CAPITOLO 11

L'equazione del calore e alcuni problemi connessi

11.1 Il Problema di Cauchy per l'equazione del calore in $\mathbb{R}^N$

Assegnata $f = f(x)$ in $\mathbb{R}^N$ il problema di Cauchy in avanti nel tempo (forward) per l'equazione del calore consiste nel cercare una funzione $u = u(x,t)$ definita e regolare per $x \in \mathbb{R}^N$ e solo per $t \geq 0$ tale che

$$\begin{cases} Hu(x,t) := \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ & \textit{(Equazione del calore)} \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N \,. \end{cases} \tag{P}$$

Dal punto di vista fisico il problema (P) descrive l'evoluzione temporale della distribuzione di temperatura in un mezzo omogeneo, essendo $u(x,t)$ la temperatura nel punto x all'istante t e la funzione f la temperatura all'istante $t = 0$.

Al fine di determinare una soluzione del problema (P) supponiamo per ogni $t > 0$, $x \mapsto u(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e usiamo il seguente procedimento (euristico): consideriamo la trasformata di Fourier (parziale) (cfr. Proposizione 10.2.4) rispetto a x, utilizziamo le relazioni usuali fra trasformata di Fourier e derivazione e arriviamo a una formula per la trasformata (parziale) $\widehat{u}$ della funzione incognita.
Applicando allora la trasformata parziale di Fourier rispetto alla variabile x, il problema (P) diviene (assunto che $\widehat{u_t} = \widehat{u}_t$)

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(\xi,t) + 4\pi^2|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t) = 0 & t > 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi)\,. \end{cases} \tag{$\hat{P}$}$$

Osserviamo che il problema $(\hat{P})$ rappresenta, per ogni (parametro) $\xi \in \mathbb{R}^N$, un problema di Cauchy per una equazione ordinaria del primo ordine in t. Si ha

$$\frac{\widehat{u}_t(\xi,t)}{\widehat{u}(\xi,t)} = -4\pi^2|\xi|^2 \implies \log|\widehat{u}(\xi,t)| = -4\pi^2|\xi|^2 t + c$$
$$\implies \widehat{u}(\xi,t) = c' e^{-4\pi^2|\xi|^2 t},$$

con

$$c' = \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi)\,;$$

pertanto la soluzione del problema $(\hat{P})$ è data da

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\cdot e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\,.$$

Definito per ogni $t > 0$

$$\widehat{K}(\xi,t) = \widehat{K}_t(\xi) := e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\left(= e^{-\pi|\xi|^2(4\pi t)}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \tag{11.1}$$

risulta

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\cdot \widehat{K}_t(\xi)$$

e quindi la soluzione del problema $(\hat{P})$ può essere espressa come

$$\widehat{u}(\xi,t) = (f * K_t)\widehat{\ }(\xi)\,.$$

Applicando la trasformata inversa di Fourier si ottiene una soluzione del problema (P) data da

$$u(x,t) = (f * K_t)(x)\,.$$

Per esplicitare $K_t(x)$ applichiamo il risultato dell'Esempio 10.2.8 con $a = \dfrac{1}{4\pi t}$; si ottiene quindi la seguente espressione

$$K_t(x) = K(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} > 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0\,. \tag{11.2}$$

In definitiva si ha che una soluzione del problema (P) è data dalla funzione

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) = (f * K_t)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y) f(y)\, d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, d\mathcal{L}^N(y)\,. \end{aligned}} \tag{11.3}$$

La funzione $K_t(x)$ si chiama **nucleo di Gauss-Weierstrass** (o anche *nucleo del calore*) ed è, come vedremo nel successivo paragrafo 11.2, la soluzione fondamentale per l'operatore del calore.

Proposizione 11.1.1. *Il nucleo $K_t(x)$ soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) $K_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[)$;

(ii) *per ogni* $t > 0$ *si ha* $K_t(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*;*

(iii) $K_t(x) > 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$*,* $t > 0$*;*

(iv) $K_t(x)$ *è soluzione dell'equazione omogenea del calore, cioè*

$$HK_t(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^N\,,\; t > 0\,;$$

(v) *per ogni* $t > 0$ *risulta*

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = 1\,.$$

Dimostrazione. Le proprietà (i), (ii) e (iii) seguono immediatamente dalla definizione di $K_t(x)$ data in (11.2).
Proviamo (iv). Essendo, per il teorema di inversione di Fourier (Teorema 10.2.11),

$$K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{K}_t(\xi)\, d\mathcal{L}^N(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\, d\mathcal{L}^N(\xi)$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (-4\pi^2|\xi|^2) e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\, d\mathcal{L}^N(\xi)\,,$$

inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}K_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} 2\pi i\xi_j\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\, d\mathcal{L}^N(\xi) \quad (j = 1,\ldots,N)\,,\\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}K_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(-4\pi^2\xi_j^2\right) e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\, d\mathcal{L}^N(\xi) \end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta_x K_t(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (-4\pi^2|\xi|^2) e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}\, d\mathcal{L}^N(\xi)\,,$$

da cui

$$HK_t(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0\,.$$

La proprietà (v) segue osservando che dalla rappresentazione integrale

$$\widehat{K}_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\xi} K_t(x)\, d\mathcal{L}^N(x)$$

e dalla definizione stessa di $\widehat{K}_t(\xi)$ data in (11.1) si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \widehat{K}_t(0) = 1\,. \quad \square$$

Ora procediamo a ritroso; assumiamo la (11.3) come definizione della funzione u e controlliamo sotto quali ipotesi u è soluzione del problema di partenza (P).
È importante osservare che è necessario chiarire in che senso tale u è soluzione del problema (P); il problema più delicato consiste nell'attribuire un significato preciso

alla condizione di Cauchy quando la u costruita non è una funzione continua (per $t = 0$).

Sussiste il seguente risultato di esistenza.

Teorema 11.1.2. *(a) Se $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora la funzione*

$$u(x,t) = (f * K_t)(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[)$$

è una soluzione dell'equazione del calore; inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\exists \lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$$

e quindi

$$u(x,t) \in C^0(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[)\,.$$

In definitiva la funzione $u(x,t)$ è una soluzione del problema di Cauchy (P) di classe $C^0(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[)$.

(b) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < +\infty$, allora la funzione

$$u(x,t) = (f * K_t)(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[)$$

è una soluzione dell'equazione del calore; inoltre

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t) - f(x)|^p \, d\mathcal{L}^N(x) = 0\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni $t > 0$ risulta $K_t(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$K_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[),$$

e inoltre [30]

$$u(x,t) = (f * K_t)(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[)\,.$$

Ricordato che

$$HK_t(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0\,,$$

segue

$$H(f * K_t)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0\,.$$

Dimostriamo ora che, se $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\exists \lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x) \qquad \text{(condizione di Cauchy)},$$

pertanto $u \in C^0(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[)$. Poiché

$$K_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N\,, \quad t > 0\,,$$

[30] Cfr. Teorema 5.1.11.

si ha

$$K_1(x) = (4\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$$

e quindi

$$K_t(x) = K_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot t^{-\frac{N}{2}}.$$

Posto $\varepsilon = \sqrt{t}$ $(t > 0)$, per il teorema di approssimazione dell'identità 5.3.1, si ha

$$(f * K_t)(x) \xrightarrow[t\to 0^+]{} f(x)$$

poiché $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = 1 \quad \text{per } t > 0\,.$$

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$, allora, ancora per il teorema dell'approssimazione dell'identità, si ha

$$u(\cdot, t) = (f * K_t)(\cdot) \xrightarrow[t\to 0^+]{} f(\cdot) \qquad \text{in norma } L^p(\mathbb{R}^N)$$

e la dimostrazione è completa. □

Osservazione 11.1.3. Dal precedente teorema deduciamo che l'operatore del calore produce un "effetto fortemente regolarizzante" sulle soluzioni, perché negli istanti successivi a quello iniziale, anche con dato f discontinuo, la soluzione è C^∞ e pertanto, in generale, descrive fenomeni irreversibili in quanto non possiamo aspettarci di ottenere una soluzione per $t < 0$, salvo che il dato "finale" f abbia la regolarità compatibile con quella delle soluzioni in avanti nel tempo.
Il problema di Cauchy retrogrado nel tempo (backward) per l'equazione del calore

$$\begin{cases} Hu(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^N, \quad t < 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{11.4}$$

in generale è mal posto.

Osserviamo che anche se il problema di Cauchy retrogrado ha soluzione, la dipendenza continua dai dati può non sussistere, come mostra il seguente esempio di Hadamard: per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$u_\varepsilon(x,t) = \varepsilon\, e^{-\,t/\varepsilon^2}\ \text{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

è soluzione[31] dell'equazione del calore, in dimensione (spaziale) $N = 1$, in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e in particolare risolve il problema retrogrado (11.4) con dato $f_\varepsilon(x) = \varepsilon\ \text{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
Si ha

$$\|f_\varepsilon\|_{\infty,\mathbb{R}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0\,.$$

[31] Posto $u_\varepsilon(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$ si ha $u_\varepsilon(x,0) = \varphi(x)\,\psi(0) = \varepsilon\ \text{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ e quindi $\varphi(x) = \dfrac{\varepsilon\ \text{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\psi(0)}$. Allora

$$u_\varepsilon(x,t) = \varepsilon\ \text{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\psi(t)}{\psi(0)}\,,$$

Tuttavia, per ogni $t < 0$, risulta

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{\infty,\mathbb{R}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} +\infty.$$

Osservazione 11.1.4. Se $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora $u(x,t) = (f * K_t)(x)$ è limitata in $\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[$, in quanto

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \le \|f\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \qquad \forall\, t \ge 0$$

(dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale)

e si può provare (via il Principio del massimo Teorema 11.5.1) che essa è l'unica soluzione limitata del problema di Cauchy (P) (cfr. Teorema 11.5.6).

Osservazione 11.1.5. Supponiamo che nella formula

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, d\mathcal{L}^N(y)$$

la funzione f sia non-negativa, non identicamente nulla e abbia supporto in $B_r(0)$. Allora $u(x,t)$ è strettamente positiva per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[$.
In particolare, la temperatura iniziale è percepita dalla soluzione in ogni $|x|$ comunque grande e in ogni $t > 0$ comunque piccolo (anche se solo in modo impercettibile). Pertanto la temperatura iniziale si propaga con velocità infinita[32].

Osservazione 11.1.6. Il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) - D\,\Delta_x u(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N\,, \end{cases} \tag{11.5}$$

dove il coefficiente di diffusione $D > 0$ rappresenta la risposta termica del materiale, si riconduce al problema (P) con il cambio di variabile temporale $\tau = Dt$.
Per il problema (11.5) il nucleo del calore è quindi dato da

$$K_D(x,t) = \frac{1}{(4\pi D t)^{\frac{N}{2}}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N\,, \quad t > 0$$

per cui (imponendo che $u(x,t)$ soddisfi l'equazione del calore)

$$\varepsilon \,\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\psi'(t)}{\psi(0)} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} \frac{\psi(t)}{\psi(0)} = 0$$

e quindi

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\,,$$

da cui

$$\psi(t) = \psi(0)\, e^{-t/\varepsilon^2}$$

e, in definitiva,

$$u_\varepsilon(x,t) = \varepsilon \,\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-t/\varepsilon^2}\,.$$

[32]Cfr. **G. Fichera**: *Is the Fourier Theory of Heat propagation paradoxical?*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Tomo XLI, pp. 5–28, 1992.

e in particolare, in dimensione (spaziale) $N = 1$ e per $D = \frac{1}{2}$, si ha

$$K_D(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,. \tag{11.6}$$

11.2 Soluzione fondamentale per l'operatore del calore

Il Teorema di Malgrange-Ehrenpreis 3.3.6 garantisce che ogni operatore differenziale a coefficienti costanti ha una soluzione fondamentale. Proviamo che il nucleo del calore è una soluzione fondamentale per l'operatore del calore.

