

CAPITOLO 8

Principio di Dirichlet

8.1 Principio di Dirichlet

Riprendendo sostanzialmente un'idea di Gauss e di Green, Riemann osservò che l'esistenza in un aperto Ω del piano di una funzione armonica u che assume sulla frontiera di Ω valori assegnati φ poteva essere ottenuta come minimo dell'integrale dell'energia

$$D(v) := \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 d\mathcal{L}^N(x),$$

in una classe di funzioni ammissibili con lo stesso dato su $\partial\Omega$ ²³.

Riemann considerava questo risultato, noto come Principio di Dirichlet, un assioma; ma Weierstrass, per primo, si rese conto che esso costituiva l'enunciato di un teorema da precisare nelle ipotesi e per il quale dare una dimostrazione. Questo è stato possibile conseguire, dopo il 1900, con l'introduzione degli spazi di Sobolev.

Riportiamo tre obiezioni sollevate al Principio di Dirichlet.

8.2 Obiezione (generale) di Weierstrass (1869)

Weierstrass fu il primo a mostrare che non sempre un problema di minimo per un funzionale del Calcolo delle Variazioni, con integrando non negativo, ha una soluzione.

²³In questo modo Riemann dava inizio ai cosiddetti "metodi diretti" nel Calcolo delle Variazioni, che consistono nel provare l'esistenza del minimo di un funzionale integrale

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x, v(x), \nabla v(x)) d\mathcal{L}^N(x),$$

senza ricorrere all'equazione di Euler, ma deducendola direttamente dalle proprietà del funzionale F .

Il problema proposto da Weierstrass consiste nel cercare il minimo del funzionale (in dimensione $N = 1$)

$$F(v) = \int_{-1}^1 t^2 |v'(t)|^2 d\mathcal{L}^1(t)$$

nella classe delle funzioni $v \in C^1([-1, 1])$ che soddisfano le condizioni agli estremi $v(-1) = -1, v(1) = 1$.

Osserviamo che su ognuna di queste funzioni ammissibili v si ha $F(v) > 0$, in quanto, in caso contrario, si avrebbe $v'(t) = 0$ in $[-1, 1]$ e, di conseguenza, v sarebbe costante in $[-1, 1]$, in contrasto con le condizioni agli estremi. Dunque, se esistesse una soluzione v_0 del problema, si avrebbe $F(v_0) > 0$. Ma, se consideriamo le funzioni ammissibili

$$v_\varepsilon(t) = \frac{\arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (\varepsilon > 0)$$

per le quali

$$F(v_\varepsilon) = \int_{-1}^1 t^2 |v'_\varepsilon(t)|^2 d\mathcal{L}^1(t) = \frac{\varepsilon}{\arctan^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \left(\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right)$$

si ottiene $F(v_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$. Ne segue che per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo vale la disuguaglianza $F(v_\varepsilon) < F(v_0)$, che contraddice il fatto che v_0 è di minimo per F .

8.3 Obiezione di Courant

Una successione minimizzante non necessariamente converge e quindi, in generale, non ci si può aspettare di trovare la soluzione di un problema di minimo via un passaggio al limite, almeno in topologie forti.

Che l'integrale di Dirichlet non sia esente da questa difficoltà è provato dal seguente esempio.

Sia $N = 2$ e definiamo, in coordinate polari (r, ϑ) , la seguente successione di funzioni:

$$v_n(r, \vartheta) = \begin{cases} c_n \log r_n & r \leq r_n^2 \\ c_n \log\left(\frac{r}{r_n}\right) & r_n^2 \leq r \leq r_n \\ 0 & r_n \leq r \leq 1 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dove le c_n sono costanti.

