$

(ii)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) \quad \forall \zeta \in B_r(z_0)$$

*In particolare, poiché l'equazione parametrica di  $\partial B_r(z_0)$  è  $z(t) = z_0 + re^{it}$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ , si ha:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi r} \int_{+\partial B_r(z_0)} f(z) ds$$

*Dimostrazione.* I punti (i) e (ii) seguono direttamente da 2.8.3 e 2.8.4 applicati al disco chiuso  $\overline{B}_r(z_0)$ ; da (ii), per  $\zeta = z_0$  si ha:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{+\partial B_r(z_0)} f(z) ds \end{aligned}$$

poiché, su  $\partial B_r(z_0)$ ,  $ds = r dt$ . □

**Teorema 2.9.3** (Principio del massimo modulo). *Il modulo  $|f|$  di una funzione  $f$  olomorfa e non costante in  $\Omega$  non ha punti di massimo relativo interni; per ogni dominio  $D \subset \Omega$  il modulo di  $f$ ,  $|f|$ , assume il suo massimo esclusivamente su  $\partial D$ .*

Alla dimostrazione premettiamo il seguente risultato

**Proposizione 2.9.4.** *Sia  $f \in H(\Omega)$ . Se  $|f|$  è costante in  $\Omega$ , allora  $f$  è costante in  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $f = u + iv$  olomorfa in  $\Omega$ . Allora  $f \in C^1(\Omega)$  e valgono in  $\Omega$  le condizioni di monogeneità:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Ora:

$$|f|^2 = u^2 + v^2 =: c^2$$

Se  $c = 0$ ,  $f = |f| = 0$  e la tesi segue banalmente. Se, invece,  $c \neq 0$ , derivando l'espressione precedente rispetto a  $x$  e  $y$  otteniamo in  $\Omega$ :

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases}$$

Per le condizioni di monogeneità risulta in  $\Omega$ :

$$\begin{cases} uu_x - vv_y = 0 \\ vv_x + uu_y = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema omogeneo nelle incognite  $u_x$  e  $u_y$  è  $u^2 + v^2 = c^2 > 0$ , pertanto l'unica soluzione è  $u_x = 0, u_y = 0$  in  $\Omega$ . Per le condizioni di Cauchy-Riemann si ha  $v_x = 0, v_y = 0$ , cioè  $\nabla u = \nabla v = 0$  in  $\Omega$ . Poiché  $\Omega$  è connesso,  $u$  e  $v$  risultano costanti in  $\Omega$ , perciò  $f$  è costante in  $\Omega$ .  $\square$

*Dimostrazione del Teorema 2.9.3.* Supponiamo che  $z_0 \in \Omega$  sia di massimo relativo per  $|f|$ . Allora esiste  $B_r(z_0) \subset \Omega$  tale che:

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in B_r(z_0)$$

Poiché  $|f|$  non può essere costante in  $B_r(z_0)$  (per 2.9.4), esiste almeno un punto  $\zeta \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  tale che  $|f(\zeta)| < |f(z_0)|$ . Sia ora  $\rho := |\zeta - z_0|$  e sia  $c \in \mathbb{R}_+$  tale che  $|f(\zeta)| < c < |f(z_0)|$ . Allora la circonferenza di raggio  $\rho$  e centro  $z_0$  può essere decomposta in due archi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  tali che  $\zeta \in \gamma_1$  e  $|f(z)| \leq c$  per ogni  $z \in \gamma_1$ . Per il teorema della media integrale di Gauss 2.9.2:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{+\partial B_\rho(z_0)} f(z) ds = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{+\gamma_1} f(z) ds + \frac{1}{2\pi\rho} \int_{+\gamma_2} f(z) ds$$

Posto  $l(\gamma)$  la lunghezza di una curva regolare  $\gamma$ , ne segue:

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi\rho} \int_{+\gamma_1} |f(z)| ds + \frac{1}{2\pi\rho} \int_{+\gamma_2} |f(z)| ds \leq \\ &\leq \frac{l(\gamma_1)}{2\pi\rho} \cdot c + \frac{l(\gamma_2)}{2\pi\rho} \cdot |f(z_0)| < \\ &< \frac{l(\gamma_1)}{2\pi\rho} \cdot |f(z_0)| + \frac{2\pi\rho - l(\gamma_1)}{2\pi\rho} \cdot |f(z_0)| = |f(z_0)|, \end{aligned}$$

il che è assurdo.

Inoltre, per ogni dominio  $D \subset \Omega$ , poiché  $|f| \in C^0(D)$ , per il Teorema di Weierstrass  $|f|$  ha massimo in  $D$ ; non potendo assumere massimo in  $\overset{\circ}{D}$ ,  $|f|$  assumerà il massimo necessariamente solo su  $\partial D$ .  $\square$

**Osservazione 2.9.5** (Principio del minimo modulo). Supponiamo  $f \neq 0$  in  $\Omega$ . Il Principio del massimo modulo applicato a  $\frac{1}{f}$  porta al seguente

*Principio del minimo modulo:*

*Sia  $f \in H(\Omega)$ . Se esiste un punto  $z_0 \in \Omega$  tale che*

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| > 0 \quad \forall z \in \Omega,$$

*allora  $f$  è necessariamente costante in  $\Omega$ .*

Osserviamo che il Principio del minimo modulo non vale se  $f$  ha zeri in  $\Omega$ . Infatti, siano  $\Omega = B_1(0)$  e  $f(z) = z$ . Allora risulta

$$|f(z)| \geq |f(0)| = 0 \quad \forall z \in B_1(0),$$

ma  $f$  non è costante.

# Capitolo 3

## Olomorfia e analiticità

### 3.1 Olomorfia di integrali curvilinei rispetto a parametri complessi. Formula integrale di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa

**Lemma 3.1.1.** *Sia  $\varphi(z, t)$  continua nelle due variabili  $z$  (complessa) e  $t$  (reale). Sia  $\gamma$  una curva generalmente regolare il cui sostegno sia contenuto nel dominio di definizione di  $\varphi$ . Allora, se  $\varphi$  è  $C^1$  nella variabile  $t$ , la funzione di  $t$ :*

$$\Phi(t) := \int_{\gamma} \varphi(z, t) dz$$

è  $C^1$  nella variabile  $t$  e la sua derivata è data da:

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} dz.$$

*Dimostrazione.* Fissiamo  $t_0$  e consideriamo il rapporto incrementale:

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \int_{\gamma} [\varphi(z, t) - \varphi(z, t_0)] dz$$

- (a) Se  $\varphi$  è a valori in  $\mathbb{R}$ , per il Teorema del valor medio esiste  $t_z$ , dipendente da  $z$  e compreso tra  $t$  e  $t_0$ , tale che:

$$\frac{\varphi(z, t) - \varphi(z, t_0)}{t - t_0} = \frac{\partial \varphi(z, t_z)}{\partial t}$$

Allora:

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(z, t_z)}{\partial t} dz$$

Ne segue:

$$\left| \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} - \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} dz \right| \leq \int_{\gamma} \left| \frac{\partial \varphi(z, t_z)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} \right| |dz| \quad (3.1)$$

Per la uniforme continuità di  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  su  $\gamma \times [t_0, t]$ , si può applicare il teorema di passaggio al limite per  $t \rightarrow t_0$  sotto il segno d'integrale al secondo membro della (3.1) e si ha:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} - \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} dz \right| = 0.$$

Dunque esiste il limite che definisce  $\frac{d\Phi}{dt}(t_0)$ : la tesi segue per l'arbitrarietà di  $t_0$ .

(b) Se  $\varphi = u + iv$ , si applica il punto (a) separatamente a  $u$  e  $v$ .

Inoltre, la continuità di  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  implica la continuità di  $\frac{d\Phi}{dt}$ . □

**Proposizione 3.1.2** (Olmorfia di integrali curvilinei rispetto a parametri complessi). *Sia  $\varphi(z, \zeta)$  continua nella variabile  $z$  (complessa) e olomorfa nella variabile  $\zeta = \xi + i\eta$ . Supponiamo che  $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(z, \zeta)$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(z, \zeta)$  siano continue. Sia  $\gamma$  una curva generalmente regolare il cui sostegno sia contenuto nel dominio di definizione di  $\varphi$ . Allora l'integrale curvilineo:*

$$\Phi(\zeta) := \int_{\gamma} \varphi(z, \zeta) dz$$

*è una funzione olomorfa rispetto a  $\zeta$  ed ha derivata in senso complesso:*

$$\Phi'(\zeta) = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial \xi} = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(z, \zeta)}{\partial \xi} dz = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(z, \zeta)}{\partial \zeta} dz.$$

*Dimostrazione.* Applichiamo 3.1.1, prima con  $t = \xi$  e poi con  $t = \eta$ , all'integrale che definisce  $\Phi(\zeta)$ ; otteniamo:

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial \xi} = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(z, \zeta)}{\partial \xi} dz, \quad \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial \eta} = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(z, \zeta)}{\partial \eta} dz$$

da cui:

$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\xi} + i\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\eta} = \int_{\gamma} \left[ \frac{\partial\varphi(z, \zeta)}{\partial\xi} + i\frac{\partial\varphi(z, \zeta)}{\partial\eta} \right] dz. \quad (3.2)$$

Per l'ipotesi di olomorfia di  $\varphi(z, \zeta)$  rispetto a  $\zeta$  risulta (condizioni di monogeneità in forma complessa):

$$\frac{\partial\varphi(z, \zeta)}{\partial\xi} + i\frac{\partial\varphi(z, \zeta)}{\partial\eta} = 0.$$

Sostituendo nell'integrale al secondo membro di (3.2) otteniamo:

$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\xi} + i\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\eta} = 0$$

cioè  $\Phi$  verifica le condizioni di monogeneità in forma complessa. Inoltre  $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$  e  $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$  sono continue per ipotesi:  $\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}$  e  $\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}$  risultano  $C^0$ , dunque  $\Phi$  è  $C^1$ . Per la caratterizzazione delle funzioni olomorfe (Teorema di Cauchy-Riemann 2.1.6),  $\Phi$  è olomorfa e, per la sua derivata in senso complesso, si ha:

$$\Phi'(\zeta) = \frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\xi} = \int_{\gamma} \frac{\partial\varphi(z, \zeta)}{\partial\xi} dz = \int_{\gamma} \frac{\partial\varphi(z, \zeta)}{\partial\zeta} dz,$$

osservato che:

$$\Phi'(\zeta) = \frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\varphi(z, \zeta)}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi(z, \zeta)}{\partial\zeta}.$$

□

La proposizione precedente è utile per provare la formula integrale per le derivate di una funzione olomorfa, a partire dalla sua rappresentazione integrale di Cauchy.

**Teorema 3.1.3** (Formula integrale di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa).

Siano  $f \in H(\Omega)$  e  $D \subset \Omega$  un dominio regolare. Allora:

$$f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}} dz \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \forall \zeta \in \mathring{D} \quad (3.3)$$

*Dimostrazione.* Per il Teorema di Goursat,  $f \in C^\infty(\Omega)$ . Procediamo per induzione su  $k \in \mathbb{N}_0$ . Per  $k = 0$  la tesi è vera, come provato in 2.8.4:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad \forall \zeta \in \mathring{D}.$$

Per  $k = 1$ , per la proposizione 3.1.2:

$$\begin{aligned} f'(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\zeta} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{f(z)}{z - \zeta} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz \end{aligned}$$

Supponiamo vera la tesi per  $k = n - 1$ :

$$f^{(n-1)}(\zeta) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^n} dz$$

Allora, per la proposizione 3.1.2:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(\zeta) &= \frac{d}{d\zeta} f^{(n-1)}(\zeta) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{f(z)}{(z - \zeta)^n} \right) dz = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz \end{aligned}$$

Dunque la tesi è valida per  $k = n$ , il che prova il teorema per induzione.  $\square$

1. Provare che:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} \frac{\sin z}{z^2} dz &= 2\pi i; \\ \int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz &= 2\pi i. \end{aligned}$$

## 3.2 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

La teoria della successioni e serie di funzioni di variabile complessa non presenta novità rispetto al caso reale. Valgono le nozioni di convergenza puntuale e uniforme per le successioni di funzioni e di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale per le serie di funzioni complesse, basta utilizzare il modulo al posto del valore assoluto. Per lo studio delle funzioni olomorfe è fondamentale lo studio delle serie di potenze in campo complesso.

**Definizione 3.2.1** (serie di potenze in  $\mathbb{C}$ ). Sia  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  una successione di numeri complessi e sia  $z_0 \in \mathbb{C}$ . La serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{3.4}$$

si dice *serie di potenze* con coefficienti  $a_k$  e di punto iniziale  $z_0$ .

Si definisce il *raggio di convergenza*  $\rho$  di (3.4) come segue:

$$\rho := \sup \left\{ r \in [0, +\infty[ : \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k < +\infty \right\}$$

Come nel caso reale  $\rho \in [0, +\infty]$ . Vale il seguente teorema.

**Teorema 3.2.2** (Proprietà delle serie di potenze in  $\mathbb{C}$ ). *Data la serie di potenze (3.4) di raggio di convergenza  $\rho \in [0, +\infty]$  valgono:*

- (i) *se  $\rho = 0$  allora la serie (3.4) converge solo per  $z = z_0$ ;*
- (ii) *se  $\rho = +\infty$  allora la serie (3.4) converge assolutamente per ogni  $z \in \mathbb{C}$  e converge totalmente in ogni disco  $B_r(z_0)$ ;*
- (iii) *se  $0 < \rho < +\infty$  allora la serie (3.4) converge assolutamente per ogni  $z \in B_\rho(z_0)$  (disco di convergenza), converge totalmente in ogni intorno chiuso di  $z_0$  contenuto in  $B_\rho(z_0)$  e non converge per alcuno  $z$  tale che  $|z - z_0| > \rho$ ;*
- (iv) *posto  $l := \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ , si ha  $\rho = 1/l$ , con le convenzioni che se  $l = 0$  allora  $\rho = +\infty$  e se  $l = +\infty$  allora  $\rho = 0$ . Da questa formula segue che anche la serie derivata di (3.4) ha raggio di convergenza  $\rho$ .*

Osserviamo che, se  $a_k \neq 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  ed esiste  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = l$ , allora il raggio di convergenza della serie (3.4) è  $\rho = 1/l$  (con la usuale convenzione).

### 3.3 Teorema di Taylor. Teorema di convergenza di Weierstrass. Olomorfia della somma di una serie di potenze nel disco aperto di convergenza

**Definizione 3.3.1** (funzione analitica). Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ;  $f$  si dice *analitica* in  $\Omega$  se:

$$\forall z_0 \in \Omega \quad \exists R > 0 \quad \text{e} \quad \exists (c_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \quad \text{t.c.}$$

$$\overline{B}_R(z_0) \subset \Omega \quad \text{e} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in B_R(z_0).$$

Quindi una funzione è analitica se si può esprimere localmente come somma di una serie di potenze.

**Teorema 3.3.2** (di Taylor). *Sia  $f \in H(\Omega)$ . Allora  $f$  è analitica in  $\Omega$  e per ogni  $\bar{B}_R(z_0) \subset \Omega$  si ha:*

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (\zeta - z_0)^k \quad \forall \zeta \in B_R(z_0)$$

dove:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

*Dimostrazione.* Per 2.8.4 risulta:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad \forall \zeta \in B_R(z_0).$$

Si ha:

$$\frac{f(z)}{z - \zeta} = \frac{f(z)}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \quad (3.5)$$

Poiché  $z \in \partial B_R(z_0)$ , si ha  $|z - z_0| = R$ ; inoltre  $|\zeta - z_0| < R$ , perciò:

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

Dunque, tornando alla (3.5), riconosciamo nel secondo fattore all'ultimo membro la somma della serie geometrica (nella variabile  $z$ )

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k$$

Sostituendo in (3.5) otteniamo la rappresentazione in serie di potenze del nucleo di Cauchy:

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k$$

da cui:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k dz$$

Sia ora

$$h := \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

Allora, per il Teorema del Weierstrass applicato a  $|f|$  sul compatto  $\partial B_R(z_0)$ :

$$\left| \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k \right| \leq \frac{|f(z)|}{R} \sum_{k=0}^{+\infty} h^k \leq \left( \max_{z \in \partial B_R(z_0)} |f(z)| \right) \frac{1}{R} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h^k$$

La serie integranda è dominata da una serie numerica convergente: per il criterio di Weierstrass essa è totalmente e quindi uniformemente convergente rispetto a  $z$  e si può integrare per serie. Ne segue che:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^k} dz = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right) (\zeta - z_0)^k \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (\zeta - z_0)^k, \end{aligned}$$

per il teorema 3.1.3. □

**Proposizione 3.3.3.** *Se  $D$  è un dominio regolare e  $f \in C^0(\partial D)$ , la funzione definita da:*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad \forall \zeta \in \mathring{D},$$

*è olomorfa in  $\mathring{D}$ .*

*Dimostrazione.* Segue da 2.8.5 e da 3.1.2. □

**Teorema 3.3.4** (di convergenza di Weierstrass). *Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni olomorfe in  $\Omega$ . Supponiamo che per ogni dominio regolare  $D \subseteq \Omega$  risulti  $f_n \rightrightarrows f$  su  $D$ . Allora  $f \in H(\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $D \subseteq \Omega$  un dominio regolare. Per il Teorema di rappresentazione integrale di Cauchy applicato a ciascuna  $f_n$  si ha:

$$f_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f_n(z)}{z - \zeta} dz \quad \forall \zeta \in \mathring{D}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora, su  $\partial D \subset D$ , si ha  $f_n \rightrightarrows f$  (continua), perciò è possibile effettuare il passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f_n(z)}{z - \zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(z)}{z - \zeta} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad \forall \zeta \in \mathring{D}. \end{aligned}$$

Dalla proposizione 3.3.3,  $f \in H(\mathring{D})$  e dunque, per l'arbitrarietà di  $D$ ,  $f \in H(\Omega)$ .  $\square$

**Teorema 3.3.5** (olomorfia della (funzione) somma di una serie di potenze nel disco aperto di convergenza). *Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$  e poniamo:*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

*Sia  $\rho$  il raggio di convergenza positivo (incluso  $\rho = +\infty$ ) della serie. Allora:*

- (i)  $S(z)$  è olomorfa nel disco aperto di convergenza  $B_\rho(z_0)$ ;
- (ii) gli  $a_k$  sono i coefficienti della serie di Taylor di punto iniziale  $z_0$  di  $S(z)$  in quanto:

$$a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo, per ogni  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k.$$

$S_n(z)$  è un polinomio in  $z$ , dunque è una funzione olomorfa. Sia ora  $0 < R < \rho$ ; allora la successione  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  converge totalmente, quindi uniformemente, a  $S$  in  $\overline{B}_R(z_0)$ . Poiché  $S(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(z)$ , per il Teorema di Weierstrass 3.3.4  $S(z)$  è olomorfa in  $B_\rho(z_0)$ . Resta così provata (i). Si ha, per  $z \in B_\rho(z_0)$ :

$$\begin{aligned} S'(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1} \\ &\vdots \\ S^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (z - z_0)^{n-k}. \end{aligned}$$

Dunque:

$$S^{(k)}(z_0) = a_k k! \Rightarrow a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Perciò:

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k,$$

e questo prova (ii). □

Dai teoremi 3.3.2 e 3.3.5 segue che una funzione risulta olomorfa se e solo se essa è analitica.

Diamo ora gli *sviluppi in serie di Taylor (di McLaurin) di alcune funzioni elementari nel campo complesso.*

1. Funzione esponenziale:

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. Funzione seno:

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

3. Funzione coseno:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

4. Funzione seno iperbolico:

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

5. Funzione coseno iperbolico:

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

6. Serie geometrica:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \quad \forall |z| < 1$$

7.

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^k \quad \forall |z| < 1$$

8.

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k} \quad \forall |z| < 1$$

9.

$$\mathbf{Log}(1+z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1} \quad \forall |z| < 1$$

10. Funzione logaritmo principale di  $z$ :

$$\mathbf{Log} z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^{k+1}}{k+1} \quad \forall |z-1| < 1$$

**Proposizione 3.3.6** (disuguaglianza di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa). *Siano  $f \in H(\Omega)$ ,  $z_0 \in \Omega$  e  $\overline{B}_R(z_0) \subset \Omega$ . Allora esiste  $M_R > 0$  tale che:*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k} \cdot M_R.$$

*Dimostrazione.* Sia  $D := \overline{B}_R(z_0)$ . Risulta, per 3.1.3:

$$f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}} dz \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \forall \zeta \in \mathring{D}$$

Per  $\zeta = z_0$ :

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

da cui:

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{+\partial D} \frac{|f(z)|}{R^{k+1}} |dz|$$

Poiché  $|f|$  è continua sul compatto  $\partial D$ , esiste  $\max_{|z-z_0|=R} |f(z)|$ ; perciò:

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \left( \max_{|z-z_0|=R} |f(z)| \right) \frac{1}{R^{k+1}} \cdot 2\pi R$$

Semplificando e ponendo  $M_R := \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|$  otteniamo la tesi.  $\square$

### 3.4 Prodotto e divisione di serie di potenze

1. *Serie di potenze del prodotto di due funzioni olomorfe*

Siano  $f_1 \in H(B_{r_1}(0))$  e  $f_2 \in H(B_{r_2}(0))$ . Rappresentiamo localmente le funzioni  $f_1$  e  $f_2$  rispettivamente con le serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$$

Il prodotto  $f_1 \cdot f_2$  localmente (nel disco aperto più piccolo) può essere rappresentato dalla serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k,$$

dove i  $c_k$  sono dati da:

$$c_k = \frac{(f_1 \cdot f_2)^{(k)}(0)}{k!}.$$

Osserviamo che

$$(f_1 \cdot f_2)^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} f_1^{(\nu)}(z) f_2^{(k-\nu)}(z)$$

(per la formula di Leibniz per le derivate successive del prodotto di funzioni). Poiché:

$$\binom{k}{\nu} = \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!} \text{ e } f_1^{(\nu)}(0) = \nu! \cdot a_\nu, \quad f_2^{(k-\nu)}(0) = (k-\nu)! \cdot b_{k-\nu}$$

segue che:

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{\nu=0}^k \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!} \cdot \nu! \cdot a_\nu \cdot (k-\nu)! \cdot b_{k-\nu} \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= \sum_{\nu=0}^k a_\nu b_{k-\nu} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 \end{aligned}$$

cioè i  $c_k$  sono i coefficienti del prodotto secondo Cauchy delle due serie iniziali. Quindi la serie di potenze che rappresenta localmente il prodotto  $f_1 \cdot f_2$  è data dal prodotto secondo Cauchy delle serie di potenze che rappresentano localmente  $f_1$  e  $f_2$  rispettivamente.

2. *Divisione di serie di potenze*

Siano

$$a_0 + a_1z + \dots + a_kz^k + \dots$$

con raggio di convergenza  $r_1$  e

$$b_0 + b_1z + \dots + b_kz^k + \dots \quad (3.6)$$

con raggio di convergenza  $r_2$ . Supponiamo  $b_0 \neq 0$ . Allora esiste  $r_3 > 0$  tale che, per  $|z| < r_3$ , convergono entrambe le serie e la serie (3.6) non ha zeri in questo disco. Infatti, sia  $z_0$  uno zero di (3.6) con distanza minima dall'origine; definiamo:

$$r_3 := \min \{r_1, r_2, |z_0|\}.$$

Tale  $r_3$  soddisfa le richieste. Consideriamo ora

$$f(z) := \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots} \quad \forall |z| < r_3.$$

$f \in H(B_{r_3}(0))$ ; perciò esiste  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  tale che  $f(z)$  può essere espressa localmente con la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots$$

Un modo per ottenere i coefficienti  $c_k$  (più realisticamente, i primi coefficienti  $c_k$ ) è di scrivere:

$$\frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots} = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots$$

da cui:

$$(c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots)(b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Perciò per trovare i coefficienti  $c_k$  andrà risolto il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0b_0 = a_0 \\ c_0b_1 + c_1b_0 = a_1 \\ c_0b_2 + c_1b_1 + c_2b_0 = a_2 \\ \vdots \\ c_0b_k + c_1b_{k-1} + \dots + c_kb_0 = a_k \end{array} \right. \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

3. (Sviluppo in serie di Taylor della funzione tangente). Consideriamo la funzione

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Per trovare i coefficienti  $c_k$  di  $\tan z$  eguagliamo:

$$\frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots} = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Impostiamo e risolviamo il sistema (con  $a_k$  e  $b_k$  coefficienti delle serie di Taylor rispettivamente di  $\sin z$  e  $\cos z$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 - \frac{1}{2!} = -\frac{1}{3!} \\ c_4 = 0 \\ c_5 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{5!} \\ \dots \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{1}{3} \\ c_4 = 0 \\ c_5 = \frac{2}{15} \\ \dots \end{array} \right.$$

Osseviamo che i  $c_{2k}$  sono nulli, essendo  $\tan z$  funzione dispari. In definitiva:

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \dots \quad \forall |z| < \frac{\pi}{2}.$$

4. Consideriamo la funzione

$$\frac{1}{\cos z}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

e calcoliamone i coefficienti  $c_k$  della serie di Taylor a partire da:

$$(c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots)(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots) = 1, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

da cui il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \\ -\frac{1}{2!} + c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ \frac{1}{4!} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} + c_4 = 0 \\ \dots \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{1}{2} \\ c_3 = 0 \\ c_4 = \frac{5}{24} \\ \dots \end{array} \right.$$

Notiamo che i  $c_{2k+1}$  sono nulli, poiché la funzione è pari. In definitiva:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}z} = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 + \dots \quad \forall |z| < \frac{\pi}{2}.$$

# Capitolo 4

## Funzioni intere e teoremi di Liouville. Zeri di una funzione olomorfa. Prolungamento olomorfo

### 4.1 Primo e secondo teorema di Liouville

**Teorema 4.1.1** (I di Liouville). *Sia  $f \in H(\mathbb{C})$  e supponiamo che  $|f| \leq M$  in  $\mathbb{C}$ ; allora  $f$  è costante in  $\mathbb{C}$  (le sole funzioni intere che sono limitate in tutto il piano complesso sono le costanti).*

*Dimostrazione.* Fissato  $z_0 \in \mathbb{C}$ , per 3.3.6, applicata per  $k = 1$ , si ha:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{R} \cdot M \quad \forall R > 0.$$

Passando al limite per  $R \rightarrow +\infty$  deduciamo:

$$|f'(z_0)| = 0.$$

Per l'arbitrarietà di  $z_0 \in \mathbb{C}$ , segue  $f' \equiv 0$  in  $\mathbb{C}$ , da cui la tesi.  $\square$

Osserviamo che, da questo teorema si deduce che le funzioni intere seno e coseno in campo complesso non sono limitate.

**Definizione 4.1.2.** Una funzione intera  $f(z)$  si dice che ha crescita polinomiale se esistono una costante  $A$  e un numero naturale  $n$  tali che  $|f(z)| \leq A|z|^n$  per  $|z| = R \geq R_0$ , con  $R_0$  sufficientemente grande.

**Teorema 4.1.3** (II di Liouville, per funzioni intere a crescita polinomiale).  
Una funzione intera  $f$  a crescita polinomiale è necessariamente un polinomio.

*Dimostrazione.* La funzione  $f$  è intera, quindi analitica in  $\mathbb{C}$ ; per il Teorema di Taylor 3.3.2:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Per l'ipotesi e da 3.3.6, con  $M_R = AR^n$ , si ha la seguente stima per i coefficienti  $a_k$ :

$$|a_k| \leq \frac{A}{R^{k-n}} \quad \forall R \geq R_0.$$

Per  $R \rightarrow +\infty$  si ha  $|a_k| = 0$  per  $k - n \geq 1$  (i coefficienti della serie di McLaurin associata a  $f$  sono nulli per  $k \geq n + 1$ ) e lo sviluppo di McLaurin di  $f$  si riduce a:

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Pertanto  $f$  è un polinomio il cui grado non è più grande di  $n$ . □

## 4.2 Teorema fondamentale dell'Algebra

Diamo qui una dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra utilizzando il I Teorema di Liouville 4.1.1.

**Teorema 4.2.1** (fondamentale dell'Algebra). Sia  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio di grado  $n \geq 1$ :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

con  $a_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$ . Allora  $P(z)$  ha almeno uno zero in  $\mathbb{C}$ , cioè esiste  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che  $P(z_0) = 0$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo  $P(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Allora la funzione

$$f(z) := \frac{1}{P(z)}$$

è olomorfa in  $\mathbb{C}$ , cioè è intera. Proviamo che  $f$  è limitata in  $\mathbb{C}$ . Vale:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{P(z)} \right| = 0$$

in quanto  $P(z)$  è un infinito di ordine  $n$  per  $z \rightarrow \infty$ . Allora, fissato  $\varepsilon = 1$ , esiste  $R > 0$  tale che, per  $|z| > R$ , risulta  $|f(z)| \leq 1$ . Dunque  $f$  è limitata in  $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0)$ . Ora,  $f \in H(\mathbb{C})$ , quindi  $|f| \in C^0(\mathbb{C})$ ; in particolare  $|f|$  è continua sul compatto  $\overline{B}_R(0)$  e, per il teorema di Weierstrass, è limitata su questo disco chiuso. Sia  $M := \max_{z \in \overline{B}_R(0)} |f(z)|$  e definiamo  $L := \max\{1, M\}$ . Si ha allora:

$$|f(z)| \leq L \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Per 4.1.1,  $f$  risulta costante in  $\mathbb{C}$  (costante diversa da 0 in quanto  $f(0) = 1/P(0) \neq 0$ ). Ne segue che anche  $P$  è costante, il che è assurdo, poiché il polinomio  $P(z)$  è di grado  $n \geq 1$ .  $\square$

### 4.3 Zeri di una funzione olomorfa

**Proposizione 4.3.1.** *Uno zero  $z_0$  di una funzione olomorfa  $f$  è isolato, a meno che  $f$  non sia identicamente nulla (in un intorno di  $z_0$ ).*

*Dimostrazione.* Sia  $z_0$  tale che  $f(z_0) = 0$  e supponiamo che  $f$  non sia identicamente nulla (in un intorno di  $z_0$ ). Sia:

$$f(\zeta) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (\zeta - z_0)^j$$

lo sviluppo locale (in un intorno di  $z_0$ ) in serie di Taylor di  $f$ , dove

$$a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0; \tag{4.1}$$

allora almeno un coefficiente dev'essere non nullo: sia  $p \geq 1$  il più piccolo numero naturale tale che  $a_p \neq 0$ . Quindi:

$$f(\zeta) = (\zeta - z_0)^p \sum_{j=0}^{+\infty} a_{p+j} (\zeta - z_0)^j$$

in un intorno di  $z_0$ . Poniamo:

$$g(\zeta) := \sum_{j=0}^{+\infty} a_{p+j} (\zeta - z_0)^j$$

in un intorno di  $z_0$ . Ora,  $g(\zeta)$  è olomorfa in un intorno di  $z_0$  e quindi, a fortiori,  $g(\zeta)$  è ivi continua; inoltre  $g(z_0) = a_p \neq 0$ , perciò esiste un intorno sufficientemente piccolo di  $z_0$  in cui  $g$  è diversa da 0. Di conseguenza, in un intorno di  $z_0$ ,  $(\zeta - z_0)^p g(\zeta) = f(\zeta)$  si annulla solo in  $z_0$ , perché  $(\zeta - z_0)^p$  si annulla solo in  $z_0$ .  $\square$

**Definizione 4.3.2** (ordine di uno zero). Il più piccolo numero naturale  $p \geq 1$  in (4.1) tale che  $a_p \neq 0$  si dice *ordine* dello zero  $z_0$ .

È evidente che:

$$\begin{aligned} z_0 \text{ zero di ordine } p \geq 1 \text{ per } f &\Leftrightarrow f(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

## 4.4 Prolungamento olomorfo: unicità

**Definizione 4.4.1** (prolungamento olomorfo). Siano  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  aperti di  $\mathbb{C}$ ,  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , e sia  $f_1 \in H(\Omega_1)$ . Diremo che  $f_1$  ha un *prolungamento olomorfo* in  $\Omega_2$  se esiste  $f_2 \in H(\Omega_2)$  tale che  $f_2|_{\Omega_1} = f_1$ .

Enunciamo ora un teorema che ha importanti applicazioni.

