CAPITOLO 6

Spazi di Hilbert (reali)

6.1 Spazi di Hilbert (reali)

Sia H uno spazio vettoriale reale.
Un prodotto scalare su H è un funzionale reale $(\,\cdot\,|\,\cdot\,) : H \times H \to \mathbb{R}$ bilineare simmetrico e definito positivo (i.e. $(u|u) \geq 0 \quad \forall\, u \in H$ e $(u|u) > 0 \quad \forall\, u \in H \setminus \{0\}$).

Un prodotto scalare verifica la

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$|(u|v)| \leq (u|u)^{\frac{1}{2}}\,(v|v)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, u, v \in H.$$

A partire dal prodotto scalare su H possiamo definire la seguente norma (come si verifica facilmente tenuto conto, per la proprietà triangolare, della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz),

$$|u|_H := (u|u)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in H$$

detta norma di Hilbert (in quanto associata a un prodotto scalare).

Osservazione. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz implica che, fissato $v \in H$, il funzionale $u \in H \to (u|v) \in \mathbb{R}$ è lipschitziano di costante $|v|_H$.

Ricordiamo anche la

Identità del parallelogramma:

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|_H^2 + \left|\frac{u-v}{2}\right|_H^2 = \frac{1}{2}\left(|u|_H^2 + |v|_H^2\right) \qquad \forall\, u, v \in H.$$

H si dice **spazio di Hilbert (reale)** se è uno spazio vettoriale reale munito di un prodotto scalare, completo rispetto alla norma di Hilbert $|\cdot|_H$.

Esempi.

- Per $L^2(\Omega)$ munito del prodotto scalare
$$(u|v)_2 := \int_\Omega u(x)v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad \forall\, u, v \in L^2(\Omega)$$
si ha
$$\|u\|_2 = (u|u)_2^{\frac{1}{2}} \ .$$
$\left(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2\right)$ è uno spazio di Hilbert.

- Per $W^{1,2}(\Omega)$ (cfr. Capitolo 7) munito del prodotto scalare
$$\begin{aligned}(u|v)_{1,2} &:= (u|v)_2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\middle|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_2 \\ &= \int_\Omega u(x)v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) + \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad \forall\, u, v \in W^{1,2}(\Omega)\end{aligned}$$
si ha
$$\|u\|_{1,2} = \left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = (u|u)_{1,2}^{\frac{1}{2}} \ .$$
$\left(W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}\right)$ è uno spazio di Hilbert.

- Ovviamente anche $W_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, e se Ω è limitato, in $W_0^{1,2}(\Omega)$ si può assumere come prodotto scalare (tenuto conto della disuguaglianza di Poincaré, Teorema 7.4.1 e Corollario 7.4.2)
$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\middle|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_2 = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall\, u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

6.2 Proiezione su un convesso chiuso

Teorema 6.2.1. *(Teorema della proiezione (su un convesso, chiuso, non vuoto di uno spazio di Hilbert))*
Sia $(H, |\cdot|_H)$ uno spazio di Hilbert; sia $K \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto. Allora $\forall\, f \in H \quad \exists |\, u = u_f \in K$:
$$|f-u|_H = \min_{v\in K} |f-v|_H \ \ (= d(f,K)) \ . \tag{1}$$
Inoltre u è caratterizzato dalla seguente proprietà:
$$\begin{cases} u \in K \\ (f-u|v-u) \le 0 \quad \forall\, v \in K\,. \end{cases} \tag{2}$$