Si ha ²⁴

$$\begin{aligned} D(v_n) &= 2\pi c_n^2 \int_{r_n^2}^{r_n} \frac{1}{r^2} r d\mathcal{L}^1(r) \\ &= -2\pi c_n^2 \log r_n; \end{aligned}$$

²⁴Considerate le coordinate polari piane (r, ϑ) l'integrale di Dirichlet per $v(r, \vartheta)$ in $B_\rho(0)$ è dato da

$$\int_0^\rho \left(\int_0^{2\pi} (v_r^2 + \frac{1}{r^2} v_\vartheta^2) d\mathcal{L}^1(\vartheta) \right) r d\mathcal{L}^1(r).$$

se scegliamo

$$c_n = -n^{-\frac{2}{3}} \quad \text{e} \quad r_n = e^{-n}$$

risulta

$$D(v_n) = 2\pi n^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (= \text{inf dell'integrale di Dirichlet})$$

cioè (v_n) è una successione (con $v_n(1, \vartheta) = 0$) minimizzante per $D(\cdot)$, tuttavia

$$v_n(e^{-2n}, \vartheta) = n^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

e quindi la successione (v_n) non converge nemmeno puntualmente.

Per poter applicare il metodo diretto bisogna allora allargare la classe delle funzioni ammissibili dove era inizialmente ambientato il Principio “classico” di Dirichlet (classe di funzioni continue!) in modo da guadagnare compattezza delle successioni minimizzanti.

8.4 Obiezione (specifica) di Hadamard

Prima di illustrare l'obiezione specifica di Hadamard, premettiamo quanto segue.

Sia $N = 2$ e indichiamo con (r, ϑ) le coordinate polari piane.

Sia φ continua su $\partial B_1(0)$. Consideriamo la (non necessariamente convergente) serie di Fourier per φ :

$$\varphi(\vartheta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} (a_\nu \cos \nu\vartheta + b_\nu \sin \nu\vartheta).$$

Si riconosce facilmente che la serie convergente ($r < 1$)

$$v(r, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} r^\nu (a_\nu \cos \nu\vartheta + b_\nu \sin \nu\vartheta)$$

è l'unica soluzione del problema²⁵

$$\begin{cases} \Delta_{r,\vartheta} v(r, \vartheta) = 0 & \text{in } B_1(0) \\ v(1, \vartheta) = \varphi(\vartheta) & 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases},$$

e per l'integrale di Dirichlet in $B_1(0)$ per $v(r, \vartheta)$ si ha

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (v_r^2 + \frac{1}{r^2} v_\vartheta^2) d\mathcal{L}^1(\vartheta) \right) r d\mathcal{L}^1(r) = \pi \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu (a_\nu^2 + b_\nu^2) \quad (8.1)$$

²⁵L'operatore di Laplace in coordinate polari piane (r, ϑ) per $v(r, \vartheta)$ è dato da

$$\Delta_{r,\vartheta} v(r, \vartheta) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta\vartheta}.$$

e pertanto l'integrale di Dirichlet in $B_1(0)$ per la funzione armonica $v(r, \vartheta)$ è finito se, e solo se, questa serie converge.

La obiezione (specifica) di Hadamard consiste nel fatto che:

esistono funzioni continue $\varphi(\vartheta)$ per le quali la serie (8.1) diverge, anche se il relativo problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace può essere risolto.

Quindi la soluzione del problema di Dirichlet non può essere determinata dal Principio di Dirichlet per tutti i dati φ continui sulla frontiera.

Per esempio²⁶, se consideriamo la funzione continua di $\vartheta \in [0, 2\pi]$ (definita dallo sviluppo di Fourier totalmente convergente)

$$\varphi(\vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\cos(\mu^4 \vartheta)}{\mu^2}$$

si ha che la funzione di r e ϑ

$$v(r, \vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} r^{\mu^4} \frac{\cos(\mu^4 \vartheta)}{\mu^2}$$

è armonica regolare in $B_1(0)$ e ha traccia $\varphi(\vartheta)$ su $\partial B_1(0)$.

Tuttavia per (8.1) $\left(\text{in questo caso } a_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\mu^2} & \text{se } \nu = \mu^4 \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu^4 \end{cases} \text{ e } b_\nu \equiv 0 \right)$

$$D(v) = +\infty.$$

Per evitare quest'ultima difficoltà e per dare quindi una corretta formulazione del Principio di Dirichlet faremo la seguente ipotesi:

\exists almeno una funzione \bar{v} "ammissibile" con $D(\bar{v}) < +\infty$.