**Teorema 4.4.2** (di unicità del prolungamento olomorfo). *Sia  $f \in H(\Omega)$  ( $\Omega$  aperto connesso). Se in un sottoinsieme aperto di  $\Omega$   $f$  è identicamente nulla, allora  $f$  è identicamente nulla in tutto  $\Omega$ .*

**Corollario 4.4.3.** *Sia  $f \in H(\Omega)$  ( $\Omega$  aperto connesso). Se  $f$  è costante in un sottoinsieme aperto di  $\Omega$ , allora  $f$  è costante in  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $f(z) = c$  per ogni  $z$  nell'aperto  $\Omega_1 \subset \Omega$ ; allora la funzione olomorfa  $g(z) := f(z) - c$  è nulla nell'aperto  $\Omega_1$ . Applicando a  $g$  il teorema 4.4.2, si ha  $g(z) = 0$  per ogni  $z \in \Omega$ , ovvero  $f(z) = c$ .  $\square$

**Proposizione 4.4.4** (estensione delle uguaglianze). *Sia  $f \in H(\Omega)$  ( $\Omega$  aperto connesso). Se  $f$  ha uno zero non isolato, allora  $f$  è identicamente nulla in  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $z_0 \in \Omega$  uno zero di  $f$  non isolato. Allora, per 4.3.1,  $f$  è identicamente nulla in un intorno aperto di  $z_0$  contenuto in  $\Omega$ . Per il teorema di unicità del prolungamento olomorfo 4.4.2,  $f$  è nulla in tutto  $\Omega$ .  $\square$

**Osservazione 4.4.5.** La proposizione precedente non ha un corrispondente nel campo reale. Infatti la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

è di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  ed è nulla in  $\mathbb{R}_-$ , ma  $f$  non è identicamente nulla.

**Osservazione 4.4.6.** La proposizione 4.4.4 può essere utilizzata per dimostrare che alcune uguaglianze valide in  $\mathbb{R}$  possono essere estese a  $\mathbb{C}$ . Per esempio, la funzione:

$$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z - 1,$$

olomorfa in  $\mathbb{C}$ , ha zeri non isolati in  $\mathbb{R}$  (in quanto  $\cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (chiuso in  $\mathbb{C}$ )); pertanto  $f(z)$  è identicamente nulla in  $\mathbb{C}$ , cioè  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

## 4.5 Esistenza di almeno un punto di non prolungabilità olomorfa sulla frontiera del disco aperto di convergenza di un serie di potenze

**Teorema 4.5.1.** *Sia*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

*con raggio di convergenza  $0 < \rho < +\infty$ . Allora esiste almeno un punto su  $\partial B_\rho(z_0)$  che non è di prolungabilità olomorfa per  $f$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che tutti i punti di  $\partial B_\rho(z_0)$  siano di prolungabilità olomorfa per  $f$ . Allora, per ogni  $\zeta \in \partial B_\rho(z_0)$  esiste  $r(\zeta) \in \mathbb{R}_+$  tale che  $f$  ha uno sviluppo in serie di potenze di  $(z - \zeta)$  in  $B_{r(\zeta)}(\zeta)$ . Ora, dal ricoprimento aperto

$$\bigcup_{\zeta \in \partial B_\rho(z_0)} B_{r(\zeta)}(\zeta)$$

del compatto  $\partial B_\rho(z_0)$ , se ne può estrarre uno (ricoprimento aperto) finito

$$A := \bigcup_{j=1}^{\nu} B_{r(\zeta_j)}(\zeta_j).$$

Definiamo ora

$$g(z) := \begin{cases} f(z), & z \in B_\rho(z_0) \\ f_j(z), & z \in B_{r(\zeta_j)}(\zeta_j) \end{cases}$$

dove, per ogni  $j = 1, \dots, \nu$ ,  $f_j(z)$  è il prolungamento olomorfo di  $f$  a  $B_{r(\zeta_j)}(\zeta_j)$ .

Risulta

$$g \in H(B_\rho(z_0) \cup A)$$

e quindi esiste  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  tale che:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z - z_0)^k \quad \forall |z - z_0| < \rho + \varepsilon$$

poiché  $B_\rho(z_0) \cup A$  contiene il disco chiuso  $\overline{B}_\rho(z_0)$ , e quindi deve anche contenere il disco aperto  $B_{\rho+\varepsilon}(z_0)$  per un opportuno  $\varepsilon > 0$ . Ora, osserviamo che  $b_k = a_k$ ; infatti, tenendo conto che  $f = g$  su  $B_\rho(z_0)$ , risulta

$$b_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k.$$

Pertanto

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z) \quad \forall |z - z_0| < \rho + \varepsilon.$$

Ma, allora,  $f$  avrebbe raggio di convergenza  $\rho + \varepsilon > \rho$ , il che è assurdo.  $\square$

Determinare la localizzazione di un punto di non prolungabilità olomorfa (di cui al Teorema precedente) è in generale difficile. Imponendo delle restrizioni sui coefficienti, si è in grado di localizzare un particolare punto di non prolungabilità olomorfa.

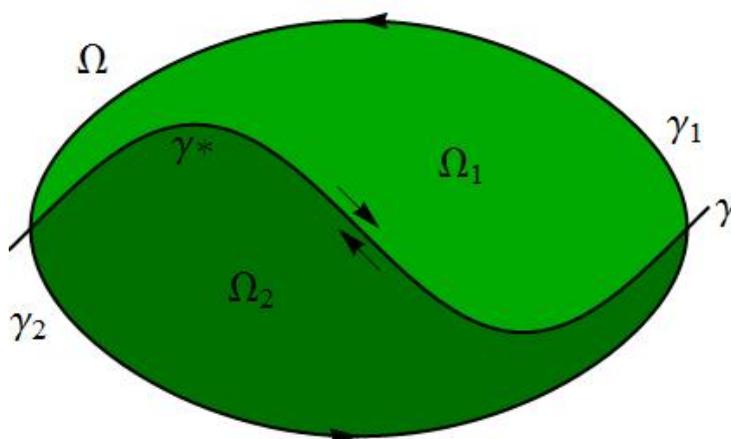
**Teorema 4.5.2** (di Pringsheim). *Se il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

*è  $\rho = 1$ , e se tutti i coefficienti  $a_k$  sono reali e non negativi, allora  $z = 1$  è un punto sulla frontiera di non prolungabilità olomorfa per  $f$ .*

## 4.6 Prolungamento olomorfo attraverso una curva. Principio di riflessione di Schwarz

Sia  $\Omega$  aperto, connesso, limitato di  $\mathbb{C}$ , con frontiera regolare. Supponiamo che una curva  $\gamma$  regolare decomponga  $\Omega$  in due aperti connessi  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  giacenti da parte opposta rispetto a  $\gamma$ . Sia  $\gamma_1$  (rispettivamente  $\gamma_2$ ) la parte di  $\partial\Omega$  giacente dalla parte di  $\Omega_1$  (rispettivamente  $\Omega_2$ ). Denotata con  $\gamma^*$  la intersezione di  $\gamma$  con  $\bar{\Omega}$ , risulta  $\partial\Omega_1 = \gamma_1 \cup \gamma^*$  e  $\partial\Omega_2 = \gamma_2 \cup \gamma^*$ . Vale il seguente lemma.



**Lemma 4.6.1.** *Sia  $f \in C^0(\bar{\Omega})$ ,  $f \in H(\Omega_1)$  e  $f \in H(\Omega_2)$ . Allora  $f \in H(\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\zeta \in \Omega_1$  arbitrario. Per la formula integrale di Cauchy 2.8.4:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+(\gamma_1 \cup \gamma^*)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (4.3)$$

Ora, poiché  $\zeta \in \Omega_1$ , la funzione integranda in (4.3) è olomorfa su  $\Omega_2$ ; ne segue, per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+(\gamma_2 \cup \gamma^*)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 0. \quad (4.4)$$

Se la curva  $\gamma_2 \cup \gamma^*$  è orientata in senso antiorario, allora  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  è la frontiera  $\partial\Omega$  orientata in senso antiorario. Sommando (4.3) e (4.4) otteniamo:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+(\gamma_1 \cup \gamma_2)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad (4.5)$$

per ogni  $\zeta \in \Omega_1$ , poiché gli integrali lungo  $\gamma^*$  si cancellano.

Con le stesse argomentazioni per  $\zeta \in \Omega_2$  arbitrario, otteniamo la stessa formula di rappresentazione (4.5), e primo e secondo membro in (4.5) dipendono con continuità da  $\zeta \in \Omega$ . Pertanto la (4.5) resta valida ovunque in  $\Omega$  (cioè, in particolare, anche nei punti interni di  $\gamma^*$ ). Per 3.3.3 e poiché  $f \in C^0(\overline{\Omega})$ , essendo la funzione integranda di (4.5) olomorfa in  $\Omega$  rispetto alla variabile  $\zeta$ , risulta  $f \in H(\Omega)$ .  $\square$

Il successivo Teorema è relativo ad un caso speciale di prolungamento olomorfo che può essere costruito esplicitamente.

**Teorema 4.6.2** (Principio di riflessione di Schwarz per funzioni olomorfe).  
Sia  $\Omega$  aperto, connesso, limitato del semipiano:

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\},$$

la cui frontiera, generalmente regolare, includa l'intervallo  $I = (a, b)$  della retta reale e sia

$$\Omega^* := \{\bar{z} \in \mathbb{C} : z \in \Omega\}$$

(riflessione di  $\Omega$  attraverso la retta reale). Sia  $f \in H(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup I)$ . Assumiamo che  $f$  sia a valori reali su  $I$ . Allora la funzione

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{in } \Omega \cup I \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{in } \Omega^* \end{cases}$$

è l'unico prolungamento olomorfo di  $f$  a  $\Omega \cup I \cup \Omega^*$ .

*Dimostrazione.* Poniamo:

$$f(x, y) := u(x, y) + iv(x, y) \quad \forall (x, y) = z \in \Omega$$

e

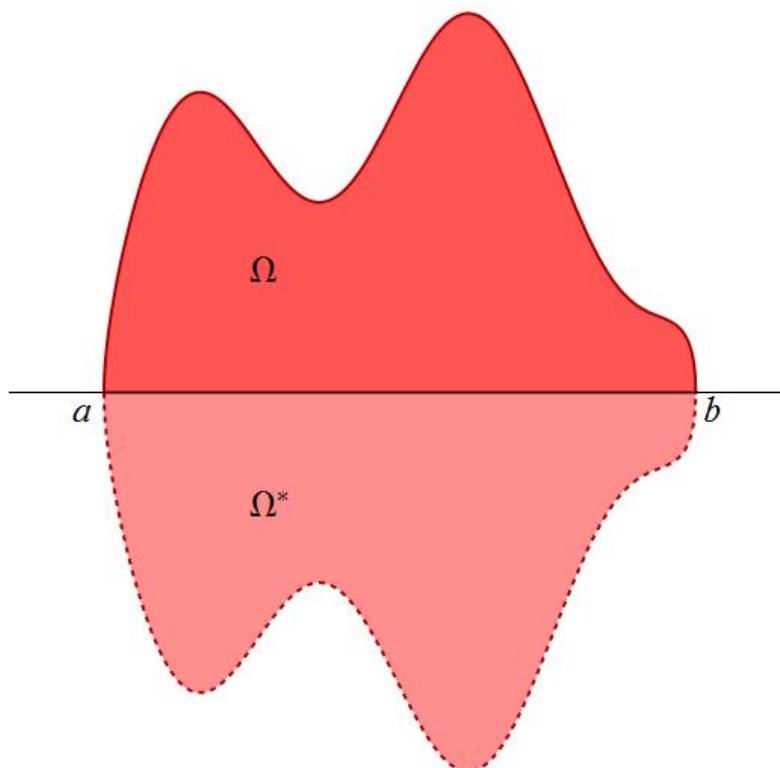
$$F(x, y) := U(x, y) + iV(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \cup I \cup \Omega^*.$$

Ora, per ogni  $(x, y) \in \Omega^*$  si ha:

$$F(x, y) = U(x, y) + iV(x, y) = u(x, -y) - iv(x, -y),$$

cioè

$$U(x, y) = u(x, -y), \quad V(x, y) = -v(x, -y).$$



Allora, derivando, per ogni  $(x, y) \in \Omega^*$  si ha:

$$\begin{aligned}
 U_x(x, y) &= u_x(x, -y), \\
 U_y(x, y) &= -u_y(x, -y), \\
 V_x(x, y) &= -v_x(x, -y), \\
 V_y(x, y) &= v_y(x, -y).
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Osserviamo che, se  $(x, y) \in \Omega^*$ , allora  $(x, -y) \in \Omega$ ; dall'olomorfia di  $f$  su  $\Omega$  segue:

$$\begin{cases}
 u_x(x, -y) = v_y(x, -y) \\
 u_y(x, -y) = -v_x(x, -y)
 \end{cases}$$

e dalle (4.6) otteniamo:

$$\begin{cases}
 U_x(x, y) = V_y(x, y) \\
 U_y(x, y) = -V_x(x, y)
 \end{cases}
 \quad \forall (x, y) \in \Omega^*.$$

Dunque  $U$  e  $V$  soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) in  $\Omega^*$  e, poiché già differenziabili in  $\Omega^*$ , si ha  $F \in H(\Omega^*)$ . Ma  $F = f \in H(\Omega)$ , dunque  $F \in H(\Omega \cup \Omega^*)$ .

Mostriamo, ora, che  $F \in C^0(\Omega \cup I \cup \Omega^*)$ ; per questo proviamo che:

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \forall z \in I.$$

Infatti, se  $z \in I \subset \mathbb{R}$ , allora  $z = \bar{z}$ ; inoltre, per ipotesi,  $f|_I$  ha valori in  $\mathbb{R}$ , pertanto  $\overline{f|_I} = f|_I$  e quindi:

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z) \quad \forall z \in I.$$

Tenuto conto che  $f \in C^0(\Omega \cup I)$ , segue che  $F \in C^0(\Omega \cup I \cup \Omega^*)$  e si può applicare 4.6.1 (identificando  $\Omega \equiv \Omega_1$ ,  $\Omega^* \equiv \Omega_2$  e  $I \equiv \gamma$ ), pertanto  $F \in H(\Omega \cup \Omega^* \cup I)$ .  $\square$

## 4.7 Trasformazione conforme del disco aperto unitario su sé stesso

**Lemma 4.7.1.** *Sia  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| < 1$ ; la trasformazione lineare fratta*

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

*è olomorfa in  $B_1(0)$ , porta biunivocamente (e conformemente)  $B_1(0)$  su  $B_1(0)$  e  $\varphi_{-\alpha}(z)$  è la sua inversa (anch'essa olomorfa).*

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $\varphi_\alpha$  non ha zeri al denominatore in  $B_1(0)$ ; infatti:

$$1 - \bar{\alpha}z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{\alpha}} \notin B_1(0);$$

pertanto  $\varphi_\alpha \in H(B_1(0))$ . Inoltre, per  $|z| \leq 1$ , vale:

$$\varphi'_\alpha(z) = \frac{1 - \bar{\alpha}z + \bar{\alpha}(z - \alpha)}{(1 - \bar{\alpha}z)^2} = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \bar{\alpha}z)^2} \neq 0.$$

Ora,  $|\varphi_\alpha(z)| = 1$  per  $|z| = 1$  (infatti, sia  $z = e^{i\vartheta}$ ; allora:

$$|\varphi_\alpha(z)| = \left| \frac{e^{i\vartheta} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}e^{i\vartheta}} \right| = |e^{i\vartheta}| \cdot \left| \frac{1 - \alpha e^{-i\vartheta}}{1 - \bar{\alpha}e^{i\vartheta}} \right| = 1)$$

e  $\varphi_\alpha(\alpha) = 0$ , pertanto, non potendo  $\varphi_\alpha$  essere costante, per il Principio del massimo modulo 2.9.3 risulta

$$|\varphi_\alpha(z)| < 1 \quad \forall |z| < 1.$$

Ne deduciamo che  $\varphi_\alpha$  porta  $B_1(0)$  in  $B_1(0)$ . Mostriamo che  $\varphi_\alpha$  porta  $B_1(0)$  su  $B_1(0)$  e che  $\varphi_{-\alpha}$  è l'inversa di  $\varphi_\alpha$ . Infatti:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z)) &= \varphi_\alpha\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right) = \frac{\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z} - \alpha}{1 - \bar{\alpha} \cdot \frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}} = \\ &= \frac{z+\alpha - \alpha - |\alpha|^2 z}{1 - |\alpha|^2} = z = \varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z)).\end{aligned}$$

Osserviamo infine che  $\varphi_\alpha$  è una trasformazione conforme del disco unitario su sé stesso (per il Teorema 2.7.1).  $\square$

Risulta naturale chiedersi quale sia la più generale trasformazione conforme del disco unitario su sé stesso.

**Lemma 4.7.2** (di Schwarz). *Sia  $f \in H(B_1(0))$  tale che:*

$$|f(z)| \leq 1 \quad \forall |z| < 1 \quad e \quad f(0) = 0.$$

*Allora*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall |z| < 1 \quad e \quad |f'(0)| \leq 1.$$

*Inoltre, se esiste  $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$  tale che  $|f(z_0)| = |z_0|$ , allora esiste  $\beta \in \mathbb{R}$  tale che:*

$$f(z) = e^{i\beta} z.$$

*Dimostrazione.* Poiché  $f(0) = 0$  per ipotesi, lo sviluppo di McLaurin di  $f$  è:

$$f(z) = f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \dots \quad \forall |z| < 1.$$

Pertanto:

$$\frac{f(z)}{z} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}z + \frac{f'''(0)}{6}z^2 + \dots$$

è olomorfa in  $B_1(0)$  con valore  $f'(0)$  in  $z = 0$ . Sia ora  $r \in ]0, 1[$  e consideriamo

$\left|\frac{f(z)}{z}\right|$  su  $|z| = r$ . Risulta, per l'ipotesi,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \quad \forall |z| = r.$$

Per il Principio del massimo modulo 2.9.3

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r} \quad \forall |z| \leq r$$

e, per  $r \rightarrow 1^-$ :

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 \quad \forall |z| < 1 \quad (4.7)$$

da cui:

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall |z| < 1$$

Inoltre, da (4.7), deduciamo che

$$|f'(0)| = \left| \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1.$$

Infine, poiché per ipotesi:

$$\left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| = 1$$

per  $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$ , da (4.7) e dal Principio del massimo modulo 2.9.3, deduciamo che  $\frac{f(z)}{z}$  ha valore costante e modulo unitario. Perciò esiste  $\beta \in \mathbb{R}$  tale che:

$$\frac{f(z)}{z} = e^{i\beta},$$

da cui la seconda asserzione della tesi.  $\square$

Il teorema che segue stabilisce che, a meno di una rotazione, non ci sono altre trasformazioni conformi del disco aperto unitario su sé stesso differenti da  $\varphi_\alpha$ .

**Teorema 4.7.3.** *Sia  $f$  una trasformazione conforme del disco aperto unitario  $B_1(0)$  su sé stesso e supponiamo che  $f(\alpha) = 0$ , dove  $|\alpha| < 1$ . Allora esiste  $\vartheta \in \mathbb{R}$  tale che:*

$$f(z) = e^{i\vartheta} \varphi_\alpha(z) = e^{i\vartheta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad \forall z \in B_1(0).$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che, tenuto conto del lemma 4.7.1, la funzione  $e^{i\vartheta} \varphi_\alpha(z)$  ( $\vartheta \in \mathbb{R}$ ) porta anch'essa  $B_1(0)$  su  $B_1(0)$ , essendo  $|e^{i\vartheta}| = 1$ .

La funzione:

$$g = f \circ \varphi_{-\alpha}$$

è una trasformazione conforme da  $B_1(0)$  su  $B_1(0)$  (perché composizione di trasformazioni conformi da  $B_1(0)$  su  $B_1(0)$ ), con:

$$g(0) = f(\varphi_{-\alpha}(0)) = f(\alpha) = 0$$

per ipotesi. Osserviamo che  $|g(z)| \leq 1$  per  $|z| < 1$ . Per la prima parte del lemma di Schwarz 4.7.2:

$$|g(z)| \leq |z| \quad \forall |z| < 1. \quad (4.8)$$

Ora, poichè  $g^{-1} = \varphi_\alpha \circ f^{-1}$  si ha:

$$g^{-1}(0) = \varphi_\alpha(f^{-1}(0)) = \varphi_\alpha(\alpha) = 0$$

Poiché anche la funzione inversa  $g^{-1}$  ha uno zero nell'origine, per la prima parte del lemma di Schwarz 4.7.2 applicato a  $g^{-1}$ , si ha:

$$|z| = |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)| \quad \forall |z| < 1. \quad (4.9)$$

Da (4.8) e (4.9) segue  $|g(z)| = |z|$  per ogni  $|z| < 1$ . Pertanto, per la seconda parte del lemma di Schwarz 4.7.2, esiste  $\vartheta \in \mathbb{R}$  tale che:

$$g(z) = e^{i\vartheta} z$$

da cui, poiché  $f(z) = g(\varphi_\alpha(z))$ , si ottiene:

$$f(z) = e^{i\vartheta} \varphi_\alpha(z) \quad \forall z \in B_1(0).$$

□

Alla domanda se esistono altri aperti del piano complesso che possono essere messi in modo conforme in corrispondenza biunivoca col disco unitario  $B_1(0)$ , il seguente teorema, dovuto a Riemann, fornisce una risposta positiva, in termini di condizione topologica sufficiente sull'aperto.

**Teorema 4.7.4** (Riemann). *Sia  $\Omega$  un aperto, non vuoto, semplicemente connesso e diverso dall'intero piano complesso  $\mathbb{C}$ . Allora esiste una funzione olomorfa univalente (cioè  $f(z_1) \neq f(z_2)$  se  $z_1 \neq z_2$ , con  $z_1, z_2 \in \Omega$ ) che manda  $\Omega$  conformemente sul disco unitario  $B_1(0)$ .*

**Osservazione 4.7.5.** L'intero piano complesso  $\mathbb{C}$  è semplicemente connesso, ma per esso il teorema di Riemann non vale.

Infatti, se esistesse una funzione olomorfa univalente  $f$  che manda  $\mathbb{C}$  conformemente sul disco unitario  $B_1(0)$ , tale  $f$  risulterebbe intera, con  $|f(z)| < 1$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Allora, per il I Teorema di Liouville 4.1.1,  $f$  dovrebbe essere costante, e questo non è possibile.



# Capitolo 5

## Serie di Laurent

Mentre la serie di Taylor è lo strumento più idoneo per lo studio di una funzione olomorfa nell'intorno di un suo punto di regolarità, per il suo studio in un punto singolare isolato  $z_0$  serve lo sviluppo di Laurent che permette di rappresentare la funzione mediante una serie di potenze positive e negative di  $\zeta - z_0$ , cioè aventi come esponenti numeri interi sia positivi che negativi. Sussiste il seguente teorema.

### 5.1 Sviluppo in una corona circolare

**Teorema 5.1.1** (sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare). *Sia  $f \in H(\Omega)$  e sia  $C(z_0, r_1, r_2)$  la corona circolare aperta:*

$$C(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} ; 0 < r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

*tale che  $\overline{C}(z_0, r_1, r_2) \subset \Omega$ . Allora:*

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} (\zeta - z_0)^{-k} \\ &\left( = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (\zeta - z_0)^k \right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

*per ogni  $\zeta \in C(z_0, r_1, r_2)$ , dove:*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \in [r_1, r_2]. \tag{5.2}$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo preliminarmente che gli  $a_k$  sono indipendenti dalla scelta di  $r \in [r_1, r_2]$ .

Sia  $r \in ]r_1, r_2[$ . La funzione:

$$z \mapsto \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

è olomorfa nelle corone circolari  $C(z_0, r_1, r)$  e  $C(z_0, r, r_2)$ , le cui frontiere orientate positivamente sono:

$$\begin{aligned} +\partial C(z_0, r_1, r) &= (-\partial B_{r_1}(z_0)) \cup (+\partial B_r(z_0)) \\ +\partial C(z_0, r, r_2) &= (-\partial B_r(z_0)) \cup (+\partial B_{r_2}(z_0)) \end{aligned}$$

Per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3 si ha:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial C(z_0, r_1, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= 0 \\ &\Downarrow \\ \int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \end{aligned}$$

e, inoltre,

$$\begin{aligned} \int_{+\partial C(z_0, r, r_2)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= 0 \\ &\Downarrow \\ \int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \int_{+\partial B_{r_2}(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \end{aligned}$$

Perciò per ogni  $r \in [r_1, r_2]$  l'integrale curvilineo sulla circonferenza di raggio  $r$  assume lo stesso valore, il che prova l'indipendenza degli  $a_k$  da  $r$ .

Sia ora  $\zeta \in C(z_0, r_1, r_2)$  (tale punto appartiene  $B_{r_2}(z_0)$  ma non a  $B_{r_1}(z_0)$ , quindi  $|\zeta - z_0| > r_1$  e  $|\zeta - z_0| < r_2$ ). Allora, per 2.8.4:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial C(z_0, r_1, r_2)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_2}(z_0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz}_{(I)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz}_{(II)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Per il Teorema di Taylor 3.3.2

$$(I) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\zeta - z_0)^k, \quad (5.4)$$

con gli  $a_k$  espressi da (5.2) per  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Per l'integrale (II), poiché  $|\zeta - z_0| > r_1$ , non si può applicare direttamente il Teorema di Taylor; risulta tuttavia:

$$\begin{aligned} (II) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{\zeta - z} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{(\zeta - z_0) \left[ 1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right]} dz \end{aligned}$$

Nell'ultima espressione riconosciamo la somma della serie geometrica di ragione  $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ , con modulo  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$  (in quanto  $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ ), perciò (per la convergenza uniforme della serie) si ha:

$$\begin{aligned} (II) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} \frac{f(z)}{(\zeta - z_0)} \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j dz \stackrel{k=j+1}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} f(z) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^{k-1}}{(\zeta - z_0)^k} dz = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} f(z) (z - z_0)^{k-1} dz \quad . \end{aligned}$$

Ponendo ora

$$a_{-k} := \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_{r_1}(z_0)} f(z) (z - z_0)^{k-1} dz$$

e sostituendo nell'espressione precedente otteniamo:

$$(II) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} (\zeta - z_0)^{-k} \quad (5.5)$$

Inserendo (5.4) e (5.5) in (5.3) si ha la tesi.  $\square$

**Osservazione 5.1.2.** La rappresentazione (5.2) è unica. La convergenza di (5.1) è uniforme sui compatti contenuti in  $C(z_0, r_1, r_2)$ .

## 5.2 Sviluppo in serie di Laurent in un punto singolare isolato al finito. Teorema di Riemann sulle singolarità isolate eliminabili

Il Teorema 5.1.1 si estende ad una funzione  $f$  olomorfa nel disco bucato  $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ , cioè la (5.1) è valida in ogni corona circolare  $C(z_0, r, R)$ , con  $0 < r < R$  (basta applicare 5.1.1 con  $r_2 = R$  e  $r_1 \rightarrow 0$ ) e risulta:

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} (\zeta - z_0)^{-k} \quad \forall \zeta \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \quad (5.6)$$

con

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \in ]0, R[. \quad (5.7)$$

Chiameremo rispettivamente *parte regolare* e *parte singolare* (o *caratteristica*) di  $f$  la prima e la seconda serie in (5.6).

**Definizione 5.2.1** (singolarità isolate al finito: eliminabili, polari, essenziali). Sia  $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ . Il punto  $z_0$  si dice *singolarità isolata* per  $f$ .

- $z_0$  si dice singolarità *eliminabile* se:

$$a_{-k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

cioè se  $f$  ha un prolungamento olomorfo a tutto  $B_R(z_0)$ ;

- $z_0$  si dice singolarità *polare* (o polo) di ordine  $p$  se esiste  $p \in \mathbb{N}$  tale che:

$$a_{-p} \neq 0 \quad \text{e} \quad a_{-k} = 0 \quad \forall k > p$$

cioè la parte singolare è somma di un numero finito di addendi non nulli;

- $z_0$  si dice singolarità *essenziale* per  $f$  se la parte singolare di  $f$  è somma di infiniti addendi non nulli.

---

<sup>1</sup>Osserviamo che qui i coefficienti  $a_k$ , con  $k \in \mathbb{N}_0$ , non possono identificarsi con  $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ , non essendo  $f$  olomorfa in  $z_0$ .

**Teorema 5.2.2** (di Riemann sulle singolarità isolate eliminabili).

Sia  $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$  e limitata in  $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Allora  $z_0$  è una singolarità eliminabile per  $f$ .

*Dimostrazione.* Per (5.7), i coefficienti  $a_k$  della serie di Laurent di  $f$  hanno espressione:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \in ]0, R[$$

Sia  $M > 0$  tale che  $|f| \leq M$  in  $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Allora:

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{k+1}} ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=r} \frac{M}{r^{k+1}} ds = \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{r^{k+1}} \cdot 2\pi r = \\ &= \frac{M}{r^k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \in ]0, R[ \end{aligned}$$

Per  $r \rightarrow 0^+$  e  $k < 0$  risulta  $a_k = 0$ . Dunque  $f$  è rappresentata da una serie di potenze (che è olomorfa nel suo disco di convergenza, per 3.3.5), perciò  $f$  ha un prolungamento olomorfo in  $z_0$ .  $\square$

Vediamo gli sviluppi in serie di Laurent di alcune funzioni.

1. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

Usiamo la decomposizione in frazioni parziali per scrivere la serie di Laurent di  $f$  negli aperti indicati. Risulta:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-2}.$$

– Per  $0 < |z| < 1$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{+\infty} z^k - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}}_{\text{parte singolare}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k+2}}\right) z^k}_{\text{parte regolare}}. \end{aligned}$$

– Per  $0 < |z - 1| < 1$ :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (1 - z)} - \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (z - 1)} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (z - 1)^k - \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (z - 1)^k = \\
 &= -\frac{1}{z - 1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k - 1}{2} \cdot (z - 1)^k = \\
 &= \underbrace{-\frac{1}{z - 1}}_{\text{parte singolare}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (z - 1)^{2k+1}}_{\text{parte regolare}}.
 \end{aligned}$$

– Per  $0 < |z - 2| < 1$ :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 - (2 - z)} - \frac{1}{1 + (z - 2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 2} = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{z - 2}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} (z - 2)^k + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 2} = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 2}}_{\text{parte singolare}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2^{k+2}} - 1\right) (z - 2)^k}_{\text{parte regolare}}.
 \end{aligned}$$

I tre punti di singolarità sono poli semplici per  $f$ .

2. Consideriamo:

$$\frac{\sin z}{z}.$$

Ricordando lo sviluppo in serie di McLaurin di  $\sin z$ , si ha:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k + 1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

La parte singolare dello sviluppo della funzione è nulla: pertanto 0 è singolarità eliminabile.

In alternativa, verificare anche con 5.2.2 che  $\frac{\sin z}{z}$  ha una singolarità eliminabile in  $z_0 = 0$ .

3. Consideriamo  $e^{\frac{1}{z}}$ .

Ricordando lo sviluppo in serie di McLaurin di  $e^z$ , si ha:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

La parte singolare ha infiniti addendi:  $z_0 = 0$  è quindi una singolarità essenziale.

### 5.3 Caratterizzazione delle singolarità isolate

**Proposizione 5.3.1** (caratterizzazione dei poli). *Sia  $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ .*

$$z_0 \text{ polo di ordine } p \text{ per } f \Leftrightarrow \exists \lim_{\zeta \rightarrow z_0} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p = a_{-p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ . Per ipotesi  $a_{-p} \neq 0$  e  $a_{-k} = 0$  per ogni  $k > p$ , cioè:

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^p a_{-k}(\zeta - z_0)^{-k} \quad \forall \zeta \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \quad (5.8)$$

Allora:

$$\begin{aligned} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p &= (\zeta - z_0)^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^p a_{-k}(\zeta - z_0)^{p-k} = \\ &= (\zeta - z_0)^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + a_{-1}(\zeta - z_0)^{p-1} + \\ &\quad + a_{-2}(\zeta - z_0)^{p-2} + \dots + a_{-p} \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow z_0} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p &= \lim_{\zeta \rightarrow z_0} (\zeta - z_0)^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + a_{-1}(\zeta - z_0)^{p-1} + \\ &\quad + a_{-2}(\zeta - z_0)^{p-2} + \dots + a_{-p} = a_{-p} \neq 0, \end{aligned}$$

(tenuto conto della convergenza della serie di potenze).

$\Leftarrow$ . Dall'ipotesi segue che  $f(\zeta)(\zeta - z_0)^p$  è localmente limitata, quindi esistono  $\delta \in ]0, R[$  e  $M > 0$  tali che, per  $|\zeta - z_0| < \delta$ , si ha  $|f(\zeta)(\zeta - z_0)^p| \leq M$ .

Proviamo che  $a_{-k} = 0$  per ogni  $k > p$ . Sia  $k = p + j$ , con  $j \in \mathbb{N}$ . Allora, per ogni  $r \in ]0, \delta[$ :

$$\begin{aligned} a_{-k} &= a_{-p-j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{1-p-j}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{p+j-1} d\zeta \end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} |a_{-k}| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-z_0|=r} |f(\zeta)(\zeta-z_0)^{p+j-1}| ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-z_0|=r} M|\zeta-z_0|^{j-1} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot Mr^{j-1} 2\pi r = Mr^j \quad \forall r \in ]0, \delta[ \end{aligned}$$

Per  $r \rightarrow 0^+$  risulta  $|a_{-k}| = 0$ , quindi  $a_{-k} = 0$  per ogni  $k > p$ , il che prova che  $z_0$  è polo di ordine  $p$ .  $\square$

Utile per l'identificazione dei poli è il seguente risultato.

**Proposizione 5.3.2** (identificazione dei poli).

Sia  $f \in H(B_R(z_0))$ . Se  $z_0$  è uno zero di ordine  $p$  per  $f$ , allora la funzione  $\frac{1}{f}$ , olomorfa in  $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ , ha in  $z_0$  un polo di ordine  $p$ .