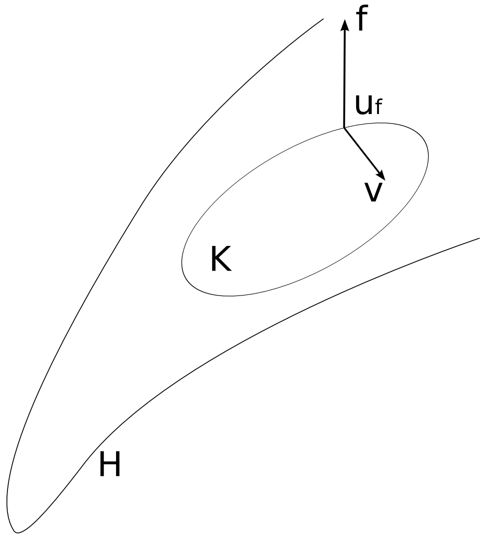

Figura 6.1: Proiezione su un convesso chiuso

Dimostrazione. Esistenza.
Sia
$$d := \inf_{v\in K} |f-v|_H.$$
Per le proprietà dell'estremo inferiore esiste $(v_n) \subset K$ tale che
$$d_n := |f-v_n|_H \xrightarrow[n\to+\infty]{} d$$
$\big($ i.e. $\exists\,(v_n)\subset K$ successione "minimizzante" per $|f-\cdot|_H\big)$.
Posto $u = f - v_n$ e $v = f - v_m$ nell'identità del parallelogramma, si ha
$$\left|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right|_H^2 + \left|\frac{v_m-v_n}{2}\right|_H^2 = \frac{1}{2}\left(|f-v_n|_H^2 + |f-v_m|_H^2\right)$$
e quindi
$$\left|\frac{v_m-v_n}{2}\right|_H^2 = \frac{1}{2}\left(|f-v_n|_H^2 + |f-v_m|_H^2\right) - \left|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right|_H^2.$$
Poiché $v_n, v_m \in K$ e K è convesso, risulta $\dfrac{v_n+v_m}{2} \in K$ e quindi
$$\left|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right|_H \geq d.$$
Pertanto
$$0 \leq \left|\frac{v_m-v_n}{2}\right|_H^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2+d_m^2) - d^2$$
e quindi
$$\exists \lim_{n,m\to+\infty} |v_n - v_m|_H = 0.$$

Dunque la successione $(v_n) \subset K$ è di Cauchy in H.
Poiché H è completo e K è chiuso, esiste $u = u_f \in K$ tale che $|v_n - u|_H \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Osservato che

$$d \leq |f-u|_H \leq |f-v_n|_H + |v_n - u|_H\,,$$

passando al limite per $n \to +\infty$ risulta

$$|f-u|_H = d.$$

Si è dunque provata l'esistenza.

Proviamo adesso l'equivalenza: (2) $\Longleftrightarrow$ (1).

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sia $v \in K$. Per il teorema di Carnot "generalizzato" si ha

$$|f-u|_H^2 + |v-u|_H^2 - 2(f-u|v-u) = |f-v|_H^2$$

e quindi, ricordando che per ipotesi $(f-u|v-u) \leq 0$,

$$|f-u|_H^2 - |f-v|_H^2 = 2(f-u|v-u) - |v-u|_H^2 \leq 0$$

da cui

$$|f-u|_H \leq |f-v|_H \qquad \forall\, v \in K\,.$$

(1) $\Longrightarrow$ (2) Sia $v \in K$. Posto

$$w = (1-t)u + tv = u + t(v-u) \qquad t \in]0,1],$$

si ha $w \in K$ e per ipotesi

$$|f-u|_H \leq |f-w|_H = |(f-u) - t(v-u)|_H\,,$$

da cui

$$|f-u|_H^2 \leq |f-u|_H^2 + t^2|v-u|_H^2 - 2t(f-u|v-u)$$

e quindi

$$2(f-u|v-u) \leq t|v-u|_H^2.$$

Passando al limite per $t \to 0^+$ risulta

$$(f-u|v-u) \leq 0.$$

Resta da provare l'unicità.
Siano $u_1, u_2 \in K$ tali che

$$\begin{cases} (f-u_1|v-u_1) \leq 0 \\ (f-u_2|v-u_2) \leq 0 \end{cases} \qquad \forall\, v \in K.$$

In particolare

$$\begin{cases} (f-u_1|u_2-u_1) \leq 0 \\ (f-u_2|u_1-u_2) \leq 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases}(f-u_1|u_2-u_1)\le 0\\(u_2-f|u_2-u_1)\le 0\end{cases},$$

e quindi

$$0\le(u_2-u_1|u_2-u_1)\le 0\,,$$

cioè

$$u_1=u_2.\quad\square$$

Definizione 6.2.2. Nelle ipotesi del teorema precedente definiamo l'operatore "proiezione su K"

$$\begin{aligned}P_K\ :\quad & H\to K\\ & f\mapsto P_K(f)=u \qquad \text{(proiezione di } f \text{ su } K)\end{aligned}$$

dove u è l'unico elemento di K tale che

$$|f-u|_H=\min_{v\in K}|f-v|_H\,.$$

Corollario 6.2.3. *Sia* $(H,|\cdot|_H)$ *uno spazio di Hilbert,* M *<u>un suo sottospazio vettoriale chiuso</u> e sia* $f\in H$*; allora* $u=P_M(f)$ *è caratterizzato da*

$$\begin{cases}u\in M\\ \\(f-u|v)=0\ \ \forall v\in M \quad \textit{(i.e. } (f-u)\perp M\textit{, ovvero } f-u \textit{ è ortogonale a } M\textit{).}\end{cases}\tag{3}$$

Dimostrazione. Proviamo l'equivalenza: (3) $\Longleftrightarrow$ (2).