Teorema 11.2.1. *Il nucleo di Gauss-Weierstrass*

$$K_t(x) = K(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N, \quad t \le 0 \end{cases}$$

è una soluzione fondamentale per l'operatore del calore, cioè

$$\langle HK, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0,0) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N \times]-\infty, +\infty[\right)\,.$$

Dimostrazione. Occorre provare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N \times]-\infty, +\infty[\right)$ risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[} K_t(x)\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)\varphi(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x)\, d\mathcal{L}^1(t) = \varphi(0,0)\,.$$

Sia $\varepsilon > 0$ e consideriamo

$$\int_{\mathbb{R}^N \times]\varepsilon,+\infty[} K_t(x)\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)\varphi(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x)\, d\mathcal{L}^1(t)\,.$$

Integrando per parti nella variabile t e tenendo presente che φ è nulla al di fuori di un compatto si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \times]\varepsilon,+\infty[} K_t(x)\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)\varphi(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x)\, d\mathcal{L}^1(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{]\varepsilon,+\infty[} K_t(x)\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)\varphi(x,t)\, d\mathcal{L}^1(t)\right) d\mathcal{L}^N(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{]\varepsilon,+\infty[}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)K_t(x)\,\varphi(x,t)\, d\mathcal{L}^1(t) + K_\varepsilon(x)\varphi(x,\varepsilon)\right) d\mathcal{L}^N(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \times]\varepsilon,+\infty[}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)K_t(x)\,\varphi(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x)\, d\mathcal{L}^1(t) + \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x)\varphi(x,\varepsilon)\, d\mathcal{L}^N(x)\,.
\end{aligned}$$

Tenuto conto della *(iv)* della proposizione 11.1.1, risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N \times]\varepsilon,+\infty[} K_t(x)\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)\varphi(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x)\, d\mathcal{L}^1(t) = \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x)\varphi(x,\varepsilon)\, d\mathcal{L}^N(x)\,;$$

inoltre si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x)\,\varphi(x,\varepsilon)\,d\mathcal{L}^N(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x)\,\varphi(x,0)\,d\mathcal{L}^N(x)\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x)\,[\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0)]\;d\mathcal{L}^N(x)\\ &= I_\varepsilon + J_\varepsilon\end{aligned}$$

dove si è posto

$$I_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x)\,\varphi(x,0)\,d\mathcal{L}^N(x)$$

e

$$J_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x)\,[\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0)]\;d\mathcal{L}^N(x)\,.$$

Per $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N \times]-\infty,+\infty[\right)$, risulta per la *(v)* della proposizione 11.1.1

$$|J_\varepsilon| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0)|\;\|K_\varepsilon\|_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0)|$$

e sfruttando la continuità di φ

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon = 0\,.$$

Per dimostrare la tesi è quindi sufficiente provare che

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon = \varphi(0,0)\,. \tag{11.7}$$

Sia $\mu > 0$ fissato. Per la continuità della funzione φ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $|x| < \delta$ si ha $|\varphi(x,0)-\varphi(0,0)| < \mu$. Risulta allora

$$\begin{aligned}|I_\varepsilon - \varphi(0,0)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x)\,[\varphi(x,0)-\varphi(0,0)]\;d\mathcal{L}^N(x)\right|\\ &\le 2\,\|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\delta(0)} K_\varepsilon(x)\,d\mathcal{L}^N(x)\\ &\quad + \int_{B_\delta(0)} K_\varepsilon(x)\,|\varphi(x,0)-\varphi(0,0)|\;d\mathcal{L}^N(x)\\ &\le 2\,\|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\delta(0)} K_\varepsilon(x)\,d\mathcal{L}^N(x) + \mu\,. \qquad (11.8)\end{aligned}$$

Posto $x = r\,\omega$ con $r = |x|$ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\delta(0)} K_\varepsilon(x)\,d\mathcal{L}^N(x) = \frac{C(N)}{\varepsilon^{N/2}} \int_\delta^{+\infty} r^{N-1}\,e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\,d\mathcal{L}^1(r)\,. \tag{11.9}$$

Per $r \in [\delta,+\infty[$ si ha

$$\frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\,r^{N-1}\,e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} \rightrightarrows 0 \qquad \text{per } \varepsilon\to 0^+ \qquad \textit{uniformemente} \text{ rispetto a } r.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale in (11.9), si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{C(N)}{\varepsilon^{N/2}} \int_\delta^{+\infty} r^{N-1}\,e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\,d\mathcal{L}^1(r) = \int_\delta^{+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{C(N)}{\varepsilon^{N/2}}\,r^{N-1}\,e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}}\,d\mathcal{L}^1(r) = 0\,.$$

La (11.7) segue dall'arbitrarietà di μ in (11.8). □

11.3 Questioni di unicità della soluzione del Problema di Cauchy per l'equazione del calore

In generale per il Problema di Cauchy per l'equazione del calore non è verificata l'unicità della soluzione come dimostra il seguente controesempio di Tychonov[33].

Controesempio di Tychonov all'unicità 11.3.1. Si consideri il problema, in dimensione (spaziale) $N = 1$,

$$\begin{cases} Hu(x,t) = u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{11.10}$$

Si ponga ora

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n}\varphi(t)\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} & t > 0 \\ \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

dove la funzione φ è definita da

$$\varphi(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2} & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

La funzione $\psi(x,t)$ è soluzione del problema (11.10). Pertanto, avendo il problema (11.10) per soluzione anche la funzione identicamente nulla, non vi è unicità.

Per provarlo premettiamo il seguente lemma.

Lemma 11.3.2. *Fissato $t > 0$, la funzione $\psi(x,t)$ è uniformemente convergente in un intorno di ogni punto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$; inoltre*

$$\exists \lim_{t \to 0^+} \psi(x,t) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Identifichiamo l'asse t come l'asse reale nel piano complesso. Sia $t > 0$ fissato; la funzione $z \mapsto \varphi(z)$ è olomorfa all'interno della circonferenza del piano complesso

$$\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}\,;\; z = t + \frac{t}{2}e^{i\theta} \right\}, \qquad 0 < \theta \le 2\pi\,,$$

pertanto dalla formula di Cauchy per le derivate risulta

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\varphi(t) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

ovvero, passando ai moduli, poiché $|dz| = \dfrac{t}{2}d\theta$, $|z-t| = \frac{t}{2}$ e $|\varphi(z)| = e^{-\operatorname{Re}(z^{-2})}$

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial t^n}\varphi(t)\right| \le \frac{n!\,2^n}{2\pi t^n}\int_0^{2\pi} e^{-\operatorname{Re}(z^{-2})}\,d\theta\,.$$

[33] Cfr. **A. Tychonov**: *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, Math. Sbornik, 42, pp. 199–216, 1935.

Osservato che per $z \in \gamma$ risulta $z^2 = t^2\left(1+\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)^2$, $z^{-2} = t^{-2}\dfrac{\left(1+\frac{1}{4}e^{-2i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{\left|\left(1+\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)^2\right|^2}$ e quindi $\mathrm{Re}(z^{-2}) \geq (2t)^{-2}$, si ha

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial t^n}\varphi(t)\right| \leq \frac{n!\,2^n}{t^n}\,e^{-\frac{1}{4t^2}}\,.$$

Fissiamo $x \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$. Allora per ogni $|x| < \rho$, applicando la disuguaglianza di Stirling

$$\frac{n!\,2^n}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!}\,,$$

si ottiene

$$|\psi(x,t)| \leq e^{-\frac{1}{4t^2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{t^n}\,\frac{\rho^{2n}}{n!} = e^{-\frac{1}{4t^2}}\,e^{\frac{\rho^2}{t}}\,.$$

Passando al limite per $t \to 0^+$, si ottiene

$$\lim_{t\to 0^+}\psi(x,t) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

□

A questo punto, per il Lemma 11.3.2 si può derivare per serie e si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\varphi(t)\,\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\varphi(t)\,(2n)\,(2n-1)\,\frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\varphi(t)\,\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\varphi(t)\,\frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.\end{aligned}$$

Resta così provato che la funzione $\psi(x,t)$ è anche soluzione del problema (11.10).

Osservazione 11.3.3. Nei paragrafi successivi presenteremo alcuni risultati di unicità della soluzione, validi sotto opportune ipotesi sulla soluzione e sui dati, con riferimento al problema di Cauchy in $\mathbb{R}^N$ (Teorema 11.5.4 e Teorema 11.5.6) e al problema di Cauchy in aperti connessi limitati nei casi di problema misto omogeneo (Teorema 11.4.3), problema misto non-omogeneo (Teorema 11.6.6), problema retrogrado (Teorema 11.7.2).

11.4 Il Principio del massimo (minimo) debole e unicità, in aperti connessi limitati

Sia Ω un aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera topologica $\partial\Omega$ regolare. Denotiamo con Ω_T, $0 < T < +\infty$, il *cilindro parabolico*

$$\Omega_T = \Omega\times]0,T]$$

e sia inoltre

$$\Sigma_T = \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$$

il *bordo parabolico del cilindro* Ω_T. Osserviamo che

$$\Sigma_T = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{t=0\}) = \partial\Omega_T \setminus (\Omega \times \{t=T\}) \ .$$

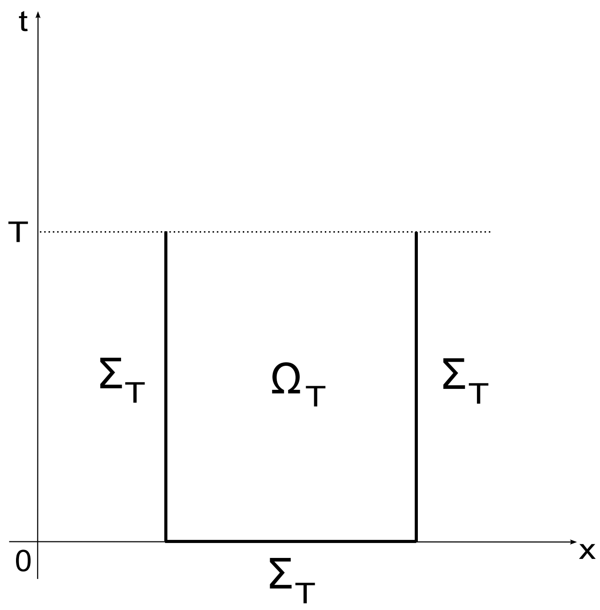

Figura 11.1: Cilindro parabolico e bordo parabolico

Denotiamo con C^2_1 lo spazio delle funzioni derivabili due volte rispetto a x e una rispetto a t con derivate continue,

$$C^2_1(\Omega_T) = \left\{u : \Omega_T \to \mathbb{R}\,;\ u_t, u_{x_i x_j} \in C^0(\Omega_T),\ i,j = 1,\dots,N\right\}$$

Teorema 11.4.1. *(Principio del massimo (risp. minimo) debole)*
Sia $u \in C^2_1(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ *tale che* $Hu(x,t) \le 0$ *(risp.* $Hu(x,t) \ge 0$*) in* Ω_T. *Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Sigma_T} u \qquad \left(\textit{risp.}\quad \min_{\overline{\Omega}_T} u = \min_{\Sigma_T} u\right) \ .$$

Dimostrazione. Proviamo il principio del massimo debole. Sia $\varepsilon\ \in]0,T[$ fissato e consideriamo la funzione ausiliaria

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon\, t\,, \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}_{T-\varepsilon}\,.$$

Poiché $v \in C^0(\overline{\Omega}_{T-\varepsilon})$ essa ha massimo in $\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}$.
Procedendo per assurdo, supponiamo che tale massimo sia assunto in un punto $(x^0,t_0) \in \Omega\times]0,T-\varepsilon]$, ovvero non appartenente al bordo parabolico di $\Omega_{T-\varepsilon}$.

