

# CAPITOLO 7

---

## Introduzione agli Spazi di Sobolev

---

### 7.1 Spazi di Sobolev

**Definizione 7.1.1.** Sia  $\Omega$  aperto connesso non vuoto di  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ )<sup>20</sup>,  $1 \leq p \leq +\infty$ ; lo spazio di Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  è definito da

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) \cdot \varphi_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = - \int_{\Omega} g_i(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

**Osservazione 7.1.2.** Per ogni  $i = 1, \dots, N$  la funzione  $g_i$  è unica.

Infatti se è anche (per  $i = 1, \dots, N$ )

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot \varphi_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = - \int_{\Omega} h_i(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

allora

$$\int_{\Omega} (g_i(x) - h_i(x)) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

pertanto

$$g_i = h_i \quad \text{q.o. in } \Omega. \quad \square$$

Osserviamo che

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \iff u \in L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad \text{tutte le sue } N \text{ derivate parziali prime nel senso delle distribuzioni sono in } L^p(\Omega),$$

---

<sup>20</sup>Per gli spazi di Sobolev, anche in dimensione  $N = 1$ , si può consultare e.g. [1].

giacché dalla definizione si vede che

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

nel senso delle distribuzioni (o in senso debole).

Evidentemente

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega);$$

se  $\Omega$  è aperto connesso e limitato di  $\mathbb{R}^N$ , si ha

$$C^1(\bar{\Omega}) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega).$$

**Osservazione 7.1.3.** Si riconosce facilmente che

$$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega) \implies u + v \in W^{1,p}(\Omega),$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \implies \lambda u \in W^{1,p}(\Omega),$$

cioè  $W^{1,p}(\Omega)$  è uno spazio vettoriale.

**Definizione 7.1.4.** Definiamo per  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p \quad \text{se } p < \infty$$

( $\|\cdot\|_{1,p}$  è ovviamente una norma in  $W^{1,p}(\Omega)$ ; norme topologicamente equivalenti a  $\|\cdot\|_{1,p}$  sono:

$$\left( \|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \|u\|_p + \|\nabla u\|_p,$$

mentre

$$\|u\|_{1,\infty} := \max \{ \|u\|_\infty, \|\nabla u\|_\infty \} \quad \text{se } p = \infty.$$

(Ricordiamo che una norma  $\|\cdot\|$  su uno spazio  $X$  è topologicamente equivalente alla norma  $\|\cdot\|'$  sullo stesso spazio  $X$  se esistono  $k_1, k_2 > 0$  :  $k_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq k_2 \|x\| \quad \forall x \in X$ ).

**Teorema 7.1.5.**

$$\left( W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p} \right) \text{ è uno spazio di Banach,} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

*Dimostrazione.* Per  $1 \leq p < \infty$  sia  $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$  di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_{1,p}$ ; quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > \nu \quad \|u_n - u_m\|_{1,p} < \varepsilon.$$

Poiché

$$\|u_n - u_m\|_{1,p} = \|u_n - u_m\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p$$

si ha che  $(u_n)$  è di Cauchy in  $L^p(\Omega)$  e per ogni  $i = 1, \dots, N$   $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)_n$  è di Cauchy in  $L^p(\Omega)$ .

Per la completezza di  $L^p(\Omega)$  si ha che

$$\exists u \in L^p(\Omega) : \quad \|u_n - u\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

e per ogni  $i = 1, \dots, N$

$$\exists g_i \in L^p(\Omega) : \quad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - g_i \right\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Basta ora dimostrare che

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

nel senso delle distribuzioni, perché da ciò seguirà in definitiva che  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  e  $\|u_n - u\|_{1,p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , cioè la tesi.