²⁶Altro esempio: se

$$\varphi(\vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\mu! \vartheta)}{\mu^2},$$

si ha

$$v(r, \vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} r^{\mu!} \frac{\text{sen}(\mu! \vartheta)}{\mu^2}$$

e per (8.1) $\left(\text{in questo caso } b_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\mu^2} & \text{se } \nu = \mu! \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu! \end{cases} \text{ e } a_\nu \equiv 0 \right)$

$$D(v) = \pi \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\mu!}{\mu^4} = +\infty.$$

Osserviamo che per costruire esempi basta trovare successioni (a_ν) e (b_ν) tali che $\sum_{\nu=1}^{+\infty} (|a_\nu| + |b_\nu|)$

converge, mentre $\pi \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu (a_\nu^2 + b_\nu^2)$ diverge positivamente.

È comunque importante osservare che mentre nella teoria del potenziale questa ipotesi non è necessaria, essa è invece essenziale (e va interpretata come una richiesta di “energia finita”) per un significativo problema variazionale.

Alla luce di queste obiezioni vedremo che l’ambiente naturale per il Principio di Dirichlet è lo spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$.

8.5 Principio di Dirichlet in $W^{1,2}(\Omega)$: esistenza e regolarità interna

Teorema 8.5.1. *Sia Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N ($N \geq 2$), $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ e sia*

$$\mathcal{A}_\varphi = \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega); \quad v - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$$

(convesso, chiuso, non vuoto di $W^{1,2}(\Omega)$).

Allora

- (i) $\exists | u_0 \in \mathcal{A}_\varphi : D(u_0) = \min_{v \in \mathcal{A}_\varphi} D(v);$
- (ii) u_0 è (equivalente ad una funzione) armonica in Ω ²⁷;
- (iii) u_0 è analitica reale.

Dimostrazione.

(i) Esistenza.

Per l’esistenza diamo qui una dimostrazione che sfrutta essenzialmente il fatto che l’integrale di Dirichlet $D(\cdot)$ è quadratico nel gradiente.

Risulta

$$\mathcal{A}_\varphi \neq \emptyset \quad \text{e} \quad 0 \leq D(v) \quad \forall v \in \mathcal{A}_\varphi,$$

quindi $D(\cdot)$ è limitato inferiormente e posto

$$d := \inf_{v \in \mathcal{A}_\varphi} D(v),$$

poiché $D(\varphi) < +\infty$, si ha

$$0 \leq d < +\infty.$$

²⁷Quindi $u_0 \in \mathcal{A}_\varphi$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$

Sia $(v_n) \subset \mathcal{A}_\varphi$ una successione minimizzante per $D(\cdot)$, cioè sia $v_n \in W^{1,2}(\Omega)$, $v_n - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$D(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d.$$

Proviamo che (v_n) è di Cauchy in $W^{1,2}(\Omega)$.

Per ogni $j, k \in \mathbb{N}$ si ha

$$D(v_j - v_k) + D(v_j + v_k) = 2D(v_j) + 2D(v_k)$$

da cui

$$D(v_j - v_k) = 2D(v_j) + 2D(v_k) - D(v_j + v_k) = 2D(v_j) + 2D(v_k) - 4D\left(\frac{v_j + v_k}{2}\right).$$

Osservato che

$$\frac{v_j + v_k}{2} \in \mathcal{A}_\varphi$$

risulta

$$0 \leq D(v_j - v_k) \leq 2D(v_j) + 2D(v_k) - 4d$$

e quindi

$$\exists \lim_{j,k \rightarrow +\infty} D(v_j - v_k) = 0.$$

Osserviamo che $v_j - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v_k - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e quindi $v_j - v_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Poiché Ω è limitato, dalla disuguaglianza di Poincaré in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (Corollario 7.4.2), si ha che esiste

$$\lim_{j,k \rightarrow +\infty} \|v_j - v_k\|_{1,2} = 0.$$

Quindi (v_n) è di Cauchy in $W^{1,2}(\Omega)$.

Allora

$$\exists u_0 \in W^{1,2}(\Omega) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - u_0\|_{1,2} = 0,$$

inoltre si ha $u_0 - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, quindi $u_0 \in \mathcal{A}_\varphi$, ed evidentemente si ha

$$d = \lim_{n \rightarrow +\infty} D(v_n) = D(u_0).$$

Risulta così provata l'esistenza.

Unicità della soluzione variazionale u_0 .