Se  $z_0$  è un polo di ordine  $p$  per  $\frac{1}{f}$ , allora  $z_0$  è uno zero di ordine  $p$  per  $f$ .

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che:

$$\begin{aligned} z_0 \text{ zero di ordine } p \text{ per } f &\stackrel{(4.2)}{\Leftrightarrow} \exists \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \frac{1}{f(\zeta)} (\zeta-z_0)^p \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \stackrel{5.3.1}{\Leftrightarrow} z_0 \text{ polo di ordine } p \text{ per } \frac{1}{f}. \end{aligned}$$

$\square$

1. Sia:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2 \text{Log} z}.$$

Determiniamo la natura della singolarità di  $f$  in  $z_0 = 1$ .

Poiché

$$\text{Log} z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \dots, \quad |z-1| < 1,$$

il denominatore di  $f(z)$  ha uno zero di ordine 3 in  $z_0 = 1$ . Pertanto  $f(z)$  ha un polo di ordine 3 in  $z_0 = 1$ .

**Teorema 5.3.3** (caratterizzazione dei poli indipendentemente dall'ordine).  
Sia  $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ .

$$z_0 \text{ polo per } f \Leftrightarrow \exists \lim_{\zeta \rightarrow z_0} |f(\zeta)| = +\infty.$$

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ . Sia  $p$  l'ordine del polo  $z_0$ . Allora, per 5.3.1:

$$\exists \lim_{\zeta \rightarrow z_0} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p = a_{-p} \neq 0,$$

quindi

$$\exists \lim_{\zeta \rightarrow z_0} |f(\zeta)| = \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \frac{|f(\zeta)(\zeta - z_0)^p|}{|\zeta - z_0|^p} = +\infty.$$

$\Leftarrow$ . Consideriamo la funzione olomorfa in  $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ :

$$g(\zeta) := \frac{1}{f(\zeta)}.$$

Vale:

$$\lim_{\zeta \rightarrow z_0} |g(\zeta)| = \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \frac{1}{|f(\zeta)|} = 0.$$

Pertanto la funzione  $g$  è limitata in un intorno di  $z_0$ ,  $z_0$  escluso. Allora, per il teorema di Riemann sulle singolarità eliminabili 5.2.2,  $g$  è olomorfa in un intorno di  $z_0$  ( $z_0$  incluso) e  $g(z_0) = 0$ . Essendo  $z_0$  uno zero per  $g = \frac{1}{f}$ , dalla 5.3.2 segue che  $z_0$  è un polo per  $f$ .  $\square$

Il risultato che caratterizza le singolarità essenziali isolate è il seguente.

**Teorema 5.3.4** (caratterizzazione delle singolarità essenziali isolate). Sia  $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ .

$z_0$  singolarità essenziale per  $f$

$\Updownarrow$

$$\nexists \lim_{\zeta \rightarrow z_0} |f(\zeta)| \left( \liminf_{\zeta \rightarrow z_0} |f(\zeta)| = 0 \text{ e } \limsup_{\zeta \rightarrow z_0} |f(\zeta)| = +\infty \right).$$

2. Provare, con 5.3.4, che la funzione  $e^{\frac{1}{z}}$  ha una singolarità essenziale in  $z_0 = 0$ .

## 5.4 Comportamento di una funzione olomorfa all'infinito (complesso)

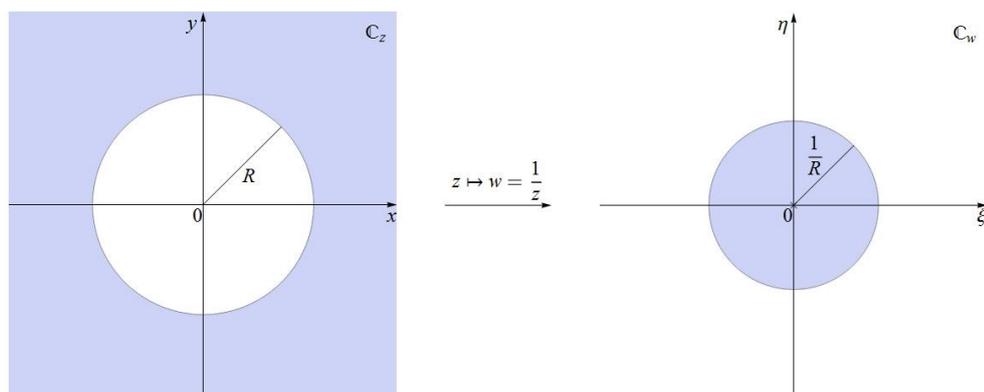
Sia  $\Omega_\infty$  l'aperto (un intorno dell'infinito complesso):

$$\Omega_\infty := \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

e sia  $\Omega_w$  l'aperto:

$$\Omega_w := \left\{ w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < \frac{1}{R} \right\}$$

che può essere ottenuto da  $\Omega_\infty$  mediante la trasformazione (conforme)  $w = \frac{1}{z}$ .



**Definizione 5.4.1** (singolarità all'infinito). Sia  $f(z) \in H(\Omega_\infty)$  e definiamo:

$$\varphi(w) := f\left(\frac{1}{w}\right) \in H\left(B_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\}\right)$$

Diremo che  $f$  ha una *singolarità all'infinito* eliminabile, polare o essenziale se  $\varphi$  ha una singolarità eliminabile, polare o essenziale (rispettivamente) in  $w = 0$ .

Consideriamo lo sviluppo in serie di Laurent di  $\varphi$  in  $B_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\}$ :

$$\varphi(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k w^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} w^{-k} \quad \forall w \in B_{\frac{1}{R}}(0) \setminus \{0\}$$

Tramite la trasformazione  $w = \frac{1}{z}$  otteniamo la serie di Laurent della funzione  $f$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} z^k \quad \forall z \in \Omega_\infty \quad (5.9)$$

La prima serie si dice *parte regolare di  $f$  all'infinito*, la seconda *parte singolare di  $f$  all'infinito*. È evidente che, considerata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} z^k$$

parte singolare di  $f$  all'infinito, allora

(i)  $z_0 = \infty$  è singolarità eliminabile per  $f$  se e solo se:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} z^k = 0$$

(ii)  $z_0 = \infty$  è polo per  $f$  se e solo se la sua parte singolare ha un numero finito di addendi non nulli.

(iii)  $z_0 = \infty$  è singolarità essenziale per  $f$  se e solo se la parte singolare di  $f$  ha infiniti addendi non nulli.

## 5.5 Comportamento in un intorno di una singolarità essenziale isolata: Teorema di Casorati -Weierstrass e Teorema di Picard

**Teorema 5.5.1** (di Casorati-Weierstrass). *Sia  $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ , con  $z_0$  singolarità essenziale isolata per  $f$  ( $z_0$  può essere al finito oppure coincidere con l'infinito complesso), e sia  $w \in \mathbb{C}$  fissato ad arbitrio. Allora, comunque si assegni un numero reale  $\varepsilon > 0$  e un intorno  $I(z_0)$  di  $z_0$ , esistono infiniti punti  $z_\varepsilon \in I(z_0) \setminus \{z_0\}$  per i quali riesce:*

$$|f(z_\varepsilon) - w| < \varepsilon.$$

*Dimostrazione.* Fissato  $w \in \mathbb{C}$ , la funzione  $f(z) - w$  ha, come  $f$ , una singolarità essenziale in  $z_0$ ; allora, da 5.3.4, si ha:

$$\liminf_{z \rightarrow z_0} |f(z) - w| = 0$$

e la tesi segue dalla definizione di minimo limite. □

Il teorema afferma che, in ogni intorno di una sua singolarità essenziale isolata  $z_0$ , la funzione  $f$  approssima, in infiniti punti, e con la precisione che si vuole, tutti i valori complessi.

Il successivo teorema fornisce un risultato più preciso del Teorema di Casorati-Weierstrass.

**Teorema 5.5.2** (di Picard). *Sia  $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ , con  $z_0$  singolarità essenziale isolata per  $f$ . Allora, per ogni  $w \in \mathbb{C}$ , eccettuato al più un valore finito  $w_0 \in \mathbb{C}$  (valore eccezionale), l'equazione:*

$$f(z) = w \quad (5.10)$$

è soddisfatta da infiniti valori di  $z$  in ogni intorno di  $z_0$ .

Illustriamo ora il Teorema di Picard con il seguente esempio.

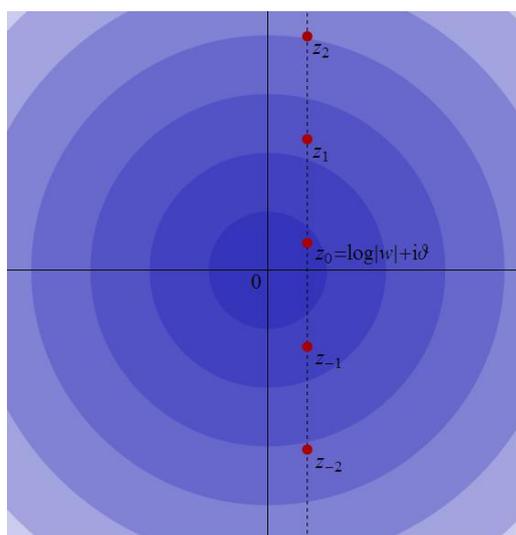
Consideriamo

$$f(z) = e^z.$$

L'unica singolarità di  $f$  è all'infinito complesso ed è (di tipo) essenziale. In questo caso l'equazione (5.10)  $e^z = w$  ammette, in corrispondenza di  $w \neq 0$ , le infinite soluzioni

$$z_k = \log |w| + i(\text{Arg}(w) + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

che si trovano su una retta parallela all'asse immaginario ed a distanza  $2\pi$  l'una dall'altra.



---

Evidentemente, comunque si fissi un intorno dell'infinito complesso, cadono sempre infinite soluzioni nell'intorno stesso. Osserviamo che il valore eccezionale è  $w_0 = 0$ .



# Capitolo 6

## Teoria dei residui

### 6.1 Residuo integrale di una funzione in un suo punto singolare isolato

**Definizione 6.1.1** (Residuo di una funzione in un punto singolare isolato al finito). Sia  $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$ , con  $z_0$  singolarità isolata per  $f$ . Si definisce *residuo* (integrale) di  $f$  in  $z_0$  il numero complesso:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma(z_0)} f(z) dz \quad \forall 0 < r < R \quad (6.1)$$

ove (per l'olomorfia)  $\gamma(z_0)$  è una qualsiasi curva generalmente regolare, semplice e chiusa, contornante  $z_0$  e con sostegno in  $B_R(z_0)$ .

Ricordiamo che  $a_{-1}$  è il coefficiente di  $\frac{1}{\zeta - z_0}$  dello sviluppo in serie di Laurent di  $f(\zeta)$  in un intorno di  $z_0$  (cfr. (5.6)).

Osserviamo che se  $z_0$  è singolarità eliminabile, il coefficiente  $a_{-1}$  dello sviluppo in serie di Laurent della funzione  $f$  è nullo, perciò  $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$ .

Per le funzioni che sono olomorfe in un intorno dell'infinito complesso, si introduce la nozione di residuo all'infinito. Questa è indipendente dal fatto che la funzione possa essere regolare all'infinito, o avervi una singolarità isolata di tipo polare o essenziale.

**Definizione 6.1.2** (Residuo all'infinito complesso). Sia

$$\Omega_\infty = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

e sia  $f \in H(\Omega_\infty)$ . Si definisce *residuo di  $f$  all'infinito*:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz = -a_1 \quad \forall r > R, \quad (6.2)$$

cioè  $\operatorname{Res}(f, \infty)$  uguaglia il coefficiente  $a_1$  di  $\frac{1}{z}$  nello sviluppo di Laurent di  $f(z)$  nell'intorno dell'infinito complesso, cambiato di segno.

Osserviamo che, anche se la funzione  $f$  è olomorfa all'infinito, il residuo di  $f$  all'infinito può essere diverso da zero (vedere l'esercizio 9 del paragrafo 6.2).

## 6.2 Calcolo dei residui

**Proposizione 6.2.1** (calcolo del residuo per singolarità polari al finito). *Sia  $f \in H(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$  e sia  $z_0$  un polo per  $f$ .*

(i) *Se  $z_0$  è polo semplice per  $f$ , allora:*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{\zeta \rightarrow z_0} f(\zeta)(\zeta - z_0) \quad (6.3)$$

(ii) *Se  $z_0$  è polo semplice per  $f = \frac{1}{g}$ , allora:*

$$\operatorname{Res}\left(f = \frac{1}{g}, z_0\right) = \frac{1}{g'(z_0)} \quad (6.4)$$

(iii) *Se  $f = h/g$ , con  $h$  e  $g$  olomorfe in  $z_0$  con  $h(z_0) \neq 0$ , e  $g$  ha uno zero semplice in  $z_0$ , allora:*

$$\operatorname{Res}\left(f = \frac{h}{g}, z_0\right) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \quad (6.5)$$

(iv) *Se  $z_0$  è un polo di ordine  $p \geq 2$ , allora:*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \frac{1}{(p-1)!} \left[ \frac{d^{p-1}}{d\zeta^{p-1}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p \right] \quad (6.6)$$

*Dimostrazione.* Il punto (i) è conseguenza della proposizione 5.3.1. La (ii) segue dall'applicazione del teorema di L'Hôpital:

$$\operatorname{Res}\left(f = \frac{1}{g}, z_0\right) = \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \frac{\zeta - z_0}{g(\zeta)} = \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \frac{1}{g'(\zeta)} = \frac{1}{g'(z_0)}.$$

Per provare (iii), osserviamo che per le ipotesi  $z_0$  è un polo del primo ordine per  $f$ , pertanto :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(f = \frac{h}{g}, z_0\right) &= \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \frac{h(\zeta)(\zeta - z_0)}{g(\zeta)} = \lim_{\zeta \rightarrow z_0} \frac{h'(\zeta)(\zeta - z_0) + h(\zeta)}{g'(\zeta)} = \\ &= \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \end{aligned}$$

Sia ora  $z_0$  polo di ordine  $p \geq 2$  per  $f$ . Per ipotesi, in un intorno di  $z_0$ ,  $f$  ha questo sviluppo in serie di Laurent:

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^p a_{-k}(\zeta - z_0)^{-k}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} f(\zeta)(\zeta - z_0)^p &= (\zeta - z_0)^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + \sum_{k=1}^p a_{-k}(\zeta - z_0)^{p-k} = \\ &= (\zeta - z_0)^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\zeta - z_0)^k + a_{-1}(\zeta - z_0)^{p-1} + \\ &+ a_{-2}(\zeta - z_0)^{p-2} + \dots + a_{-p} \end{aligned}$$

Da tale formula  $f(\zeta)(\zeta - z_0)^p$  risulta essere la somma di una serie di potenze in un intorno di  $z_0$ . Perciò questa funzione è prolungabile ad una funzione olomorfa anche in  $z_0$ . Osserviamo che  $a_{-1}$  risulta essere il coefficiente del termine di grado  $(p-1)$  dello sviluppo di Taylor della funzione  $f(\zeta)(\zeta - z_0)^p$ , e quindi segue la tesi (6.6).  $\square$

**Proposizione 6.2.2** (calcolo del residuo all'infinito). *Sia*

$$\Omega_\infty = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

e sia  $f \in H(\Omega_\infty)$ . *Risulta:*

$$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right) \quad (6.7)$$

*Dimostrazione.* Posto  $w = \frac{1}{z}$ , si ha, per ogni  $r > R$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), \infty) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\frac{1}{r}} f\left(\frac{1}{w}\right) d\left(\frac{1}{w}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\frac{1}{r}} -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw, \end{aligned}$$

da cui la (6.7). □

Osseviamo che, in alcuni casi, per calcolare il residuo di una funzione, è utile usare la serie geometrica e gli sviluppi in serie delle funzioni elementari.

Diamo esempi di calcolo dei residui.

1. Sia

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}.$$

I poli di  $f$  sono gli zeri del denominatore, cioè:

$$z_1 = 3i, \quad z_2 = -3i;$$

$z_1$  e  $z_2$  sono poli semplici. Calcoliamo i residui di  $f$  nei due punti di singolarità polare:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 3i) &= \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{1}{z^2 + 9} \cdot (z - 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{1}{z + 3i} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}; \\ \operatorname{Res}(f, -3i) &= \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{1}{z^2 + 9} \cdot (z + 3i) = \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{1}{z - 3i} = -\frac{1}{6i} = \frac{i}{6}. \end{aligned}$$

2. Consideriamo

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

Risulta:

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z_k = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Tali  $z_k$  sono poli semplici isolati per  $f$ , perciò:

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos k\pi} = \frac{1}{(-1)^k} \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

per la (6.4).

3. La funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$$

presenta due poli del secondo ordine, ovvero gli zeri del denominatore:

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i,$$

entrambi di molteplicità 2. Si ha, pertanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \cdot (z-i)^2 \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} \cdot (z-i)^2 \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right) = -\frac{i}{2e}; \\ \operatorname{Res}(f, -i) &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \cdot (z+i)^2 \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} \cdot (z+i)^2 \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{iz}}{(z-i)^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

4. Consideriamo

$$f(z) = \frac{e^z}{1+e^z}.$$

Per trovare gli zeri del denominatore, e quindi i poli di  $f$ , bisogna calcolare il logaritmo in campo complesso di  $-1$ :

$$1 + e^z = 0 \Leftrightarrow z_k = \log^{[k]}(-1) = (2k+1)\pi i \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Questi punti sono immaginari puri isolati e sono zeri semplici per il denominatore, quindi poli semplici per  $f$ . Dalla (6.5) si ottiene:

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = 1.$$

5. Non sempre si riesce a dedurre immediatamente l'ordine di un polo. Il denominatore della funzione

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^4}$$

ha in  $z = 0$  uno zero del quarto ordine; ma per  $z = 0$  si annulla anche la funzione al numeratore, perciò non possiamo affermare che  $z = 0$  è polo di ordine 4 per  $f$ . Bisogna, pertanto, esplicitare la serie di Laurent di  $f$  per calcolarne il residuo in  $z = 0$ . Ricordando lo sviluppo di McLaurin di  $\sin z$  otteniamo:

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \Rightarrow z - \sin z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots \Rightarrow \\ f(z) &= \frac{z - \sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} - \frac{z}{5!} + \dots\end{aligned}$$

Da qui si vede che  $z = 0$  è polo semplice per  $f$  (poiché la parte singolare dello sviluppo di Laurent di  $f$  ha il solo termine  $\frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z}$ ), perciò

$$\operatorname{Res}(f, 0) = a_{-1} = \frac{1}{3!}.$$

6. Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^4}$$

Gli unici punti di singolarità per  $f$  si trovano in corrispondenza degli zeri del denominatore. Pertanto l'unica singolarità si ha in  $z_0 = -1$ , che è uno zero del quarto ordine per  $(z+1)^4$ ; da 5.3.2 segue che  $z_0 = -1$  è polo del quarto ordine per  $f$ . Applicando 6.2.1 si ha:

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3}{dz^3} \left[ \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^4} \cdot (z+1)^4 \right]_{z=-1} = \frac{\pi^3 \sin(-\pi)}{3!} = 0$$

7. Sia:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$$

Il denominatore ha in  $z = 0$  uno zero del terzo ordine; ma ivi si annulla anche la funzione al numeratore. Bisogna, pertanto, esplicitare la serie di Laurent per dedurre l'ordine del polo  $z = 0$  e calcolare in tale punto il residuo di  $f$ . Ricordando lo sviluppo di McLaurin di  $\cos z$  otteniamo:

$$\begin{aligned}\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \Rightarrow 1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + \dots \Rightarrow \\ f(z) &= \frac{1 - \cos z}{z^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{z}{4!} + \dots\end{aligned}$$

Da qui si vede che  $z = 0$  è polo semplice per  $f$  (poiché la parte singolare dello sviluppo di Laurent di  $f$  ha il solo termine  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}$ ), perciò

$$\operatorname{Res}(f, 0) = a_{-1} = \frac{1}{2}.$$

8. Calcoliamo il residuo della funzione:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2 \operatorname{Log}(2 + iz)}$$

nel punto di singolarità  $z = i$ .

Innanzitutto stabiliamo la natura del punto di singolarità considerato.  $z = i$  è zero doppio per  $(z^2 + 1)^2$ ; esso è anche uno zero di  $\operatorname{Log}(2 + iz)$  del primo ordine; infatti:

$$\left[ \frac{d}{dz} \operatorname{Log}(2 + iz) \right]_{z=i} = \left[ \frac{i}{2 + iz} \right]_{z=i} = i \neq 0$$

Ne segue che  $i$  è uno zero del terzo ordine per  $1/f$ , ovvero, per 5.3.2, è un polo del terzo ordine per  $f$ . Dunque:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), i) &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[ (z - i)^3 \cdot \frac{1}{(z^2 + 1)^2 \operatorname{Log}(2 + iz)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z - i}{(z + i)^2 \operatorname{Log}(2 + iz)} \right] \end{aligned} \quad (6.8)$$

Poiché:

$$\begin{aligned} (z + i)^2 &= ((z - i) + 2i)^2 = (z - i)^2 - 4 + 4i(z - i); \\ \operatorname{Log}(2 + iz) &= \operatorname{Log}(1 + i(z - i)) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{[i(z - i)]^{k+1}}{k + 1} = \\ &= i(z - i) + \frac{(z - i)^2}{2} - i \cdot \frac{(z - i)^3}{3} + o(|z - i|^3), \end{aligned}$$

sostituendo nella (6.8) otteniamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), i) &= \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z - i}{-4i(z - i) - 6(z - i)^2 + \frac{13}{3}i(z - i)^3 + o(|z - i|^3)} \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Usiamo ora la divisione delle serie di potenze. Osserviamo che basterà esplicitare i coefficienti della serie cercata fino a quello di secondo ordine, dovendo poi calcolare la derivata seconda di tale serie. I coefficienti  $a_k$  del numeratore sono:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_j = 0 \quad \forall j > 1$$

I coefficienti  $b_k$  della serie al denominatore sono:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = -4i, \quad b_2 = -6, \quad b_3 = \frac{13}{3}i, \quad \dots$$

Detti  $c_k$  i coefficienti della serie cercata, troviamo  $c_0, c_1, c_2$  risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} c_0 b_0 = a_0 \\ c_1 b_0 + c_0 b_1 = a_1 \\ c_2 b_0 + c_1 b_1 + c_0 b_2 = a_2 \\ c_3 b_0 + c_2 b_1 + c_1 b_2 + c_0 b_3 = a_3 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} -4ic_0 = 1 \\ -4ic_1 - 6c_0 = 0 \\ -4ic_2 - 6c_1 + \frac{13}{3}ic_0 = 0 \end{cases}$$

Ne segue:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{i}{4} \\ c_1 = -\frac{3}{8} \\ c_2 = -\frac{7}{24}i \end{cases}$$

Dunque, sostituendo nella (6.9) otteniamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), i) &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{i}{4} - \frac{3}{8}(z-i) - \frac{7}{24}i(z-i)^2 + o(|z-i|^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( -2 \cdot \frac{7}{24}i \right) = -\frac{7}{24}i \end{aligned}$$

9. La funzione

$$f(z) = 1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^5}$$

ha all'infinito una singolarità eliminabile e, come unica singolarità al finito, un polo del quinto ordine nel punto 0. Risulta:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -3$$

Questo esempio mette in luce il fatto che, all'infinito, il residuo di una funzione olomorfa può non essere nullo. Inoltre

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 3.$$

10. La funzione

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

non ha singolarità al finito, ma presenta una singolarità essenziale all'infinito. Il residuo di  $f$  all'infinito è zero.

11. Stabilire il tipo di singolarità in  $z_0 = 0$  e calcolare il relativo residuo per le seguenti funzioni:

$$f(z) = \frac{1}{\sin^3 z}, \quad g(z) = \frac{e^z}{z^3} + z^3 e^{\frac{1}{z}}, \quad h(z) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}.$$

### 6.3 Primo e secondo Teorema dei residui

Le proprietà peculiari della teoria dei residui sono espresse dai teoremi seguenti.

**Teorema 6.3.1** (Primo Teorema dei residui). *Sia  $f \in H(\Omega \setminus \Sigma)$ , dove  $\Sigma$  è l'insieme dei punti di  $\Omega$  singolari per  $f$ , tutti isolati. Allora per ogni dominio regolare  $D \subset \Omega$ , con  $\partial D \cap \Sigma = \emptyset$ , si ha:*

- (i)  $\mathring{D} \cap \Sigma$  è un insieme finito;
- (ii) posto  $\mathring{D} \cap \Sigma := \{z_1, \dots, z_\nu\}$ , risulta:

$$\int_{+\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}(f, z_j). \quad (6.10)$$

*Dimostrazione.* Sia  $D$  un domino regolare come nelle ipotesi. La (i) è ovvia, in quanto l'insieme  $\Sigma$  non può avere punti d'accumulazione. Per dimostrare la (ii), siccome i punti  $z_j$  sono isolati, possiamo considerare, per ogni  $j = 1, \dots, \nu$ , un disco  $B_{r_j}(z_j)$  tale che  $\overline{B_{r_j}(z_j)} \subset \overset{\circ}{D}$  e  $B_{r_j}(z_j) \cap B_{r_l}(z_l) = \emptyset$  per  $j \neq l$ . Definiamo l'insieme:

$$D_\nu := D \setminus \bigcup_{j=1}^{\nu} B_{r_j}(z_j).$$

Ora,  $D_\nu$  è un dominio regolare e  $f \in H(D_\nu)$ ; per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3 si ha:

$$\int_{+\partial D_\nu} f(z) dz = 0.$$

Osserviamo che:

$$+\partial D_\nu = +\partial D \cup \left( \bigcup_{j=1}^{\nu} (-\partial B_{r_j}(z_j)) \right)$$

Perciò, per l'additività dell'integrale curvilineo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{+\partial D_\nu} f(z) dz = \int_{+\partial D} f(z) dz - \sum_{j=1}^{\nu} \int_{+\partial B_{r_j}(z_j)} f(z) dz \\ &\Rightarrow \int_{+\partial D} f(z) dz = \sum_{j=1}^{\nu} \int_{+\partial B_{r_j}(z_j)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res}(f, z_j), \end{aligned}$$

per la (6.1). □

Questo teorema rappresenta una generalizzazione del Teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3 (valido nell'ipotesi che  $f$  sia olomorfa in  $\Omega$  e quindi  $\Sigma = \emptyset$ ).

**Osservazione 6.3.2.** Le applicazioni del Teorema 6.3.1 sono molteplici.

Osserviamo esplicitamente che il calcolo dell'integrale a primo membro della (6.10) è ricondotto a quello dei residui nei punti singolari contenuti in  $\overset{\circ}{D}$ . Ciò consente, come vedremo, di sviluppare una metodologia che sfrutta la variabilità del dominio  $D$ .

**Teorema 6.3.3** (Secondo Teorema dei residui, sulla somma dei residui). *Sia  $f$  olomorfa in tutto il piano complesso  $\mathbb{C}$  privato di un numero finito di singolarità isolate  $z_1, \dots, z_\nu$ . Allora:*

$$\sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}(f, z_j) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0. \quad (6.11)$$

*Dimostrazione.* Sia  $r > \max\{|z_1|, \dots, |z_\nu|\}$  e consideriamo  $B_r(0)$ . Allora  $z_1, \dots, z_\nu \in B_r(0)$  e  $f(z)$  è olomorfa in  $\overline{B}_r(0) \setminus \{z_1, \dots, z_\nu\}$ . Per il primo Teorema dei residui 6.3.1:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(0)} f(z) dz = \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Ma, dalla (6.2):

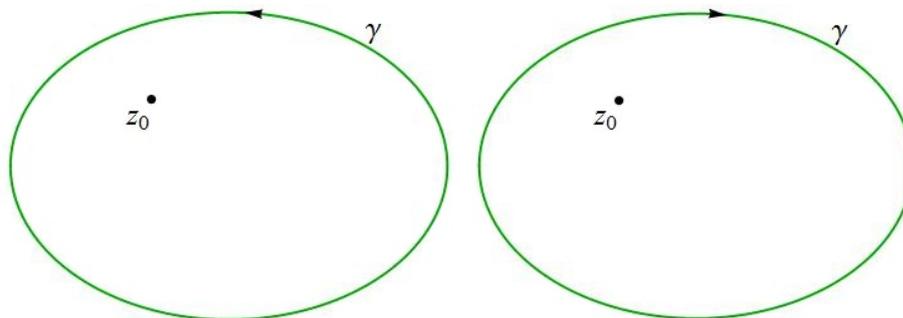
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_r(0)} f(z) dz = -\operatorname{Res}(f, \infty)$$

da cui segue la tesi. □

**Osservazione 6.3.4.** Talvolta è possibile ridurre il numero dei residui da calcolare, grazie al Secondo Teorema dei Residui.

## 6.4 Indice di avvolgimento di una curva ed estensione del primo Teorema dei residui

**Definizione 6.4.1** (indice di avvolgimento). Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva chiusa contornante un punto  $z_0 \notin \gamma([a, b])$ . Definiamo *indice di avvolgimento* di  $\gamma$  rispetto a  $z_0$  il numero (intero relativo)  $n(\gamma, z_0)$  di giri di  $\gamma$  attorno a  $z_0$ , dove il segno dipende dal verso di percorrenza della curva.



**Figura 6.1:** A sinistra,  $n(\gamma, z_0) = 1$ ; a destra  $n(\gamma, z_0) = -1$

La nozione introdotta di indice d'avvolgimento di una curva permette di generalizzare il Primo Teorema dei Residui.

**Teorema 6.4.2** (Estensione del Primo Teorema dei residui). *Siano  $\Omega$  semplicemente connesso,  $f \in H(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_\nu\})$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva chiusa contornante i punti  $z_j \notin \gamma([a, b])$  per ogni  $j = 1, \dots, \nu$ . Allora:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} [\text{Res}(f, z_j) \cdot n(\gamma, z_j)].$$

# Capitolo 7

## Applicazione del calcolo dei residui

Il Teorema dei residui fornisce un modo per calcolare integrali curvilinei e anche diversi tipi di integrali di funzioni reali, senza conoscere una primitiva dell'integrando.

### 7.1 Calcolo di integrali curvilinei

1. Calcoliamo:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)} dz$$

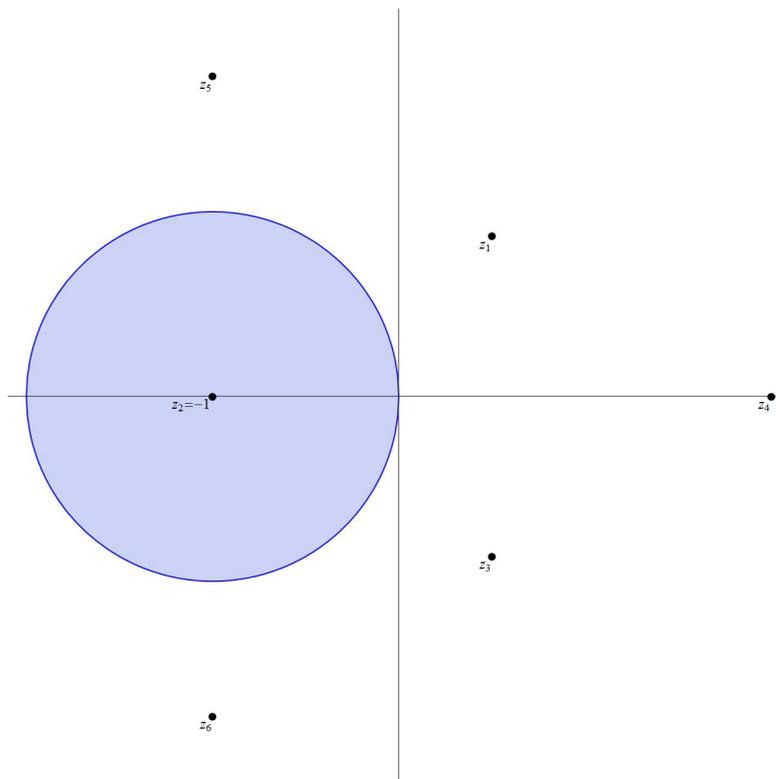
Per calcolare l'integrale richiesto utilizziamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 applicato al disco unitario di centro  $-1$ : infatti la curva su cui è eseguito l'integrale è la frontiera di tale dominio regolare. Ora, le singolarità della funzione integranda  $f$  sono tutti e soli gli zeri (semplici) del denominatore (sono i poli semplici di  $f$ ):

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}}, & z_2 &= e^{i\pi} = -1, & z_3 &= e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ z_4 &= 2, & z_5 &= 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, & z_6 &= 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Evidentemente, l'unica singolarità di  $f$  interna a  $|z+1|=1$  è  $z_2 = -1$ .