Per dimostrare che

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

nel senso delle distribuzioni, proviamo che, per ogni  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot \varphi_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = - \int_{\Omega} g_i(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ciò segue, per passaggio al limite per  $n \rightarrow +\infty$ , da

$$\int_{\Omega} u_n(x) \cdot \varphi_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

poiché

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u_n(x) - u(x)) \varphi_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) \right| &\leq \int_{\Omega} |u_n(x) - u(x)| |\varphi_{x_i}(x)| d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \|u_n - u\|_p \cdot \|\varphi_{x_i}\|_{p'} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

e

$$\left| \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - g_i(x) \right) \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \right| \leq \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - g_i \right\|_p \cdot \|\varphi\|_{p'} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

**Teorema 7.1.6.** (*Teorema di densità (di Friedrichs)*)

Sia  $\Omega$  un aperto connesso di classe  $C^1$ ;  $1 \leq p \leq +\infty$ .

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \exists (u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : \quad u_n|_{\Omega} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega).$$

In altre parole, le restrizioni a  $\Omega$  di funzioni di  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  costituiscono un sottospazio denso di  $W^{1,p}(\Omega)$ .

A differenza di quanto accade per gli spazi  $L^p(\Omega)$ ,  $C_0^\infty(\Omega)$  non è denso in  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Definizione 7.1.7.** Sia  $1 \leq p \leq +\infty$ . Definiamo

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega); \exists (u_n) \subset C_0^\infty(\Omega) : u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \right\}$$

cioè

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \quad \text{nella norma di } W^{1,p}(\Omega)$$

(evidentemente è anche  $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)}$  nella norma di  $W^{1,p}(\Omega)$ ).

In un certo senso dunque, lo spazio  $W_0^{1,p}(\Omega)$  è costituito dalle funzioni che “hanno il valore zero” su  $\partial\Omega$ . Di conseguenza, due funzioni di  $W^{1,p}(\Omega)$  “hanno lo stesso valore su  $\partial\Omega$ ” se la loro differenza appartiene a  $W_0^{1,p}(\Omega)$  <sup>21</sup>.

Risulta

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega).$$

In generale i due spazi non coincidono, come si deduce dalla considerazione che segue il teorema di Friedrichs, però

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

**Teorema 7.1.8.**

$(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$  è uno spazio di Banach.

*Dimostrazione.*  $W_0^{1,p}(\Omega)$  è un sottospazio di  $W^{1,p}(\Omega)$ , chiuso nella norma  $\|\cdot\|_{1,p}$  perché  $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ ; poiché ogni sottospazio chiuso di uno spazio completo è completo si ha la tesi.  $\square$

<sup>21</sup>Queste questioni vengono trattate con precisione introducendo il concetto di **traccia** di una funzione di  $W^{1,p}(\Omega)$  (cfr. e.g. [10]).

## 7.2 Disuguaglianze di Sobolev in $W^{1,p}(\Omega)$ (teoremi di immersione continua o compatta)

**Definizione 7.2.1.** Sia  $1 \leq p < N$ . Si dice esponente di Sobolev di  $p$  il numero reale  $p^*$  definito da

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

ovvero

$$p^* = \frac{Np}{N-p} > p.$$

**Teorema 7.2.2.** Sia  $\Omega$  un aperto connesso e limitato di  $\mathbb{R}^N$ , di classe  $C^1$ ; allora

$$(i) \text{ se } 1 \leq p < N: \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$

$$\text{e si ha} \quad \|u\|_{p^*} \leq c \|u\|_{1,p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega);$$

$$(ii) \text{ se } p = N: \quad W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [N, +\infty[;$$

$$(iii) \text{ se } p > N: \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{dove } \alpha = 1 - \frac{N}{p} \quad (0 < \alpha < 1).$$

La dimostrazione di (i) è dovuta a Sobolev-Gagliardo-Nirenberg; da (i) e dal fatto che  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  per ogni  $p \leq q \leq p^*$ , segue

$$(i)' \text{ se } 1 \leq p < N: \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*].$$

La (iii) va intesa nel senso della misura di Lebesgue, cioè nella classe di equivalenza di  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  esiste  $\tilde{u} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  (rappresentante  $\alpha$ -hölderiana) con  $\tilde{u} = u$  q.o. in  $\Omega$ .