Se anche $v_0 \in \mathcal{A}_\varphi$ è tale che

$$d = \min_{v \in \mathcal{A}_\varphi} D(v) = D(v_0),$$

si ha

$$0 \leq D(u_0 - v_0) = 2D(u_0) + 2D(v_0) - 4D\left(\frac{u_0 + v_0}{2}\right) \leq 2d + 2d - 4d = 0,$$

e quindi

$$D(u_0 - v_0) = 0.$$

Ma $u_0, v_0 \in \mathcal{A}_\varphi$ per cui $u_0 - v_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e quindi, per la disuguaglianza di Poincaré (Teorema 7.4.1),

$$\|u_0 - v_0\|_2 = 0$$

cioè v_0 è nella stessa classe di equivalenza di u_0 .

(ii) Consideriamo

$$u_0 + t\zeta \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \text{ e } \zeta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Poiché $(u_0 + t\zeta) - \varphi = (u_0 - \varphi) + t\zeta \in W_0^{1,2}(\Omega)$ si ha che

$$u_0 + t\zeta \in \mathcal{A}_\varphi.$$

Per il teorema di Fermat dev'essere

$$\left[\frac{d}{dt} D(u_0 + t\zeta) \right]_{t=0} = 0$$

e quindi, essendo

$$D(u_0 + t\zeta) = D(u_0) + t^2 D(\zeta) + 2t \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (u_0)_{x_i}(x) \cdot \zeta_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

e

$$\frac{d}{dt} D(u_0 + t\zeta) = 2t D(\zeta) + 2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (u_0)_{x_i}(x) \cdot \zeta_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x),$$

si ha

$$\left[\frac{d}{dt} D(u_0 + t\zeta) \right]_{t=0} = 2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (u_0)_{x_i}(x) \cdot \zeta_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0$$

ovvero

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (u_0)_{x_i}(x) \cdot \zeta_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega),$$

e quindi

$$\int_{\Omega} u_0(x) \Delta \zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega)$$

(Equazione di Euler in forma debole (1744)).

Sussiste il seguente lemma.

Lemma 8.5.2. (Lemma di Caccioppoli (1937) - Weyl (1940))

Sia $u \in L^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta \zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega) \quad (8.2)$$

Allora u è armonica in Ω e quindi $u \in C^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. Consideriamo le regolarizzate di u con mollificatore ρ radiale:

$$u_n(x) = \frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) u(y) d\mathcal{L}^N(y).$$

Fissato $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, scegliamo n sufficientemente grande da verificare

$$\text{dist}(\text{supp } \zeta, \partial\Omega) > \frac{1}{n}.$$

Risulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_n(x) \Delta\zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) &= \int_{\Omega} \left[\frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) u(y) d\mathcal{L}^N(y) \right] \Delta\zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) \\ &\quad \text{(per il teorema di Fubini)} \\ &= \int_{\Omega} u(y) \left[\frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) \Delta\zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) \right] d\mathcal{L}^N(y) \\ &\quad \left(\text{poich\u00e9 } (\Delta\zeta)_n = \Delta\zeta_n, \text{ essendo} \right. \\ &\quad \left. \zeta_n(y) = \frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) \zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) \right) \\ &= \int_{\Omega} u(y) \Delta\zeta_n(y) d\mathcal{L}^N(y). \end{aligned}$$

Applicando l'ipotesi (8.2) a $\zeta_n \in C_0^\infty(\Omega)$ (per la scelta fatta su n):

$$\int_{\Omega} u_n(x) \Delta\zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0. \quad (8.3)$$

Per il Teorema 5.1.10 $u_n \in C^\infty(\Omega_n)$ e pertanto da (8.3) per il Corollario 5.4.3

$$\Delta u_n = 0 \quad \text{in } \Omega_n$$

dove $\Omega_n := \left\{ x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \right\}$.

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} |u_n(y)| d\mathcal{L}^N(y) &\leq \int_{\Omega_n} \left[\frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) |u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \right] d\mathcal{L}^N(y) \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x)| d\mathcal{L}^N(x) < +\infty \end{aligned}$$

per il teorema di Fubini, usando il fatto che

$$\frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) d\mathcal{L}^N(y) = 1.$$

e ricordando l'ipotesi $u \in L^1(\Omega)$.