Allora:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)}, -1 \right)$$



**Figura 7.1:** Poli semplici di  $f$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(z^3 + 1)(z^3 - 8)}, -1 \right) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z + 1) \cdot \frac{1}{(z^3 + 1)(z^3 - 8)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(z^2 - z + 1)(z^3 - 8)} = -\frac{1}{27} \end{aligned}$$

Dunque, per il primo Teorema dei residui [6.3.1](#):

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^3 + 1)(z^3 - 8)} dz = -\frac{2\pi i}{27}$$

2. Calcoliamo:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz$$

Esplicitiamo lo sviluppo in serie di Laurent della funzione integranda; si ha:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + o(z^5)$$

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + o(z^5)$$

Da cui:

$$e^z - e^{-z} = 2z + \frac{z^3}{3} + o(z^5)$$

Dunque lo sviluppo in serie di Laurent della funzione integranda è:

$$\frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = 2 \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} + o(z)$$

Allora  $z = 0$  è un polo del terzo ordine,

$$\operatorname{Res} \left( \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}, 0 \right) = \frac{1}{3},$$

e quindi l'integrale richiesto vale, per il primo Teorema dei residui 6.3.1:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3}$$

**3.** Calcoliamo:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^3 z} dz$$

Esplicitiamo lo sviluppo in serie di Laurent della funzione  $1/\sin^3 z$  in un intorno di  $z = 0$ . Innanzitutto:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = z \left( 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right),$$

pertanto:

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{z^3 \left( 1 - \left( \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right) \right)^3}.$$

Osserviamo che il termine

$$\frac{1}{1 - \left( \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right)}$$

a secondo membro si può vedere come somma della serie geometrica di ragione:

$$w := \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots$$

Pertanto, trascurando i termini di ordine superiore al terzo:

$$\frac{1}{1 - \left( \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right)} = 1 + \frac{z^2}{3!} + o(z^3)$$

Ne segue:

$$\frac{1}{\left( 1 - \left( \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right) \right)^3} = \left[ 1 + \frac{z^2}{3!} + o(z^3) \right]^3 = 1 + \frac{3z^2}{3!} + o(z^3)$$

dove gli unici termini di grado inferiore al terzo sono 1 e il triplo prodotto tra il quadrato di 1 e  $z^2/3!$ . Allora:

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{z^3} \left[ 1 + \frac{3z^2}{3!} + o(z^3) \right] = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{o(z^3)}{z^3}$$

L'ultimo addendo rappresenta la parte regolare di  $1/\sin^3 z$  (contiene tutte le potenze ad esponente positivo dello sviluppo in serie di Laurent); osservando la parte singolare ricaviamo che  $z = 0$  è polo del terzo ordine e che:

$$\operatorname{Res} \left( \frac{1}{\sin^3 z}, 0 \right) = \frac{1}{2}$$

Possiamo quindi concludere, per il primo Teorema dei residui 6.3.1, che:

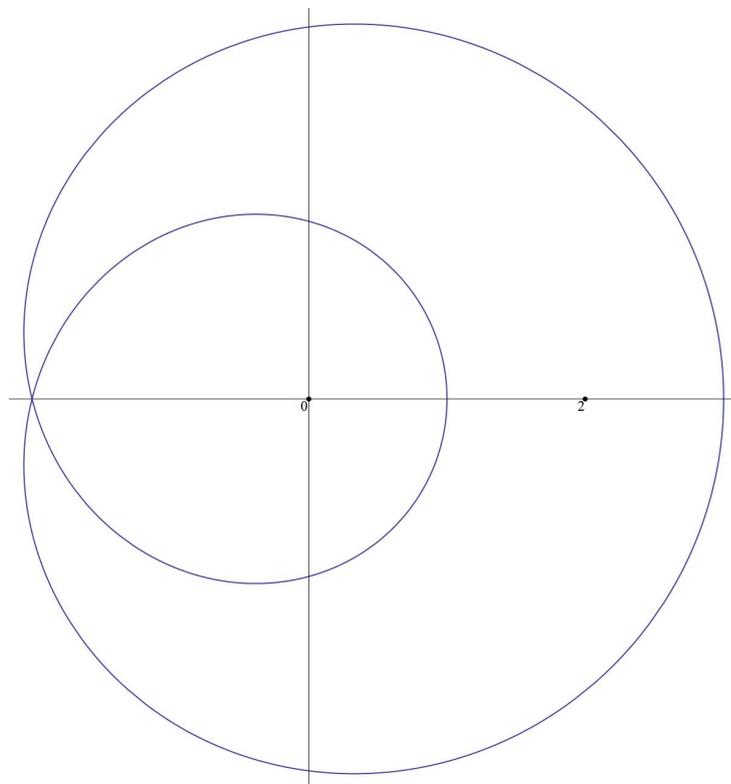
$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^3 z} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

4. Calcoliamo:

$$\int_{+\gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z} dz$$

dove  $\gamma$  è la curva di equazione parametrica:

$$z(\vartheta) = \left( 2 + \cos \frac{\vartheta}{2} \right) e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 4\pi]$$



**Figura 7.2:** sostegno di  $\gamma$

Le singolarità della funzione integranda  $f$  sono 0 e 2, entrambi poli semplici. Infatti, usando la decomposizione in frazioni parziali, si ha:

$$\frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z} = z^3 + \frac{3}{z} - \frac{1}{z-2}$$

Osservato che la curva  $\gamma$  è chiusa ma non semplice, per calcolare l'integrale richiesto, usiamo il primo Teorema dei residui generalizzato 6.4.2:

$$\int_{+\gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z} dz = 2\pi i \left[ (n(\gamma, 0) \cdot \text{Res}(f(z), 0)) + (n(\gamma, 2) \cdot \text{Res}(f(z), 2)) \right]$$

dove con  $n(\gamma, z)$  indichiamo l'indice di avvolgimento della curva  $\gamma$  attorno al punto  $z \notin \gamma$ . Come si può notare dalla figura, si ha:

$$n(\gamma, 0) = 2, \quad n(\gamma, 2) = 1$$

I residui nei due poli semplici 0 e 2 si deducono direttamente dalla precedente decomposizione in frazioni parziali della funzione integranda e risulta:

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = 3, \quad \operatorname{Res}(f(z), 2) = -1$$

Pertanto:

$$\int_{+\gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z} dz = 10\pi i$$

## 7.2 Calcolo di integrali definiti tra 0 e $2\pi$ di funzioni razionali di $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$

Integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta,$$

dove l'integrando è una funzione razionale di  $\cos \vartheta$  e  $\sin \vartheta$ , possono essere ricondotti ad integrali curvilinei su  $|z| = 1$  usando le formule di Eulero (1.7) e (1.8). Agli integrali curvilinei si potrà applicare poi il primo Teorema dei residui 6.3.1, come illustrato nei successivi esempi.

1. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos \vartheta} d\vartheta.$$

Poniamo  $z = e^{i\vartheta}$ . Applicando la formula di Eulero per il coseno otteniamo:

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

Allora, tenuto conto che  $d\vartheta = dz/iz$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos \vartheta} d\vartheta &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5 + 2 \left( z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz} = \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} dz \end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale può essere calcolato con il primo Teorema dei residui applicato alla funzione integranda (che denoteremo con  $f$ ) sulla circonferenza unitaria. Le singolarità al finito di  $f$  sono i due poli

semplici  $z_1 = -2$  e  $z_2 = -1/2$ , ma solo  $z_2$  cade nel disco unitario; risulta:

$$\operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{1}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2(z+2)\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

Ne segue:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

2. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta d\vartheta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Come nell'esercizio precedente, trasformiamo l'integrale definito di funzione reale in un integrale curvilineo nella variabile  $z := e^{i\vartheta}$  mediante la formula di Eulero per il coseno (1.7):

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta d\vartheta = \int_{|z|=1} \frac{1}{2^{2n}} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{2^{2n} z} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz$$

Denotiamo la funzione integranda all'ultimo membro con  $f(z)$ . Applicando la formula del binomio di Newton, risulta:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \cdot \frac{1}{z^{2n-k}}$$

da cui si ha:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{k} \frac{1}{z^{2n-2k+1}}$$

Quest'ultima somma rappresenta lo sviluppo in serie di Laurent di  $f(z)$  in un intorno di  $z = 0$ . Essendo  $\operatorname{Res}(f(z), 0)$  il coefficiente di  $\frac{1}{z}$ , si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), 0) &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n! n!} = \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) (n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \\ &= \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2) (2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2)} = \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta \, d\vartheta = 2\pi \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

3. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2 - 2p \cos \vartheta + 1} \, d\vartheta \quad (0 < p < 1).$$

Trasformiamo l'integrale definito di funzione reale in un integrale curvilineo nella variabile  $z := e^{i\vartheta}$  mediante la formula di Eulero per il coseno (1.7):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2 - 2p \cos \vartheta + 1} \, d\vartheta &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z - pz^2 - p + p^2z} \, dz = \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{(z-p)(1-pz)} \, dz. \end{aligned}$$

Denotiamo la funzione integranda all'ultimo membro con  $f(z)$ . Tale funzione presenta due singolarità di tipo polare del primo ordine; poiché  $0 < p < 1$ , l'unica singolarità interna a  $|z| = 1$  è  $z = p$ . Risulta:

$$\operatorname{Res}(f(z), p) = \lim_{z \rightarrow p} (z-p) \cdot \frac{1}{(z-p)(1-pz)} = \frac{1}{1-p^2}.$$

Allora, per 6.3.1:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-p)(1-pz)} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), p) = \frac{2\pi i}{1-p^2}.$$

In definitiva abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2 - 2p \cos \vartheta + 1} \, d\vartheta = \frac{2\pi}{1-p^2} \quad (0 < p < 1).$$

4. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \vartheta)^2} \, d\vartheta \quad (a > b > 0).$$

Trasformiamo l'integrale definito di funzione reale in un integrale curvilineo nella variabile  $z := e^{i\vartheta}$  mediante la formula di Eulero per il coseno (1.7):

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \vartheta)^2} \, d\vartheta = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{4z}{(bz^2 + 2az + b)^2} \, dz.$$

Denotiamo la funzione integranda all'ultimo membro con  $f(z)$ . Il denominatore della funzione  $f$  presenta due zeri reali del secondo ordine:

$$z_1 = -\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad z_2 = -\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Osservato che  $z_1 \cdot z_2 = 1$  e che, essendo  $a > b > 0$ ,  $z_1$  è esterno alla circonferenza unitaria, e (di conseguenza)  $z_2$  è interno alla circonferenza unitaria, calcoliamo solo il residuo di  $f$  in  $z_2$ :

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d}{dz} \left[ (z - z_2)^2 \cdot \frac{4z}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d}{dz} \frac{4z}{b^2(z - z_1)^2} = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{4(z - z_1) - 8z}{b^2(z - z_1)^3} = \\ &= \frac{a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \vartheta)^2} d\vartheta &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{4z}{(bz^2 + 2az + b)^2} dz = \\ &= 2\pi \text{Res}(f(z), z_2) = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

5. Calcolare:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \sin \vartheta} d\vartheta.$$

## 7.3 Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali

La seguente proposizione riguarda il calcolo di integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

**Proposizione 7.3.1** (Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali). *Siano  $P(x)$  e  $Q(x)$  polinomi a coefficienti reali di grado rispettivamente  $m$  e  $n \geq m + 2$ ; supponiamo inoltre  $Q(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Allora la funzione razionale*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

è integrabile su  $\mathbb{R}$  e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right), \quad (7.1)$$

dove i punti  $z_j$  sono gli zeri di  $Q(z)$  con  $\operatorname{Im}(z_j) > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, \nu$ ).

*Dimostrazione.* Trattandosi di funzioni razionali a coefficienti reali, perché  $Q(x)$  abbia solo zeri complessi  $n$  dev'essere pari,  $n = 2\nu$ , ed allora le radici si presentano a coppie coniugate.

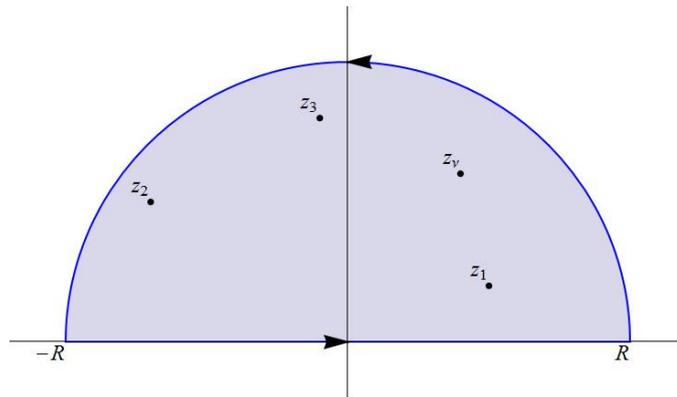
Sia  $R > 0$  sufficientemente grande in modo che  $B_R(0)$  contenga tutte le  $n$  radici in  $\mathbb{C}$  del polinomio  $Q(z)$ . Siano  $z_1, \dots, z_\nu$  le radici di  $Q(z)$  con parte immaginaria strettamente positiva e consideriamo l'insieme:

$$D := \overline{B}_R(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}.$$

$D$  è un dominio regolare; allora per 6.3.1 vale:

$$\int_{+\partial D} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

Ora, la frontiera di  $D$  è unione dell'intervallo  $[-R, R]$  e della semicirconferenza  $\gamma_R^+(0)$ , con orientazione come in figura:



Perciò:

$$\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

Per provare la tesi, dimostriamo che:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$$

Ora  $\gamma_R^+(0)$  ha rappresentazione parametrica:

$$z(\vartheta) = Re^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

perciò:

$$\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_0^\pi \frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} iRe^{i\vartheta} d\vartheta.$$

Per l'ipotesi:

$$\frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} = o\left(\frac{1}{R^2}\right);$$

Ne deduciamo che, per  $R \rightarrow +\infty$ :

$$\frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} iRe^{i\vartheta} = o\left(\frac{1}{R}\right);$$

perciò l'integrale lungo la semicirconferenza è infinitesimo per  $R \rightarrow +\infty$ , il che prova la proposizione.  $\square$

**Osservazione 7.3.2.** Evidenziamo che la dimostrazione è consistita nell'aggiungere all'intervallo limitato  $[-R, R]$  (con  $R > 0$  sufficientemente grande) della retta reale una semicirconferenza di raggio  $R$  centrata nell'origine. In tal modo è formata una curva regolare, semplice e chiusa, frontiera di un dominio regolare cui si applica il teorema dei residui. Successivamente si passa al limite per  $R \rightarrow +\infty$ .

1. Calcoliamo:

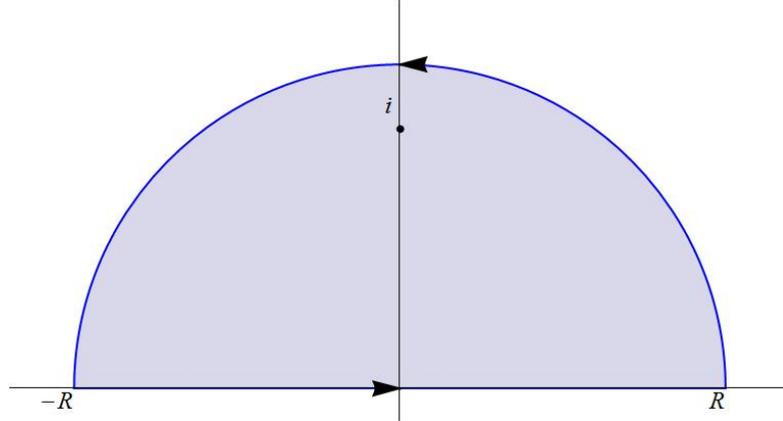
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}.$$

Tale funzione presenta due poli semplici in corrispondenza degli zeri del denominatore:

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i$$



Per 7.3.1, consideriamo i poli con parte immaginaria positiva, in questo caso solo  $z_1 = i$ , e fissiamo un semidisco di raggio  $R > |i| = 1$ .

Risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

Il residuo di  $f$  in  $i$  vale:

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

In definitiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

2. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{1}{1+z^4}.$$

Gli zeri del denominatore sono le radici quarte di  $-1$ , cioè:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), & z_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ z_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), & z_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i). \end{aligned}$$

Si tratta di poli semplici per  $f$ . Considerando i due poli a parte immaginaria positiva (ovvero  $z_0$  e  $z_1$ ), dalla 7.3.1 si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)].$$

Calcoliamo i residui di  $f$  in  $z_0$  e  $z_1$ :

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{4z^3} = -\frac{z_0}{4}, \\ \text{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{4z^3} = -\frac{z_1}{4}. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left( -\frac{\sqrt{2}}{4}i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(vedere l'esercizio 3 del paragrafo 7.7).

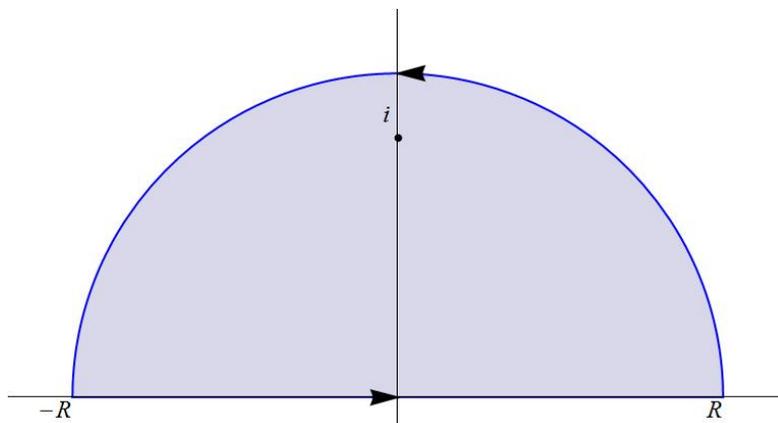
3. Calcoliamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

Essa ha in  $z_1 = i$  e in  $z_2 = -i$  due poli del secondo ordine; applichiamo il primo teorema dei residui 6.3.1 alla funzione  $f$  sul semidisco di raggio  $R > 1$  in figura:



Per 6.2.1, abbiamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(1+z^2)^2}, i \right) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(1+z^2)^2} \cdot (z-i)^2 \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} -\frac{2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale da calcolare vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(1+z^2)^2}, i \right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

4. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$$

Osserviamo che la funzione integranda è pari, pertanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) := \frac{z^2}{(1+z^2)^3}$$

che ha un polo del terzo ordine in  $z = i$ . Allora, per 7.3.1:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z), i)$$

Calcoliamo il residuo richiesto:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), i) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z^2}{(1+z^2)^3} \cdot (z-i)^3 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z^2}{(z+i)^3} \right] = -\frac{i}{16} \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{\pi}{16}.$$

## 7.4 Teoremi di Jordan del grande e del piccolo cerchio. Lemma di Jordan

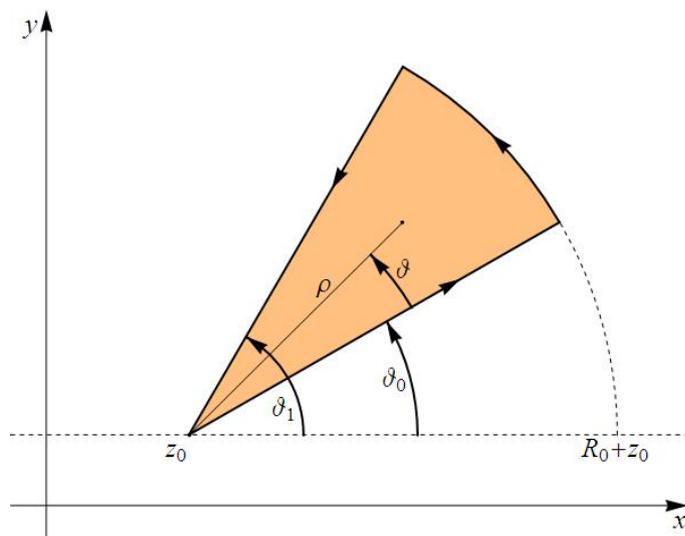
Nelle applicazioni risultano utili i seguenti risultati di Jordan, grazie ai quali, in molti casi, si possono calcolare i limiti per  $R \rightarrow +\infty$  o per  $r \rightarrow 0^+$  di integrali su archi di circonferenza nel piano complesso di raggi  $R$  o  $r$ .

**Teorema 7.4.1** (di Jordan, del grande cerchio). *Sia  $\gamma_{R_0}(z_0)$  un arco di circonferenza di raggio  $R_0 > 0$  e centro in  $z_0$ , limitato agli estremi dalle semirette per  $z_0$  di anomalia  $\vartheta_0$  e  $\vartheta_1$  ( $\vartheta_0 < \vartheta_1$ ). Se,  $f(z)$  essendo olomorfa su  $\gamma_R(z_0)$  per  $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$  e per ogni  $R \geq R_0$ , si ha uniformemente rispetto a  $\vartheta$*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (z - z_0) f(z) = l \in \mathbb{C}$$

allora risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z) dz = il(\vartheta_1 - \vartheta_0).$$



*Dimostrazione.* L'equazione parametrica di  $\gamma_R(z_0)$  è:

$$z = z_0 + Re^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1].$$

Risulta

$$\int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{1}{Re^{i\vartheta}} iRe^{i\vartheta} d\vartheta = i(\vartheta_1 - \vartheta_0) \quad (7.2)$$

e

$$\int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{|dz|}{|z - z_0|} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{1}{R} \cdot R \, d\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_0. \quad (7.3)$$

Per ipotesi, fissato un arbitrario  $\varepsilon > 0$ , esiste  $k > 0$  tale che, per  $|z - z_0| > k$ , si ha:

$$|(z - z_0) f(z) - l| < \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Allora, per  $R > k$  otteniamo, tenuto conto di (7.2) e (7.3):

$$\begin{aligned} & \left| \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z) dz - il(\vartheta_1 - \vartheta_0) \right| = \\ & = \left| \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z) dz - l \int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz \right| = \\ & = \left| \int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} [f(z)(z - z_0) - l] dz \right| \leq \\ & \leq \int_{+\gamma_R(z_0)} |f(z)(z - z_0) - l| \left| \frac{dz}{z - z_0} \right| < \\ & < \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{|dz|}{|z - z_0|} = \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0} (\vartheta_1 - \vartheta_0) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per definizione di limite, quindi:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z) dz = il(\vartheta_1 - \vartheta_0),$$

il che prova il teorema.  $\square$

**Teorema 7.4.2** (di Jordan, del piccolo cerchio). *Sia  $\gamma_{r_0}(z_0)$  un arco di circonferenza di raggio  $r_0 > 0$  e centro in  $z_0$ , limitato agli estremi dalle semirette per  $z_0$  di anomalia  $\vartheta_0$  e  $\vartheta_1$  ( $\vartheta_0 < \vartheta_1$ ). Se,  $f(z)$  essendo olomorfa su  $\gamma_r(z_0)$  per  $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$  e per ogni  $0 < r \leq r_0$ , si ha uniformemente rispetto a  $\vartheta$*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = l \in \mathbb{C}$$

allora risulta

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma_r(z_0)} f(z) dz = il(\vartheta_1 - \vartheta_0).$$

*Dimostrazione.* Per ipotesi, per ogni fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che, per  $0 < r = |z - z_0| < \delta$ , si ha:

$$|(z - z_0) f(z) - l| < \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Allora, per  $r < \delta$ , tenuto conto di (7.2) e (7.3), risulta:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{+\gamma_r(z_0)} f(z) dz - il(\vartheta_1 - \vartheta_0) \right| = \\ & = \left| \int_{+\gamma_r(z_0)} f(z) dz - l \int_{+\gamma_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz \right| = \\ & = \left| \int_{+\gamma_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0} [f(z)(z - z_0) - l] dz \right| \leq \\ & \leq \int_{+\gamma_r(z_0)} |f(z)(z - z_0) - l| \left| \frac{dz}{z - z_0} \right| < \\ & < \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \int_{+\gamma_r(z_0)} \frac{|dz|}{|z - z_0|} = \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0} (\vartheta_1 - \vartheta_0) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per definizione di limite, quindi:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma_r(z_0)} f(z) dz = il(\vartheta_1 - \vartheta_0),$$

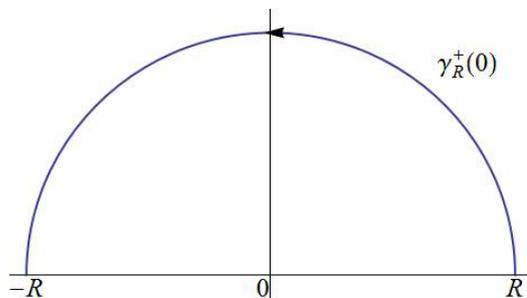
il che prova il teorema. □

**Lemma 7.4.3** (di Jordan). *Sia  $\gamma_{R_0}(0)$  un arco di circonferenza di raggio  $R_0 > 0$  e centro in 0, limitato agli estremi dalle semirette per 0 di anomalia  $\vartheta_0$  e  $\vartheta_1$  ( $\vartheta_0 < \vartheta_1$ ). Se,  $f(z)$  essendo olomorfa su  $\gamma_R(0)$  per  $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$  e per ogni  $R \geq R_0$ , si ha uniformemente rispetto a  $\vartheta$*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0,$$

allora si hanno i seguenti risultati:

- (i) se  $\vartheta_0 = 0$  e  $\vartheta_1 = \pi$ ,

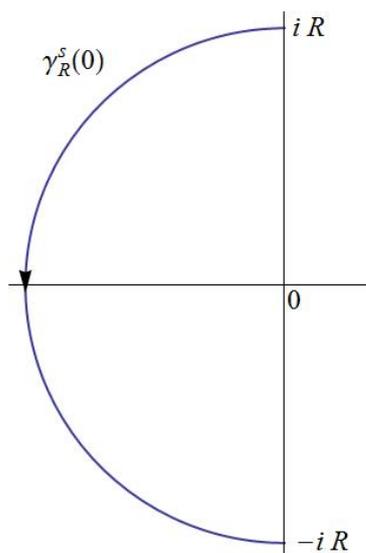


risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0 \quad \forall \alpha > 0,$$

dove  $\gamma_R^+(0)$  è la semicirconferenza superiore;

(ii) se  $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$  e  $\vartheta_1 = \frac{3}{2}\pi$ ,

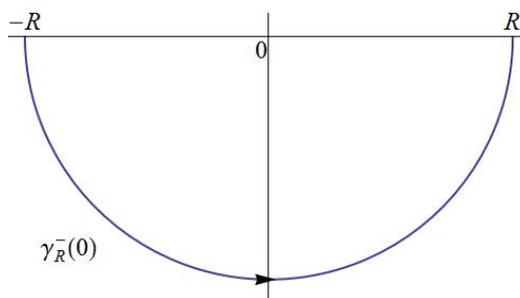


risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^s(0)} f(z) e^{\alpha z} dz = 0 \quad \forall \alpha > 0,$$

dove  $\gamma_R^s(0)$  è la semicirconferenza a sinistra;

(iii) se  $\vartheta_0 = \pi$  e  $\vartheta_1 = 2\pi$ ,

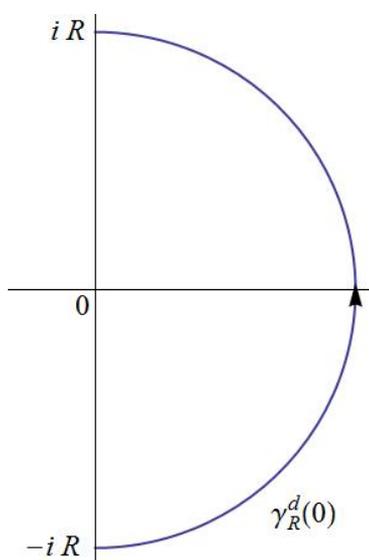


risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^-(0)} f(z) e^{-i\alpha z} dz = 0 \quad \forall \alpha > 0,$$

dove  $\gamma_R^-(0)$  è la semicirconferenza inferiore;

(iv) se  $\vartheta_0 = -\frac{\pi}{2}$  e  $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ ,



risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^d(0)} f(z) e^{-\alpha z} dz = 0 \quad \forall \alpha > 0,$$

dove  $\gamma_R^d(0)$  è la semicirconferenza a destra.

*Dimostrazione.*

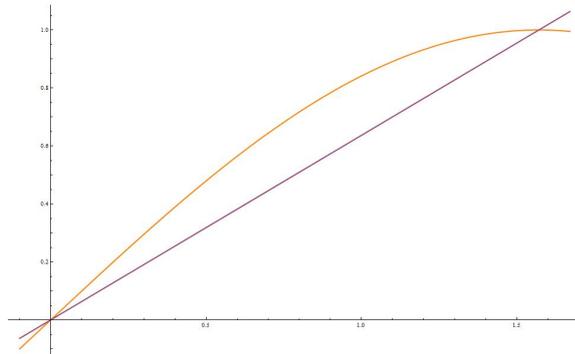
(i) Consideriamo la rappresentazione parametrica di  $\gamma_R^+(0)$ :

$$z(\vartheta) = R e^{i\vartheta} = R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

Vale:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{+\gamma_R^+(0)} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\vartheta}) e^{i\alpha R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} \cdot Rie^{i\vartheta} d\vartheta \right| = \\
 &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\vartheta}) e^{i\alpha R \cos \vartheta} \cdot e^{-\alpha R \sin \vartheta} \cdot Rie^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq \\
 &\leq \int_0^\pi \sup_{z \in \gamma_R^+(0)} |f(z)| e^{-\alpha R \sin \vartheta} \cdot R d\vartheta = \\
 &= 2R \sup_{z \in \gamma_R^+(0)} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \vartheta} d\vartheta.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Risulta  $\sin \vartheta \geq \frac{2}{\pi} \vartheta$  per  $\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  (considerare il grafico di  $\sin \vartheta$  e la congiungente i punti  $(0, 0)$  e  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ , di equazione  $y = \frac{2}{\pi} \vartheta$ ).



Da (7.4) segue:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{+\gamma_R^+(0)} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &\leq 2R \sup_{z \in \gamma_R^+(0)} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R(\frac{2}{\pi} \vartheta)} d\vartheta = \\
 &= 2R \sup_{z \in \gamma_R^+(0)} |f(z)| \cdot \pi \cdot \frac{1 - e^{-\alpha R}}{2\alpha R}.
 \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{z \in \gamma_R^+(0)} |f(z)| = 0$$

e  $\alpha > 0$  per ipotesi, per  $R \rightarrow +\infty$  otteniamo la tesi.

(ii) Consideriamo la rappresentazione parametrica di  $\gamma_R^s(0)$ :

$$z(\vartheta) = Re^{i\vartheta} = R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \quad \vartheta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right].$$

Vale:

$$\begin{aligned} \left| \int_{+\gamma_R^s(0)} f(z)e^{\alpha z} dz \right| &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(Re^{i\vartheta}) e^{\alpha R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} \cdot Rie^{i\vartheta} d\vartheta \right| = \\ &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(Re^{i\vartheta}) e^{\alpha R \cos \vartheta} \cdot e^{i\alpha R \sin \vartheta} \cdot Rie^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sup_{z \in \gamma_R^s(0)} |f(z)| e^{\alpha R \cos \vartheta} \cdot R d\vartheta \stackrel{\vartheta' = \vartheta - \frac{\pi}{2}}{\leq} \\ &= R \sup_{z \in \gamma_R^s(0)} |f(z)| \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \vartheta'} d\vartheta' = \\ &= 2R \sup_{z \in \gamma_R^s(0)} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \vartheta'} d\vartheta' \leq \\ &\leq 2R \sup_{z \in \gamma_R^s(0)} |f(z)| \cdot \pi \cdot \frac{1 - e^{-\alpha R}}{2\alpha R} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per  $R \rightarrow +\infty$ .

I casi (iii) e (iv) sono lasciati da dimostrare per esercizio. □

## 7.5 Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali moltiplicate per una funzione esponenziale. Formula di Heaviside

Il risultato che segue riguarda il calcolo di integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx, \quad \alpha > 0.$$

**Proposizione 7.5.1.** *Siano  $P(x)$ ,  $Q(x)$  polinomi a coefficienti reali di grado rispettivamente  $m$  e  $n \geq m + 2$  e sia  $\alpha > 0$ ; supponiamo, inoltre,  $Q(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)e^{i\alpha z}}{Q(z)}, z_j \right), \quad (7.5)$$

dove i punti  $z_j$  sono gli zeri di  $Q(z)$  con  $\text{Im}(z_j) > 0$  ( $j = 1, \dots, \nu$ ).