**Definizione 7.2.3.** Siano  $X$  e  $Y$  spazi di Banach reali. Un operatore lineare e continuo

$$K : X \rightarrow Y$$

si dice *compatto* se per ogni successione  $(u_n) \subset X$  limitata, esiste una sottosuccessione  $(u_{n_k}) \subset X$  tale che  $(K u_{n_k})$  converge in  $Y$ .

**Teorema 7.2.4.** (*Teorema di immersione compatta (Rellich - Kondrachov)*)

Sia  $\Omega$  un aperto connesso e limitato di  $\mathbb{R}^N$ , di classe  $C^1$ ; allora

$$(i) \text{ se } 1 \leq p < N: \text{ l'immersione } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ è compatta}$$

$$\text{per ogni } q \text{ tale che } 1 \leq q < p^* = \frac{Np}{N-p}$$

(i.e. da ogni successione limitata in  $W^{1,p}(\Omega)$  si può estrarre una sottosuccessione convergente in  $L^q(\Omega)$ );

(ii) se  $p = N$ : l'immersione  $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  è compatta per ogni  $1 \leq q < \infty$ ;

(iii) se  $p > N$ : l'immersione  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$  è compatta

(conseguenza della disuguaglianza di Morrey e del teorema di Ascoli-Arzelà).

In particolare l'immersione  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  è compatta per ogni  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Osservazione 7.2.5.** In generale, se non si fanno ipotesi di regolarità su  $\partial\Omega$ , non è vera l'immersione

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Ad esempio, sia  $N = 2$ ,  $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, |y| < e^{-\frac{1}{x^2}} \right\}$  e

$$u(x, y) = x^3 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

È immediato verificare che  $u \in L^1(\Omega)$  e anche ogni sua derivata parziale prima (in senso classico) appartiene a  $L^1(\Omega)$ . Dunque  $u \in W^{1,1}(\Omega)$ . Ma  $u \notin L^p(\Omega)$  per nessun  $p > 1$ .

Se  $p = N$  in generale  $u \notin L^\infty(\Omega)$ . Ad esempio, se  $N = 2$  e  $\Omega = B_{\frac{1}{2}}((0, 0))$  la funzione

$$u(x, y) = \left( \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^\alpha$$

con  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  appartiene a  $W^{1,2}(B_{\frac{1}{2}}(0, 0))$  ma essa non è limitata a causa della singolarità in  $(0, 0)$ .

Ci limitiamo a dimostrare le disuguaglianze di Sobolev (relativamente alle sole immersioni continue) nel sottospazio  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ; è utile osservare che (evidentemente) in tale spazio non è necessaria alcuna ipotesi di regolarità su  $\Omega$ .

### 7.3 Disuguaglianze di Sobolev in $W_0^{1,p}(\Omega)$

**Teorema 7.3.1.** Sia  $\Omega$  un aperto connesso e limitato di  $\mathbb{R}^N$ ; allora

$$(i) \text{ se } 1 \leq p < N: \quad W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

e si ha:

$$\exists C(p, N) > 0: \quad \|u\|_{p^*} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad ^{22}$$

$$\text{dove } C(p, N) = \frac{p(N-1)}{N-p} = \frac{p^*}{1^*};$$

<sup>22</sup>Il valore di  $p^*$  si può ottenere mediante un argomento di omogeneità (cfr. e.g. [1], p. 163.)

$$(ii) \text{ se } p = N: \quad W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [N, +\infty[;$$

$$(iii) \text{ se } p > N: \quad W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{dove } \alpha = 1 - \frac{N}{p} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Osserviamo che in (i) la costante  $C(p, N) = \frac{p(N-1)}{N-p}$  non è quella ottimale.

Alla dimostrazione delle disuguaglianze di Sobolev premettiamo il seguente risultato.