Quindi (u_n) \u00e8 uniformemente limitata in L^1 .

In quanto armoniche le u_n soddisfano la propriet\u00e0 di uguaglianza del valor medio.

Inoltre, poich\u00e9 (u_n) \u00e8 limitata in L^1 , da

$$u_n(x^0) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x^0)} u_n(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

segue che $u_n(x^0)$ è limitata per R fissato tale che $B_R(x^0) \subset \Omega_n$. Pertanto le u_n sono uniformemente limitate in Ω_{n_0} per $n \geq 2n_0$. Inoltre, dalla proprietà di uguaglianza del valor medio segue direttamente che, se $B_R(x')$, $B_R(x'') \subset \Omega_{n_0}$, si ha

$$\begin{aligned} |u_n(x') - u_n(x'')| &\leq c(R) \int_{\{B_R(x') \setminus B_R(x'')\} \cup \{B_R(x'') \setminus B_R(x')\}} |u_n(x)| d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq c'(R) |x' - x''|. \end{aligned}$$

Quindi (∇u_n) è uniformemente limitata in Ω_{n_0} e, analogamente, tutte le derivate di ogni ordine delle u_n , in quanto armoniche, sono uniformemente limitate in Ω_{n_0} (basta ripetere lo stesso procedimento usato per le u_n). Pertanto, per $n \rightarrow +\infty$, un'estratta di (u_n) converge uniformemente, con le sue derivate, ad una funzione $v \in C^\infty(\Omega)$. E, in quanto limite uniforme di funzioni armoniche per il Teorema 2.9.1 anche v è armonica. Ma u_n converge a u in $L^1(\Omega)$, perciò $u = v$ q.o., cioè $u \in C^\infty(\Omega)$ ed è armonica in Ω . \square

Osservazione. Nella dimostrazione abbiamo usato il fatto che Δ commuta con le regolarizzanti, in altri termini che l'operatore di Laplace è invariante per rotazioni (è questa la ragione per cui scegliamo ρ radiale). Proprio per questo, però, la dimostrazione precedente non può essere estesa ad altri problemi variazionali.

(iii) Per il lemma di Caccioppoli-Weyl la soluzione debole $u_0 \in \mathcal{A}_\varphi$ del Principio di Dirichlet è armonica in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Proviamo ora un risultato di maggiore regolarità interna: tale u_0 è di classe $C^\omega(\Omega)$, cioè è analitica reale.

Per questo premettiamo il seguente risultato che estende alle derivate D^α il Teorema 2.12.1.

Lemma 8.5.3. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica e limitata in Ω . Allora*

$$\forall x^0 \in \Omega, \quad \forall B_R(x^0) \subset \Omega \quad e \quad \forall \alpha \text{ multi-indice di lunghezza } |\alpha| :$$

$$|D^\alpha u(x^0)| \leq \left(\frac{Ne}{R}\right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} M, \quad (8.4)$$

dove $M = \sup_\Omega |u|$.

Dimostrazione. Proviamo il teorema per induzione su $|\alpha|$. Per $|\alpha| = 1$ è dimostrato nel Teorema 2.12.1. Sia (8.4) vera per ogni multi-indice di lunghezza $|\alpha|$, proviamo che essa continua a valere per tutti i multi-indice β di lunghezza $|\beta| = |\alpha| + 1$. Per tale β si ha che

$$D^\beta u = \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha u \quad \text{per un certo } 1 \leq i \leq N.$$

Poiché $D^\beta u$ è armonica in Ω (in quanto derivata di una funzione armonica), fissato $\tau \in (0, 1)$, $D^\beta u$ è armonica nella palla $B_{\tau R}(x^0)$; quindi, per la proprietà di uguaglianza del valor medio e il teorema della divergenza, si ha

$$D^\beta u(x^0) = \frac{1}{\omega_N \tau^N R^N} \int_{\partial B_{\tau R}(x^0)} D^\alpha u(\xi) \frac{(\xi - x^0)_i}{|\xi - x^0|} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).$$

Per (8.4) applicata alla palla aperta di centro $\xi \in \partial B_{\tau R}(x^0)$ e raggio $(1 - \tau)R$

$$|D^\alpha u(\xi)| \leq \left(\frac{Ne}{(1 - \tau)R} \right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} M.$$