*Dimostrazione.* Sia  $R > 0$  sufficientemente grande in modo che  $B_R(0)$  contenga tutte le  $n$ ,  $n = 2\nu$ , radici in  $\mathbb{C}$  del polinomio  $Q(z)$ . Siano  $z_1, \dots, z_\nu$  le radici di  $Q(z)$  con parte immaginaria strettamente positiva e consideriamo l'insieme:

$$D := \overline{B}_R(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}.$$

$D$  è un dominio regolare; allora per 6.3.1 vale:

$$\int_{+\partial D} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j \right).$$

Poiché  $+\partial D = (+\gamma_R^+(0)) \cup [-R, R]$ , si ha:

$$\underbrace{\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz}_{(I)} + \underbrace{\int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx}_{(II)} = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j \right).$$

Passando al limite per  $R \rightarrow +\infty$ , l'integrale (I) è infinitesimo, per 7.4.3 punto (i), mentre l'integrale (II) tende all'integrale improprio in (7.5), da cui la tesi.  $\square$

**Corollario 7.5.2** (Formula di Heaviside). *Sotto le stesse ipotesi di 7.5.1, se gli zeri  $z_1, \dots, z_\nu$  di  $Q(z)$  con  $\text{Im}(z_j) > 0$  ( $j = 1, \dots, \nu$ ) sono semplici, vale la seguente formula di Heaviside:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \frac{P(z_j) e^{i\alpha z_j}}{Q'(z_j)}. \quad (7.6)$$

*Dimostrazione.* Poiché  $z_j$  è polo semplice, da (6.5) si ottiene:

$$\text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j \right) = \frac{P(z_j) e^{i\alpha z_j}}{Q'(z_j)}.$$

$\square$

1. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx, \quad \alpha > 0.$$

La funzione integranda presenta due singolarità polari del primo ordine,  $i$  e  $-i$ ; applicando 7.5.2 risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \left[ \frac{e^{i\alpha z}}{2z} \right]_{z=i} = \pi e^{-\alpha}.$$

Osserviamo che, esplicitando l'esponenziale complesso in termini di seno e coseno, otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi e^{-\alpha} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)}{x^2 + 1} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

Eguagliando parte reale e immaginaria di primo e ultimo membro si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} dx = 0 \quad (\alpha > 0).$$

**Osservazione 7.5.3.** Dalla considerazione precedente, si evince come calcolare *integrali impropri di funzioni reali razionali moltiplicate per le funzioni coseno o seno*. In generale, basta osservare che, per l'integrando in (7.5), si ha

$$\frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\alpha x) + i \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\alpha x).$$

## 7.6 Integrandi che presentano singolarità sulla retta reale

Finora abbiamo assunto che l'integrando  $f$  non abbia singolarità sulla retta reale; ciò ha consentito di integrare  $f$  sull'asse reale. Modificando la curva di integrazione, possiamo eliminare tale richiesta, come illustrato negli esempi che seguono.

1. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

L'integrale proposto è improprio, definito come il limite di

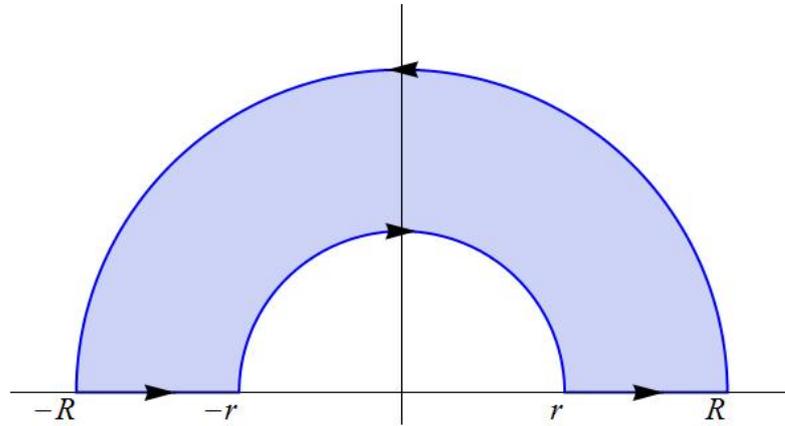
$$\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx$$

per  $R \rightarrow +\infty$ . Osserviamo che la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  è integrabile in  $\mathbb{R}$ .

Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

nella semicorona circolare contenuta nel semipiano positivo  $C^+(0, r, R)$ : in tale dominio regolare  $f$  è olomorfa, allora per il Teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3:



grale nullo di Cauchy 2.8.3:

$$\int_{+\partial C^+(0, r, R)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

La frontiera di  $C^+(0, r, R)$  orientata positivamente è così formata:

$$+\partial C^+(0, r, R) = [r, R] \cup (+\gamma_R^+(0)) \cup [-R, -r] \cup (-\gamma_r^+(0))$$

Allora:

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (7.7)$$

Osserviamo che:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_{-r}^{-R} \frac{e^{ix}}{x} dx \stackrel{t=-x}{=} - \int_r^R \frac{e^{-it}}{-t} (-dt) \stackrel{x=t}{=} - \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

Sostituendo in (7.7) risulta:

$$\begin{aligned} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz &= - \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx = \\ &= -2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx, \end{aligned} \quad (7.8)$$

dove abbiamo utilizzato la formula di Eulero per la funzione seno (1.8). Ora, applicando il lemma 7.4.3(i) e il teorema 7.4.2 si ha:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = o, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi. \quad (7.9)$$

Facendo tendere  $R \rightarrow +\infty$  e  $r \rightarrow 0^+$  in (7.8), tenuto conto delle (7.9) otteniamo:

$$-i\pi = -2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Poiché la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  è pari, abbiamo in definitiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

2. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$$

Applicando la formula di Eulero per la funzione seno (1.8):

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix}}{8i} = \\ &= -\frac{1}{4} [\sin(3x) - 3\sin x], \end{aligned}$$

e quindi:

$$\frac{\sin^3 x}{x^3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin(3x) - 3\sin x}{x^3}.$$

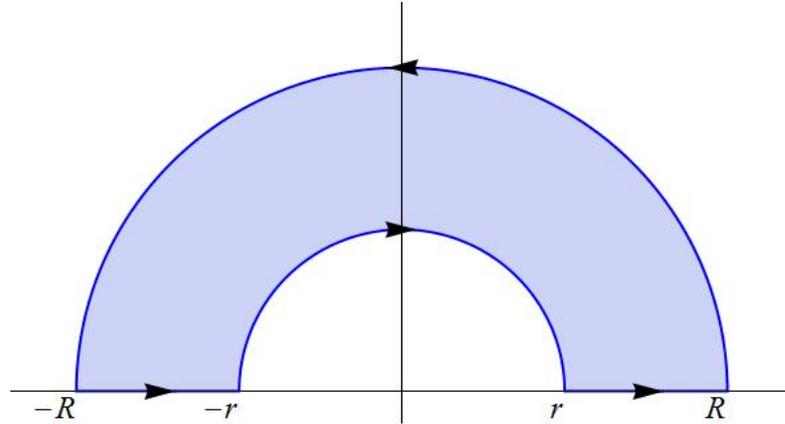
Consideriamo allora la funzione (che presenta al numeratore uno zero in  $z = 0$ ):

$$f(z) := \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$$

sulla semicorona circolare  $D$  in figura:

Poiché  $f(z)$  è olomorfa in  $D$ , per il Teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3:

$$\int_{+\partial D} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = 0$$



Scomponendo l'integrale lungo i tratti regolari di  $\partial D$ , otteniamo:

$$\int_{-r}^R \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz +$$

$$+ \int_{-R}^{-r} \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx - \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = 0$$

dove abbiamo indicato con  $\gamma_R^+(0)$  e  $\gamma_r^+(0)$  la semicirconfenza esterna e la semicirconfenza interna (rispettivamente). Ne segue:

$$\int_r^R \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx - \int_r^R \frac{e^{-3ix} - 3e^{-ix} + 2}{x^3} dx =$$

$$= - \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz + \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz$$

da cui:

$$2i \int_r^R \frac{\sin(3x) - 3\sin x}{x^3} dx =$$

$$= - \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz + \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz. \quad (7.10)$$

Ora:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} = 0$$

perché il numeratore è limitato nel semipiano delle  $y$  positive. Applicando la regola di L'Hôpital otteniamo:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} = -3$$

Allora, per il teorema del grande cerchio 7.4.1:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = 0 \quad (7.11)$$

e, per il teorema del piccolo cerchio 7.4.2:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = -3\pi i \quad (7.12)$$

Per  $r \rightarrow 0^+$  e  $R \rightarrow +\infty$ , da (7.10), per (7.11) e (7.12), si ha:

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin(3x) - 3 \sin x}{x^3} dx = -3\pi i$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3}{8}\pi.$$

3. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx.$$

Tenendo presente che  $x - \sin x = o(x^3)$ , la funzione integranda è integrabile in  $[0, +\infty[$ . Ora,

$$x - \sin x = \operatorname{Re}(x + ie^{ix}),$$

pertanto consideriamo la funzione (che presenta al numeratore uno zero in  $z = 0$ ):

$$f(z) := \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)}$$

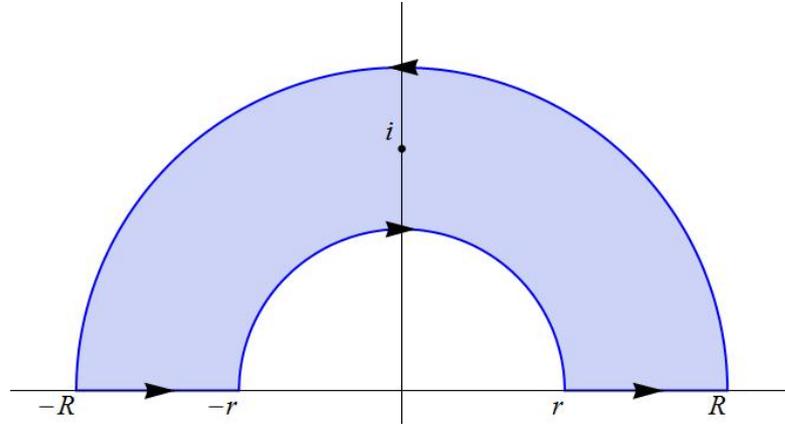
sulla semicorona circolare  $D$  in figura:

con  $r < 1 < R$ . La funzione  $f(z)$  presenta in  $D$  una sola singolarità: il polo semplice  $z = i$ . Per il primo Teorema dei residui:

$$\int_{+\partial D} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)}, i \right) = 2\pi i \cdot \frac{ie^{-1}}{2},$$

essendo

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)}, i \right) = \frac{ie^{-1}}{2}$$



Scomponendo l'integrale lungo i tratti regolari di  $\partial D$ , otteniamo:

$$\int_r^R \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx + \\ - \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz = -\frac{\pi}{e}.$$

dove abbiamo indicato con  $\gamma_R^+(0)$  e  $\gamma_r^+(0)$  la semicirconfenza esterna e la semicirconfenza interna (rispettivamente). Ne segue:

$$2 \int_r^R \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx = \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz + \\ - \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz - \frac{\pi}{e} \quad (7.13)$$

Allora, per il teorema del grande cerchio 7.4.1:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz = 0 \quad (7.14)$$

e, per il teorema del piccolo cerchio 7.4.2:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz = \frac{\pi}{2} \quad (7.15)$$

Per  $r \rightarrow 0^+$  e  $R \rightarrow +\infty$ , da (7.13), per (7.14) e (7.15), si ha:

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{e}$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right].$$

4. Calcoliamo il *valor principale (v.p.)* del seguente integrale improprio<sup>1</sup>:

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx.$$

La funzione integranda è un infinitesimo di ordine 3 sia per  $x \rightarrow -\infty$  che per  $x \rightarrow +\infty$ , ma per  $x \rightarrow -1$  è un infinito del primo ordine.

---

<sup>1</sup>Integrali impropri e loro valor principale (v.p.) secondo Cauchy.

**Definizione 7.6.1.** Sia  $f$  definita sulla retta reale e consideriamo l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Consideriamo i limiti:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx \tag{7.16}$$

e

$$\lim_{R_1 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{R_2} f(x) dx. \tag{7.17}$$

Se il limite (7.16) esiste, esso si chiama *valor principale secondo Cauchy* dell'integrale improprio e si scrive:

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx.$$

Se il limite (7.17) esiste, si dice che l'integrale improprio converge e si scrive:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{R_2} f(x) dx.$$

**Osservazione 7.6.2.** Se esiste il limite (7.17) allora esiste il limite (7.16) e vale l'uguaglianza

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

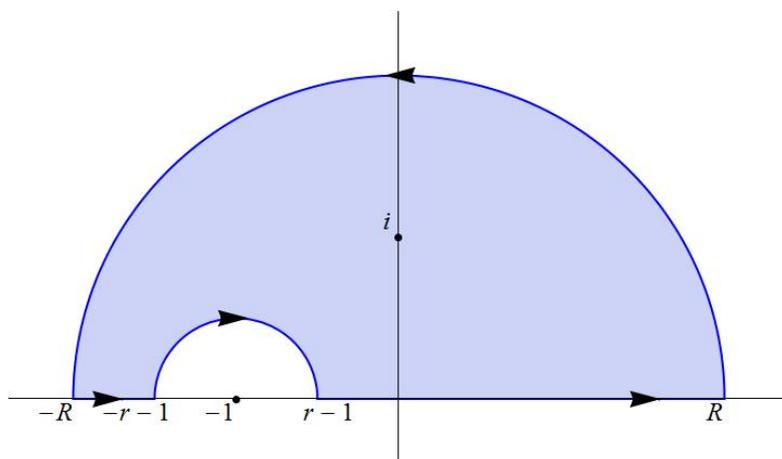
Tuttavia, l'esistenza di (7.16) non implica in generale l'esistenza di (7.17). Infatti

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = 0$$

ma non esistono i due limiti

$$\lim_{R_1 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^0 x dx, \quad \lim_{R_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{R_2} x dx.$$

Pertanto la funzione integranda è integrabile in un intorno di  $\pm\infty$ , ma non è integrabile in un intorno del punto  $-1$ . Oltre che in  $-1$ , il denominatore si annulla in  $i$  e  $-i$  (zeri semplici). Consideriamo un dominio regolare a cui applicare il primo Teorema dei residui 6.3.1 che non contenga il punto  $-1$ . Una scelta naturale è quella di considerare un semidisco del semipiano superiore centrato in  $0$  e di raggio  $R > 1$  (contenente  $i$ ), privato di un semidisco centrato in  $-1$  e di raggio  $r < 1$  sufficientemente piccolo.



Detto  $D_{r,R}$  tale insieme, applichiamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 a

$$f(z) := \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)}$$

in  $D_{r,R}$  (dominio regolare):

$$\int_{+\partial D_{r,R}} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i)$$

Ripartendo la frontiera di  $D_{r,R}$  e considerandone l'orientazione positiva, come in figura, otteniamo:

$$\begin{aligned} & \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz + \int_{-R}^{-1-r} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx + \\ & - \int_{+\gamma_r^+(-1)} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz + \int_{-1+r}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx = \quad (7.18) \\ & = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2(i - 1)} \end{aligned}$$

essendo:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{2i - 2}.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz &\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_{+\gamma_r^+(-1)} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz &\xrightarrow{r \rightarrow 0^+} i \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

per 7.4.1 e 7.4.2 rispettivamente. Quindi, per  $R \rightarrow +\infty$  e  $r \rightarrow 0^+$ , da (7.18), per (7.19), otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx + \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx = \frac{\pi}{2},$$

pertanto

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Calcoliamo il valor principale del seguente integrale improprio:

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx. \quad (7.20)$$

La funzione integranda è integrabile in un intorno di  $\pm\infty$ , ma non è integrabile in un intorno del punto 1, poiché è infinitesima di ordine 3 per  $x \rightarrow -\infty$  e  $x \rightarrow +\infty$ , ma per  $x \rightarrow 1$  è un infinito del primo ordine. Consideriamo la funzione

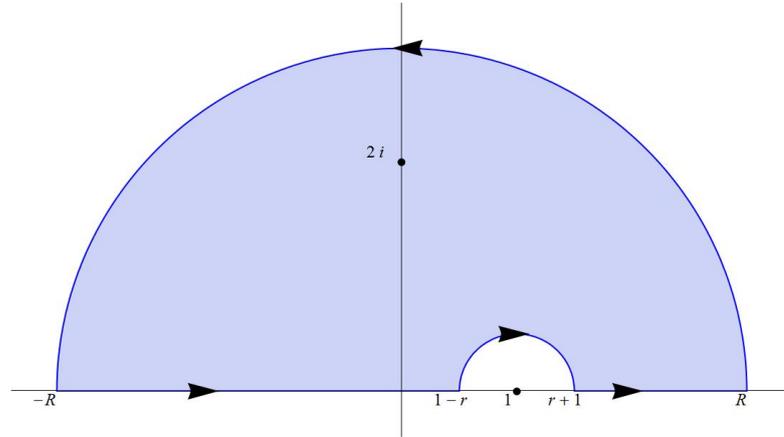
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)};$$

1,  $2i$  e  $-2i$  sono zeri semplici del denominatore.

Consideriamo il dominio regolare  $D_{R,r}$  come in figura ( $R > 2$  e  $r < 1$ ).

Applichiamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 a  $f(z)$  in  $D_{R,r}$ :

$$\int_{+\partial D_{R,r}} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 2i)$$



Poiché  $z = 2i$  è polo semplice per  $f(z)$ , si ha:

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} = \frac{e^{-2}}{4i(2i - 1)}.$$

Ripartendo la frontiera di  $D_{R,r}$  e considerandone l'orientazione positiva come in figura, otteniamo:

$$\begin{aligned} & \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz + \int_{-R}^{1-r} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx + \\ & - \int_{+\gamma_r^+(1)} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz + \int_{1+r}^R \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = \quad (7.21) \\ & = \frac{\pi}{2e^2(2i - 1)} = -\frac{\pi(2i + 1)}{10e^2}. \end{aligned}$$

Da 7.4.3(i) e 7.4.2 segue:

$$\begin{aligned} & \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \\ & \int_{+\gamma_r^+(1)} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} i \frac{e^i \pi}{5}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Allora, per  $R \rightarrow +\infty$  e  $r \rightarrow 0^+$  in (7.21) e tenuto conto di (7.22), risulta (essendo  $e^i = \cos 1 + i \sin 1$ ):

$$\begin{aligned} & (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = \\ & = \frac{i\pi e^i}{5} - \frac{\pi(2i + 1)}{10e^2} = -\pi \frac{2e^2 \sin 1 + 1}{10e^2} + i \left( 2\pi \frac{e^2 \cos 1 - 1}{10e^2} \right). \end{aligned}$$

Il valor principale (7.20) è dato dalla parte immaginaria dell'integrale precedente:

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = 2\pi \frac{e^2 \cos 1 - 1}{10e^2}$$

e quindi:

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = -\pi \frac{2e^2 \sin 1 + 1}{10e^2}.$$

## 7.7 Integrali di funzioni polidrome

1. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0)$$

La funzione integranda è integrabile su  $[0, +\infty[$  in quanto per  $x \rightarrow 0^+$  è infinita di ordine arbitrariamente piccolo e per  $x \rightarrow +\infty$  è infinitesima di ordine maggiore di 1. Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) := \frac{\log z}{z^2 + a^2}$$

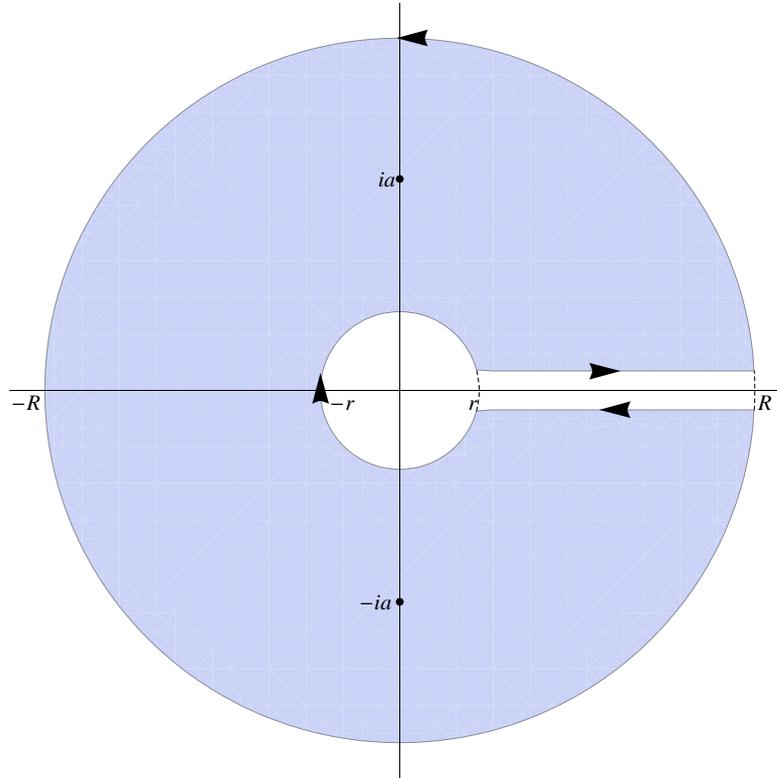
e scegliamo per l'argomento principale di  $z$  la limitazione  $\text{Arg} z \in [0, 2\pi[$  (cioè  $\log$  è definito nell'insieme semplicemente connesso  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ ). Il punto  $z = 0$  è di diramazione per la funzione  $f$ , che presenta due poli semplici in  $ia$  e  $-ia$ . Consideriamo il dominio regolare  $D$  in figura ( $r < a < R$ ).

Applicando il primo Teorema dei residui 6.3.1 si ha:

$$\int_{+\partial D} \frac{\log z}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i [\text{Res}(f(z), ia) + \text{Res}(f(z), -ia)] \quad (7.23)$$

Vale:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), ia) &= \frac{\log a + \frac{\pi}{2} \cdot i}{2ia}, \\ \text{Res}(f(z), -ia) &= -\frac{\log a + \frac{3\pi}{2} \cdot i}{2ia} \end{aligned}$$



da cui:

$$\int_{+\partial D} \frac{\log z}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{\log a + \frac{\pi}{2} \cdot i - \log a - \frac{3\pi}{2} \cdot i}{2ia} = -\frac{\pi^2}{a} i \quad (7.24)$$

Per i teoremi di Jordan del piccolo e grande cerchio 7.4.2 e 7.4.1, per  $r \rightarrow 0^+$  e  $R \rightarrow +\infty$  si ha:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{-\partial B_r(0)} f(z) dz = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\partial B_R(0)} f(z) dz = 0.$$

Perciò, facendo tendere  $r \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow +\infty$ , da (7.23) e (7.24), otteniamo:

$$\int_{+\partial D} f(z) dz = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\log x + 2\pi i}{x^2 + a^2} dx = -\frac{\pi^2}{a} i$$

dove il secondo addendo al numeratore del secondo integrale è dovuto al fatto che si è compiuto un giro intorno all'origine (punto di diramazione

per la funzione logaritmo naturale). Ora:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\log x + 2\pi i}{x^2 + a^2} dx &= - \int_0^{+\infty} \frac{2\pi i}{x^2 + a^2} dx = \\ &= -\frac{2\pi i}{a} \left[ \arctan \frac{x}{a} \right]_0^{+\infty} = -\frac{2\pi i}{a} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{a} i \end{aligned}$$

e quindi abbiamo, in conclusione, l'ovvia identità:

$$-\frac{\pi^2}{a} i = -\frac{\pi^2}{a} i$$

e non abbiamo ottenuto informazioni utili al calcolo dell'integrale proposto.

L'analisi di quanto rilevato con la precedente scelta di  $f(z)$  porta a considerare la funzione:

$$f(z) := \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2}$$

sullo stesso dominio regolare  $D$ . Abbiamo, per il primo teorema dei residui 6.3.1:

$$\int_{+\partial D} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i [\text{Res}(f(z), ia) + \text{Res}(f(z), -ia)]$$

Vale:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), ia) &= \frac{\log^2 a - \frac{\pi^2}{4} + i\pi \log a}{2ia}, \\ \text{Res}(f(z), -ia) &= -\frac{\log^2 a - \frac{9}{4}\pi^2 + 3i\pi \log a}{2ia} \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz &= 2\pi i \cdot \\ &\cdot \frac{\log^2 a - \frac{\pi^2}{4} + i\pi \log a - \log^2 a + \frac{9}{4}\pi^2 - 3i\pi \log a}{2ia} = \\ &= \frac{2\pi^2}{a} (\pi - i \log a). \end{aligned}$$

Esplicitando l'integrale a sinistra come somma di integrali sulle quattro curve regolari che formano  $\partial D$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz &= \int_r^R \frac{\log^2 x}{x^2 + a^2} dx + \int_{+\partial B_R(0)} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz + \\ &\quad - \int_r^R \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{x^2 + a^2} dx - \int_{+\partial B_r(0)} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz = \\ &= \int_{+\partial B_R(0)} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz - \int_{+\partial B_r(0)} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz + \\ &\quad + \int_r^R \frac{4\pi^2 - 4\pi i \log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{2\pi^2}{a} (\pi - i \log a) \end{aligned}$$

Osserviamo che uniformemente rispetto ad  $\text{Arg} z$ :

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$$

quindi, per i teoremi del piccolo e del grande cerchio 7.4.2 e 7.4.1, gli integrali sulle circonferenze tendono a 0 per  $r \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow +\infty$ ; ne segue:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^2}{a} (\pi - i \log a) &= \int_0^{+\infty} \frac{4\pi^2 - 4\pi i \log x}{x^2 + a^2} dx = \\ &= 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \\ &= 4\pi^2 \left[ \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_0^{+\infty} - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \\ &= \frac{2\pi^3}{a} - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \end{aligned}$$

L'integrale all'ultimo membro è proprio quello proposto e quindi, con ovvi calcoli:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \log a.$$

2. Calcoliamo:

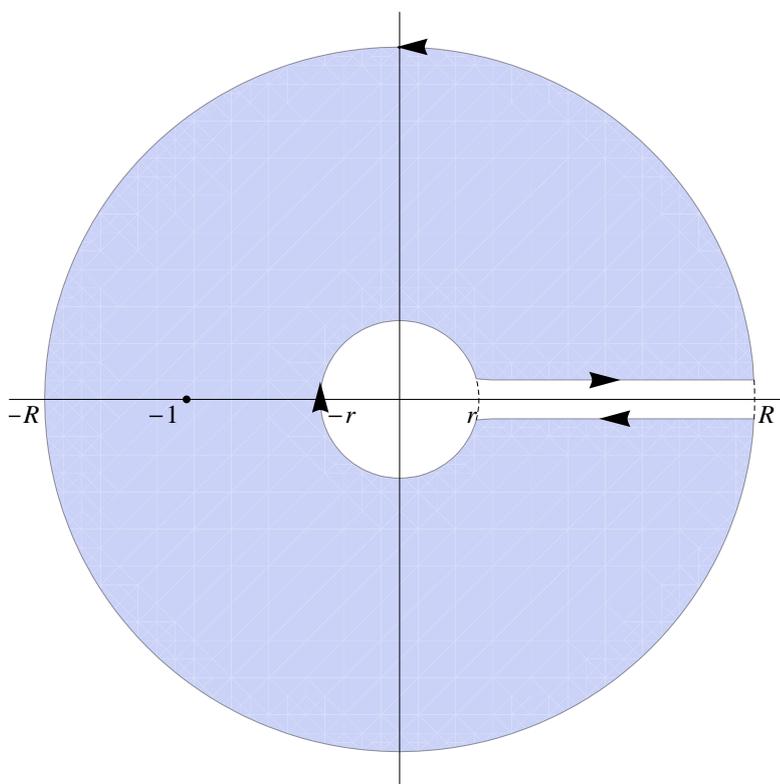
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx \quad (0 < \lambda < 1).$$

Osserviamo che per  $x \rightarrow +\infty$  la funzione integranda è un infinitesimo di ordine  $2 - \lambda > 1$  e per  $x \rightarrow 0^+$  è un infinito di ordine  $1 - \lambda < 1$ ,

pertanto l'integrale converge. Consideriamo la funzione:

$$f(z) := \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} = \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z}$$

e scegliamo per l'argomento principale di  $z$  la limitazione  $\text{Arg}z \in [0, 2\pi[$  (cioè  $\log$  è definito nell'insieme semplicemente connesso  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ ). Il punto  $z = 0$  è di diramazione per  $f$ , mentre  $z = -1$  è un polo del primo ordine. Consideriamo il dominio regolare  $D$  in figura (dove  $R > 1$  e  $r < 1$ ):



Risulta:

$$\text{Res}(f(z), -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (1+z) \cdot \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} = (-1)^{\lambda-1} = (e^{i\pi})^{\lambda-1} = e^{(\lambda-1)i\pi}$$

Per il primo Teorema dei residui 6.3.1 applicato a  $f$  su  $D$  si ha:

$$\begin{aligned} & \int_r^R \frac{e^{(\lambda-1)\log x}}{1+x} dx + \int_{+\partial B_R(0)} \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z} dz + \int_R^r \frac{e^{(\lambda-1)(\log x + 2\pi i)}}{1+x} dx + \\ & + \int_{-\partial B_r(0)} \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z} dz = 2\pi i e^{(\lambda-1)i\pi} \end{aligned} \tag{7.25}$$

Il terzo integrale a primo membro risulta essere:

$$\int_R^r \frac{e^{(\lambda-1)(\log x+2\pi i)}}{1+x} dx = -e^{(\lambda-1)2\pi i} \int_r^R \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx$$

Osserviamo che, per  $|z| = R$ :

$$\left| z \cdot \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} \right| \leq \frac{R^\lambda}{R-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

e, per  $|z| = r$ :

$$\left| z \cdot \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} \right| \leq \frac{r^\lambda}{1-r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

e i due limiti risultano uniformi rispetto ad  $\text{Arg}z$ . Facendo tendere  $r \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow +\infty$  in (7.25) otteniamo, per i teoremi del grande cerchio 7.4.1 e del piccolo cerchio 7.4.2:

$$2\pi i e^{(\lambda-1)\pi i} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx - e^{(\lambda-1)2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{(\lambda-1)\pi i}}{1 - e^{(\lambda-1)2\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} \quad (7.26)$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per  $e^{(\lambda-1)\pi i}$  e applicando la formula di Eulero per il seno (1.8).

3. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Posto  $t := x^{2n}$  (quindi  $dt = 2nx^{2n-1}dx$ ) otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{2n} \cdot t^{\frac{1}{2n}-1} dt = \frac{1}{2n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2n}-1}}{1+t} dt = \\ &= \frac{1}{2n} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}, \end{aligned}$$

per (7.26) (con  $\lambda = 1/2n$ ).

4. Calcoliamo:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^3} \left(\frac{1}{x} - 1\right)} dx.$$

Posto  $t := \frac{1}{x} - 1$  (quindi  $dx = -\frac{1}{(1+t)^2} dt$ ) otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} - 1\right)}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{\frac{1}{3}}} dx = \\ &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\frac{1}{t+1} \cdot t^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{3}}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

per (7.26) (con  $\lambda = 2/3$ ).