**Lemma 7.3.2.** (*Lemma di Gagliardo*)

Posto

$$\hat{x}_i := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (N \geq 2),$$

se le  $v_i = v_i(\hat{x}_i)$  per ogni  $i = 1, \dots, N$  sono non negative e  $v_i \in L^{N-1}(\mathbb{R}_{\hat{x}_i}^{N-1})$  allora

$$v(x) = v_1(\hat{x}_1) \cdot v_2(\hat{x}_2) \cdot \dots \cdot v_N(\hat{x}_N) \in L^1(\mathbb{R}_x^N)$$

e si ha

$$\|v\|_1 = \left\| \prod_{i=1}^N v_i \right\|_{1, \mathbb{R}^N} \leq \prod_{i=1}^N \|v_i\|_{N-1, \mathbb{R}_{\hat{x}_i}^{N-1}}.$$

**Dimostrazione delle disuguaglianze di Sobolev (in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ).**

Dimostrazione di (i).

Dimostreremo (i) prima per  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . Poi estenderemo la tesi alle funzioni  $u \in W_0^{1,p}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ .

*Primo passo.* Sia dapprima  $p = 1$ ; possiamo assumere  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Allora  $C(1, N) = 1$  e la tesi diventa

$$\|u\|_{1^*} = \|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \|\nabla u\|_1.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale ( $u$  è a supporto compatto in  $\Omega$ ) si ha:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N) d\mathcal{L}^1(t)$$

e quindi

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)| d\mathcal{L}^1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^1(x_i)$$

per ogni  $i = 1, \dots, N$ .

Pertanto

$$|u(x)|^{\frac{1}{N-1}} \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Moltiplicando membro a membro risulta

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^N \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}};$$

posto

$$v_i(\hat{x}_i) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}},$$

e applicando il lemma di Gagliardo 7.3.2 si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} d\mathcal{L}^N(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N v_i(\hat{x}_i) d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \prod_{i=1}^N \|v_i\|_{N-1, \mathbb{R}^{\hat{x}_i}^{N-1}} \\ &= \prod_{i=1}^N \left( \int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{N-1}}, \end{aligned}$$

dove per l'ultima uguaglianza basta osservare che

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{N-1, \mathbb{R}^{\hat{x}_i}^{N-1}} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[ \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}} \right]^{N-1} d\mathcal{L}^{N-1}(\hat{x}_i) \right\}^{\frac{1}{N-1}} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^1(x_i) \right] d\mathcal{L}^{N-1}(\hat{x}_i) \right\}^{\frac{1}{N-1}} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \right\}^{\frac{1}{N-1}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} d\mathcal{L}^N(x) &\leq \prod_{i=1}^N \left( \int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N}{N-1}}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

cioè

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)| d\mathcal{L}^N(x) = \|\nabla u\|_1.$$

Osserviamo che la (7.1) è vera anche per funzioni di classe  $C_0^1(\Omega)$  o per funzioni  $C^1(\Omega)$  q.o., a supporto compatto in  $\Omega$ .

*Secondo passo.* Sia ora  $1 < p < N$  e  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Considerata la funzione ausiliaria

$$v := |u|^{\frac{p}{1^*}-1} \cdot u$$

si ha

$$|\nabla v| = \frac{p^*}{1^*} |u|^{\frac{p^*}{1^*} - 1} |\nabla u| \quad \text{q.o. in } \Omega$$

dove

$$\frac{p^*}{1^*} = \frac{p(N-1)}{N-p} =: C(p, N)$$

e

$$\frac{p^*}{1^*} - 1 = \frac{N(p-1)}{N-p}.$$

Applicando (7.1) a  $v$  risulta

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N-1}{N}} &\leq C(p, N) \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N(p-1)}{N-p}} |\nabla u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \\ &\quad \text{(applicando la disuguaglianza di Hölder)} \\ &\leq C(p, N) \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N(p-1)}{N-p} \cdot p'} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= C(p, N) \|\nabla u\|_p \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

quindi

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N-1}{N} - \frac{p-1}{p}} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p,$$

e poiché  $\frac{N-1}{N} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p^*}$  risulta in definitiva

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p.$$

*Terzo passo.* Dimostriamo ora (i) in  $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ . Sia  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , allora

$$\exists (u_n) \subset C_0^\infty(\Omega) : \quad \|u_n - u\|_{1,p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (7.2)$$

Per quanto già dimostrato si ha

$$\|u_n\|_{p^*} \leq C(p, N) \|\nabla u_n\|_p \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.3)$$