Fissato x^0 e considerata la v come funzione della sola variabile t si ha pertanto $\frac{\partial}{\partial t}v(x^0,t_0) \geq 0$ se $t_0 = T-\varepsilon$ e $\frac{\partial}{\partial t}v(x^0,t_0) = 0$ altrimenti. Analogamente, fissato t_0, e considerata la v di volta in volta come funzione di una sola delle variabili spaziali, mantenendo fisse tutte le altre, si ottiene $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}v(x^0,t_0) \leq 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, da cui segue $\Delta_x v(x^0,t_0) \leq 0$. Si ha pertanto $Hv(x^0,t_0) \geq 0$.
D'altra parte, dalla definizione di v e dall'ipotesi $Hu(x,t) \leq 0$, riesce

$$Hv(x,t) = Hu(x,t) - \varepsilon \leq -\varepsilon < 0$$

che contraddice il risultato precedente. Pertanto deve essere $(x^0,t_0) \in \Sigma_{T-\varepsilon}$.
Risulta

$$\sup_{\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}} v(x,t) \leq \sup_{\Sigma_{T-\varepsilon}} v(x,t) \leq \sup_{\Sigma_T} v(x,t) \leq \sup_{\Sigma_T} u(x,t) + \varepsilon T$$

cioè

$$\sup_{\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}} u(x,t) - \varepsilon T \leq \sup_{\Sigma_T} u(x,t) + \varepsilon T$$

da cui

$$u(x,t) \leq \sup_{\Sigma_T} u + 2\varepsilon T \qquad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_{T-\varepsilon}\,.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ si ha la tesi. □

Dal principio di massimo e minimo debole precedente segue immediatamente il seguente corollario.

Corollario 11.4.2. *Sia* $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ *tale che* $Hu(x,t) = 0$ *in* Ω_T. *Allora*

$$\|u\|_{\infty,\Omega_T} = \|u\|_{\infty,\Sigma_T}\ .$$

Consideriamo il seguente *problema*: $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$

$$\begin{cases} Hu(x,t) = f(x,t) & \text{in } \Omega_T, \quad f \in C^0(\Omega_T) \\ \\ u(x,t) = \varphi(x,t) & \text{su } \Sigma_T, \quad \varphi \in C^0(\Sigma_T) \end{cases} \tag{11.11}$$

in cui il dato al contorno è preso limitatamente al bordo parabolico dell'aperto considerato.
Per tale problema vale un risultato di unicità della soluzione che è conseguenza del Principio del massimo debole.

Teorema 11.4.3. *(Unicità in aperti connessi limitati)*
Esiste al più una soluzione di classe $C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ *del problema* (11.11).

Dimostrazione. Siano u^1, u^2 soluzioni di classe $C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ del problema (11.11). Allora la funzione $v = u^1 - u^2$ è di classe $C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ ed è soluzione del problema

$$\begin{cases} Hv(x,t) = 0 & \text{in } \Omega_T \\ \\ v(x,t) = 0 & \text{su } \Sigma_T. \end{cases}$$

Pertanto, per il Corollario 11.4.2 si ha

$$\|v\|_{\infty,\Omega_T} = \|v\|_{\infty,\Sigma_T} = 0$$

da cui segue che $v = 0$ e quindi $u^1 = u^2$. □

Osservazione 11.4.4. *(Esempio di problema al contorno mal posto per l'equazione del calore)*
Il principio del massimo debole permette di dimostrare che il problema di Dirichlet con dato assegnato su tutta la frontiera di Ω_T è in generale mal posto per l'equazione del calore, potendo tale problema al contorno per l'equazione del calore non aver soluzione.
Si consideri infatti il problema

$$\begin{cases} Hu(x,t) = u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{in } Q \\ \\ u(x,t) = \varphi(x,t) & \text{su } \partial Q \end{cases} \tag{11.12}$$

dove $Q = \{(x,t)\,;\ 0 < x < 1\,,\ 0 < t < 1\}$ è il quadrato unitario di $\mathbb{R}^2$ e $\varphi(x,t)$ una funzione di classe $C^0(\overline{Q})$ che assume massimo assoluto solo in $\{0 < x < 1\} \times \{t = 1\}$. Ad esempio si può considerare la funzione $\varphi(x,t) = x(1-x) + t$ che ha massimo assoluto nel punto $(1/2, 1)$.
L'esistenza di una soluzione del problema (11.12) sarebbe pertanto in contraddizione con il Teorema 11.4.1.

Proviamo ora un risultato di *regolarità delle soluzioni* (cfr. Teorema 11.4.6). Premettiamo il seguente lemma che fornisce una formula di rappresentazione per le soluzioni dell'equazione del calore.

Lemma 11.4.5. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera topologica $\partial\Omega$ di classe C^1. Sia $u \in C^2_1\left(\overline{\Omega}_T\right)$ soluzione dell'equazione del calore in Ω_T, cioè*

$$Hu(x,t) = 0 \qquad \forall\,(x,t) \in \Omega_T\,.$$

Allora si ha la seguente formula di rappresentazione valida per ogni $(x^0, t_0) \in \Omega_T$

$$\begin{aligned} u(x^0,t_0) \quad = \quad & \int_0^{t_0}\int_{\partial\Omega} K_{t_0-t}(\xi - x^0)\,\frac{\partial}{\partial\nu}u(\xi,t)\ \cdot\ \nu(\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\,d\mathcal{L}^1(t) \\ & - \int_0^{t_0}\int_{\partial\Omega} u(\xi,t)\frac{\partial}{\partial\nu}K_{t_0-t}(\xi - x^0)\ \cdot\ \nu(\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\,d\mathcal{L}^1(t) \\ & + \int_\Omega u(x,0)\,K_{t_0}(x - x^0)\,d\mathcal{L}^N(x)\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $v \in C^2_1\left(\overline{\Omega}_T\right)$. Per la funzione $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}$ definita da

$$F(x,t) := \Big(u(x,t)\nabla_x v(x,t) - v(x,t)\nabla_x u(x,t),\, u(x,t)v(x,t)\Big)$$

vale la proprietà[34]

$$div_{x,t}\, F(x,t) = u(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) + \Delta_x v(x,t)\right) + v(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \Delta_x u(x,t)\right).$$

Sia $(x^0, t_0) \in \Omega_T$. Posto

$$v(x,t) = K_{t_0 - t + \varepsilon}(x - x^0), \qquad t < t_0$$

e osservato che per $t < t_0$ risulta

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) + \Delta_x v(x,t) = 0\,,$$

dalla proprietà precedente segue, per $x \in \Omega$ e $t < t_0$,

$$div_{x,t}\, F(x,t) = 0\,.$$

Applicando il teorema della divergenza all'aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$

$$E = \Omega \times]0, t_0[$$

si ha

$$0 = \int_E div_{x,t}\, F(x,t)\, d\mathcal{L}^{N+1}(x,t) = \int_{\partial E} F(y) \cdot \nu^*(y)\, d\mathcal{H}^N(\xi),$$

dove $\nu^*(y) \in \mathbb{R}^{N+1}$ è il versore normale esterno applicato a $y \in \partial E$ (ove definito).
Osservato che

$$\partial E = \Big(\partial\Omega \times]0, t_0[\Big) \cup \Big(\overline{\Omega} \times \{t = 0\}\Big) \cup \Big(\overline{\Omega} \times \{t = t_0\}\Big)$$

si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial E} F(y) \cdot \nu^*(y)\, d\mathcal{H}^N(y) \\
&= \int_0^{t_0} \left[\int_{\partial\Omega} \Big(u(\xi,t)\nabla_\xi K_{t_0-t+\varepsilon}(\xi - x^0) - K_{t_0-t+\varepsilon}(\xi - x^0)\nabla_x u(\xi,t)\Big) \cdot \nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\right] d\mathcal{L}^1(t) \\
&\quad + \int_\Omega u(x,t_0)\, K_\varepsilon(x - x^0)\, d\mathcal{L}^N(x) \; - \; \int_\Omega u(x,0)\, K_{t_0+\varepsilon}(x - x^0)\, d\mathcal{L}^N(x)
\end{aligned}$$

[34]Infatti

$$\begin{aligned}
div_{x,t}\, F(x,t) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}F_i(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}(uv)(x,t) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}v(x,t) - v(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\right) + v(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}v(x,t) + u(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}v(x,t) - \frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}v(x,t) - v(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x,t)\right) \\
&\quad + v(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) \\
&= u(x,t)\Delta_x v(x,t) - v(x,t)\Delta_x u(x,t) + v(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) \\
&= u(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) + \Delta_x v(x,t)\right) + v(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \Delta_x u(x,t)\right).
\end{aligned}$$

dove $\nu(\xi) \in \mathbb{R}^N$ è il versore normale esterno applicato a $\xi \in \partial\Omega$ (ove definito). Passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ risulta

$$\big(u(\cdot, t_0) * K_\varepsilon(\cdot)\big)(x^0) \longrightarrow u(x^0, t_0)$$

e inoltre

$$\big(u(\cdot, 0) * K_{t_0+\varepsilon}(\cdot)\big)(x^0) \longrightarrow \big(u(\cdot, 0) * K_{t_0}(\cdot)\big)(x^0)$$

e quindi si ottiene

$$\begin{aligned} u(x^0, t_0) \quad = \quad & \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} K_{t_0-t}(\xi - x^0)\, \nabla_\xi u(\xi, t) \,\cdot\, \nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\, d\mathcal{L}^1(t) \\ & - \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} u(\xi, t)\, \nabla_\xi\, K_{t_0-t}(\xi - x^0) \,\cdot\, \nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\, d\mathcal{L}^1(t) \\ & + \int_\Omega u(x, 0)\, K_{t_0}(x - x^0)\, d\mathcal{L}^N(x) \end{aligned} \tag{11.13}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} u(x^0, t_0) \quad = \quad & \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} K_{t_0-t}(\xi - x^0)\, \frac{\partial}{\partial\nu} u(\xi, t) \,\cdot\, \nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\, d\mathcal{L}^1(t) \\ & - \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} u(\xi, t) \frac{\partial}{\partial\nu} K_{t_0-t}(\xi - x^0) \,\cdot\, \nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\, d\mathcal{L}^1(t) \\ & + \int_\Omega u(x, 0)\, K_{t_0}(x - x^0)\, d\mathcal{L}^N(x)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Dalla formula di rappresentazione della soluzione provata nel lemma precedente, segue immediatamente il seguente risultato di regolarità.

Teorema 11.4.6. *(Regolarità delle soluzioni)*
Sia $u \in C_1^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$ *soluzione dell'equazione del calore in* Ω_T*, cioè*

$$Hu(x, t) = 0 \qquad \forall\, (x, t) \in \Omega_T\,.$$

Allora $u \in C^\infty\left(\Omega_T\right)$.