Quindi

$$|D^\beta u(x^0)| \leq \left(\frac{Ne}{R} \right)^{|\alpha|+1} \frac{1}{(1 - \tau)^{|\alpha|\tau}} \frac{|\alpha|!}{e^2} M.$$

Scelto

$$\tau = \frac{1}{|\alpha| + 1} = \frac{1}{|\beta|}$$

si ha

$$(1 - \tau)^{-|\alpha|} = \left(1 - \frac{1}{|\beta|} \right)^{-|\beta|+1} \leq \left(1 - \frac{1}{|\beta|} \right)^{-|\beta|} \leq e$$

e quindi la tesi. \square

Teorema 8.5.4. *Sia u armonica e limitata in Ω . Allora u è analitica in Ω .*

Dimostrazione. Fissato $x^0 \in \Omega$, consideriamo $R > 0$ t.c.

$$(N e^{2N+1} + 1) R < \min \{d(x^0, \partial\Omega); 1\}.$$

Lo sviluppo di Taylor di u di centro x^0 in $B_R(x^0)$ è

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall x \in B_R(x^0)$$

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{D^\alpha u(x^0)}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha + \sum_{|\beta|=n+1} \frac{D^\beta u(y)}{\beta!} (y - x^0)^\beta, \quad (8.5)$$

dove

$$(x - x^0)^\alpha = \prod_{i=1}^N (x_i - x_i^0)^{\alpha_i}, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^N \alpha_i! \quad \text{e} \quad y \in B_R(x^0).$$

Applicando (8.4) alla palla di centro y e raggio $N e^{2N+1} R$ e la disegualianza²⁸

$$|\beta|! \leq e^{N|\beta|} \beta!,$$

²⁸Sia β un multi-indice N -dimensionale di lunghezza $|\beta|$. Vale

$$|\beta|! \leq e^{N|\beta|} \beta!.$$

Dimostrazione. Siano $x_i \in \mathbb{R}$, per $i = 1, 2, \dots, N$ e sia $k \in \mathbb{N}$. Se β denota un multi-indice N -dimensionale di lunghezza k , dalla versione di Leibniz delle formula di Newton, si ha

$$\left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^k = \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} \prod_{i=1}^N x_i^{\beta_i}.$$

Considerando $x_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$, si ottiene

$$N^{|\beta|} = \sum_{|\beta|=k} \frac{|\beta|!}{\beta!} \implies \frac{|\beta|!}{\beta!} \leq \sum_{|\beta|=k} \frac{|\beta|!}{\beta!} = N^{|\beta|} \implies |\beta|! \leq N^{|\beta|} \beta! \leq e^{N|\beta|} \beta!.$$

\square

si ha

$$\frac{|D^\beta u(y)|}{\beta!} |(y - x^0)^\beta| \leq e^{N|\beta|} \left(\frac{Ne}{Ne^{2N+1}R} \right)^{|\beta|} R^{|\beta|} \sup_{\Omega} |u| = e^{-N|\beta|} \sup_{\Omega} |u|.$$

Poiché $\sup_{\Omega} |u| = M$, si ha

$$\left| \sum_{|\beta|=n+1} \frac{D^\beta u(y)}{\beta!} (x - x^0)^\beta \right| \leq M \sum_{|\beta|=n+1} e^{-N|\beta|} \leq M |\beta|^N e^{-N|\beta|}.$$

Per $|\beta| \rightarrow +\infty$ segue la tesi. \square

In virtù di questo risultato la soluzione debole $u_0 \in \mathcal{A}_\varphi$ del Principio di Dirichlet è analitica in Ω (regolarità interna). Resta così completamente dimostrato il Principio di Dirichlet in $W^{1,2}(\Omega)$, Teorema 8.5.1. \square

Osservazione 8.5.5. Per quanto concerne la condizione al contorno, questa è stata acquisita nella forma implicita: $u_0 - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Si può tuttavia dimostrare che sotto opportune ipotesi di regolarità per Ω e φ si ha $u_0 \in C^0(\bar{\Omega})$ e $u_0 = \varphi$ su $\partial\Omega$ (regolarità fino alla frontiera) (cfr. [1]).