(osserviamo che  $C(p, N)$  non dipende da  $n \in \mathbb{N}$ ). Da (7.3) e (7.2) segue che  $(u_n)$  è di Cauchy in  $L^{p^*}(\Omega)$ , pertanto

$$\exists v \in L^{p^*}(\Omega) : \quad \|u_n - v\|_{p^*} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Osserviamo che

$$0 \leq \|u - v\|_p \leq \|u_n - u\|_p + \|u_n - v\|_p \leq \|u_n - u\|_p + |\Omega|^{\frac{1}{N}} \|u_n - v\|_{p^*},$$

da qui, passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$ , si deduce che  $v = u$  q.o. in  $\Omega$ . Allora passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  nella (7.3) si ha in definitiva

$$\|v\|_{p^*} = \|u\|_{p^*} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p,$$

cioè la tesi. □

Dimostrazione di (ii).

Basta provare (ii) per le funzioni  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , perché poi si estende per densità a  $W_0^{1,N}(\Omega)$ .

Proviamo che

$$\exists C > 0 : \quad \|u\|_q \leq C \|u\|_{1,N} \quad \forall q \in [N, +\infty[ \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da (7.1) si ha, per  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ,

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \|\nabla u\|_1. \quad (7.4)$$

Considerata la funzione ausiliaria

$$v := |u|^t \quad (t > 1)$$

da (7.4) risulta

$$\begin{aligned} \|u\|_{\frac{tN}{N-1}}^t &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{t \cdot \frac{N}{N-1}} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N-1}{N}} \\ &\leq t \cdot \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{t-1} |\nabla u| d\mathcal{L}^N(x) \leq t \|u\|_{(t-1)p'}^{t-1} \cdot \|\nabla u\|_p. \end{aligned}$$

Segue che

$$\|u\|_{\frac{tN}{N-1}} \leq t^{\frac{1}{t}} \|u\|_{(t-1)p'}^{\frac{t-1}{t}} \cdot \|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}} \leq e^{\frac{1}{e}} \|u\|_{(t-1)p'}^{\frac{t-1}{t}} \cdot \|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}}.$$

Possiamo supporre

$$\|u\|_{(t-1)p'}^{\frac{t-1}{t}} > 0 \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}} > 0$$

(diversamente la tesi è banale).

Per la disuguaglianza di Young (osservato che  $\frac{t-1}{t} + \frac{1}{t} = 1$ ) si ha (ricordato che per ipotesi  $p = N$ )

$$\|u\|_{(t-1)p'}^{\frac{t-1}{t}} \cdot \|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}} \leq \frac{t-1}{t} \|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \frac{1}{t} \|\nabla u\|_N,$$

quindi

$$\begin{aligned} \|u\|_{\frac{tN}{N-1}} &\leq e^{\frac{1}{e}} \left( \frac{t-1}{t} \|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \frac{1}{t} \|\nabla u\|_N \right) \\ &\leq e^{\frac{1}{e}} \left( \|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \|\nabla u\|_N \right) \\ &\leq C \left( \|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \|\nabla u\|_N \right), \end{aligned}$$

con  $C = e^{\frac{1}{e}}$ . Poiché la disuguaglianza precedente vale per ogni  $t > 1$ , in particolare essa è vera per  $t = N$  (essendo  $N \geq 2$ ):

$$\|u\|_{\frac{N^2}{N-1}} \leq C (\|u\|_N + \|\nabla u\|_N)$$

e quindi (per densità)

$$W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N^2}{N-1}}(\Omega).$$

Osservato che  $\frac{N^2}{N-1} > N$ , si ha anche (per interpolazione (Teorema 4.4.1))

$$W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in \left[ N, \frac{N^2}{N-1} \right] ;$$

iterando questo argomento con  $t = N + 1, t = N + 2, \dots$ , si ha la tesi.