Osservazione 11.4.7. Osserviamo che in generale non è garantita l'esistenza di una soluzione per il problema (omogeneo) retrogrado (backward)

$$\begin{cases} Hu(x, t) = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, T) = f(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

dove f e g sono funzioni di classe C^2 nei rispettivi domini e tali da raccordarsi con continuità. Infatti, per la formula di rappresentazione del Lemma 11.4.5, una eventuale soluzione $u \in C_1^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$ del problema precedente sarebbe di classe C^∞ su $\Omega \times \{t = T\}$ mentre la funzione f non è detto che abbia tale regolarità.

11.5 Il Principio del massimo in $\mathbb{R}^N$

Un risultato analogo al Teorema 11.4.1 è possibile in $\mathbb{R}^N$ se si impongono condizioni sul comportamento di $x \mapsto u(x,t)$ per $|x| \to +\infty$. Sussiste il seguente risultato.

Teorema 11.5.1. *(Principio del massimo in $\mathbb{R}^N$)*
Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e sia $u \in C^2_1(\mathbb{R}^N \times]0,T]) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ soluzione del problema

$$\begin{cases} Hu(x,t) \leq 0 & \textit{in } \mathbb{R}^N \times]0,T[\\ \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

tale che

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \qquad u(x,t) \leq C\, e^{\lambda\,|x|^2} \tag{11.14}$$

con C, λ costanti positive. Allora

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0,T]} u(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f\,.$$

Dimostrazione. È sufficiente provare la tesi nel caso

$$4\lambda T < 1\,.$$

Infatti, se $4\lambda T \geq 1$ si può suddividere l'intervallo $[0,T]$ in m sottointervalli $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, ciascuno di ampiezza $\tau = \dfrac{T}{m} < \dfrac{1}{4\lambda}$ e con $t_j = j\tau$. Allora per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$, se $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ è scelto tale che $t \in [t_k, t_{k+1}]$, si ha

$$u(x,t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x,t_k) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x,t_{k-1}) \leq \cdots \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x,0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)\,.$$

Supponiamo quindi $4\lambda T < 1$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $4\lambda(T+\varepsilon) < 1$. La funzione

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{N}{2}}}\, e^{\frac{|x|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}\,, \qquad \mu > 0$$

verifica $Hv \leq 0$. Applicando quindi il Teorema 11.4.1 con $\Omega = B_r(0)$ e $r > |x^0|$ si ha

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v = \max_{\Sigma_T} v$$

dove $\Omega_T = \Omega \times]0,T]$ è il cilindro parabolico e Σ_T il bordo parabolico di Ω_T.
Analizziamo il comportamento di v su Σ_T.
Per $t = 0$ si ha $v(x,0) \leq u(x,0) = f(x)$ e quindi $v(x,0) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f$.
Su $\partial\Omega \times [0,T]$ si ha $|x| = r$ e quindi

$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{N}{2}}}\, e^{\frac{|x|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq C\, e^{\lambda\,|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{N}{2}}}\, e^{\frac{|x|^2}{4(T+\varepsilon)}} \\ &= C\, e^{\lambda\, r^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{N}{2}}}\, e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} \\ &= C\, e^{\lambda\, r^2} - \mu\,(4(\lambda+\gamma))^{\frac{N}{2}}\; e^{(\lambda+\gamma) r^2} \end{aligned}$$

dove $\gamma > 0$ è tale che $\lambda + \gamma = \frac{1}{4(T+\varepsilon)}$. Al crescere di r, $v(x,t)$ diventa piccola a piacere e in particolare

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0,T]} v(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f\,.$$

Allora per $\mu \to 0^+$ si ha la tesi. □

Osservazione 11.5.2. L'ipotesi (11.14) può essere indebolita richiedendo

$$u(x,t) \leq C\, e^{\lambda\,|x|^2} \qquad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]\,, \quad |x| > r_0$$

con C, λ, r_0 costanti positive.

Il Teorema 11.5.1 consente di stimare l'estremo superiore di una funzione u regolare in $\mathbb{R}^N \times]0,T]$ con l'estremo superiore di Hu e di $u(x,0)$.

Corollario 11.5.3. *(Stima a priori) Sia $u \in C_1^2\left(\mathbb{R}^N \times]0,T]\right) \cap C^0\left(\mathbb{R}^N \times [0,T]\right)$ tale che*

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \qquad |u(x,t)| \leq C\, e^{\lambda\,|x|^2} \tag{11.15}$$

con C, λ costanti positive. Risulta allora

$$\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[} \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{R}^N} + T\,\|Hu\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[}$$

dove $f(x) = u(x,0)$.

Dimostrazione. Supponiamo $\|Hu\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[} < +\infty$ e $\|f\|_{\infty,\mathbb{R}^N} < +\infty$ (altrimenti la tesi è banale) e definiamo le funzioni (ausiliarie)

$$v(x,t) \;:=\; u(x,t) - t\,\|Hu\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[}\,,$$

$$w(x,t) \;:=\; -u(x,t) - t\,\|Hu\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[}\,.$$

Le funzioni v, w introdotte soddisfano le ipotesi del Teorema 11.5.1, infatti si ha

$$Hv(x,t) = Hu(x,t) - \|Hu\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[} \leq 0$$

e anche

$$Hw(x,t) = -Hu(x,t) - \|Hu\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[} \leq 0$$

e inoltre, per l'ipotesi (11.15), $v(x,t) \leq C\, e^{\lambda\,|x|^2}$ e $w(x,t) \leq C\, e^{\lambda\,|x|^2}$. Pertanto, applicando il Teorema 11.5.1, risulta per la funzione v

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \qquad v(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f$$

da cui segue

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \qquad u(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f + t\,\|Hu\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[} \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f + T\,\|Hu\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[}\;;$$

inoltre si ha, con procedimento analogo per la funzione w,

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \qquad -u(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f + T\,\|Hu\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[}$$

da cui è immediato dedurre la tesi. □

Teorema 11.5.4. *(Teorema di unicità della soluzione del Problema di Cauchy con crescita al più esponenziale)*
Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione del calore non-omogenea

$$\begin{cases} Hu(x,t) = w(x,t) & \textit{in } \mathbb{R}^N \times]0,T] \\ \\ u(x,0) = f(x) & \textit{in } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{P_w}$$

dove $w \in C^0\left(\mathbb{R}^N \times]0,T[\right)$ *e* $f \in C^0\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Allora esiste al più una soluzione* $u(x,t)$ *del problema* (P_w) *tale che*

$$u \in C_1^2\left(\mathbb{R}^N \times]0,T]\right) \cap C^0\left(\mathbb{R}^N \times [0,T]\right)$$

e

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T] \qquad |u(x,t)| \le C\, e^{\lambda\,|x|^2}$$

con C, λ *costanti positive.*

Dimostrazione. Siano u^1, u^2 soluzioni del problema (P_w) tali da soddisfare le condizioni richieste nell'enunciato. Allora la funzione $v := u^1 - u^2$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} Hu(x,t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,T[\\ \\ u(x,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

e verifica la condizione di crescita (11.15). Per il Corollario 11.5.3 si ha pertanto $\|v\|_{\infty,\mathbb{R}^N \times]0,T[} \le 0$ e quindi $v \equiv 0$. □

Per quanto concerne l'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy per l'equazione del calore su $\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[$ vale il seguente risultato.

Teorema 11.5.5. *Sia* $u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[)$ *soluzione del problema*

$$\begin{cases} Hu(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Supponiamo inoltre che per ogni $\lambda > 0$ *esiste* $C > 0$ *tale che*

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty[\qquad |u(x,t)| \le C\, e^{\lambda\,|x|^2}, \qquad |\nabla_x u(x,t)| \le C\, e^{\lambda\,|x|^2}. \tag{11.16}$$

Allora u *è identicamente nulla.*

Dimostrazione. Siano $x^0 \in \mathbb{R}^N$ e $t_0 > 0$. Sia $r > 0$ tale che $x_0 \in B_r(0)$. Applicando il Lemma 11.4.5 con $\Omega = B_r(0)$ si ha, utilizzando la formula (11.13),

$$\begin{aligned} u(x^0,t_0) \quad = \quad & \int_0^{t_0} \int_{|\xi|=r} K_{t_0-t}(\xi - x^0)\, \nabla_\xi u(\xi,t) \cdot \frac{\xi}{r}\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\, d\mathcal{L}^1(t) \\ & - \int_0^{t_0} \int_{|\xi|=r} u(\xi,t)\, \nabla_\xi\, K_{t_0-t}(\xi - x^0) \cdot \frac{\xi}{r}\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\, d\mathcal{L}^1(t) \\ & + \int_{B_r(0)} u(x,0)\, K_{t_0}(x - x^0)\, d\mathcal{L}^N(x) \end{aligned}$$

e quindi, ricordando che $u(x,0)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} u(x^0,t_0) &= \int_0^{t_0}\int_{|\xi|=r} K_{t_0-t}(\xi-x^0)\,\nabla_\xi u(\xi,t)\,\cdot\,\frac{\xi}{r}\,d\mathcal{H}^{\,N-1}(\xi)\,d\mathcal{L}^{\,1}(t)\\ &\quad-\int_0^{t_0}\int_{|\xi|=r} u(\xi,t)\,\nabla_\xi\,K_{t_0-t}(\xi-x^0)\,\cdot\,\frac{\xi}{r}\,d\mathcal{H}^{\,N-1}(\xi)\,d\mathcal{L}^{\,1}(t)\,. \end{aligned}$$

Passando al limite per $r\to+\infty$ e applicando le ipotesi (11.16) sulla funzione u risulta che gli integrali presenti a destra dell'uguaglianza tendono a zero e quindi $u(x^0,t_0)=0$. □

Come conseguenza del teorema precedente, con analoga argomentazione dimostrativa utilizzata per il Teorema 11.5.4, si ha il seguente risultato di unicità.

Teorema 11.5.6. *Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione del calore non-omogenea*

$$\begin{cases} Hu(x,t)=w(x,t) & \textit{in}\ \mathbb{R}^N\times\,]0,+\infty[\\ \\ u(x,0)=f(x) & \textit{in}\ \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{11.17}$$

dove $w\in C^0\left(\mathbb{R}^N\times\,]0,+\infty[\right)$ *e* $f\in C^0\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Allora esiste al più una soluzione* $u(x,t)$ *del problema (11.17) che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) $u\in C^2_1\left(\mathbb{R}^N\times\,]0,+\infty[\right)\cap C^0\left(\mathbb{R}^N\times[0,+\infty[\right)$;

(ii) per ogni $\lambda>0$ *esiste* $C>0$ *tale che*

$$\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,+\infty[\qquad |u(x,t)|\le C\,e^{\lambda\,|x|^2}\,,\qquad |\nabla_x u(x,t)|\le C\,e^{\lambda\,|x|^2}\,.$$

11.6 Il Problema di Cauchy non-omogeneo per l'equazione del calore: Principio di Duhamel

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione del calore **non-omogenea**

$$\begin{cases} Hu(x,t)=w(x,t) & \text{in}\ \mathbb{R}^N\times\,]0,T[\\ \\ u(x,0)=f(x) & \text{in}\ \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{P_w}$$

Dal punto di vista fisico $w(x,t)$ rappresenta una sorgente che emana calore nel punto x all'istante t.
Il principio di Duhamel consente la riduzione del problema non-omogeneo (P_w) a una famiglia di problemi per l'equazione del calore omogenea.
Si osservi che, per la linearità dell'operatore del calore, una soluzione del problema non-omogeneo (P_w) può essere ottenuta come somma di una soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} Hu(x,t)=0 & \text{in}\ \mathbb{R}^N\times\,]0,T[\\ \\ u(x,0)=f(x) & \text{in}\ \mathbb{R}^N \end{cases}$$

e di una soluzione del problema non-omogeneo con dato iniziale nullo

$$\begin{cases} Hu(x,t) = w(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,T[\\ u(x,0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Enunciamo e proviamo quindi un risultato di esistenza per quest'ultimo problema.