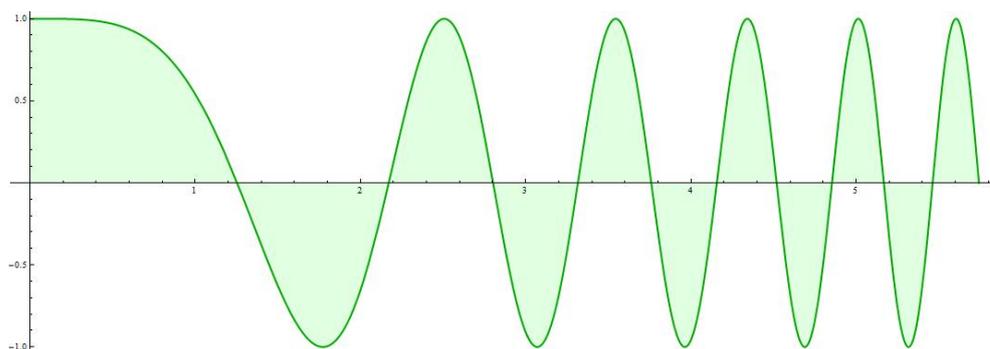
## 7.8 Integrali di Fresnel

Due integrali impropri classici sono gli *integrali di Fresnel*:

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt, \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt.$$

Gli zeri della funzione  $\cos(t^2)$  in  $[0, +\infty[$  sono i punti:

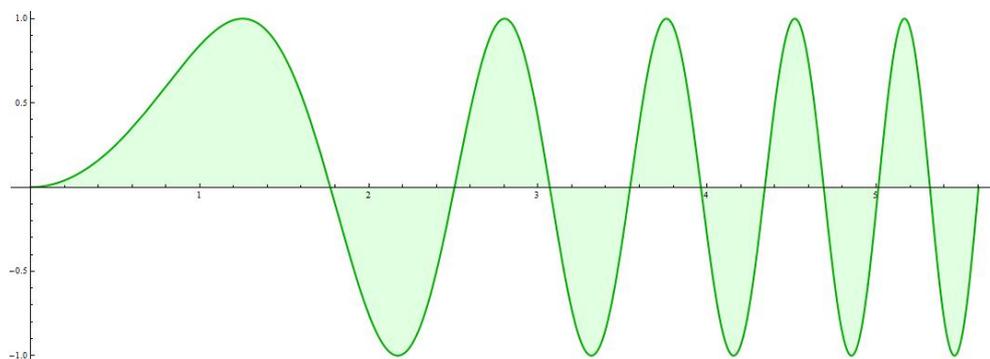
$$t_k = \sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$



**Figura 7.3:** Grafico di  $\cos(t^2)$ ; osserviamo che  $t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ .

Gli zeri di  $\sin(t^2)$  in  $[0, +\infty[$  sono i punti:

$$t_k = \sqrt{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$



**Figura 7.4:** Grafico di  $\sin(t^2)$ ; osserviamo che  $t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ .

Consideriamo la funzione

$$f(z) = e^{-z^2} \in H(\mathbb{C})$$

e il settore polare chiuso

$$D_R = \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

Sia ora

$$A = \left( R \frac{\sqrt{2}}{2}, R \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = R e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3:

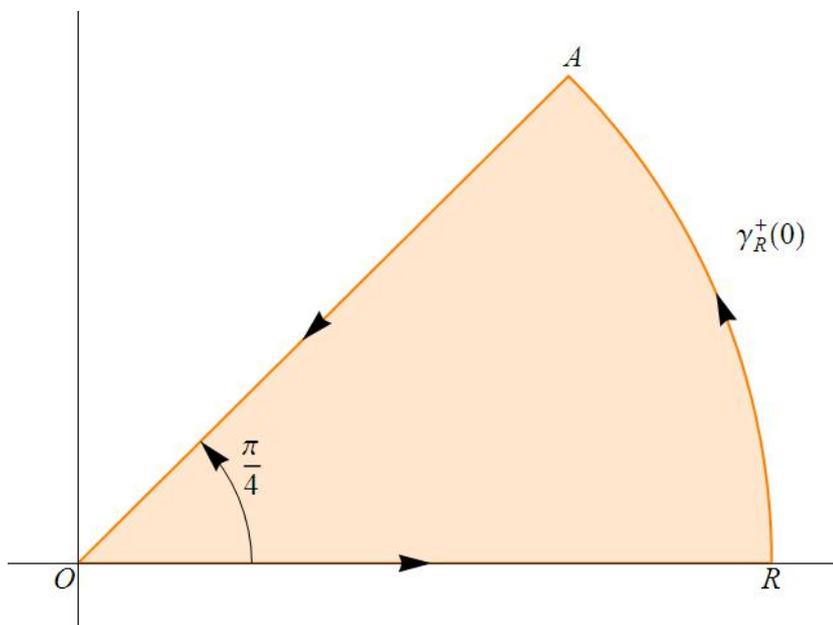
$$\int_{+\partial D_R} e^{-z^2} dz = 0,$$

da cui, suddividendo  $\partial D_R$  come in figura:

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2} dz + \int_{+AO} e^{-z^2} dz = 0 \quad (7.27)$$

Poiché  $\gamma_R^+(0)$  ha rappresentazione parametrica

$$z = R e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right],$$



si ottiene:

$$\begin{aligned} \left| \int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\vartheta}} R i e^{i\vartheta} d\vartheta \right| = \\ &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 (\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta)} R i e^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq \quad (7.28) \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\vartheta} d\vartheta \end{aligned}$$

Poniamo  $2\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  (quindi  $d\vartheta = -\frac{d\varphi}{2}$ ); da (7.28) si ottiene:

$$\begin{aligned} \left| \int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2} dz \right| &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\vartheta} d\vartheta = \\ &= -\frac{R}{2} \int_{\pi/2}^0 e^{-R^2 \sin \varphi} d\varphi = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin \varphi} d\varphi \leq \\ &\leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{R}{2} \left[ \frac{e^{-R^2 \frac{2}{\pi} \varphi}}{-R^2 \frac{2}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{R}{2} \left[ \frac{e^{-R^2} - 1}{-R^2 \frac{2}{\pi}} \right] = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza  $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$  per ogni  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ; di conseguenza:

$$\int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Ora, il segmento  $OA$  (bisettrice) ha rappresentazione parametrica:

$$z = te^{i\frac{\pi}{4}}, \quad t \in [0, R].$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int_{+AO} e^{-z^2} dz &= \int_R^0 e^{-t^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} dt = \int_R^0 e^{-it^2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) dt = \\ &= \frac{i+1}{\sqrt{2}} \int_R^0 [\cos(t^2) - i \sin(t^2)] dt = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^R [\cos(t^2) + \sin(t^2)] dt - \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^R [\cos(t^2) - \sin(t^2)] dt. \end{aligned}$$

Per  $R \rightarrow +\infty$  la (7.27) porta a:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} [\cos(t^2) + \sin(t^2)] dt + \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} [\cos(t^2) - \sin(t^2)] dt \end{aligned}$$

(osserviamo che, poiché il primo membro è convergente, anche il secondo membro è convergente). Uguagliando parte reale e immaginaria si ottiene il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt + \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt - \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = 0 \end{array} \right. ,$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (7.29)$$

e

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (7.30)$$

1. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

Operando il cambio di variabile

$$x = t^2 \quad (dx = 2t dt)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2) + \cos(t^2)}{t} \cdot 2t dt = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} [\sin(t^2) + \cos(t^2)] dt. \end{aligned}$$

Ora, da (7.29) e (7.30):

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt + \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Perciò l'integrale richiesto vale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

## 7.9 Somma di alcune serie

**Definizione 7.9.1** (funzione meromorfa). Un'applicazione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *meromorfa* se è olomorfa in  $\Omega$ , eccetto che per singolarità polari.

**Teorema 7.9.2.** Sia  $f$  meromorfa in tutto il piano complesso  $\mathbb{C}$  avente solo un numero finito di poli  $z_1, \dots, z_\nu$ , con  $z_j \notin \mathbb{Z}$  per ogni  $j = 1, \dots, \nu$ . Supponiamo  $|f(z)| = o(|z|^{-\alpha})$  per  $z \rightarrow \infty$ , con  $\alpha > 1$ . Definiamo

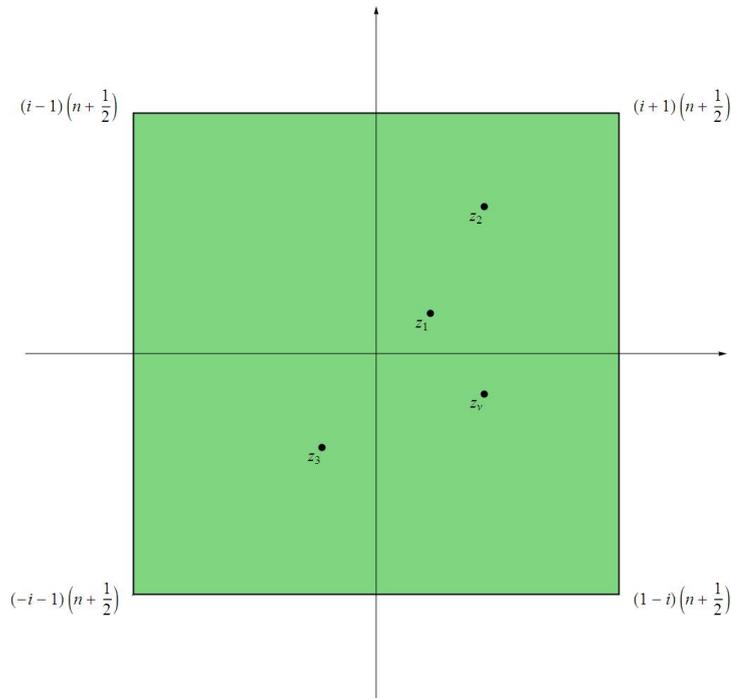
$$g(z) := \pi f(z) \cot(\pi z), \quad h(z) := \frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}.$$

Allora

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = - \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res}(g(z), z_j), \quad (7.31)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(k) = - \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res}(h(z), z_j). \quad (7.32)$$

*Dimostrazione.* Proviamo l'uguaglianza (7.31) (la (7.32) si prova analogamente). Sia  $n$  un intero positivo sufficientemente grande, tale che  $\gamma_n$  sia il bordo del quadrato di vertici  $\left(n + \frac{1}{2}\right)(1+i)$ ,  $\left(n + \frac{1}{2}\right)(-1+i)$ ,  $\left(n + \frac{1}{2}\right)(-1-i)$ ,  $\left(n + \frac{1}{2}\right)(1-i)$ , contenente tutti i poli di  $f$ .



Per il primo Teorema dei residui 6.3.1 si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_n} g(z) dz = \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res}(g(z), z_j) + \sum_{k=-n}^n \text{Res}(g(z), k).$$

Poiché  $g$  ha poli semplici in ciascun  $z = k$ , si ha

$$\text{Res}(g(z), k) = \lim_{z \rightarrow k} \left[ (z - k) \cdot \pi f(z) \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right] = f(k),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'applicazione del Teorema di L'Hôpital alla funzione  $\frac{\pi(z-k)}{\sin(\pi z)}$ . Pertanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_n} g(z) dz = \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res}(g(z), z_j) + \sum_{k=-n}^n f(k)$$

e quindi conseguiremo la tesi se dimostriamo che

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_n} g(z) dz = 0.$$

A tal fine, proviamo che esiste una costante positiva  $A$ , indipendente da  $n$ , tale che  $|\cot(\pi z)| \leq A$  per ogni  $|z| > n$ .

Sia allora  $z = x + iy$ , quindi  $i\pi z = i\pi x - \pi y$ ; risulta

$$|\cot(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}},$$

se  $y \geq \frac{1}{2}$ .

Analogamente, si ha

$$|\cot(\pi z)| \leq \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} = \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}},$$

se  $y \leq -\frac{1}{2}$ .

Ora, siano  $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$  e  $z = n + \frac{1}{2} + iy$ . Allora risulta

$$\begin{aligned} |\cot(\pi z)| &= \left| \cot \left( \pi \left( n + \frac{1}{2} + iy \right) \right) \right| = \left| \cot \left( \frac{\pi}{2} + i\pi y \right) \right| = \\ &= |\tanh(\pi y)| \leq \tanh \left( \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

poiché la funzione  $\tanh(\pi y)$  ha derivata positiva e quindi è monotona crescente.

Se  $z = -n - \frac{1}{2} + iy$ , si ha

$$\begin{aligned} |\cot(\pi z)| &= \left| \cot \left( \pi \left( -n - \frac{1}{2} + iy \right) \right) \right| = \left| \cot \left( -\frac{\pi}{2} + i\pi y \right) \right| = |\tanh(\pi y)| \leq \\ &\leq \tanh \left( \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Posto

$$A := \max \left\{ \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}, \tanh \left( \frac{\pi}{2} \right) \right\},$$

si ha  $|\cot(\pi z)| \leq A$  su  $\gamma_n$ , dove  $A$  è indipendente da  $n$ . Di conseguenza, per l'ipotesi su  $f$ , si ha

$$\left| \int_{+\gamma_n} g(z) dz \right| = \left| \int_{+\gamma_n} \pi f(z) \cot(\pi z) dz \right| \leq \pi \cdot o(n^{-\alpha}) \cdot A \cdot \underbrace{(8n + 4)}_{l(\gamma_n)},$$

e l'ultimo membro è infinitesimo per  $n \rightarrow +\infty$ . Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

Il Teorema 7.9.2 consente di calcolare la somma di alcune serie bilatere, calcolando la somma dei residui di particolari funzioni ausiliarie.

1. Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Consideriamo

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2};$$

$z = \pm ia$  sono poli semplici per  $f$ . Detta

$$g(z) = \frac{\pi}{z^2 + a^2} \cot(\pi z),$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g(z), ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{\pi}{z^2 + a^2} \cot(\pi z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{\pi}{(z - ia)(z + ia)} \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \\ &= -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g(z), -ia) &= \lim_{z \rightarrow -ia} (z + ia) \frac{\pi}{z^2 + a^2} \cot(\pi z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -ia} (z + ia) \frac{\pi}{(z - ia)(z + ia)} \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \\ &= -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a). \end{aligned}$$

Per il teorema 7.9.2 possiamo concludere:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

2. Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k + a)^2}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Consideriamo

$$f(z) = \frac{1}{(z+a)^2};$$

$z = -a$  è un polo del secondo ordine per  $f$ . Detta

$$h(z) = \frac{\pi}{(z+a)^2 \sin(\pi z)},$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(h(z), -a) &= \lim_{z \rightarrow -a} \frac{d}{dz} \left[ (z+a)^2 \frac{\pi}{(z+a)^2 \sin(\pi z)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -a} \frac{d}{dz} \left[ \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right] = -\frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)} \end{aligned}$$

Per il teorema 7.9.2 possiamo concludere:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}.$$

## 7.10 Indicatore logaritmico. Principio dell'argomento. Teorema di Rouché. Un'altra dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra

Uno dei più eleganti risultati della Teoria dei residui riguarda l'indicatore logaritmico.

Sia  $f(z)$  una funzione olomorfa in  $\Omega$ , allora la funzione  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  si chiama *derivata logaritmica* di  $f$  (vedi (2.9)) e risulta olomorfa negli stessi punti di  $f(z)$ , purché  $f(z) \neq 0$ .

**Lemma 7.10.1.**

- (i) Se  $z_0$  è uno zero di ordine  $\nu$  per  $f$ , allora la derivata logaritmica di  $f$  ha un polo del primo ordine in  $z_0$ , con residuo

$$\operatorname{Res} \left( \frac{f'}{f}, z_0 \right) = \nu;$$

- (ii) se  $z_0$  è un polo di ordine  $p$  per  $f$ , allora la derivata logaritmica di  $f$  ha un polo del primo ordine in  $z_0$ , con residuo

$$\operatorname{Res} \left( \frac{f'}{f}, z_0 \right) = -p.$$

*Dimostrazione.*

- (i) Per ipotesi, esistono un intorno di  $z_0$  ed una funzione  $g$ , ivi olomorfa, tali che

$$f(z) = (z - z_0)^\nu g(z),$$

con  $g(z_0) \neq 0$ . Allora

$$f'(z) = \nu(z - z_0)^{\nu-1}g(z) + (z - z_0)^\nu g'(z),$$

da cui (nell'intorno di  $z_0$ , privato di  $z_0$ ):

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Il primo e il secondo addendo rappresentano rispettivamente la parte singolare e la parte regolare della serie di Laurent della derivata logaritmica di  $f$ , perciò  $z_0$  è un polo semplice e risulta:

$$\operatorname{Res} \left( \frac{f'}{f}, z_0 \right) = a_{-1} = \nu.$$

- (ii) Per ipotesi  $z_0$  è polo di ordine  $p$  per  $f$ , pertanto lo sviluppo di Laurent (in un intorno di  $z_0$ , privato di  $z_0$ ), è dato da:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^p a_{-k} (z - z_0)^{-k},$$

con  $a_{-p} \neq 0$ . Ne segue che:

$$f(z)(z - z_0)^p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k+p} + \sum_{k=1}^p a_{-k} (z - z_0)^{-k+p} =: g(z) \text{ (olomorfa)}.$$

Ora,  $g(z_0) = a_{-p} \neq 0$  e

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}.$$

Calcoliamo:

$$f'(z) = \frac{g'(z)(z - z_0)^p - g(z)p(z - z_0)^{p-1}}{(z - z_0)^{2p}},$$

da cui:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{p}{z - z_0}.$$

Il primo e il secondo addendo rappresentano rispettivamente la parte regolare e la parte singolare della serie di Laurent della derivata logaritmica di  $f$ , perciò  $z_0$  è un polo semplice e risulta:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = a_{-1} = -p.$$

□

**Teorema 7.10.2** (dell'indicatore logaritmico). *Sia  $f(z)$  meromorfa in  $\Omega$  e sia  $D \subset \Omega$  un dominio regolare.  $f(z)$  abbia in  $\overset{\circ}{D}$  solo un numero finito di poli  $\beta_1, \dots, \beta_s$ , con ordini di molteplicità  $p_1, \dots, p_s$ ; inoltre, sia  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \partial D$  ed  $f(z)$  abbia in  $\overset{\circ}{D}$  gli zeri  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  con ordini di molteplicità  $\nu_1, \dots, \nu_r$ . Allora:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f, \quad (7.33)$$

dove  $Z_f$  e  $P_f$  sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di  $f$  in  $\overset{\circ}{D}$ , contati con la loro molteplicità.

*Dimostrazione.* Alla derivata logaritmica di  $f$  possiamo applicare il primo Teorema dei residui 6.3.1 nel dominio regolare  $D$  e otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{j=1}^r \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \alpha_j\right) + \sum_{h=1}^s \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \beta_h\right) = \\ &= \sum_{j=1}^r \nu_j + \sum_{h=1}^s (-p_h) = \sum_{j=1}^r \nu_j - \sum_{h=1}^s p_h = \\ &= Z_f - P_f, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il lemma 7.10.1 applicato ai poli semplici di  $f'/f$ ,  $\alpha_j$  e  $\beta_h$  ( $j = 1, \dots, r$ ,  $h = 1, \dots, s$ ). □

L'integrale che compare al primo membro di (7.33) si chiama *indicatore logaritmico* di  $f$ .

Il precedente teorema in letteratura è noto anche come *Principio dell'argomento*. Vediamo perché.

Supponiamo che  $\partial D$  sia formata da un'unica curva regolare  $\gamma$  semplice e chiusa di equazione parametrica

$$z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

con  $z(a) = z(b)$ . Risulta

$$\begin{aligned} Z_f - P_f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \frac{d}{dz} [\log(f(z))] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\log(f(z))]_{z(a)}^{z(b)} = \frac{1}{2\pi i} [\log|f(z)| + i\text{Arg}(f(z))]_{z(a)}^{z(b)} = \\ &= \frac{[\text{Arg}(f(z))]_{+\gamma}}{2\pi}, \end{aligned}$$

cioè, la differenza tra il numero di zeri e quello di poli di  $f(z)$  in  $\mathring{D}$  è data dalla variazione dell'argomento principale di  $f(z)$  lungo  $\gamma$  percorsa nel verso positivo, moltiplicata per il fattore  $1/2\pi$ .

**Teorema 7.10.3** (di Rouché). *Siano  $f$  e  $g$  meromorfe in  $\Omega$ .*

*Se  $|g(z)| < |f(z)|$  per ogni  $z \in \gamma$ , dove  $\gamma$  è una curva generalmente regolare, semplice e chiusa, con sostegno contenuto in  $\Omega$ , e se  $f$  e  $g$  non hanno né zeri né poli su  $\gamma$ , allora:*

$$Z_f - P_f = Z_{f+g} - P_{f+g},$$

dove  $Z_f$  e  $Z_{f+g}$  (rispettivamente  $P_f$  e  $P_{f+g}$ ) indicano il numero finito di zeri (rispettivamente di poli) di  $f$  e  $f+g$  dentro  $\gamma$ , contati con la loro molteplicità.

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $f+g$  non ha zeri su  $\gamma$ . Infatti, se  $z_0 \in \gamma$  fosse uno zero di  $f+g$ , si avrebbe:

$$f(z_0) + g(z_0) = 0 \Rightarrow f(z_0) = -g(z_0) \Rightarrow |f(z_0)| = |g(z_0)|,$$

il che è in contraddizione con l'ipotesi. Ora, la funzione  $|f| - |g|$  è continua sul compatto  $\gamma$ , quindi, per il teorema di Weierstrass:

$$\exists m > 0 \text{ t.c. } |f(z)| - |g(z)| \geq m \quad \forall z \in \gamma.$$

Sia  $\lambda \in [0, 1]$ . Risulta

$$|f(z) + \lambda g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| \geq m > 0 \quad \forall z \in \gamma;$$

allora l'integrale

$$I(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \frac{f'(z) + \lambda g'(z)}{f(z) + \lambda g(z)} dz$$

è ben definito. Osserviamo che, per 7.10.2,  $I(0) = Z_f - P_f$  e  $I(1) = Z_{f+g} - P_{f+g}$ : se proviamo che  $I(\lambda)$  è costante in  $[0, 1]$ , conseguiremo la tesi.

Per il Teorema 7.10.2

$$I(\lambda) = Z_{f+\lambda g} - P_{f+\lambda g} \in \mathbb{Z} \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

e quindi l'applicazione  $\lambda \mapsto I(\lambda)$ , continua sul connesso  $[0, 1]$ , assume valori interi relativi: pertanto  $I(\lambda)$  è necessariamente costante in  $[0, 1]$ . Da ciò segue  $I(0) = I(1)$ , ovvero la tesi.  $\square$

**Corollario 7.10.4.** *Siano  $f, g \in H(\Omega)$ . Se  $|g(z)| < |f(z)|$  per ogni  $z \in \gamma$ , dove  $\gamma$  è una curva generalmente regolare, semplice e chiusa, con sostegno contenuto in  $\Omega$ , allora*

$$Z_f = Z_{f+g}$$

(cioè  $f$  e  $f + g$  hanno lo stesso numero di zeri dentro  $\gamma$ , contati con la loro molteplicità).

*Dimostrazione.* Poiché  $f, f + g \in H(\Omega)$ , si ha  $P_f = P_{f+g} = 0$ ; applicando 7.10.3 si ottiene la tesi.  $\square$

1. Calcoliamo quanti zeri ha il polinomio

$$P(z) = z^5 - 2z + 16$$

nella corona circolare aperta

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}.$$

Definiamo:

$$f(z) := 16, \quad g(z) := z^5 - 2z$$

Sulla circonferenza  $|z| = 1$  si ha:

$$|g(z)| = |z^5 - 2z| = |z^4 - 2| \leq |z^4| + 2 = 3 < 16 = |f(z)|.$$

Su  $B_1(0)$  le funzioni  $f$  e  $g$  verificano le ipotesi di 7.10.4, pertanto  $f(z) + g(z) = P(z)$  ha lo stesso numero di zeri di  $f(z) = 16$  nel disco unitario; quindi non c'è alcuno zero di  $P(z)$  in  $B_1(0)$ .

Siano ora

$$f(z) := z^5, \quad g(z) := 16 - 2z.$$

Osserviamo che sulla circonferenza  $|z| = 2$  si ha:

$$|g(z)| = |16 - 2z| \leq 16 + |2z| \leq 16 + 4 = 20 < 32 = |f(z)|.$$

In  $B_2(0)$  le funzioni soddisfano le ipotesi di 7.10.4, pertanto  $f(z) + g(z) = P(z)$  ha lo stesso numero di zeri di  $f(z) = z^5$  nel disco  $B_2(0)$ ; in questo caso  $f(z)$  ha uno zero di molteplicità 5 in  $z = 0 \in B_2(0)$ , perciò  $P(z)$  ha 5 zeri in  $B_2(0)$ .

Possiamo allora concludere che il polinomio  $P(z)$  ha tutti gli zeri in  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ .

**Teorema 7.10.5** (di Hurwitz). *Sia  $f_n \in H(\Omega)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \Omega$  e  $f_n \rightrightarrows f$  sui compatti contenuti in  $\Omega$ .*

*Allora  $f \equiv 0$  in  $\Omega$  o  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \Omega$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che  $f$  non sia identicamente nulla su  $\Omega$  e che abbia uno zero isolato in  $z_0 \in \Omega$ . Sia  $r > 0$  tale che

$$|f(z)| \geq m > 0 \quad \forall z \in \partial B_r(z_0).$$

Poiché  $f_n \rightrightarrows f$  sui compatti di  $\Omega$ , in particolare su  $\partial B_r(z_0)$ , abbiamo:

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{m}{2} \quad \forall z \in \partial B_r(z_0)$$

per  $n$  sufficientemente grande. Allora, per un tale  $n$ , si ha:

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{m}{2} < m \leq |f(z)| \quad \forall z \in \partial B_r(z_0).$$

Applicando il corollario 7.10.4 a  $f_n - f$  e  $f$ , abbiamo che  $f$  e  $(f_n - f) + f = f_n$  hanno lo stesso numero di zeri in  $B_r(z_0)$ . Questo contraddice l'ipotesi che  $f_n$  non ha zeri in  $\Omega$ .  $\square$

Diamo ora un'altra dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra, usando 7.10.4.

**Teorema 7.10.6** (fondamentale dell'Algebra). *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado  $n \geq 1$  ha  $n$  radici in  $\mathbb{C}$ , contate con la loro molteplicità.*

*Dimostrazione.* Consideriamo il polinomio:

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0$$

e definiamo:

$$f(z) := z^n, \quad g(z) := \frac{1}{a_n} (a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1}).$$

Osserviamo che  $P(z) = a_n [f(z) + g(z)]$ ; poiché

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| = 0,$$

allora

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1 \quad \forall |z| \geq R.$$

In particolare, sulla circonferenza  $|z| = R$  si ha  $|g(z)| < |f(z)|$ ; allora, per [7.10.4](#), le funzioni  $f$  e  $P = a_n [f + g]$  hanno lo stesso numero di zeri in  $B_R(0)$ . Ora, la funzione  $f(z) = z^n$  ha  $n$  zeri nell'intero piano complesso; ne segue che anche  $P(z)$  ha in  $\mathbb{C}$   $n$  radici, contate con la loro molteplicità.  $\square$



# Capitolo 8

## Integrali Euleriani di I e II specie. Trasformata di Laplace

### 8.1 Integrali Euleriani di I e II specie (funzioni Beta e Gamma): definizione e proprietà

**Definizione 8.1.1** (funzione Gamma). Definiamo *funzione Gamma* (integrale di Eulero di II specie):

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (8.1)$$

dove  $z$  è variabile complessa.

Osserviamo che:

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} = \frac{e^{-t}}{t^{1-\operatorname{Re}(z)}}, \quad t > 0. \quad (8.2)$$

La funzione reale e non negativa a secondo membro di (8.2) è integrabile in  $[0, +\infty[$  per  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , perciò  $\Gamma(z)$  è definita per ogni  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

**Proposizione 8.1.2** (proprietà della funzione Gamma). Sia  $\Gamma$  definita da (8.1).

- (i)  $\Gamma(z) \in H(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\})$ ;  
inoltre, per ogni  $z$  tale che  $\operatorname{Re}(z) > 0$  e per ogni  $k \in \mathbb{N}_0$ :

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} (\log t)^k dt.$$

In particolare, se  $k = 1$ :

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log t \, dt.$$

(ii) Vale la seguente equazione funzionale della funzione Gamma (per  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ):

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z). \quad (8.3)$$

*Dimostrazione.*

(i) (cenni) Tenuto presente il Teorema di convergenza di Weierstrass 3.3.4, l'olomorfia di  $\Gamma(z)$  nel semipiano aperto  $\operatorname{Re}(z) > 0$  è conseguenza del fatto che l'integrale

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt,$$

converge uniformemente rispetto a  $z$  in ogni striscia

$$S_{a,b} := \{a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\},$$

con  $a > 0$ , risultando, per  $z \in S_{a,b}$  ( $a > 0$ ):

$$0 \leq |e^{-t} t^{z-1}| \leq \begin{cases} e^{-t} t^{b-1}, & t \geq 1 \\ e^{-t} t^{a-1}, & 0 < t \leq 1 \end{cases}.$$

Vale:

$$\begin{aligned} \Gamma'(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\partial}{\partial z} (t^{z-1}) \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log t \, dt \end{aligned}$$

Operando sulle derivate successive si ottiene la tesi per ogni  $k \in \mathbb{N}_0$ .

(ii) Integrando per parti risulta:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} z e^{-t} t^{z-1} dt = \\ &= z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \cdot \Gamma(z).\end{aligned}$$

□

**Osservazione 8.1.3.** Applicando iterativamente il punto (ii) di 8.1.2 si ottiene:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+n) &= (z+n-1) \cdot \Gamma(z+n-1) = \dots = \\ &= (z+n-1)(z+n-2) \cdots (z+1) \cdot z \cdot \Gamma(z) \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{8.4}$$

Se  $z = 1$ :

$$\Gamma(n+1) = n! \Gamma(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ma:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$$

Perciò:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.\tag{8.5}$$

Anche per questo motivo la funzione Gamma di Eulero è detta *fattoriale generalizzato*.

**Osservazione 8.1.4** (prolungamento meromorfo della funzione Gamma).

Da (8.4) segue:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n-1)(z+n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.\tag{8.6}$$

Questa identità permette un'estensione meromorfa di  $\Gamma$  in  $\mathbb{C}$ ; precisamente  $\Gamma \in H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-)$ , tutti i punti di singolarità  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) sono poli semplici di  $\Gamma(z)$  e risulta:

$$\begin{aligned}\text{Res}(\Gamma(z), -n) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \cdot \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \cdot \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.\end{aligned}$$

In definitiva, vale il seguente risultato.

**Teorema 8.1.5.**  $\Gamma(z)$  è meromorfa in  $\mathbb{C}$ , ha singolarità polari del primo ordine nei punti  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), con rispettivo residuo  $\frac{(-1)^n}{n!}$ .

**Osservazione 8.1.6** (rappresentazione integrale di Gauss della funzione Gamma). Nella (8.1) poniamo  $t = \xi^2$  (perciò  $dt = 2\xi d\xi$ ). Allora:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} (\xi^2)^{z-1} 2\xi d\xi = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \xi^{2z-1} d\xi. \quad (8.7)$$

Quest'ultimo integrale è noto in letteratura come *rappresentazione integrale di Gauss della funzione Gamma*. E' immediato calcolare:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}.$$

Da ciò risulta possibile valutare  $\Gamma$  sui semi-interi. Se  $n$  è pari ( $n = 2k$ ):

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma(k) = (k-1)! = \left(\frac{n-2}{2}\right)! .$$

Se, invece,  $n \geq 3$  è dispari ( $n = 2k + 1$ ,  $k \geq 1$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k-1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k-1 + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(k-1 + \frac{1}{2}\right) \left(k-2 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{(2k-1)(2k-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^k} = \\ &= \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi} = \frac{(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

**Definizione 8.1.7** (funzione Beta). Siano  $p, q \in \mathbb{C}$ . Definiamo *funzione Beta (integrale di Eulero di I specie)*:

$$B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \quad (8.8)$$

Osservato che  $|t^{p-1}(1-t)^{q-1}| = t^{Re(p)-1}(1-t)^{Re(q)-1}$ ,  $0 < t < 1$ , l'integrale è convergente per  $Re(p) > 0$  e  $Re(q) > 0$ .

**Osservazione 8.1.8** (rappresentazione integrale di Gauss della funzione Beta). Nella (8.8) poniamo  $t = \sin^2 \vartheta$  (perciò  $dt = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta$ ). Allora:

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \vartheta)^{p-1} (\cos^2 \vartheta)^{q-1} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \vartheta)^{2p-1} (\cos \vartheta)^{2q-1} d\vartheta \end{aligned} \tag{8.9}$$

Quest'ultimo integrale è noto in letteratura come *rappresentazione integrale di Gauss della funzione Beta*.

**Proposizione 8.1.9** (proprietà della funzione Beta). *Sia B definita da (8.8). Allora, per ogni p, q tali che Re(p) > 0, Re(q) > 0:*

(i) *Proprietà di simmetria:*

$$B(p, q) = B(q, p)$$

(ii) *Per la funzione Beta sussiste la seguente relazione fondamentale con la funzione Gamma:*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \tag{8.10}$$

*Dimostrazione.*

(i) Vale

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \stackrel{t=1-s}{=} \int_1^0 (1-s)^{p-1} s^{q-1} (-ds) = \\ &= \int_0^1 s^{q-1} (1-s)^{p-1} ds = B(q, p). \end{aligned}$$

(ii) Risulta, da (8.7) e (8.9):

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= \left( 2 \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \xi^{2p-1} d\xi \right) \left( 2 \int_0^{+\infty} e^{-\eta^2} \eta^{2q-1} d\eta \right) = \\ &= 4 \int_{[0, +\infty]^2} e^{-(\xi^2 + \eta^2)} \xi^{2p-1} \eta^{2q-1} d\xi d\eta = \end{aligned}$$

$$\left( \text{passando alle coordinate polari: } \begin{cases} \xi &= \rho \cos \vartheta \\ \eta &= \rho \sin \vartheta \end{cases} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} (\rho \cos \vartheta)^{2p-1} (\rho \sin \vartheta)^{2q-1} \rho \, d\rho \, d\vartheta = \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta)^{2p-1} (\sin \vartheta)^{2q-1} \, d\vartheta \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho^{2(p+q)-1} \, d\rho = \\
&= 4 \cdot \frac{B(p, q)}{2} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{2} = B(p, q) \cdot \Gamma(p+q).
\end{aligned}$$

□

**Proposizione 8.1.10** (relazione dei complementi per la funzione Gamma).

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}: \quad \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (8.11)$$

*Dimostrazione.* Osservato che da  $\operatorname{Re}(z) > 0$  e  $\operatorname{Re}(1-z) > 0$  segue  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ , possiamo provare la (8.11) solo per i numeri reali in  $]0, 1[$ : la tesi seguirà dal teorema di estensione delle uguaglianze 4.4.4.

Sia  $\lambda \in ]0, 1[$ . Allora:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(1-\lambda) &= B(\lambda, 1-\lambda) \cdot \Gamma(1) = B(\lambda, 1-\lambda) = \\
&= \int_0^1 t^{\lambda-1} (1-t)^{-\lambda} \, dt = \int_0^1 \frac{1}{t} \left( \frac{t}{1-t} \right)^\lambda \, dt
\end{aligned}$$

Poniamo:

$$t := \frac{x}{1+x} \quad \left( dt = \frac{1}{(1+x)^2} dx \right),$$

quindi

$$x = \frac{t}{1-t}.$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(1-\lambda) &= \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x} \cdot x^\lambda \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{x+1} \, dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)},
\end{aligned}$$

per (7.26). □

Vediamo ora alcune applicazioni delle funzioni Gamma e Beta di Eulero.