Notiamo, infine, che per dimostrare (ii) è sufficiente anche osservare che per  $p \rightarrow N$  risulta  $p^* = \frac{Np}{N-p} \rightarrow +\infty$ . Osserviamo che la costante  $C(p, N) = \frac{p(N-1)}{N-p} \rightarrow +\infty$  per  $p \rightarrow N$ .  $\square$

### Dimostrazione di (iii) (disuguaglianza di Morrey).

Ricordiamo che posto per  $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_\alpha := \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + [u]_{0,\alpha}$$

$\|\cdot\|_\alpha$  è una norma in  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  e lo spazio

$$(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\alpha)$$

è completo.

È sufficiente provare che

$$\exists C(p, N) > 0 : [u]_{0,\alpha} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (7.5)$$

e

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C(p, N)(\text{diam } \Omega)^\alpha \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (7.6)$$

Proviamo prima la (7.5) e poi la (7.6) in  $C_0^\infty(\Omega)$ ; queste si estendono poi per densità a  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Per provare la (7.5) dimostriamo che

$$\begin{aligned} \exists C(p, N) > 0 : \quad \forall x, y \in \Omega, \quad x \neq y, \\ |u(x) - u(y)| \leq C(p, N) \cdot |x - y|^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Sia  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $x, y \in \Omega$ ,  $x \neq y$ . Poniamo  $\delta := |x - y| > 0$  e

$$S := B_\delta(x) \cap B_\delta(y) \cap \Omega.$$

Risulta

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(z) - u(x)| + |u(y) - u(z)| \quad \forall z \in S.$$

Integrando su  $S$  rispetto a  $z$  si ha:

$$|S| \cdot |u(x) - u(y)| \leq \int_S |u(z) - u(x)| d\mathcal{L}^N(z) + \int_S |u(y) - u(z)| d\mathcal{L}^N(z).$$

Ma  $|B_\delta| = \omega_N \delta^N$  da cui  $|S| = C(N)\delta^N$  e quindi

$$C(N)\delta^N |u(x) - u(y)| \leq \int_S |u(z) - u(x)| d\mathcal{L}^N(z) + \int_S |u(y) - u(z)| d\mathcal{L}^N(z). \quad (7.7)$$

Valutiamo il primo integrale; il secondo si maggiorerà allo stesso modo.

Osservato che

$$u(z) - u(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x + t(z-x)) d\mathcal{L}^1(t) = \int_0^1 (z-x) \cdot \nabla u(w) d\mathcal{L}^1(t)$$

dove  $w = x + t(z-x)$ , si ha per ogni  $z \in S$

$$|u(z) - u(x)| \leq \int_0^1 |z-x| \cdot |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^1(t) \leq \delta \int_0^1 |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^1(t)$$

e integrando rispetto alla variabile  $z \in S$

$$\begin{aligned} \int_S |u(z) - u(x)| d\mathcal{L}^N(z) &\leq \delta \int_S d\mathcal{L}^N(z) \int_0^1 |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^1(t) \\ &= \delta \int_0^1 d\mathcal{L}^1(t) \int_S |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^N(z). \end{aligned}$$

Ora (osservato che  $|z-x| < \delta \implies |w-x| < t\delta$ )

$$\int_S |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^N(z) \leq \int_{B_{t\delta}(x)} |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^N(z) = t^{-N} \int_{B_{t\delta}(x)} |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^N(w).$$

Usando la disuguaglianza di Hölder il secondo membro si maggiora:

$$\begin{aligned} \int_{B_{t\delta}(x)} 1 \cdot |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^N(w) &\leq |B_{t\delta}(x)|^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_{B_{t\delta}(x)} |\nabla u(w)|^p d\mathcal{L}^N(w) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \omega_N^{1-\frac{1}{p}} (t\delta)^{N(1-\frac{1}{p})} \cdot \|\nabla u\|_p. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_S |u(z) - u(x)| d\mathcal{L}^N(z) &\leq \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+1-\frac{N}{p}} \cdot \|\nabla u\|_p \cdot \int_0^1 t^{-\frac{N}{p}} d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad \text{(con } p > N \text{ per ipotesi)} \\ &= \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+1-\frac{N}{p}} \cdot \|\nabla u\|_p \cdot \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \\ &= \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+\alpha} \cdot \|\nabla u\|_p \cdot \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Tornando a (7.7) si ha

$$C(N)\delta^N |u(x) - u(y)| \leq 2 \cdot \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \|\nabla u\|_p$$

da cui

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2\omega_N^{1-\frac{1}{p}}}{\alpha C(N)} \cdot \delta^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p = C(p, N) \cdot |x-y|^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p$$

e quindi (7.5).