Teorema 11.6.1. *Si consideri il problema di Cauchy non-omogeneo con dato iniziale nullo*

$$\begin{cases} Hu(x,t) = w(x,t) & \textit{in } \mathbb{R}^N \times]0,T[\\ u(x,0) = 0 & \textit{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{P_w^0}$$

Supponiamo che la funzione w *verifichi le seguenti ipotesi:*

(a) $w \in C^0(\mathbb{R}^N \times]0,T[)$ *e tale che*

$$|w(x,t)| \le C_0\, e^{\beta |x|^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,,\ t \in]0,T[$$

con $C_0 > 0$, $\beta \ge 0$*;*

(b) w α*-hölderiana sui compatti di* $\mathbb{R}^N$*.*

Sia $v(x,t;s)$*, per ogni* $s \ge 0$*, l'unica soluzione di classe* $C_1^2(\mathbb{R}^N \times [0,T[)$ *del problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v(x,t;s) - \Delta_x v(x,t;s) = 0 & x \in \mathbb{R}^N\,,\ t > s \\ v(x,s;s) = w(x,s) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{P_s}$$

data da

$$\begin{aligned} v(x,t;s) &= \left(w(\cdot,s) * K_{t-s}(\cdot)\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_{t-s}(x-y) w(y,s)\, d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \big(4\pi(t-s)\big)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\, w(y,s)\, d\mathcal{L}^N(y)\,. \end{aligned} \tag{11.18}$$

Allora l'applicazione

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)\ d\mathcal{L}^1(s)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N\,,\ t \ge 0 \tag{11.19}$$

è soluzione di classe $C_1^2(\mathbb{R}^N \times [0,T[)$ *del problema (*P_w^0*).*

Si osservi che da (11.19) si ha

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \big(4\pi(t-s)\big)^{\frac{N}{2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\, w(y,s)\, d\mathcal{L}^N(y)\ d\mathcal{L}^1(s)$$

e quindi l'integrando presenta una singolarità in $(y,s) = (x,t)$.

Per la dimostrazione del teorema 11.6.1 si farà uso di alcuni risultati che premettiamo.

Lemma 11.6.2. *Sia* $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^N)$ *tale che*

$$|u_0(x)| \le C_0\, e^{\beta|x|^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

con $C_0, \beta > 0$.
Allora per la funzione $h(x,t) := \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y)\, u_0(y)\, d\mathcal{L}^N(y)$ *vale la seguente stima: per ogni* $\rho > 0$ *esiste una costante* A *(non dipendente da* x *e da* t*) tale che*

$$|h(x,t)| \le A \qquad \forall\, x \in \overline{B}_\rho(0)\,, \quad 0 < t < \frac{1}{8\beta}\,.$$

Dimostrazione. Effettuando il cambio di variabile $y - x = 2\sqrt{t}z$, osservato che $d\mathcal{L}^N(y) = (4t)^{\frac{N}{2}} d\mathcal{L}^N(z)$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y)\, u_0(y)\, d\mathcal{L}^N(y) &= \int_{\mathbb{R}^N} (4t)^{\frac{N}{2}}\, K_t(2\sqrt{t}z)\, u_0(x+2\sqrt{t}z)\, d\mathcal{L}^N(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (4t)^{\frac{N}{2}}\, (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}\, e^{-|z|^2}\, u_0(x+2\sqrt{t}z)\, d\mathcal{L}^N(z) \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2}\, u_0(x+2\sqrt{t}z)\, d\mathcal{L}^N(z)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, per l'ipotesi su u_0, segue

$$|h(x,t)| \le \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} \left|u_0(x+2\sqrt{t}z)\right| d\mathcal{L}^N(z) \le \frac{C_0\, e^{2\beta|x|^2}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2+8\beta\, t|z|^2}\, d\mathcal{L}^N(z)$$

dove si utilizzata la disuguaglianza $|x+w|^2 \le 2\left(|x|^2 + |w|^2\right)$ (vera per ogni $x, w \in \mathbb{R}^N$). Dalle ipotesi $|x| \le \rho$ e $0 < t < \frac{1}{8\beta}$, osservato che $1 - 8\beta\, t > 0$, risulta

$$|h(x,t)| \le \frac{C_0\, e^{2\beta\,\rho^2}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-(1-8\beta\, t)\,|z|^2}\, d\mathcal{L}^N(z) = \frac{C_0\, e^{2\beta\,\rho^2}}{\pi^{\frac{N}{2}}}\, \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{(1-8\beta\, t)^{\frac{N}{2}}}\,.$$

La tesi segue quindi per $A = \dfrac{C_0\, e^{2\beta\,\rho^2}}{\vartheta^{\frac{N}{2}}}$ con $0 < \vartheta < 1 - 8\beta\, t$. □

Corollario 11.6.3. *Sia* $w \in C^0(\mathbb{R}^N \times]0,T[)$ *tale che*

$$|w(x,t)| \le C_0\, e^{\beta|x|^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,,\ t \in]0,T[$$

con $C_0 > 0$, $\beta \ge 0$.
Posto

$$v(x,t;s) = \big(4\pi(t-s)\big)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\, w(y,s)\, d\mathcal{L}^N(y)$$

l'applicazione

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)\ d\mathcal{L}^1(s)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N\,,\ t \ge 0$$

verifica i seguenti asserti:

(i) $u(x,t)$ *converge uniformemente rispetto a* x *sui compatti di* $\mathbb{R}^N$*;*

(ii) $\lim\limits_{t\to 0^+} u(x,t) = 0$ *uniformemente rispetto a* x *sui compatti di* $\mathbb{R}^N$*.*

Dimostrazione. Si consideri

$$v(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}^N} K_{t-s}(x-y) w(y,s)\, d\mathcal{L}^N(y)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N\,,\ t > s$$

Sia $\rho > 0$. Applicando il Lemma 11.6.2 con $h(x,t-s) = v(x,t;s)$ e $u_0(y) = w(y,s)$ si ha

$$|v(x,t;s)| \le A \qquad \forall\, x \in \overline{B}_\rho(0)\,, \quad 0 < t-s < \frac{1}{8\beta}\,.$$

Si osservi che, per $t > 0$ (fissato) risulta (per ogni $x \in \mathbb{R}^N$)

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t v(x,t;s)\ d\mathcal{L}^1(s)\right| \ &\le\ \left|\int_0^{0\vee\left(t-\frac{1}{8\beta}\right)} v(x,t;s)\ d\mathcal{L}^1(s)\right| + \left|\int_{0\vee\left(t-\frac{1}{8\beta}\right)}^t v(x,t;s)\ d\mathcal{L}^1(s)\right| \\ &\le\ \int_0^{0\vee\left(t-\frac{1}{8\beta}\right)} |v(x,t;s)|\ d\mathcal{L}^1(s) + \int_{0\vee\left(t-\frac{1}{8\beta}\right)}^t |v(x,t;s)|\ d\mathcal{L}^1(s)\,. \end{aligned}$$

Senza perdere di generalità supponiamo $t - \dfrac{1}{8\beta} > 0$. Posto allora (controllare!)

$$B = \max_{(x,s)\in\overline{B}_\rho(0)\times\left[0,t-\frac{1}{8\beta}\right]} |v(x,t;s)|$$

e $C = \max\{A,B\}$ si ottiene per ogni $x \in \overline{B}_\rho(0)$, $t > 0$

$$\left|\int_0^t v(x,t;s)\, d\mathcal{L}^1(s)\right| \le \int_0^t C\, d\mathcal{L}^1(s) = C\,t$$

da cui seguono gli asserti (i) e (ii). $\square$

Lemma 11.6.4. *Sia* $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^N)$ *tale che*

$$|u_0(x)| \le C_0\, e^{\beta|x|^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

con $C_0, \beta > 0$*.*
Supponiamo inoltre $u_0 \in C^{0,\alpha}(Q)$ *per ogni* Q *sottoinsieme compatto di* $\mathbb{R}^N$*.*
Allora per la funzione $h(x,t) := \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y)\, u_0(y)\, d\mathcal{L}^N(y)$ *vale la seguente stima: per ogni* $\rho > 0$ *esiste una costante* A *(non dipendente da* x *e da* t*) tale che*

$$|h_t(x,t)| + |\Delta_x h(x,t)| \le A\, t^{\frac{\alpha}{2}-1} \qquad \forall\, x \in \overline{B}_\rho(0)\,, \quad 0 < t < \frac{1}{8\beta}\,.$$

Dimostrazione. Osservato che

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y)\, d\mathcal{L}^N(y) = 1 \quad \text{per } t > 0$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y)\, d\mathcal{L}^N(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial t} K_t(x-y)\, d\mathcal{L}^N(y) = 0 \quad \text{per } t > 0$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} h(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial t} K_t(x-y)\big(u_0(y)-u_0(x)\big)\, d\mathcal{L}^N(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-N}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2}\right) K_t(x-y)\big(u_0(y)-u_0(x)\big)\, d\mathcal{L}^N(y)\,.\end{aligned}$$

La funzione h è soluzione dell'equazione del calore e pertanto $\left|\frac{\partial}{\partial t}h(x,t)\right| = |\Delta_x h(x,t)|$.
Si ha quindi

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}h(x,t)\right| + |\Delta_x h(x,t)| &= 2\left|\frac{\partial}{\partial t}h(x,t)\right|\\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{-N}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2}\right| K_t(x-y)\,|u_0(y)-u_0(x)|\; d\mathcal{L}^N(y)\\ &\leq 2\,N\int_{|y|<2\,\rho}\left(\frac{1}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2}\right) K_t(x-y)\,|u_0(y)-u_0(x)|\; d\mathcal{L}^N(y)\\ &\quad + 2\,N\int_{|y|>2\,\rho}\left(\frac{1}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2}\right) K_t(x-y)\,|u_0(y)-u_0(x)|\; d\mathcal{L}^N(y)\\ &= I + J\end{aligned}$$

dove I e J sono rispettivamente

$$I := 2\,N\int_{|y|<2\,\rho}\left(\frac{1}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2}\right) K_t(x-y)\,|u_0(y)-u_0(x)|\; d\mathcal{L}^N(y)\,,$$

$$J := 2\,N\int_{|y|>2\,\rho}\left(\frac{1}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2}\right) K_t(x-y)\,|u_0(y)-u_0(x)|\; d\mathcal{L}^N(y)\,.$$

Se D è la costante di α-ölderianità di u_0 in $\overline{B}_{2\rho}$ si ha

$$I \leq 2\,N\,D\int_{|y|<2\,\rho}\left(\frac{|x-y|^\alpha}{2t} + \frac{|x-y|^{2+\alpha}}{4t^2}\right) K_t(x-y)\, d\mathcal{L}^N(y)\,.$$

Effettuando il cambio di variabile $y-x = 2\sqrt{t}z$, osservato che $d\mathcal{L}^N(y) = (4t)^{\frac{N}{2}}\, d\mathcal{L}^N(z)$ e $K_t(2\sqrt{t}z) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}\, e^{-|z|^2}$, ed estendendo l'integrale a $\mathbb{R}^N$ si ha

$$\begin{aligned} I &\leq 2^{\alpha+1}\,N\,D\,\pi^{-\frac{N}{2}}\,t^{\frac{\alpha}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|z|^\alpha}{2} + |z|^{2+\alpha}\right) e^{-|z|^2}\, d\mathcal{L}^N(z)\\ &= \Theta(\alpha,\rho,N)\,t^{\frac{\alpha}{2}-1}\int_0^{+\infty} r^{N-1}\left(\frac{r^\alpha}{2} + r^{2+\alpha}\right) e^{-r^2}\, d\mathcal{L}^1(r)\end{aligned}$$

con l'ulteriore cambio di variabile $z = r\,\omega$, con $r = |z|$ e $\omega = 1$, mentre $\Theta(\alpha, \rho, N)$ è una costante dipendente da α, ρ, N.
Dalla convergenza dell'integrale a secondo membro segue che $I \leq A_1\, t^{\frac{\alpha}{2}-1}$ dove A_1 è una costante non dipendente da x e t.