1. Calcoliamo gli integrali di Wallis.

Consideriamo la funzione Beta nella forma (8.9); ponendo

$$p := \frac{n+1}{2}, \quad q := \frac{1}{2},$$

e applicando la (8.10):

$$\begin{aligned} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \vartheta)^{2 \cdot \frac{n+1}{2} - 1} (\cos \vartheta)^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} d\vartheta = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \vartheta)^n d\vartheta = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Ne segue che:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \vartheta)^n d\vartheta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}. \quad (8.12)$$

Allo stesso modo, ponendo:

$$p := \frac{1}{2}, \quad q := \frac{n+1}{2},$$

si ha:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta)^n d\vartheta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}; \quad (8.13)$$

(8.12) e (8.13) sono noti in letteratura col nome di *integrali di Wallis*.

2. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx \quad (\alpha > -1, \beta > \alpha + 1).$$

Posto

$$t := \frac{x^\beta}{1+x^\beta},$$

si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx &= \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} (1-t)^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta}-1} dt = \\ &= \frac{1}{\beta} \cdot B\left(\frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\beta-\alpha-1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\beta-\alpha-1}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta} + \frac{\beta-\alpha-1}{\beta}\right)} = \\ &= \frac{1}{\beta} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{\alpha+1}{\beta}\right) = \frac{\pi}{\beta \cdot \sin\left(\pi\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)\right)}, \end{aligned}$$

per (8.10) e (8.11).

3. Provare che

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0).$$

## 8.2 Trasformata di Laplace: definizione e proprietà

**Definizione 8.2.1** (funzione  $\mathcal{L}$ -trasformabile). Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $\text{supp} f \subseteq [0, +\infty[$ . Diremo che  $f$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile se:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } e^{-\lambda t} f(t) \in L^1([0, +\infty[)$$

**Definizione 8.2.2** (insieme di convergenza assoluta per una funzione  $\mathcal{L}$ -trasformabile). Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{L}$ -trasformabile. L'insieme:

$$\Omega_f := \{p \in \mathbb{C} : e^{-pt} f(t) \in L^1([0, +\infty[)\}$$

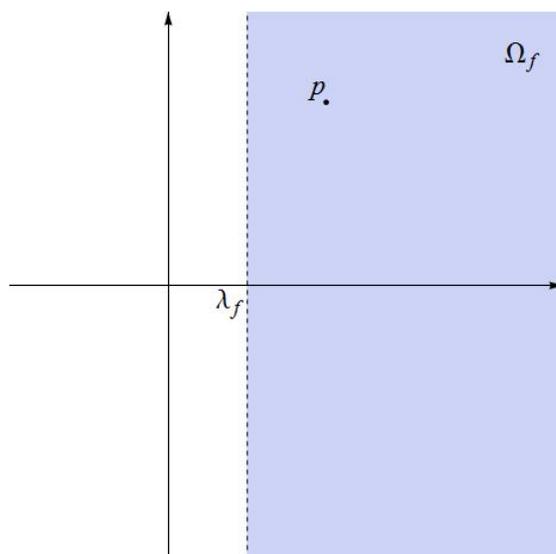
si dice insieme di convergenza assoluta per  $f$ .

**Definizione 8.2.3** (trasformata di Laplace). Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{L}$ -trasformabile; l'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] : \Omega_f &\rightarrow \mathbb{C} \\ p &\mapsto \mathcal{L}[f](p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \end{aligned} \quad (8.14)$$

è detta *trasformata di Laplace di  $f$* . La funzione  $f(t)$  si dice *funzione generatrice* di  $\mathcal{L}[f](p)$ . In seguito  $\mathcal{L}[f](p)$  potrà essere indicato anche con  $F(p)$ .

**Osservazione 8.2.4.** Se  $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Omega_f$ , allora, per ogni  $p \in \mathbb{C}$  tale che  $Re(p) > \lambda$  risulta  $e^{-pt} f(t) \in L^1([0, +\infty[)$ , e quindi  $p \in \Omega_f$ ; ne segue che  $\Omega_f$  è un semipiano.



*Dimostrazione.* Sia  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $e^{-\lambda t} f(t) \in L^1([0, +\infty[)$  e sia  $p \in \mathbb{C}$  con  $Re(p) > \lambda$ ; si ha:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) \cdot e^{(-Re(p)+\lambda)t} \cdot e^{-i Im(p)t} dt$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} |e^{-pt} f(t)| dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{|e^{-\lambda t} f(t)|}_{(I)} \cdot \underbrace{|e^{(-Re(p)+\lambda)t}|}_{(II)} \cdot \underbrace{|e^{-i Im(p)t}|}_{(III)} dt < +\infty$$

in quanto (I)  $\in L^1([0, +\infty[)$  per ipotesi, (II) è limitata (anzi, compresa tra 0 e 1) poiché  $Re(p) > \lambda$  ed è infinitesima per  $t \rightarrow +\infty$  e (III) ha modulo uguale a 1. □

**Definizione 8.2.5** (ascissa di convergenza assoluta). Sia  $f$   $\mathcal{L}$ -trasformabile; definiamo *ascissa di convergenza assoluta* di  $f$ :

$$\lambda_f := \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : e^{-\lambda t} f(t) \in L^1([0, +\infty[) \}$$

Notiamo che tale definizione è ben posta: essendo  $f$   $\mathcal{L}$ -trasformabile, esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $e^{-\lambda t} f(t) \in L^1([0, +\infty[)$ , perciò l'insieme di cui  $\lambda_f$  è l'estremo inferiore non è vuoto. Inoltre, dall'osservazione 8.2.4, risulta:

$$\Omega_f = \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > \lambda_f\}$$

In particolare, se  $\lambda_f = -\infty$ , si ha  $\Omega_f = \mathbb{C}$ .

**Osservazione 8.2.6.** La trasformata di Laplace è lineare e iniettiva (nel senso degli spazi  $L^p$ ).

Infatti, per ogni  $f, g$   $\mathcal{L}$ -trasformabili (con  $\operatorname{Re}(p) > \lambda_f$  e  $\operatorname{Re}(p) > \lambda_g$  rispettivamente) e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha f + \beta g](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt = \\ &= \alpha \mathcal{L}[f](p) + \beta \mathcal{L}[g](p), \end{aligned}$$

con  $\operatorname{Re}(p) > \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$ . Inoltre, se esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $p \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(p) > \lambda$ , risulta

$$\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[g](p),$$

allora

$$f = g \quad \text{q.o.}$$

La funzione

$$f(t) := e^{t^2}$$

fornisce un esempio di funzione non  $\mathcal{L}$ -trasformabile. Infatti, l'integrale di Laplace

$$\mathcal{L}[e^{t^2}](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{t^2} dt$$

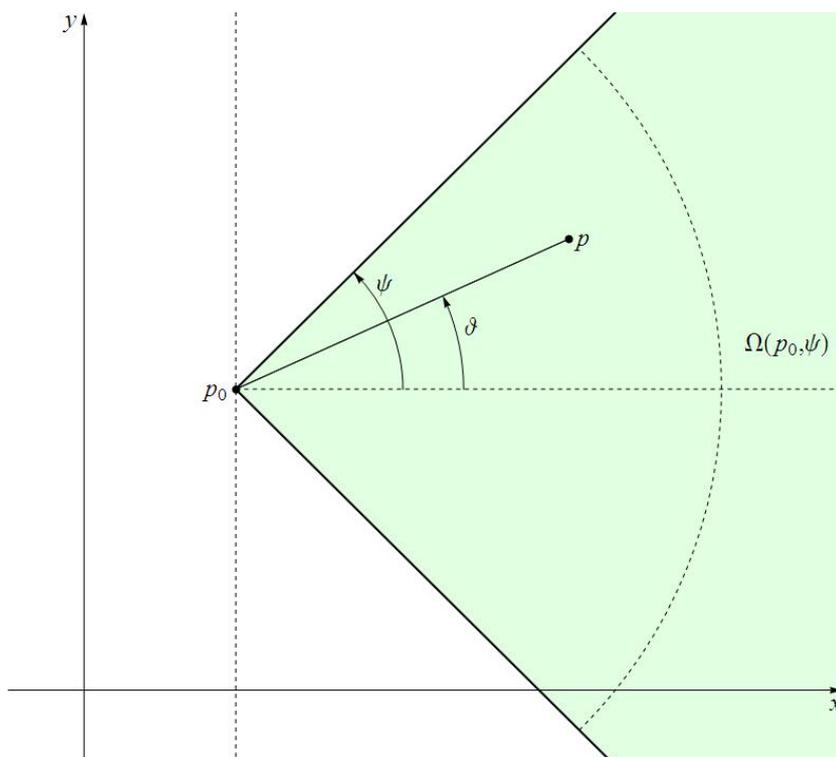
non converge per alcun valore di  $p$ .

Enunciamo ora un risultato sulla convergenza uniforme della Trasformata di Laplace.

Supposto che l'integrale

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

converga per  $p = p_0$ , conduciamo per il punto  $p_0$  due semirette che giacciono nel semipiano  $Re(p) > Re(p_0)$  e formino ciascuna un angolo  $\psi$  ( $0 < \psi < \pi/2$ ) con la semiretta parallela all'asse reale positivo condotta da  $p_0$ . Tali semirette delimitano un dominio illimitato (angolo)  $\Omega(p_0, \psi)$  che è definito dalle limitazioni  $-\psi \leq Arg(p - p_0) \leq \psi$ .



Vale il seguente risultato che fornisce un utile complemento all'importante Osservazione 8.2.4 (cfr. anche 8.2.5).

**Lemma 8.2.7** (Convergenza uniforme della Trasformata di Laplace). *Se l'integrale*

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

*converge per  $p = p_0$ , allora esso converge uniformemente (rispetto a  $p$ ) in ogni dominio illimitato (angolo)  $\Omega(p_0, \psi)$ , con  $0 < \psi < \pi/2$ .*

**Teorema 8.2.8** (Oloromia della trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza assoluta  $\Omega_f$ ). *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{L}$ -trasformabile con  $supp f \subseteq [0, +\infty[$ . Allora  $\mathcal{L}[f](p)$  è olomorfa nel semipiano di convergenza assoluta*

$\Omega_f$  e, per ogni  $p$  tale che  $\operatorname{Re}(p) > \lambda_f$  e per ogni  $k \in \mathbb{N}_0$ , si ha:

$$\frac{d^k}{dp^k} \mathcal{L}[f(t)](p) = (-1)^k \mathcal{L}[t^k f(t)](p).$$

*Dimostrazione.* Fissato un numero naturale  $m$ , poniamo

$$F_m(p) = \int_0^m e^{-pt} f(t) dt, \quad (8.15)$$

ed osserviamo che, essendo  $f(t)$  sommabile in ogni intervallo limitato, l'integrale (8.15) è una funzione di  $p$  definita in tutto il piano complesso.

Verifichiamo che  $F_m(p)$  è derivabile per ogni  $p$  (cioè è funzione intera) e che

$$F'_m(p) = - \int_0^m e^{-pt} t f(t) dt. \quad (8.16)$$

Si ha

$$\frac{F_m(p + \Delta p) - F_m(p)}{\Delta p} + \int_0^m e^{-pt} t f(t) dt = \int_0^m e^{-pt} \left[ \frac{e^{-t\Delta p} - 1}{\Delta p} + t \right] f(t) dt,$$

ed essendo, per  $0 \leq t \leq m$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-t\Delta p} - 1}{\Delta p} + t \right| &= \left| \frac{t^2}{2!} \Delta p - \frac{t^3}{3!} (\Delta p)^2 + \dots \right| \leq \\ &\leq t^2 |\Delta p| \left[ \frac{1}{2!} + \frac{t|\Delta p|}{3!} + \frac{(t|\Delta p|)^2}{4!} + \dots \right] \leq \\ &\leq t^2 |\Delta p| \left[ 1 + \frac{t|\Delta p|}{1!} + \frac{(t|\Delta p|)^2}{2!} + \dots \right] \leq m^2 |\Delta p| e^{m|\Delta p|}, \end{aligned}$$

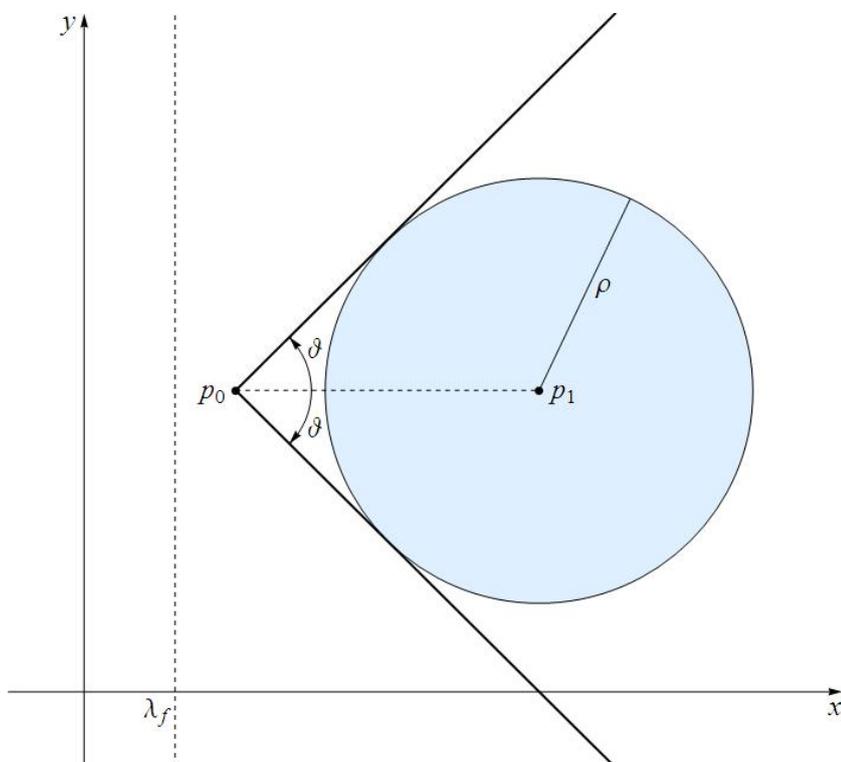
si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{F_m(p + \Delta p) - F_m(p)}{\Delta p} + \int_0^m e^{-pt} t f(t) dt \right| = \\ &\leq m^2 |\Delta p| e^{m(|\Delta p| + |p|)} \int_0^m |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Poiché l'ultimo membro è infinitesimo per  $\Delta p \rightarrow 0$ , risulta dimostrata la (8.16).

Detta ora  $\lambda_f$  l'ascissa di convergenza assoluta di  $f$ , sia  $B_\rho(p_1)$  un cerchio interno al semipiano  $\operatorname{Re}(p) > \lambda_f$ ; evidentemente risulta  $\operatorname{Re}(p_1) - \rho > \lambda_f$ . Scelto  $p_0$  in modo che si abbia

$$\lambda_f < \operatorname{Re}(p_0) < \operatorname{Re}(p_1) - \rho, \quad \operatorname{Im}(p_0) = \operatorname{Im}(p_1),$$



e detto  $2\vartheta$  l'angolo tra le tangenti a  $B_\rho(p_1)$  condotte da  $p_0$ , il cerchio  $B_\rho(p_1)$  risulta interno ad ogni angolo  $\Omega(p_0, \psi)$  per il quale si abbia  $\vartheta < \psi < \pi/2$ .

Si ha allora

$$F(p) = \lim_{m \rightarrow +\infty} F_m(p)$$

e, per il precedente Lemma 8.2.7, la convergenza è uniforme in  $B_\rho(p_1)$ . Dal Teorema di convergenza di Weierstrass 3.3.4 segue che  $F(p)$  è olomorfa in  $B_\rho(p_1)$  e quindi, per l'arbitrarietà di  $B_\rho(p_1)$ , segue la tesi.  $\square$

**Proposizione 8.2.9** (Comportamento asintotico della trasformata di Laplace). *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{L}$ -trasformabile con  $\text{supp} f \subseteq [0, +\infty[$ . Allora*

$$\lim_{\text{Re}(p) \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](p) = 0.$$

Calcoliamo ora la trasformata di Laplace di alcune funzioni elementari. Nel seguito considereremo la funzione trasformanda  $f$  definita in  $[0, +\infty[$ , perciò, a rigore, andremo a calcolare la trasformata di  $f \cdot H$ , con  $H$  funzione di Heaviside.

1. (Trasformata di Laplace della funzione di Heaviside). Consideriamo la funzione di Heaviside:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Si ha:

$$\mathcal{L}[H(t)](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} H(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}. \quad (8.17)$$

L'integrale è convergente per  $\operatorname{Re}(p) > 0$ , perciò l'insieme di convergenza assoluta è il semipiano  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > 0\}$ .

2. (Trasformata di Laplace della potenza ad esponente complesso). Sia

$$f(t) = t^a,$$

con  $\operatorname{Re}(a) > -1$  e  $t > 0$ . Sia  $p \in \mathbb{R}$ ; in particolare, consideriamo  $p > 0$  affinché converga l'integrale

$$\mathcal{L}[t^a](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^a dt.$$

Operiamo la sostituzione:

$$\tau := pt.$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^a](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \left(\frac{\tau}{p}\right)^a \frac{d\tau}{p} = \frac{1}{p^{a+1}} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^a d\tau = \\ &= \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \end{aligned}$$

Per il teorema di estensione delle uguaglianze 4.4.4, l'uguaglianza precedente vale anche per i  $p$  nel semipiano  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > 0\}$ , per i quali l'integrale converge; dunque possiamo concludere che:

$$\mathcal{L}[t^a](p) = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad (8.18)$$

scegliendo per  $p^{a+1}$  la determinazione principale.

In particolare, se  $a = n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathcal{L}[t^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (8.19)$$

3. (Trasformata di Laplace dell'esponenziale). Sia:

$$f(t) = e^{at},$$

con  $a \in \mathbb{C}$  e  $t > 0$ . Sia  $p \in \mathbb{C}$  con  $Re(p) > Re(a)$ ; allora:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{at} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t} dt = \frac{1}{p-a}$$

(la convergenza dell'integrale è garantita dalla condizione  $Re(p) > Re(a)$ ). Dunque, il semipiano di convergenza assoluta è

$$\{p \in \mathbb{C} : Re(p) > Re(a)\}$$

e possiamo concludere che:

$$\mathcal{L}[e^{at}](p) = \frac{1}{p-a}, \quad Re(p) > Re(a). \quad (8.20)$$

4. (Trasformata di Laplace delle funzioni trigonometriche). Sia:

$$f(t) = \sin(\omega t),$$

con  $\omega > 0$  e  $t > 0$ . Sia  $p \in \mathbb{C}$  con  $Re(p) > 0$ ; allora, ricordando la formula di Eulero per il seno (1.8):

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right](p),$$

da cui, per linearità:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega t)](p) &= \frac{1}{2i} \{ \mathcal{L}[e^{i\omega t}](p) - \mathcal{L}[e^{-i\omega t}](p) \} = \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right), \end{aligned}$$

quindi:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad Re(p) > 0 (= Re(i\omega)). \quad (8.21)$$

Allo stesso modo, applicando la formula di Eulero per il coseno (1.7) otteniamo:

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad Re(p) > 0. \quad (8.22)$$

5. (Trasformata di Laplace delle funzioni iperboliche). Sia:

$$f(t) = \sinh(\omega t),$$

con  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ . Sia  $p \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(p) > |\omega|$ ; allora, ricordando la definizione del seno iperbolico:

$$\mathcal{L}[\sinh(\omega t)](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right](p),$$

da cui, per linearità:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sinh(\omega t)](p) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{L}[e^{\omega t}](p) - \mathcal{L}[e^{-\omega t}](p) \} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right), \end{aligned}$$

quindi:

$$\mathcal{L}[\sinh(\omega t)](p) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > |\omega|. \quad (8.23)$$

Allo stesso modo, per il coseno iperbolico otteniamo:

$$\mathcal{L}[\cosh(\omega t)](p) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > |\omega|. \quad (8.24)$$

6. (Trasformata di Laplace del logaritmo). Sia:

$$f(t) = \log t$$

La costante di Eulero-Mascheroni è definita da:

$$-\gamma = \Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-s} \log s \, ds.$$

Posto  $s := pt$ , con  $p > 0$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} -\gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \log(pt) p \, dt = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} (\log p + \log t) \, dt = \\ &= p \left[ \int_0^{+\infty} e^{-pt} \log p \, dt + \int_0^{+\infty} e^{-pt} \log t \, dt \right] = \\ &= p \left[ \log p \int_0^{+\infty} e^{-pt} \, dt + \mathcal{L}[\log t](p) \right] = \\ &= p \left[ \log p \cdot \frac{1}{p} + \mathcal{L}[\log t](p) \right] = \log p + p \mathcal{L}[\log t](p). \end{aligned}$$

In definitiva, per il teorema di estensione delle uguaglianze 4.4.4:

$$\mathcal{L}[\log t](p) = -\frac{\gamma}{p} - \frac{\operatorname{Log} p}{p}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (8.25)$$

7. (Trasformata di Laplace della gaussiana). Sia:

$$f(t) = e^{-t^2}$$

Osserviamo innanzitutto che  $\Omega_f = \mathbb{C}$ ; infatti l'integrale

$$\mathcal{L} \left[ e^{-t^2} \right] (p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(p+t)} dt$$

è convergente se  $Re(p) > -t$  per ogni  $t \in [0, +\infty[$ . Dunque:

$$\Omega_f = \{p \in \mathbb{C} : Re(p) > -\infty\} = \mathbb{C}.$$

Sia ora  $p \in \mathbb{R}$ ; risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ e^{-t^2} \right] (p) &= \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+pt)} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{p}{2})^2 + \frac{p^2}{4}} dt \stackrel{\tau:=t+\frac{p}{2}}{\stackrel{\downarrow}{=}} \\ &= e^{\frac{p^2}{4}} \int_{\frac{p}{2}}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \\ &= e^{\frac{p^2}{4}} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau - \int_0^{\frac{p}{2}} e^{-\tau^2} d\tau \right] = \\ &= e^{\frac{p^2}{4}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{p}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

dove la *funzione degli errori* è definita da

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau$$

con

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(x) = 1.$$

In definitiva, applicando il teorema di estensione delle uguaglianze 4.4.4:

$$\mathcal{L} \left[ e^{-t^2} \right] (p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{p}{2} \right) \right], \quad \forall p \in \mathbb{C}. \quad (8.26)$$

I precedenti risultati sono riassunti, per comodità del lettore, nella tabella.

---

Derivate della trasformata di Laplace di $f(t)$ $\mathcal{L}$ -trasformabile		
$\frac{d^k}{dp^k} \mathcal{L}[f(t)](p) = (-1)^k \mathcal{L}[t^k f(t)](p), \quad \text{Re}(p) > \lambda_f$		
$\circ$ $f(t)$	$\bullet$ $\mathcal{L}[f(t)](p)$	$\Omega_f$
$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$	$\circ \text{---} \bullet \frac{1}{p}$	$\text{Re}(p) > 0$
$t^a \quad (\text{Re}(a) > -1)$	$\circ \text{---} \bullet \frac{1}{p^{a+1}} \Gamma(a+1)$	$\text{Re}(p) > 0$
$t$	$\circ \text{---} \bullet \frac{1}{p^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$t^n$	$\circ \text{---} \bullet \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re}(p) > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{C})$	$\circ \text{---} \bullet \frac{1}{p-a}$	$\text{Re}(p) > \text{Re}(a)$
$\sin(\omega t) \quad (\omega > 0)$	$\circ \text{---} \bullet \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\cos(\omega t) \quad (\omega > 0)$	$\circ \text{---} \bullet \frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\sinh(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$	$\circ \text{---} \bullet \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\text{Re}(p) >  \omega $
$\cosh(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$	$\circ \text{---} \bullet \frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\text{Re}(p) >  \omega $
$\log t$	$\circ \text{---} \bullet -\frac{1}{p} [\gamma + \text{Log } p]$	$\text{Re}(p) > 0$
$e^{-t^2}$	$\circ \text{---} \bullet \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \left[1 - \text{erf}\left(\frac{p}{2}\right)\right]$	$p \in \mathbb{C}$

---

**Tabella 8.1:** Trasformate di Laplace di alcune funzioni elementari

Studiamo ora alcune proprietà della trasformata di Laplace.

**Proposizione 8.2.10** (regole di trasformazione algebriche).

- Cambiamento di scala. Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{L}$ -trasformabile e sia  $a > 0$ . Allora  $f(at)$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile e risulta:

$$\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{p}{a}\right), \quad \operatorname{Re}(p) > a \cdot \lambda_f.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at) dt \stackrel{\tau:=at}{=} \int_0^{+\infty} e^{-p\frac{\tau}{a}} f(\tau) \frac{d\tau}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{p}{a}\right)\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} \mathcal{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{p}{a}\right). \end{aligned}$$

Osserviamo che nell'ultima uguaglianza è necessario imporre  $\operatorname{Re}\left(\frac{p}{a}\right) > \lambda_f$ , e quindi, poiché  $a$  è reale e positivo,  $\operatorname{Re}(p) > a \cdot \lambda_f$ .

- Traslazione. Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{L}$ -trasformabile e sia  $a > 0$ . Allora  $f(t - a)$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile e risulta:

$$\mathcal{L}[f(t - a)](p) = e^{-ap} \mathcal{L}[f(t)](p), \quad \operatorname{Re}(p) > \lambda_f.$$

Infatti ( $f$  è considerata nulla in  $[0, a[$ ), abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - a)](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t - a) dt \stackrel{\tau:=t-a}{=} \\ &= e^{-ap} \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = e^{-ap} \mathcal{L}[f(t)](p). \end{aligned}$$

- Modulazione. Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{L}$ -trasformabile e sia  $a \in \mathbb{C}$ . Allora  $e^{at} f(t)$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile e risulta:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](p) = \mathcal{L}[f(t)](p - a), \quad \operatorname{Re}(p) > \lambda_f + \operatorname{Re}(a).$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at} f(t)](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} f(t) dt = \\ &= \mathcal{L}[f(t)](p - a). \end{aligned}$$

---

$f(at)$	$(a > 0)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$	$Re(p) > a\lambda_f$
$f(t-a)$	$(a > 0)$	$\circ \text{---} \bullet$	$e^{-ap} F(p)$	$Re(p) > \lambda_f$
$e^{at}f(t)$	$(a \in \mathbb{C})$	$\circ \text{---} \bullet$	$F(p-a)$	$Re(p) > \lambda_f + Re(a)$

---

**Tabella 8.2:** Regole di trasformazione algebriche

Alle regole di trasformazione analitiche, premettiamo la seguente definizione.

**Definizione 8.2.11** (funzioni assolutamente continue secondo Vitali). Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ . Si dice che  $f$  è *assolutamente continua in  $I$*  ( $f \in AC(I)$ ) se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che, assegnato un numero finito di intervalli aperti a due a due disgiunti

$$I_j = ]a_j, b_j[ \subset I, \quad j = 1, \dots, m,$$

se vale la condizione

$$\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta,$$

allora dev'essere anche

$$\sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Dalla definizione precedente segue che  $f \in AC(I)$  è uniformemente continua (basta considerare il caso  $m = 1$ ) e quindi continua in  $I$ .

Si dice che  $f$  è *localmente assolutamente continua in  $I$*  ( $f \in AC_{loc}(I)$ ) se e solo se  $f \in AC([a, b])$  per ogni  $[a, b] \subseteq I$ .

Una caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue in  $I$  è data dal seguente risultato.

**Teorema 8.2.12** (di Lebesgue, 1904).  $f \in AC(I)$  se e solo se:

- (a)  $f$  è derivabile q.o. in  $I$ ,
- (b)  $f' \in L^1(I)$ ,
- (c)  $\int_{t'}^t f'(\tau) d\tau = f(t) - f(t'), \quad \forall t, t' \in I.$

**Proposizione 8.2.13** (regole di trasformazione analitiche).

- (i) Trasformata della derivata. Sia  $f \in AC_{loc}([0, +\infty[)$   $\mathcal{L}$ -trasformabile, con  $f'$   $\mathcal{L}$ -trasformabile<sup>1</sup>; allora:

$$\mathcal{L}[f'](p) = p \cdot \mathcal{L}[f](p) - f(0^+), \quad \operatorname{Re}(p) > \lambda_f$$
 <sup>2</sup>

e

$$\lim_{\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty} p \cdot \mathcal{L}[f](p) = f(0^+) \quad (\text{valore iniziale}).$$

- (ii) Trasformata della primitiva. Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  continua a tratti,  $\mathcal{L}$ -trasformabile, con  $f(0) = 0$ . Se

$$\int_0^t f(\tau) d\tau$$

è  $\mathcal{L}$ -trasformabile, allora:

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] (p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f](p), \quad \operatorname{Re}(p) > \max \{ \lambda_f, 0 \}.$$

- (iii) Trasformata del prodotto di convoluzione (Teorema di Borel). Siano  $f, g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{L}$ -trasformabili; allora il prodotto di convoluzione definito per ogni  $t > 0$  da:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \tag{8.27}$$

è  $\mathcal{L}$ -trasformabile e risulta:

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p), \quad \operatorname{Re}(p) > \lambda_{f*g} = \max \{ \lambda_f, \lambda_g \}.$$

<sup>1</sup>L'ipotesi può essere solo ' $f'$   $\mathcal{L}$ -trasformabile' (da cui segue che  $f$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile).

Osserviamo che ' $f$   $\mathcal{L}$ -trasformabile' in generale non implica ' $f'$   $\mathcal{L}$ -trasformabile' (esempio:  $f(t) = \log t$  con  $t > 0$  è  $\mathcal{L}$ -trasformabile, ma  $f'(t) = \frac{1}{t}$ , con  $t > 0$ , non è  $\mathcal{L}$ -trasformabile).

<sup>2</sup>In generale, sotto le ovvie ipotesi,

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](p) = p^k \left[ \mathcal{L}[f](p) - \frac{f(0^+)}{p} - \frac{f'(0^+)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(k-1)}(0^+)}{p^k} \right].$$

Queste formule convertono operazioni di derivazione in operazioni di tipo algebrico.

- (iv) Integrale della trasformata. Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{L}$ -trasformabile e supponiamo anche  $f(t)/t$   $\mathcal{L}$ -trasformabile. Allora:

$$\int_{\operatorname{Re}(p)}^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](s) ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p), \quad \operatorname{Re}(p) > \max\{\lambda_f, 0\}.$$

(l'integrale va calcolato sulla parte reale di  $p$  da  $\operatorname{Re}(p)$  a  $+\infty$ )

*Dimostrazione.*

- (i) Sia  $p$  un valore del parametro per cui entrambi gli integrali di Laplace di  $f(t)$  e  $f'(t)$  convergono; per ogni  $0 < t' < t$ , integrando per parti, si ha:

$$\int_{t'}^t f'(\tau)e^{-p\tau} d\tau = e^{-pt}f(t) - e^{-pt'}f(t') + p \int_{t'}^t f(\tau)e^{-p\tau} d\tau.$$

Per  $t' \rightarrow 0^+$  e  $t \rightarrow +\infty$  i due integrali a primo e secondo membro convergono, poiché  $f$  e  $f'$  sono  $\mathcal{L}$ -trasformabili; da qui segue che esistono finiti i limiti:

$$\lim_{t' \rightarrow 0^+} e^{-pt'}f(t') = f(0^+) \in \mathbb{C}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt}f(t) = 0.$$

Ne segue che

$$\mathcal{L}[f'](p) = p \cdot \mathcal{L}[f](p) - f(0^+).$$

Inoltre, per la  $\mathcal{L}$ -trasformabilità di  $f'$ , si ha  $\mathcal{L}[f'](p) \rightarrow 0$  per  $\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty$ , perciò

$$\lim_{\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty} p \cdot \mathcal{L}[f](p) = f(0^+).$$

- (ii) Poniamo:

$$g(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$g'(t) = f(t).$$

Ne segue che:

$$\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[g'](p) \stackrel{(i)}{=} p \cdot \mathcal{L}[g](p) - g(0^+) = p \cdot \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](p),$$

da cui la tesi.