Proviamo la (7.6).

Sia  $y \in \Omega$  tale che  $u(y) = 0$ . Dalla (7.5) si ricava

$$|u(x)| \leq C(p, N) \cdot |x - y|^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p \leq C(p, N) \cdot (\text{diam } \Omega)^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p$$

per ogni  $x \in \Omega$  e quindi segue la (7.6).  $\square$

## 7.4 Disuguaglianze di Poincaré

**Teorema 7.4.1. (Disuguaglianza di Poincaré in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ )**

Sia  $\Omega$  un aperto connesso e limitato di  $\mathbb{R}^N$ ; allora

$$\exists C(\Omega, p, N) = C(p, N) |\Omega|^{\frac{1}{N}} > 0 :$$

$$\|u\|_p \leq C(\Omega, p, N) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty.$$

Osserviamo che l'ipotesi “ $\Omega$  limitato” può essere indebolita richiedendo che  $\Omega$  sia limitato almeno in una direzione, ma non può essere eliminata.

Dimostrazione della disuguaglianza di Poincaré.

Sia  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$ . Per il caso (i) delle disuguaglianze di Sobolev (osservato che  $\frac{N}{N-1} \leq N$  poiché  $N \geq 2$ ) si ha

$$\|u\|_{p^*} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p.$$

Poiché  $p^* > p$  si ha  $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  e quindi

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}} \cdot \|u\|_{p^*} = |\Omega|^{\frac{1}{N}} \|u\|_{p^*}.$$

Pertanto

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{N}} \cdot C(p, N) \|\nabla u\|_p = C(\Omega, p, N) \|\nabla u\|_p$$

per ogni  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Sia ora  $p \geq \frac{N}{N-1}$ ; definiamo  $r := \frac{Np}{N+p}$  e osserviamo che  $1 \leq r < N$

$$\left( r \geq 1 \iff p \geq \frac{N}{N-1} \right).$$

Considerato  $r^* = \frac{Nr}{N-r}$  (l'esponente di Sobolev di  $r$ ), risulta  $r^* = p$  e quindi, ancora per il caso (i) delle disuguaglianze di Sobolev

$$\|u\|_p = \|u\|_{r^*} \leq C(r, N) \|\nabla u\|_r \leq C(\Omega, p, N) \|\nabla u\|_{r^*=p}. \quad \square$$

**Corollario 7.4.2.** In  $W_0^{1,p}(\Omega)$  le norme  $\|u\|_{1,p}$  e  $\|\nabla u\|_p$  sono topologicamente equivalenti.

Infatti

$$\|\nabla u\|_p \leq \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p \leq (C(\Omega, p, N) + 1) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad \square$$

**Osservazione 7.4.3.** La disuguaglianza di Poincaré dimostrata in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  non vale per le costanti non-identicamente nulle in  $\Omega$ . Ciò preclude pertanto la possibilità che quella stessa disuguaglianza possa valere in  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Tuttavia sussiste il seguente risultato

**Teorema 7.4.4. (Disuguaglianza di Poincaré in  $W^{1,p}(\Omega)$ )**

Sia  $\Omega$  un aperto connesso e limitato di  $\mathbb{R}^N$ , di classe  $C^1$ ; allora

$$\exists C(\Omega, p, N) > 0 : \quad \|u - u_\Omega\|_p \leq C(\Omega, p, N) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

dove

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad .$$

**Osservazione 7.4.5.** Nelle ipotesi della disuguaglianza di Poincaré (in  $W^{1,p}(\Omega)$ ), se  $1 \leq p < N$  si ha la seguente **disuguaglianza di Sobolev-Poincaré**

$$\|u - u_\Omega\|_{p^*} \leq c(\Omega, p, N) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$