Per l'integrale J, dopo il cambio di variabile $y - x = 2\sqrt{t}z$, si procede analogamente alla dimostrazione del Lemma 11.6.2, ottenendo

$$J \leq \Psi(\alpha, \rho, N) \int_{|z| > \frac{\rho}{2\sqrt{t}}} \left(\frac{2|z|^2 + 1}{t} \right) e^{-\theta |z|^2}\, d\mathcal{L}^N(z)$$

con θ definito come nel Lemma 11.6.2.
Con il cambio di variabile $z = r\,\omega$, con $r = |z|$ e $\omega = 1$, si ha

$$\begin{aligned} J &\leq \Psi(\alpha, \rho, N)\, C(N) \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} r^{N-1} \left(\frac{2r^2 + 1}{t} \right) e^{-\theta r^2}\, d\mathcal{L}^1(r) \\ &= \Psi(\alpha, \rho, N)\, C(N)\, t^{\frac{\alpha}{2}-1} \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} r^{N-1} \left(\frac{2r^2 + 1}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{-\theta r^2}\, d\mathcal{L}^1(r)\,. \end{aligned}$$

Osservato che

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} r^{N-1} \left(\frac{2r^2 + 1}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{-\theta r^2}\, d\mathcal{L}^1(r) = 0$$

(come si prova facilmente effettuando il cambio di variabili $r' = 2\sqrt{t}r$ e sfruttando l'uniforme convergenza a 0 per $r' \in [\rho, +\infty[$ dell'integrando così ottenuto) posto

$$A_2 = \Psi(\alpha, \rho, N)\, C(N) \sup_{t \in]0, \frac{1}{8\beta} - \varepsilon[} \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} r^{N-1} \left(\frac{2r^2 + 1}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{-\theta r^2}\, d\mathcal{L}^1(r)$$

si ha

$$J \leq A_2\, t^{\frac{\alpha}{2}-1}$$

da cui si deduce la tesi. □

Corollario 11.6.5. *Supponiamo che la funzione w verifichi le seguenti ipotesi:*

(a) $w \in C^0(\mathbb{R}^N \times]0, T[)$ *e tale che*

$$|w(x, t)| \leq C_0\, e^{\beta |x|^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N\,,\ t \in]0, T[$$

con $C_0 > 0$, $\beta \geq 0$;

(b) w *α-hölderiana sui compatti di $\mathbb{R}^N$.*

Posto

$$v(x, t; s) = \big(4\pi(t - s)\big)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\, w(y, s)\, d\mathcal{L}^N(y)$$

risulta che gli integrali

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v(x, t; s)\ d\mathcal{L}^1(s)$$

$$\int_0^t \Delta_x v(x, t; s)\ d\mathcal{L}^1(s)$$

convergono uniformemente rispetto a x sui compatti di $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Corollario 11.6.3, tenuto conto che l'integrale

$$\int_a^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1}\, d\mathcal{L}^1(s)\,, \qquad 0 < a < t\,,\ \alpha \in]0,1[$$

è convergente. □

Proviamo ora il Teorema 11.6.1.

<u>*Dimostrazione del Teorema11.6.1*</u>. Consideriamo l'applicazione

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)\ d\mathcal{L}^1(s)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N\,,\ t \geq 0\,.$$

Per i corollari 11.6.3 e 11.6.5 possiamo derivare sotto il segno di integrale, ottenendo

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t v(x,t;s)\ d\mathcal{L}^1(s) = \lim_{s\to t} v(x,t;s) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}v(x,t;s)\ d\mathcal{L}^1(s)\,.$$

Ricordato che per ogni $s \in]0,t[$ la funzione v_s è soluzione del problema (P_s) si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= w(x,t) + \int_0^t \Delta_x v(x,t;s)\ d\mathcal{L}^1(s)\\ &= w(x,t) + \Delta_x \int_0^t v(x,t;s)\ d\mathcal{L}^1(s)\end{aligned}$$

dove per l'ultima uguaglianza si è utilizzato il corollario 11.6.5, e quindi risulta

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = w(x,t)\,, \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,T[\,.$$

Inoltre dal corollario 11.6.3 si ha $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = 0$ uniformemente rispetto a x sui compatti di $\mathbb{R}^N$. La dimostrazione è pertanto completa. □

Anche per la versione non-omogenea del problema misto (11.11) vale un risultato di unicità della soluzione, analogo al Teorema 11.4.3 (e con identica dimostrazione), che di seguito enunciamo.

Teorema 11.6.6. *(Unicità delle soluzioni nel problema misto non-omogeneo) Esiste al più una soluzione di classe $C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ del problema misto*

$$\begin{cases} Hu(x,t) = w(x,t) & \textit{in } \Omega_T \\ u(x,t) = \varphi(x,t) & \textit{su } \Sigma_T \end{cases}$$

dove $w \in C^0(\Omega_T)$ e $\varphi \in C^0(\Sigma_T)$.

11.7 Metodi dell'integrale dell'energia

Definizione 11.7.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Si definisce energia termica della distribuzione di temperatura u in Ω al tempo t l'integrale

$$e(t) = \int_\Omega u^2(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x)\,. \tag{11.20}$$

Teorema 11.7.2. *(Unicità per il problema (omogeneo) retrogrado (backward))*
Sia Ω aperto e limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera topologica $\partial\Omega$ regolare. Siano $u^1, u^2 \in C^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$ soluzioni del problema

$$\begin{cases} Hu(x,t) = 0 & \textit{in } \Omega_T \\ u(x,0) = g(x) & \textit{su } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

con g funzione assegnata. Supponiamo inoltre che

$$u^1(x,T) = u^2(x,T) \qquad \forall\, x \in \Omega\,.$$

Allora

$$u^1 \equiv u^2 \qquad \textit{in } \Omega_T.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $v := u^1 - u^2$, soluzione del problema

$$\begin{cases} Hv(x,t) = 0 & \text{in } \Omega_T \\ v(x,0) = 0 & \text{su } \partial\Omega \times [0,T], \end{cases}$$

e sia

$$e(t) = \int_\Omega v^2(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad 0 \le t \le T \tag{11.21}$$

l'energia termica associata a v. Risulta, essendo v soluzione dell'equazione del calore,

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t) = 2\int_\Omega v(x,t)\,\frac{\partial}{\partial t} v(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x) = 2\int_\Omega v(x,t)\,\Delta_x v(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x)$$

e integrando per parti, tenuto conto che $v = 0$ su $\partial\Omega$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t) = -2\int_\Omega |\nabla_x v(x,t)|^2\; d\mathcal{L}^N(x)\,.$$

Derivando sotto il segno di integrale e successivamente integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e(t) &= -4\int_\Omega \nabla_x v(x,t)\cdot\nabla_x \frac{\partial}{\partial t} v(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x) = 4\int_\Omega \Delta_x v(x,t)\frac{\partial}{\partial t} v(x,t)\, d\mathcal{L}^N(x) \\ &= 4\int_\Omega \Big(\Delta_x v(x,t)\Big)^2\, d\mathcal{L}^N(x)\,. \end{aligned} \tag{11.22}$$

Dalle relazioni ottenute, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}e(t)\right)^2 &= 4\left(\int_\Omega v(x,t)\,\Delta_x v(x,t)\,d\mathcal{L}^N(x)\right)^2\\ &\le \left(\int_\Omega v^2(x,t)\,d\mathcal{L}^N(x)\right)\left(4\int_\Omega\left(\Delta_x v(x,t)\right)^2 d\mathcal{L}^N(x)\right)\end{aligned}$$

e quindi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}e(t)\right)^2 \le e(t)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}e(t)\,. \tag{11.23}$$

Per provare la tesi del teorema basta dimostrare che $e(t) = 0$ per ogni $t \in [0,T]$. Procediamo per assurdo e supponiamo quindi che $e(t)$ non sia identicamente nulla. Osservato che $e(t) \ge 0$ e $e(T) = 0$ devono esistere $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, tali che

$$e(t) > 0 \quad \text{per ogni } t \in [t_1, t_2[\,, \qquad e(t_2) = 0\,. \tag{11.24}$$

Considerata la funzione

$$f(t) = \log\left(e(t)\right)\,, \qquad t_1 \le t < t_2$$

risulta

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t) = \frac{1}{e(t)^2}\left(e(t)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}e(t) - \left(\frac{\partial}{\partial t}e(t)\right)^2\right) \ge 0$$

per la (11.23), e quindi f è una funzione convessa, cioè

$$\forall\, t \in]t_1, t_2[\quad \forall \lambda \in]0,1[\qquad f\left((1-\lambda)t_1 + \lambda\, t\right) \le (1-\lambda)\,f(t_1) + \lambda\, f(t)$$

da cui segue

$$e\left((1-\lambda)t_1 + \lambda\, t\right) \le\; e(t_1)^{1-\lambda}\,e(t)^{\lambda}\,.$$

Passando al limite per $t \to t_2$ risulta, per ogni $\lambda \in]0,1[$,

$$e\left((1-\lambda)t_1 + \lambda\, t_2\right) \le 0$$

o, equivalentemente,

$$e(t) \le 0 \qquad \forall\, t \in]t_1, t_2[$$

in contraddizione con la (11.24). □

Osservazione 11.7.3. Dal risultato precedente segue che se due distribuzioni di temperatura su Ω coincidono all'istante $T > 0$ ed assumono gli stessi valori al bordo nell'intervallo di tempo $[0,T]$ allora le due distribuzioni di temperatura sono uguali in Ω nell'intero periodo $[0,T]$.

11.8 Un'applicazione dell'equazione del calore ad un problema di finanza matematica

Presentiamo un'applicazione dell'equazione del calore alla valutazione del prezzo di un derivato finanziario, basandoci essenzialmente sui lavori di F. Black, M. Scholes e R.C. Merton pubblicati agli inizi degli anni settanta[35].
Robert Merton e Myron Scholes hanno ricevuto nel 1997 il Premio della Banca di Svezia per le scienze economiche in memoria di Alfred Nobel (Premio Nobel per l'economia) per i loro risultati (Fischer Black era scomparso prematuramente nel 1995).

Premettiamo una breve descrizione dei derivati finanziari.

I *derivati finanziari* sono contratti il cui valore dipende dalla quotazione di uno o più titoli o beni, detti *sottostanti.* Il *sottostante* può essere un'azione, un tasso di interesse, una merce (come oro, petrolio, ...) o anche un altro titolo derivato. Esempi tipici di titoli derivati sono le opzioni finanziarie.
Un'opzione finanziaria di tipo *call europea* è un contratto che conferisce al detentore (*holder*) il diritto (ma non l'obbligo) di acquistare l'attività sottostante ad una data futura prefissata T (scadenza) e ad un prezzo prefissato k (denominato *prezzo di esercizio* o *strike price*). Precisiamo che con l'acquisto di un'opzione si acquista un diritto, quindi il detentore di un'opzione call è anche libero di non esercitare il suo diritto ad acquistare il sottostante. Ovviamente chi ha venduto un'opzione call ha l'obbligo di vendere il sottostante.