(iii) Innanzitutto osserviamo che il prodotto di convoluzione tra  $f$  e  $g$  è effettivamente definito da (8.27); infatti, si ha:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)H(\tau)g(t - \tau)H(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Ora, esplicitando la trasformata di Laplace di  $f * g$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left( \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right) dt = \\ &= \iint_T e^{-pt} f(\tau)g(t - \tau) d\tau dt, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale in virtù del Teorema di Fubini-Tonelli, con

$$T = [0, t]_{\tau} \times [0, +\infty]_t.$$

Consideriamo, ora, la trasformazione:

$$\begin{cases} u = t - \tau \\ v = \tau \end{cases}$$

Lo Jacobiano di tale cambiamento di parametri è 1 e l'immagine di  $T$  è l'insieme normale:

$$T' = [0, +\infty]_u \times [0, +\infty]_v.$$

Pertanto, per la formula di riduzione degli integrali multipli su insiemi normali, otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g](p) &= \iint_{T'} e^{-p(u+v)} f(v)g(u) du dv = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pv} f(v) dv \int_0^{+\infty} e^{-pu} g(u) du = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p). \end{aligned}$$

(iv) Per 8.2.8:

$$\frac{d}{dp} \mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (p) = -\mathcal{L} \left[ t \cdot \frac{f(t)}{t} \right] (p) = -\mathcal{L}[f(t)](p).$$

Integrando primo e terzo membro tra  $Re(p)$  e  $+\infty$ , poiché  $\mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (p)$  tende a 0 per  $Re(p) \rightarrow +\infty$ , otteniamo:

$$\int_{Re(p)}^{+\infty} \frac{d}{dp} \mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (p) dp = -\mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (p) = -\int_{Re(p)}^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](s) ds.$$

□

---

$f'(t)$	○	—	●	$pF(p) - f(0^+),$
$(f \in AC_{loc}([0, +\infty[))$				$\lim_{Re(p) \rightarrow +\infty} pF(p) = f(0^+), \quad Re(p) > \lambda_f$
$f^{(k)}(t)$	○	—	●	$p^k \left[ F(p) - \frac{f(0^+)}{p} - \dots \right.$
				$\left. \dots - \frac{f^{(k-1)}(0^+)}{p^k} \right], \quad Re(p) > \lambda_f$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	○	—	●	$\frac{1}{p} F(p), \quad Re(p) > \max\{\lambda_f, 0\}$
$(f(0) = 0)$				
$(f * g)(t)$	○	—	●	$F(p) \cdot G(p), \quad Re(p) > \max\{\lambda_f, \lambda_g\}$
$\frac{f(t)}{t}$	○	—	●	$\int_{Re(p)}^{+\infty} F(s) ds, \quad Re(p) > \max\{\lambda_f, 0\}$

---

Tabella 8.3: Regole di trasformazione analitiche

### 8.3 Cenni sull'inversione della trasformata di Laplace

Non sempre è possibile individuare solo tramite l'uso delle precedenti tabelle la funzione generatrice, nota la sua trasformata di Laplace. Almeno dal punto di vista teorico, è fondamentale il risultato di *Riemann-Fourier-Mellin*, di cui non diamo per brevità la dimostrazione.

Tuttavia, prima di enunciarlo, premettiamo il caso modello (esempio) che segue, dalla cui analisi possiamo trarre spunto per la formulazione del risultato generale.

1. Calcoliamo:

$$\frac{1}{2\pi i} (\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{pt} dp \quad (n \in \mathbb{N}, a > 0, t > 0)$$

(l'integrale è calcolato sulla retta verticale  $Re(p) = a$ ).

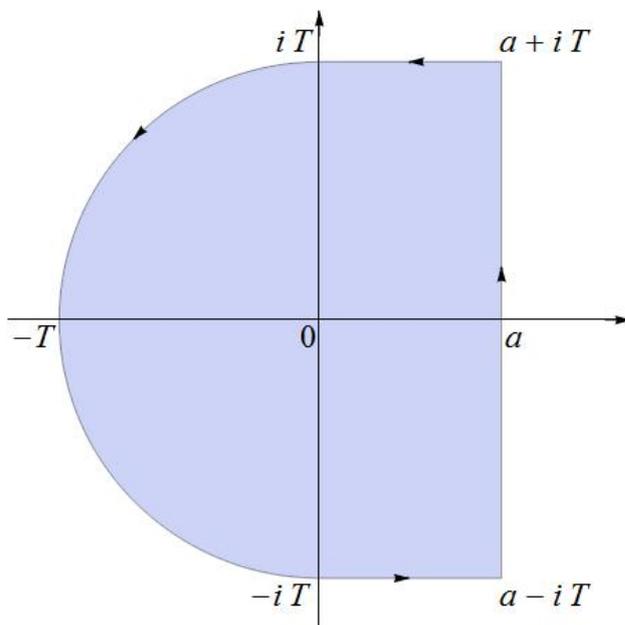
Ricordiamo che:

$$\frac{1}{2\pi i} (\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{pt} dp.$$

Per calcolare l'integrale richiesto applichiamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 alla funzione integranda

$$f(p) = \frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{pt}$$

che presenta in  $p = 0$  un polo di ordine  $n + 1$ , sul dominio regolare  $D$  come in figura,



con

$$\text{Res}(f(p), 0) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dp^n} \left[ p^{n+1} \cdot \frac{e^{pt}}{p^{n+1}} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{t^n e^{pt}}{n!} = \frac{t^n}{n!}.$$

Denotando con  $\gamma_T^s(0)$  la semicirconferenza a sinistra di raggio  $T$  e centro  $0$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} f(p) dp &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \underbrace{\int_{a-iT}^{a+iT} f(p) dp}_{(I)} + \underbrace{\int_{a+iT}^{-T+iT} f(p) dp}_{(II)} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int_{-T+iT}^{-T-iT} f(p) dp}_{(III)} + \underbrace{\int_{-T-iT}^{a-iT} f(p) dp}_{(IV)} \right] = \quad (8.28) \\ &= \text{Res}(f(p), 0), \end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{n+1}} = 0$$

uniformemente in  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ , per il Lemma di Jordan 7.4.3(ii), l'integrale (III) lungo  $\gamma_T^s(0)$  è infinitesimo per  $T \rightarrow +\infty$ . Per  $T \rightarrow +\infty$ , gli integrali (II) e (IV) sono infinitesimi (in quanto il numeratore dell'integrando resta limitato in modulo, mentre il denominatore diventa (in modulo) infinito con  $T$ ). In definitiva, facendo tendere  $T \rightarrow +\infty$  nella (8.28) si ha:

$$\frac{1}{2\pi i} (\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{pt} dp = \frac{t^n}{n!}.$$

Allora

$$\frac{1}{2\pi i} (\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{n!}{p^{n+1}} \cdot e^{pt} dp = t^n,$$

cioè, tenendo presente (8.19):

$$\frac{1}{2\pi i} (\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}[t^n](p) e^{pt} dp = t^n.$$

Quest'ultima relazione fornisce la funzione generatrice  $f(t) = t^n$  in termini della sua trasformata di Laplace  $\mathcal{L}[t^n](p)$ .

**Teorema 8.3.1** (inversione della trasformata di Laplace).

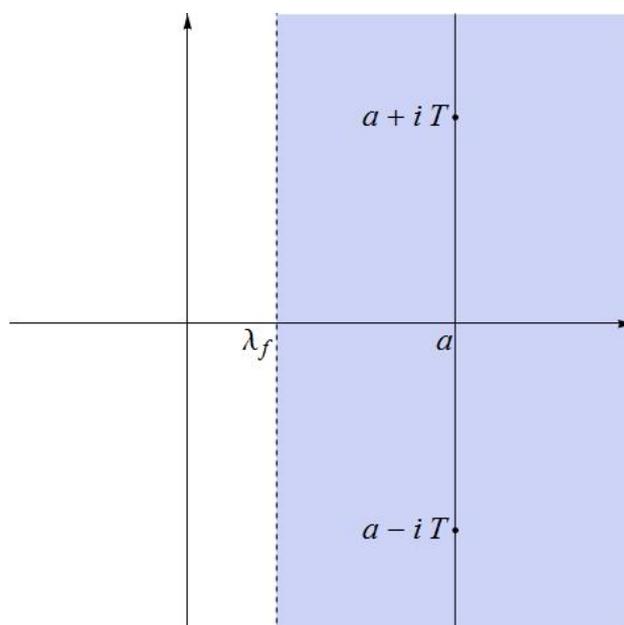
Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{L}$ -trasformabile, con ascissa di convergenza assoluta  $\lambda_f$ ; supponiamo che esista  $\Sigma \subset [0, +\infty[$  sottoinsieme finito tale che  $f$  sia derivabile in  $[0, +\infty[ \setminus \Sigma$  ed esistano finiti  $f(t^-)$ ,  $f(t^+)$ ,  $f'(t^-)$ ,  $f'(t^+)$  per ogni  $t \in \Sigma$ . Allora, per ogni  $a \in ]\lambda_f, +\infty[$ , risulta:

$$\frac{1}{2\pi i} (\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}[f(t)](p) \cdot e^{pt} dp = \begin{cases} \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} & \text{per } t > 0 \\ \frac{f(0^+)}{2} & \text{per } t = 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

(l'integrale è calcolato sulla retta verticale  $\text{Re}(p) = a$ ).

In particolare, se  $f$  è continua in  $]0, +\infty[$ :

$$\frac{1}{2\pi i} (\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}[f(t)](p) \cdot e^{pt} dp = f(t) \quad \forall t > 0.$$



Quest'ultima formula fornisce la funzione generatrice  $f(t)$  in termini della sua trasformata di Laplace.

Osserviamo che, poiché il secondo membro dell'uguaglianza è indipendente da  $a$ , anche il primo membro lo è, pertanto è possibile attribuire ad  $a$  un qualsiasi valore  $a_0$ , fisso, appartenente al semipiano di convergenza dell'integrale di Laplace.

**Osservazione 8.3.2** (unicità della funzione generatrice). La funzione generatrice individuata dal teorema 8.3.1 è univocamente determinata (nel senso degli spazi  $L^p$ ) da  $\mathcal{L}[f](p)$  (due funzioni  $f_1, f_2$   $\mathcal{L}$ -trasformabili con  $\mathcal{L}[f_1](p) = \mathcal{L}[f_2](p)$ , possono differire solo nei loro eventuali punti di discontinuità).

2. Calcolare:

$$\frac{1}{2\pi i} (\text{v.p.}) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2 + 1} dp \quad (a > 0, t > 0).$$

Come accennato in precedenza, il teorema 8.3.1 è importante dal punto di vista teorico, ma non è di uso agevole. Nella pratica, si utilizzano risultati più specifici, a seconda della natura della trasformata da invertire.

Esponiamo dapprima uno dei più semplici di questi risultati, riguardante *l'inversione delle trasformate razionali*.

**Proposizione 8.3.3** (Formula di Heaviside, inversione di trasformate razionali). *Sia*

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$$

con  $P(p), Q(p)$  polinomi in  $p$ , primi tra loro, e  $\deg P(p) < \deg Q(p)$ .<sup>3</sup> Se  $Q(p)$  ha solo zeri semplici  $p_1, \dots, p_\nu$ , allora la funzione generatrice è data da

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot e^{p_k t}, \quad t > 0.$$

*Dimostrazione.* Innanzitutto esprimiamo  $P/Q$  in fratte semplici:

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{a_k}{p - p_k} \quad (8.29)$$

(con  $a_k$  costanti opportune).

Consideriamo ora, per ogni fissato  $k = 1, \dots, \nu$ :

$$\frac{P(p)}{Q(p)} \cdot (p - p_k) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{a_j}{p - p_j} \cdot (p - p_k).$$

Il secondo membro, per  $p \rightarrow p_k$ , tende a  $a_k$ ; quindi vi tende anche il primo membro. Ma per quest'ultimo limite si ha (tenendo conto che  $Q(p_k) = 0$ ):

$$\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{P(p)}{Q(p)} \cdot (p - p_k) = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{P(p)}{\frac{Q(p) - Q(p_k)}{p - p_k}} = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}.$$

Di qui, per  $p \rightarrow p_k$ , segue :

$$a_k = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \quad \forall k = 1, \dots, \nu.$$

In definitiva, da (8.29), si ha:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot \mathcal{L}[e^{p_k t}](p),$$

---

<sup>3</sup>Se  $\deg P(p) \geq \deg Q(p)$ , allora  $\frac{P(p)}{Q(p)}$  non è una trasformata di Laplace. Basta osservare che, in tal caso,  $\frac{P(p)}{Q(p)}$  non è infinitesima per  $p \rightarrow \infty$  (cfr. 8.2.9).

quindi la funzione generatrice  $f(t)$  è data da:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot e^{p_k t}.$$

□

**Osservazione 8.3.4.** Con riferimento alla Proposizione 8.3.3, se gli zeri di  $Q(p)$   $p_1, \dots, p_\nu$  hanno molteplicità rispettivamente  $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ , si può dimostrare che la funzione generatrice è data da:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \text{Res} \left( \frac{P(p)}{Q(p)} \cdot e^{pt}, p_k \right), \quad t > 0.$$

Il successivo teorema riguarda l'inversione di trasformate meromorfe.

**Teorema 8.3.5** (inversione di trasformate meromorfe). *Siano  $A(p)$  e  $B(p)$  funzioni trascendenti intere e sia  $f(t)$  una funzione  $\mathcal{L}$ -trasformabile tale che*

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

(funzione olomorfa nel semipiano  $\text{Re}(p) > \lambda_f$ ), con un numero finito o numerabile di poli  $\{p_j\}_{j \in M \subseteq \mathbb{N}}$  tali che  $\text{Re}(p_j) < \lambda_f$  per ogni  $j \in M$ .

Se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{|p|=T_k} \mathcal{L}[f(t)](p) = 0,$$

dove i  $T_k$  sono i raggi di semidischi di centro l'origine tali che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k = +\infty$ , allora la funzione generatrice  $f(t)$  è data da

$$f(t) = \sum_{j \in M} \text{Res}(\mathcal{L}[f(t)](p)e^{pt}, p_j), \quad t > 0$$

(purché, nel caso di una infinità numerabile di poli, la serie a secondo membro converga).

## 8.4 Alcune applicazioni: il metodo della Trasformata di Laplace per le equazioni differenziali e per le equazioni integrali di Volterra

In questa sezione applicheremo la trasformata di Laplace alla determinazione di funzioni generatrici, al calcolo di alcuni integrali, alla risoluzione di proble-

mi di Cauchy per equazioni differenziali lineari e alla risoluzione di equazioni integrali di Volterra.

Quelli che qui trattiamo sono solo degli esempi, ma i metodi usati hanno ampia applicabilità e sono fruibili in casi più generali.

1. Troviamo la funzione generatrice  $f(t)$  ( $t > 0$ ) tale che:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{2}{p+3}.$$

Osserviamo che:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = 2\mathcal{L}[e^{-3t}](p).$$

Per l'iniettività dell'operatore  $\mathcal{L}$  possiamo concludere che:

$$f(t) = 2e^{-3t}, \quad t > 0.$$

2. Troviamo la funzione generatrice  $f(t)$  ( $t > 0$ ) tale che:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{4}{p^3} + \frac{6}{p^2+4}.$$

Osserviamo che:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[2t^2](p) + \mathcal{L}[3\sin(2t)](p).$$

Per la linearità e l'iniettività dell'operatore  $\mathcal{L}$  possiamo concludere che:

$$f(t) = 2t^2 + 3\sin(2t), \quad t > 0.$$

3. Troviamo la funzione generatrice  $f(t)$  ( $t > 0$ ) tale che:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{1}{(p-2)^2+9}.$$

Osserviamo che:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{1}{3}\mathcal{L}[\sin(3t)](p-2).$$

Per la linearità e l'iniettività dell'operatore  $\mathcal{L}$  e applicando il terzo punto di 8.2.10 possiamo concludere che:

$$f(t) = \frac{e^{2t}}{3} \cdot \sin(3t), \quad t > 0.$$

4. Troviamo la funzione generatrice  $f(t)$  ( $t > 0$ ) tale che:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{3p^2 + 5p + 1}{p^3 - 6p^2 + 11p - 6} =: \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Gli zeri (semplici) di  $Q$  sono:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 3.$$

Per 8.3.3:

$$f(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \sum_{k=1}^3 \frac{3p_k^2 + 5p_k + 1}{3p_k^2 - 12p_k + 11} \cdot e^{p_k t} = \frac{9}{2}e^t - 23e^{2t} + \frac{43}{2}e^{3t}.$$

5. Troviamo le funzioni generatrici  $f(t), g(t)$  ( $t > 0$ ) tali che:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}, \quad \mathcal{L}[g(t)](p) = \frac{p + 3}{p^2 + 2p + 5}.$$

(Procedendo in modo analogo ai precedenti esercizi si ottiene:

$$f(t) = 1 - \cos t, \quad g(t) = e^{-t} [\cos(2t) + \sin(2t)],$$

$t > 0$ ).

6. Troviamo la funzione generatrice  $f(t)$  ( $t > 0$ ) tale che:

$$\mathcal{L}[f](p) = \frac{\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Innanzitutto osserviamo che:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2} = \mathcal{L}[\sin(\omega t)](p) \cdot \mathcal{L}[\cos(\omega t)](p).$$

Per 8.2.13(iii):

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[\sin(\omega t)](p) \cdot \mathcal{L}[\cos(\omega t)](p) = \mathcal{L}[\sin(\omega t) * \cos(\omega t)](p).$$

Inoltre, dall'iniettività dell'operatore  $\mathcal{L}$ , segue che:

$$f(t) = \sin(\omega t) * \cos(\omega t) = \int_0^t \sin(\omega \tau) \cos(\omega(t - \tau)) \, d\tau = \frac{t}{2} \sin(\omega t)$$

(per le formule di Werner).

7. Calcoliamo:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{\sin t}{t} \right] (p)$$

In virtù di 8.2.13(iv), abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{\sin t}{t} \right] (p) &= \int_{\operatorname{Re}(p)}^{+\infty} \mathcal{L} [\sin t] (s) ds = \int_{\operatorname{Re}(p)}^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds = \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan (\operatorname{Re}(p)). \end{aligned}$$

8. Calcoliamo  $g(t)$  definita da:

$$g(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}, \quad \forall t > 0.$$

Innanzitutto osserviamo che:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Pertanto:

$$\mathcal{L} [g(t)] (p) = \mathcal{L} \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} \right] (p) \cdot \mathcal{L} \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} \right] (p)$$

Da (8.18) abbiamo:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} \right] (p) = \mathcal{L} \left[ t^{-\frac{1}{2}} \right] (p) = \frac{\Gamma \left( -\frac{1}{2} + 1 \right)}{p^{-\frac{1}{2}+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}},$$

quindi:

$$\mathcal{L} [g(t)] (p) = \left( \mathcal{L} \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} \right] (p) \right)^2 = \frac{\pi}{p} = \mathcal{L} [\pi \cdot H(t)] (p).$$

Allora, per l'iniettività della trasformata di Laplace, risulta, per ogni  $t > 0$ :

$$g(t) = \pi \cdot H(t) = \pi.$$

9. Calcoliamo:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

Posto  $\tau := 1 + x$  risulta:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{2-\tau}{\tau}} d\tau = \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} * \sqrt{t} \right]_{t=2}.$$

Allora:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} * \sqrt{t} \right] (p) &= \mathcal{L} \left[ \frac{1}{\sqrt{t}} \right] (p) \cdot \mathcal{L} \left[ \sqrt{t} \right] (p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{p\sqrt{p}} = \\ &= \frac{\pi}{2p^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \mathcal{L} [t] (p). \end{aligned}$$

Per l'iniettività della trasformata di Laplace otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} * \sqrt{t} = \frac{\pi}{2} \cdot t \quad \forall t > 0.$$

Pertanto, per  $t = 2$ , l'integrale proposto

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \pi.$$

La trasformata di Laplace è spesso applicata ad equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti (che possono essere risolte anche in altri modi).

Il metodo della trasformata di Laplace per il problema di Cauchy per equazioni differenziali lineari (a coefficienti costanti) si articola in tre fasi.

- (i) Si prendono le trasformate dei due membri dell'equazione data (le trasformate delle derivate si esprimono, grazie alle formule già note, mediante  $\mathcal{L} [f] (p) =: F(p)$  e le condizioni iniziali).
- (ii) La relazione ottenuta è *un'equazione di primo grado* nell'incognita  $F(p)$ .
- (iii) Ricavata  $F(p)$ , la si inverte, ottenendo così la  $f$ , cioè la soluzione del problema di Cauchy.

**10.** (Risoluzione di un problema di Cauchy lineare omogeneo *a coefficienti costanti*). Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = 0 \\ f(0^+) = 1 \\ f'(0^+) = 2 \end{cases}$$

per  $t > 0$ . Calcoliamo le trasformate delle derivate di  $f$ . Risulta:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)](p) &= p \cdot \mathcal{L}[f(t)](p) - f(0^+) = p \cdot \mathcal{L}[f(t)](p) - 1 \\ \mathcal{L}[f''(t)](p) &= p^2 \cdot \mathcal{L}[f(t)](p) - p - 2.\end{aligned}$$

Allora, applicando la trasformata di Laplace ai due membri dell'equazione differenziale e utilizzando la notazione abbreviata ( $\mathcal{L}[f(t)](p) =: F(p)$ ) otteniamo:

$$p^2 \cdot F(p) - p - 2 + 2p \cdot F(p) - 2 + 2F(p) = 0,$$

da cui:

$$F(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+2}.$$

Gli zeri del denominatore sono:

$$p_1 = -1 - i, \quad p_2 = -1 + i.$$

Applicando 8.3.3 otteniamo:

$$f(t) = e^{-t}(3 \sin t + \cos t).$$

- 11.** (Risoluzione di un problema di Cauchy lineare non omogeneo a coefficienti costanti). Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} f''(t) + 2f'(t) + f(t) = e^{-t} \\ f(0^+) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

per  $t > 0$ . Applicando la trasformata di Laplace ai due membri dell'equazione differenziale otteniamo:

$$p^2 \cdot F(p) + 2p \cdot F(p) + F(p) = \frac{1}{p+1},$$

da cui:

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^3}.$$

Usando la regola sulla modulazione (o l'osservazione 8.3.4), si ha:

$$f(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{2}, \quad t > 0.$$

Il metodo della trasformata di Laplace può essere applicato ad equazioni differenziali con coefficienti che sono polinomi al più di primo grado nella variabile indipendente.

**12.** (Risoluzione di un problema di Cauchy lineare omogeneo a coefficienti lineari). Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} f''(t) + tf'(t) + f(t) = 0 \\ f(0^+) = 1 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

per  $t > 0$ . Osserviamo che, dal teorema 8.2.8 e da 8.2.13(i), risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[tf'(t)](p) &= -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[f'(t)](p)) = -\frac{d}{dp}(p\mathcal{L}[f(t)](p) - f(0^+)) = \\ &= -F(p) - p \cdot F'(p). \end{aligned}$$

Applicando l'operatore  $\mathcal{L}$  ai due membri dell'equazione differenziale otteniamo:

$$p^2 \cdot F(p) - p - F(p) - p \cdot F'(p) + F(p) = 0,$$

da cui:

$$F'(p) - p \cdot F(p) = -1.$$

Moltiplicando ambo i membri per  $e^{-\frac{p^2}{2}}$  otteniamo:

$$e^{-\frac{p^2}{2}}(F'(p) - p \cdot F(p)) = -e^{-\frac{p^2}{2}}.$$

A primo membro riconosciamo la derivata di un prodotto, pertanto:

$$\frac{d}{dp} \left( e^{-\frac{p^2}{2}} \cdot F(p) \right) = -e^{-\frac{p^2}{2}},$$

e quindi:

$$F(p) = e^{\frac{p^2}{2}} \left[ \int_p^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} d\sigma + c \right].$$

Ma  $c = 0$  poiché  $F(p)$  è infinitesima per  $Re(p) \rightarrow +\infty$ ; dunque:

$$\begin{aligned} F(p) &= e^{\frac{p^2}{2}} \int_p^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} d\sigma \stackrel{t:=\sigma-p}{=} e^{\frac{p^2}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t+p)^2}{2}} dt = \\ &= e^{\frac{p^2}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-pt} dt = \mathcal{L} \left[ e^{-\frac{t^2}{2}} \right] (p). \end{aligned}$$

In definitiva, per l'iniettività della trasformata di Laplace:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t > 0.$$

- 13.** (Risoluzione di un problema di Cauchy lineare omogeneo a coefficienti lineari). Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} tf''(t) + f'(t) + tf(t) = 0 & (\text{equazione di Bessel}) \\ f(0^+) = 1 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

per  $t > 0$ .

Proveremo che la soluzione  $f(t)$  è

$$J_0(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(j!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2j} \quad (t > 0),$$

dove  $J_0(t)$  è la *funzione di Bessel di ordine zero di prima specie*.

Indichiamo con  $F(p)$  la trasformata di Laplace di  $f$ . Tenuto conto delle condizioni iniziali, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[tf(t)](p) &= -F'(p), \\ \mathcal{L}[f'(t)](p) &= p \cdot F(p) - 1, \\ \mathcal{L}[tf''(t)](p) &= -\frac{d}{dp}(p^2 F(p) - p) = 1 - 2p \cdot F(p) - p^2 \cdot F'(p). \end{aligned}$$

Applicando l'operatore  $\mathcal{L}$  ai due membri dell'equazione differenziale otteniamo:

$$1 - 2p \cdot F(p) - p^2 \cdot F'(p) + p \cdot F(p) - 1 - F'(p) = 0,$$

da cui:

$$\frac{F'(p)}{F(p)} = -\frac{p}{p^2 + 1},$$

quindi:

$$\text{Log}(F(p)) = -\frac{1}{2}\text{Log}(p^2 + 1) + \text{Log } k,$$

e in definitiva:

$$F(p) = \frac{k}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Ricordando la serie binomiale:

$$(1+p)^\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{j} p^j, \quad |p| < 1,$$

per  $Re(p) > 1$  si ha:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{k}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{k}{\sqrt{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}} = \frac{k}{p} \left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{k}{p} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{j} \frac{1}{p^{2j}} = k \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{j} \frac{1}{p^{2j+1}} = \\ &= k \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{j} \mathcal{L} \left[ \frac{t^{2j}}{(2j)!} \right] (p). \end{aligned}$$

Antitrasformiamo formalmente per serie e si ha:

$$f(t) \stackrel{?}{=} k \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{j} \frac{t^{2j}}{(2j)!}.$$

Dalla condizione  $f(0^+) = 1$  risulta:

$$1 = f(0^+) = k \binom{-1/2}{0} = k.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{j} &= \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{1}{2} - j + 1\right)}{j!} = \frac{(-1)^j (2j-1)!!}{2^j j!} = \\ &= \frac{(-1)^j (2j)!}{2^j j! 2^j j!}, \end{aligned}$$

risulta<sup>4</sup>

$$f(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{j} \frac{t^{2j}}{(2j)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(j!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2j} = J_0(t), \quad t > 0.$$

---

<sup>4</sup>Qui facciamo solo presente che l'uguaglianza  $\stackrel{?}{=}$  è giustificata da un teorema di antitrasformazione per serie.

Il metodo della trasformata di Laplace è applicabile alle *equazioni integrali di Volterra* (relative a fenomeni ereditari<sup>5</sup>) della forma:

$$f(t) = w(t) + \int_0^t f(\tau)k(t-\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (8.30)$$

dove l'incognita è  $f(t)$ , definita in  $[0, +\infty[$ ,  $w(t)$  è il termine noto e  $k(t-\tau)$  è il nucleo.

Riscriviamo la (8.30) nella forma:

$$f(t) - (f * k)(t) = w(t) \quad (8.31)$$

Nell'ipotesi che  $w$  e  $k$  siano  $\mathcal{L}$ -trasformabili, ammesso che esista una soluzione  $f(t)$   $\mathcal{L}$ -trasformabile, applichiamo ad entrambi i membri di (8.31) l'operatore  $\mathcal{L}$ . Per il teorema di Borel 8.2.13(iii) otteniamo l'equazione algebrica di primo grado, nell'incognita  $\mathcal{L}[f(t)](p)$ , da cui (osservato che per  $Re(p)$  sufficientemente grande si ha  $|\mathcal{L}[k(t)](p)| < 1$ , essendo  $\mathcal{L}[k(t)](p)$  infinitesima per  $Re(p) \rightarrow +\infty$ ):

$$\mathcal{L}[f(t)](p) - \mathcal{L}[f(t)](p) \cdot \mathcal{L}[k(t)](p) = \mathcal{L}[w(t)](p)$$

e quindi

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{\mathcal{L}[w(t)](p)}{1 - \mathcal{L}[k(t)](p)}. \quad (8.32)$$

La soluzione  $f(t)$  si trova invertendo (8.32).

**14.** Risolviamo la seguente equazione integrale di Volterra:

$$f(t) = \sin t + \int_0^t f(\tau) \sin(2(t-\tau)) d\tau$$

Indichiamo con  $F(p)$  la trasformata di Laplace di  $f$  e applichiamo l'operatore  $\mathcal{L}$  ai due membri dell'equazione. Esplicitando le trasformate delle funzioni note si ha:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + F(p) \cdot \frac{2}{p^2 + 4},$$

---

<sup>5</sup>Fenomeni nella cui descrizione, nell'intervallo di tempo  $[0, +\infty[$ , compare una funzione (da determinare)  $f(t)$ , che dipende, oltre che da una funzione assegnata  $w(t)$ , dai valori che la stessa  $f$  assume negli istanti  $\tau$  precedenti l'istante  $t$ . L'influenza che il valore  $f(\tau)$  esercita sul valore  $f(t)$  è espressa dalla quantità  $f(\tau)k(t-\tau)$ , essendo  $k(t-\tau)$  (funzione nota) un fattore di trasmissione (o di ereditarietà).

quindi:

$$F(p) = \frac{p^2 + 4}{(p^2 + 1)(p^2 + 2)}.$$

Allora, applicando la formula di Heaviside [8.3.3](#) otteniamo:

$$f(t) = 3 \sin t - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t).$$



# Capitolo 9

## Esercizi proposti

Qui proponiamo al lettore alcuni esercizi risolvibili con i metodi presentati nei precedenti capitoli. Per invogliare maggiormente alla riflessione, gli esercizi non sono suddivisi per tipologia, starà al lettore studiare la tecnica risolutiva più opportuna tra quelle acquisite durante il corso (qualora non vi siano suggerimenti o richieste esplicite).

1. Calcolare il residuo della funzione

$$f(z) = \frac{\cos^2 z}{(2\pi - z)^3}$$

in  $z_0 = 2\pi$ .

2. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sin^2 \frac{1}{z} dz \quad (r > 0).$$

3. Utilizzando il Teorema di Rouché, stabilire quante radici del polinomio

$$P(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$$

cadono in  $|z| < 1$ .

4. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} (v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{pe^{pt}}{p^2 + 1} dp \quad (a > 0, t > 0).$$

Analizzare poi il risultato, tenendo presente la formula di inversione della trasformata di Laplace.

5. Calcolare il residuo della funzione

$$f(z) = z \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

nel punto singolare al finito (specificandone la natura) e all'infinito complesso.

6. Calcolare

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{z^2 + 1} dz.$$

7. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 4} dx.$$

8. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = 2e^{-t} \cos^2 t.$$

9. Calcolare il residuo della funzione

$$f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z^2}}$$

nel punto singolare al finito (specificandone la natura) e all'infinito complesso.

10. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \vartheta} d\vartheta.$$

11. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx.$$

12. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = 2e^{-t} \sin^2(2t).$$

13. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{2}{z}} dz.$$

14. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

15. Risolvere, con il metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$f(t) = \cos t + \int_0^t f(\tau) \sin(2(t - \tau)) d\tau.$$

16. Scrivere la serie di Laurent associata alla funzione

$$f(z) = \frac{\cos z^2}{z}.$$

17. Stabilire se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x}} dx$$

esiste finito; in caso affermativo, calcolarlo.

18. Calcolare

$$\int_{|z|=1} \frac{z^3}{2z^4 + 1} dz.$$

19. Calcolare il residuo di

$$f(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}}}{z^2 + 1}$$

in  $z_0 = 0$ .

20. Calcolare

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x^2 - 4x + 5)} dx.$$

21. Determinare la funzione generatrice  $f(t)$  la cui trasformata di Laplace è

$$F(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p + 1)(p^2 + 2p + 5)}.$$

22. Risolvere, con il metodo della trasformata di Laplace, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} f''(t) + 2f'(t) + f(t) = e^{-2t} \\ f(0^+) = 1 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

per  $t > 0$ .

23. Utilizzare il teorema (di Borel) sulla trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione per trovare la funzione generatrice di

$$F(p) = \frac{2}{p^3(p^2 + 1)}.$$

24. Calcolare

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \quad (\alpha > 0).$$

25. Calcolare il residuo della funzione

$$f(z) = \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

nei punti singolari al finito e all'infinito complesso.

26. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} (v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2(p^2 + 1)} dp \quad (a > 0, t > 0).$$

27. Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{z+1}{(z-1)^2(z-2)^2} dz,$$

dove  $\gamma$  è la circonferenza  $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 7\}$ .

# Bibliografia

- [1] L. Ahlfors: *Complex Analysis*, M<sup>c</sup>Graw-Hill, Singapore, 1979.
- [2] L. Amerio: *Analisi Matematica 3 (parte prima)*, Utet, Torino, 1981.
- [3] A. Avantageggiati: *Analisi Matematica 2*, Ambrosiana, Milano, 1995.
- [4] F. Gazzola, F. Tomarelli, M. Zanotti: *Funzioni analitiche, Trasformate, Equazioni differenziali*, Esculapio, Bologna, 2011.
- [5] G. Gilardi: *Analisi Tre*, M<sup>c</sup>Graw-Hill, Milano, 1994.
- [6] D. Greco: *Complementi di Analisi*, Liguori, Napoli, 1995.
- [7] R. Nevanlinna, V. Paatero: *Introduction to Complex Analysis*, Addison-Wesley, 1969.
- [8] W. Rudin: *Analisi Reale e Complessa*, Boringhieri, Torino, 1974.
- [9] W. Tutschke, H.L. Vasudeva: *An Introduction to Complex Analysis, Classical and Modern Approaches*, Chapman-Hall/CRC, 2005.
- [10] H. F. Weinberger: *A first Course in Partial Differential Equations*, Xerox College Publishing, 1965.