Consideriamo un'opzione finanziaria call europea con prezzo di esercizio k e scadenza T. Indichiamo con X_T il prezzo del sottostante a scadenza. Il valore finale (payoff) alla scadenza T del contratto di opzione dipende dalla quotazione del titolo sottostante alla data T; in particolare

- se $X_T > k$, il valore finale (payoff) dell'opzione è pari a $X_T - k$, corrispondente al ricavo che si ottiene esercitando l'opzione, ossia acquistando il sottostante al prezzo k e rivendendolo al prezzo di mercato X_T;
- se $X_T \leq k$, non conviene esercitare l'opzione e il payoff è nullo.

Pertanto, il *payoff a scadenza* Y_T di una opzione finanziaria call europea è pari a

$$Y_T = \max\{X_T - k, 0\} .$$

Denotata con g la *funzione payoff* definita da $g(x) = \max\{x - k, 0\}$ il payoff si esprime

$$Y_T = g(X_T) .$$

In Figura 11.2 è rappresentato il grafico del payoff come funzione di X_T. Osserviamo che il payoff aumenta con X_T ed offre un guadagno potenzialmente illimitato.

[35] Cfr. **F. Black, M. Scholes:** *The Pricing of options and corporate liabilities,* Journal of Political Economy 81, pp. 637–659, 1973.
R.C. Merton: *Theory of rational option pricing,* Bell Journal of Economics and Management Sciences 4, pp. 141–183, 1973.

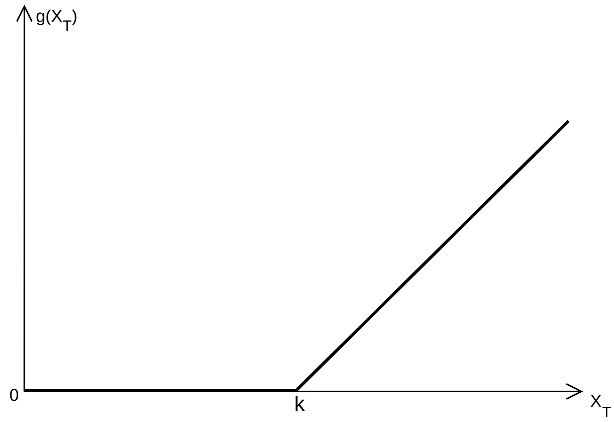

Figura 11.2: Payoff a scadenza per una opzione call europea con prezzo di esercizio k, come funzione del prezzo del sottostante

Riveste particolare importanza il problema della valutazione, ossia della determinazione del prezzo dell'opzione ad un istante $t < T$.
Denotiamo $v(x,t)$ il prezzo dell'opzione call europea all'istante $t \leq T$ in corrispondenza del prezzo del sottostante pari a x.

Ipotesi del modello di Black & Scholes. Il modello di valutazione di Black & Scholes è basato sulle seguenti ipotesi inerenti il mercato finanziario e la dinamica del prezzo dell'attività sottostante l'opzione:

- il mercato è aperto con continuità;
- il mercato è perfetto (assenza di costi di transazione e gravami fiscali, i titoli sono infinitamente divisibili, sono consentite le vendite allo scoperto) e privo di arbitraggi;
- il tasso istantaneo relativo agli investimenti non rischiosi (*tasso risk-free*), denotato con r, è noto e costante nel tempo;
- il processo (stocastico) [36] $X = X(t,\omega)$ del prezzo del titolo sottostante soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica[37] (*moto Browniano geometrico*)

$$dX(t,\omega) = \mu\, X(t,\omega)\, dt + \sigma\, X(t,\omega)\, dW(t,\omega) \qquad t \geq 0,\ \omega \in \Omega\,. \tag{11.25}$$

  dove il tasso istantaneo di rendimento atteso $\mu \in \mathbb{R}$ (*coefficiente di drift*) e la *volatilità* (istantanea) $\sigma > 0$ sono supposti costanti, e $W = W(t,\omega)$ è un processo di Wiener [38] (o moto Browniano standard). Per comodità di notazione si denota $X_t = X(t,\cdot)$ il prezzo del sottostante all'istante t.

[36] Assegnato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si definisce processo stocastico una funzione $X : [0,+\infty[\times\Omega \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $t \geq 0$, la funzione $\omega \in \Omega \mapsto X(t,\omega) \in \mathbb{R}$ è una variabile aleatoria.

[37] La soluzione dell'equazione differenziale stocastica con la condizione iniziale $X(0,\omega) = x_0 > 0$ è data da

$$X(t,\omega) = x_0\, \exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma\, W(t,\omega) \right\}\,.$$

Osserviamo che $X(t,\omega) > 0$. Si consulti, ad esempio,
B. Øksendal: *Stochastic differential equations*, Springer Berlin Heidelberg, 2003.

[38] Un processo di Wiener (standard) W è un processo stocastico con le seguenti proprietà:

Sotto le precedenti assunzioni, si può dimostrare che il prezzo dell'opzione call deve soddisfare la seguente equazione differenziale alle derivate parziali di secondo ordine di tipo parabolico

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) + r\,x\,\frac{\partial}{\partial x}v(x,t) - r\,v(x,t) = 0 \qquad \text{in }]0,+\infty[\times[0,T[$$

che prende il nome di *equazione generale di valutazione* ed è nota come *equazione di Black & Scholes*.
Il problema della valutazione del prezzo di un'opzione call europea consiste nel risolvere la precedente equazione generale di valutazione sotto la *condizione a scadenza*:

$$v(x,T) = \max\{x-k,0\} \qquad x>0\,,$$

dato che, alla data di scadenza, il prezzo dell'opzione è pari al suo payoff.
Pertanto il problema della valutazione del prezzo di un'opzione call europea può essere formulato nel modo seguente.

Problema della valutazione:
Determinare $v = v(x,t) \in C^2_1\left(]0,+\infty[\times[0,T[\right) \cap C^0\left(]0,+\infty[\times[0,T]\right)$ soluzione del problema (retrogrado)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}v(x,t) + \dfrac{1}{2}\,\sigma^2\,x^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) + r\,x\,\dfrac{\partial}{\partial x}v(x,t) - r\,v(x,t) = 0 & \text{in }]0,+\infty[\times[0,T[\\ v(x,T) = g(x) & x\in]0,+\infty[\end{cases} \tag{11.26}$$

dove il dato (finale) g è la funzione payoff $g(x) = \max\{x-k,0\}$.

Sussiste una relazione tra l'equazione di Black & Scholes e l'equazione del calore, come si vedrà nella Proposizione 11.8.2 dove, utilizzando il cambio di variabili

$$x = e^{\sigma y}\,, \qquad t = T-\tau$$

e un'opportuna trasformazione[39], il problema di determinare la soluzione del problema di valutazione (11.26) sarà ricondotto allo studio di un problema di Cauchy per l'equazione del calore.

Osservazione 11.8.1. Osserviamo che il cambio di variabile $t = T-\tau$ trasforma il problema retrogrado in un problema in avanti nel tempo. La variabile $\tau = T-t$ è il *tempo a scadenza* e rappresenta, all'istante t, la durata residua del contratto di opzione.

- $W(0,\cdot) = 0$ quasi certamente;
- gli incrementi $W(s,\cdot) - W(t,\cdot)$, $t<s$, sono varabili aleatorie indipendenti;
- gli incrementi sono stazionari;
- per ogni $t<s$, l'incremento $W(s,\cdot)-W(t,\cdot)$ è una variabile aleatoria normale con media zero e varianza $s-t$;
- per quasi ogni $\omega\in\Omega$ (fissato), la traiettoria $t\mapsto W(t,\omega)$ del processo è continua.

Si osservi che $W(t,\cdot) = W(t,\cdot) - W(0,\cdot)$ per ogni $t>0$, e quindi $W(t,\cdot)$ ha legge normale con media 0 e varianza t.

[39]Si userà la trasformazione proposta in
P. Wilmott, J. Dewynne and S. Howison: *Option Pricing. Mathematical models and computation,* Oxford Financial Press, 1993.

Proposizione 11.8.2. *La funzione $v = v(x,t)$ è soluzione del problema di valutazione* (11.26) *con dato finale $g(x) = \max\{x-k, 0\}$ se e solo se la funzione $u = u(y,\tau)$ definita dalla trasformazione*

$$u(y,\tau) = e^{Ay+B\tau} v(e^{\sigma y}, T-\tau)\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,, \quad \tau \in [0,T] \tag{11.27}$$

con

$$A = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\,, \qquad B = r + \frac{A^2}{2}\,,$$

è soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \tau} u(y,\tau) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} u(y,\tau) = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times]0,T] \\ \\ u(y,0) = f(y) & y \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{11.28}$$

dove il dato iniziale f è definito da $f(y) = e^{Ay} g(e^{\sigma y})$.

Dimostrazione. Per la funzione $u = u(y,\tau)$ definita in (11.27) risulta

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u(y,\tau) = e^{Ay+B\tau}\left(B\, v(e^{\sigma y}, T-\tau) - \frac{\partial}{\partial t} v(e^{\sigma y}, T-\tau)\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} u(y,\tau) = e^{Ay+B\tau}\left(A\, v(e^{\sigma y}, T-\tau) + \sigma\, e^{\sigma y}\,\frac{\partial}{\partial x} v(e^{\sigma y}, T-\tau)\right)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y,\tau) = e^{Ay+B\tau}\Bigg(A^2\, v(e^{\sigma y}, T-\tau) + (2A\sigma + \sigma^2)\, e^{\sigma y}\,\frac{\partial}{\partial x} v(e^{\sigma y}, T-\tau)$$
$$+ \sigma^2\, e^{2\sigma y}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(e^{\sigma y}, T-\tau)\Bigg)$$

e quindi, sostituendo $x = e^{\sigma y}$ e $t = T-\tau$, riesce

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u(y,\tau) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y,\tau) = -e^{Ay+B\tau}\Bigg(\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) + \frac{1}{2}\,\sigma^2\, x^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t)$$
$$+ \left(A\sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right) x\,\frac{\partial}{\partial x} v(x,t) - \left(B - \frac{A^2}{2}\right) v(x,t)\Bigg).$$

Scegliendo A e B tali che

$$A\sigma + \frac{\sigma^2}{2} = r\,, \qquad B - \frac{A^2}{2} = r$$

cioè

$$A = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\,, \qquad B = r + \frac{A^2}{2}$$

si ha allora

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u(y,\tau) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y,\tau) = -e^{Ay+B\tau}\Bigg(\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) + \frac{1}{2}\,\sigma^2\, x^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t)$$
$$+ r\, x\,\frac{\partial}{\partial x} v(x,t) - r\, v(x,t)\Bigg).$$

Pertanto la funzione v è soluzione dell'equazione di Black & Scholes in $]0,+\infty[\times[0,T[$ se e solo se la funzione u è soluzione dell'equazione del calore, con coefficiente di diffusione (cfr. (11.5)) $D=\frac{1}{2}$, in $\mathbb{R}\times]0,T]$. Inoltre dalla trasformazione (11.27) segue

$$u(y,0)=e^{Ay}\,v(e^{\sigma\,y},T)$$

e quindi v verifica la condizione a scadenza del problema (11.26) $v(x,T)=g(x)$ se e solo se u verifica la condizione iniziale del problema (11.28) $u(y,0)=e^{Ay}\,g(e^{\sigma\,y})=f(y)$. □

Teorema 11.8.3. *(Formula di Black & Scholes)*
Il problema di valutazione (11.26) *ha soluzione*

$$v(x,t)=x\,\Phi(d_1)-k\,e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2) \tag{11.29}$$

dove Φ *è la funzione di distribuzione della legge normale standard definita da*

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\rho^2/2}\,d\mathcal{L}^1(\rho)\qquad y\in\mathbb{R}$$

e

$$d_1=\frac{\log\left(\frac{x}{k}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}=\frac{\log\left(\frac{x}{k}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Osservazione 11.8.4. La formula (11.29), che esprime il prezzo (o valore) di una opzione call europea con prezzo di esercizio k e scadenza T, è nota come formula di Black & Scholes.
In Figura 11.3 è rappresentato il grafico della funzione $x\mapsto v(x,t_0)$ che esprime il valore di una call europea, secondo la formula (11.29), come funzione del prezzo del sottostante x ad un instante $t_0<T$ fissato.

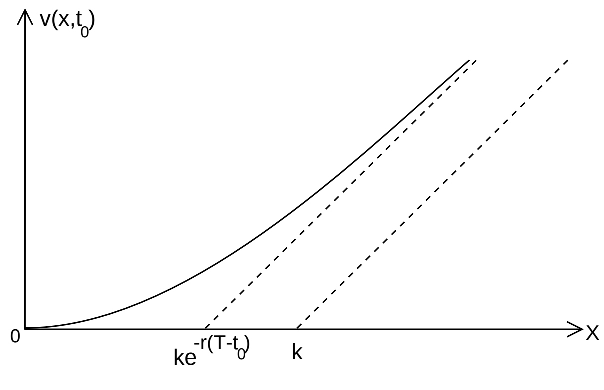

Figura 11.3: Prezzo di un'opzione call europea, ad un istante $t_0<T$, come funzione del prezzo del sottostante x

Dimostrazione. Consideriamo il problema di Cauchy (11.28). Esso ha soluzione [40]

$$u(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-z)^2}{2\tau}} f(z)\, d\mathcal{L}^1(z)\,, \tag{11.34}$$

dove $f(x) = e^{Ax} \max\{e^{\sigma x} - k, 0\}$, con $A = \dfrac{r}{\sigma} - \dfrac{\sigma}{2}$. Effettuando il cambio di variabile $s = \dfrac{z-y}{\sqrt{\tau}}$ risulta

$$u(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} f(y + \sqrt{\tau} s)\, d\mathcal{L}^1(s)$$

---

[40] Sussiste il seguente risultato (cfr. [15]).

Teorema. *Sia f una funzione con un numero finito di punti di discontinuità in $\mathbb{R}$, tale che*

$$|f(x)| \le c_1 e^{ax^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{11.30}$$

con c_1 e a costanti positive, e sia u definita da

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K_D(x-z,\tau) f(z)\, d\mathcal{L}^1(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Dt}} f(z)\, d\mathcal{L}^1(z) \tag{11.31}$$

dove $D > 0$ è il coefficiente di diffusione e $K_D(x,t)$ è la soluzione fondamentale (cfr. Osservazione 11.1.6)

$$K_D(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,.$$

Allora

(i) per ogni $T < \dfrac{1}{4Da}$ la funzione u è di classe $C_1^2\,(\mathbb{R}\times]0,T[)$ e

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - D\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = 0 \qquad \textit{in}\ \mathbb{R}\times]0,T[\,;$$

(ii) se x_0 è un punto in cui f è continua, risulta

$$u(x,t) \to f(x_0) \qquad \textit{se} \quad (x,t) \to (x_0,0), t > 0\,;$$

(iii) esistono C, λ costanti positive tali che

$$|u(x,t)| \le ce^{\lambda x^2} \qquad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,T[\,.$$

Dal precedente teorema segue che se $f \in C^0(\mathbb{R})$ allora la funzione u definita in (11.31) è soluzione di classe $C_1^2\,(\mathbb{R}\times]0,T[) \cap C^0\,(\mathbb{R}\times[0,T[)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) - D\,\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times]0,T[\\ u(x,0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{11.32}$$

(Tale risultato può essere generalizzato a $\mathbb{R}^N$ (cfr. [11] p. 210)).
Se, inoltre, per il dato iniziale f vale

$$|f(x)| \le c_2\, e^{b|x|} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{11.33}$$

con c_2, b costanti positive, allora la condizione (11.30) è verificata per ogni $a > 0$ e quindi non vi è alcuna limitazione sull'intervallo temporale di esistenza della soluzione, essendo per ogni $T > 0$ la disuguaglianza $T < \dfrac{1}{4Da}$ soddisfatta con a sufficientemente piccolo.
Osservato che il problema (11.28) è un caso particolare del problema (11.32) con $D = 1/2$ e che il dato iniziale $f(x) = e^{Ax} \max\{e^{\sigma x} - k, 0\}$ soddisfa la condizione (11.33), risulta dunque che la funzione definita in (11.31) con $D = 1/2$ è soluzione del problema (11.28).

da cui, osservato che

$$f(y+\sqrt{\tau}s) = e^{A(y+\sqrt{\tau}s)}\max\{e^{\sigma(y+\sqrt{\tau}s)}-k,0\}$$
$$= \begin{cases} e^{(A+\sigma)(y+\sqrt{\tau}s)} - k\,e^{A(y+\sqrt{\tau}s)} & \text{se } e^{\sigma(y+\sqrt{\tau}s)} - k \geq 0 \iff s \geq \frac{\log k - \sigma y}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ \\ 0 & \text{altrimenti}\,, \end{cases}$$

si ottiene per la soluzione (11.34) l'espressione

$$u(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log k-\sigma y}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{(A+\sigma)(y+\sqrt{\tau}s)}\,d\mathcal{L}^1(s) - \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log k-\sigma y}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{A(y+\sqrt{\tau}s)}\,d\mathcal{L}^1(s)\,.$$

Per la Proposizione 11.8.2, la funzione (cfr. (11.27))

$$v(x,t) = e^{-\frac{A}{\sigma}\log x - B(T-t)}\, u\left(\frac{1}{\sigma}\log x, T-t\right)\,,$$

con $B = r + \dfrac{A^2}{2}$, è soluzione del problema (11.26). Sostituendo l'espressione per u determinata in precedenza, si ha

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{e^{-\frac{A}{\sigma}\log x - B(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log k-\log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{(A+\sigma)(\frac{1}{\sigma}\log x + s\sqrt{T-t})}\,d\mathcal{L}^1(s) \\ &\quad - \frac{k\,e^{-\frac{A}{\sigma}\log x - B(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log k-\log x}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{A(\frac{1}{\sigma}\log x + s\sqrt{T-t})}\,d\mathcal{L}^1(s) \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log k-\log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, e^{(A+\sigma)s\sqrt{T-t}} e^{-B(T-t)}\,d\mathcal{L}^1(s) \\ &\quad - \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log k-\log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, e^{A\,s\sqrt{T-t}} e^{-B(T-t)}\,d\mathcal{L}^1(s) \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log k-\log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, e^{(A+\sigma)s\sqrt{T-t}} e^{-B(T-t)}\,d\mathcal{L}^1(s) \\ &\quad - \frac{k\,e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log k-\log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, e^{A\,s\sqrt{T-t}} e^{-\frac{A^2}{2}(T-t)}\,d\mathcal{L}^1(s)\,. \end{aligned}$$

Poniamo

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log k-\log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, e^{(A+\sigma)s\sqrt{T-t}} e^{-B(T-t)}\,d\mathcal{L}^1(s)$$

e

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log k-\log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, e^{A\,s\sqrt{T-t}} e^{-\frac{A^2}{2}(T-t)}\,d\mathcal{L}^1(s)\,.$$

Quindi

$$v(x,t) = x\,I_1 - k\,e^{-r(T-t)}\,I_2\,. \tag{11.35}$$

Calcoliamo prima I_1. Osservato che

$$2B = 2r + A^2 = 2r + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)^2 = (A+\sigma)^2\,,$$

risulta

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, e^{(A+\sigma)s\sqrt{T-t}} e^{-B(T-t)}\, d\mathcal{L}^1(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(s^2 - 2(A+\sigma)s\sqrt{T-t} + 2B(T-t)\right)}\, d\mathcal{L}^1(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(s - (A+\sigma)\sqrt{T-t}\right)^2}\, d\mathcal{L}^1(s)\,. \end{aligned}$$

Utilizzando il cambio di variabile $\rho = (A+\sigma)\sqrt{T-t} - s$, essendo

$$\begin{aligned} (A+\sigma)\sqrt{T-t} - \frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}} &= \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t} - \frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1\,, \end{aligned}$$

si ottiene

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\rho^2/2}\, d\mathcal{L}^1(\rho) = \Phi(d_1)\,.$$

Calcoliamo I_2. Risulta

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, e^{A\,s\sqrt{T-t}} e^{-\frac{A^2}{2}(T-t)}\, d\mathcal{L}^1(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(s - A\sqrt{T-t}\right)^2}\, d\mathcal{L}^1(s)\,. \end{aligned}$$

Con il cambio di variabile $\rho = A\sqrt{T-t} - s$, osservato che

$$\begin{aligned} A\sqrt{T-t} - \frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}} &= \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t} - \frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2\,, \end{aligned}$$

riesce

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\rho^2/2}\, d\mathcal{L}^1(\rho) = \Phi(d_2)\,.$$

Sostituendo in (11.35) le espressioni per I_1 e I_2 così ottenute, risulta infine

$$v(x,t) = x\,\Phi(d_1) - k\,e^{-r(T-t)}\,\Phi(d_2)\,.$$

□

Osservazione 11.8.5. La soluzione v del problema (11.26) data in (11.29) è unica nella classe delle funzioni che verificano la condizione di crescita

$$|v(x,t)| \leq C_1\, e^{C_2(\log x)^2} \qquad \forall\,(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,T] \tag{11.36}$$

con C_1, C_2 costanti positive. Tale risultato si ottiene osservando che se v soddisfa (11.36) allora la funzione u definita in (11.27) verifica la condizione di crescita

$$|u(y,\tau)| \leq C\, e^{\lambda y^2} \qquad \forall\,(y,\tau) \in \mathbb{R}\times[0,T]\,,$$

con C, λ costanti positive, e questo garantisce, per il Teorema 11.5.4, l'unicità della soluzione del problema (11.28) e quindi anche del problema (11.26).

Osservazione 11.8.6. La soluzione v data in (11.29) non è, in generale, l'unica soluzione del problema di valutazione (11.26). Essa però è l'unica soluzione significativa da un punto di vista economico essendo, come osservato in precedenza, unica nella classe delle funzioni che verificano la condizione di crescita (11.36), che è una condizione economicamente ammissibile. Infatti, osservato che la funzione che compare a secondo membro della (11.36) cresce meno velocemente rispetto a una funzione esponenziale ma più velocemente di ogni funzione polinomiale, la condizione (11.36) è compatibile con le seguenti *condizioni agli estremi* (motivate da argomentazioni di carattere finanziario):

(i) $v(0,t) = 0$ per $t \in [0,T]$;

(ii) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{v(x,t)}{x} = 1$ per $t \in [0,T]$.

La condizione (i) deriva dal fatto che se ad un certo istante t il prezzo del sottostante X_t è pari a 0, l'equazione (11.25) implica che $X_s = 0$ per $s > t$ e quindi l'opzione è senza valore (in quanto il suo payoff è certamente pari a zero). La condizione (ii) è giustificata dalla forma della funzione payoff $g(x) = \max\{x-k, 0\}$ e dall'osservazione che quando il prezzo x diventa molto grande, l'ammontare del prezzo di esercizio $k > 0$ diventa sempre meno significativo.