(3) $\Longrightarrow$ (2) Poiché $u\in M$ risulta

$$(f-u|v-u)=0\qquad\forall v\in M.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) Dall'ipotesi segue che

$$(f-u|\lambda v-u)\le 0\qquad\forall v\in M\,,\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$$

pertanto

$$\lambda(f-u|v)\le(f-u|u)\qquad\forall v\in M\,,\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$$

e quindi

$$(f-u|v)=0\qquad\forall v\in M.\quad\square$$

$\square$

6.3 Duale di uno spazio di Hilbert. Teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet

Indichiamo con H' il duale (topologico) di H (i.e. lo spazio dei funzionali lineari e continui su H). Sussiste il seguente fondamentale teorema che asserisce l'esistenza di un isomorfismo isometrico tra H e H'.

Teorema 6.3.1. *(Teorema di rappresentazione (di Riesz-Fréchet))*
Sia $(H, |\cdot|_H)$ *uno spazio di Hilbert; allora*

$$\forall\,\phi \in H' \quad \exists|\, u_\phi \in H \;:\quad \phi(v) = (u_\phi|v) \qquad \forall\, v \in H,$$

inoltre si ha

$$|u_\phi|_H = \|\phi\|_{H'} \;\left(:= \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{|v|_H} \right).$$

Dimostrazione. Sia $\phi \in H'$. Poniamo

$$M := \phi^{-1}(\{0\})\,.$$

M è un sottospazio chiuso di H (sottospazio perché nucleo di ϕ lineare, e chiuso perché immagine inversa, tramite ϕ continuo, del chiuso $\{0\}$).
Se $M = H$, risulta $\phi \equiv 0$ e quindi basta prendere $u_\phi = 0_H$ per conseguire la tesi.
Supponiamo dunque $M \subsetneqq H$ e sia $g_0 \in H \setminus M$. Per il corollario precedente esiste $g_1 = P_M(g_0) \in M$ tale che

$$(g_0 - g_1|w) = 0 \qquad \forall\, w \in M\,.$$

Proviamo che

(i) $\exists\, g \notin M \;:\quad |g|_H = 1, \quad (g|w) = 0 \quad \forall\, w \in M\,.$

Sia

$$g = \frac{g_0 - g_1}{|g_0 - g_1|_H}.$$

Si ha $|g|_H = 1$, $g \notin M$ (se $g \in M$ allora $g_0 = g|g_0 - g_1|_H + g_1 \in M$, che è assurdo) ed inoltre

$$(g|w) = \left(\frac{g_0 - g_1}{|g_0 - g_1|_H} \middle| w \right) = \frac{1}{|g_0 - g_1|}(g_0 - g_1|w) = 0 \qquad \forall\, w \in M.$$

Sia $v \in H$ e proviamo che

(ii) v può essere decomposto nel seguente modo:

$$v = \lambda g + w \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}\,,\; w \in M \quad (\text{quindi } \; H = M^\perp \oplus M)\,.$$

Basta porre

$$\lambda := \frac{\phi(v)}{\phi(g)}, \qquad w := v - \frac{\phi(v)}{\phi(g)} g$$

$\left(\text{osserviamo che } w \in M \text{ perché } \phi(w) = \phi(v) - \dfrac{\phi(v)}{\phi(g)}\phi(g) = 0\right)$.
Ora

$$(g|v) = \left(g \,\middle|\, \frac{\phi(v)}{\phi(g)} g + w\right) = \left(g \,\middle|\, \frac{\phi(v)}{\phi(g)} g\right) + (g|w) = \frac{\phi(v)}{\phi(g)}(g|g) = \frac{\phi(v)}{\phi(g)}|g|_H^2 = \frac{\phi(v)}{\phi(g)},$$

per cui, posto $u_\phi = \phi(g)g$, si ha

$$\phi(v) = (\phi(g)g|v) = (u_\phi|v) \qquad \forall\, v \in H.$$

Si è dunque provata l'esistenza.
Per provare l'unicità, siano $u_1, u_2 \in H$ tali che

$$\begin{aligned} \phi(v) &= (u_1|v) \qquad \forall\, v \in H \\ \phi(v) &= (u_2|v) \qquad \forall\, v \in H. \end{aligned}$$

Allora

$$(u_1|v) - (u_2|v) = 0 \qquad \forall\, v \in H,$$

pertanto

$$(u_1 - u_2|v) = 0 \qquad \forall\, v \in H$$

e in particolare

$$(u_1 - u_2|u_1 - u_2) = 0\,,$$

da cui

$$u_1 = u_2.$$

Resta da provare che

$$|u_\phi|_H = \|\phi\|_{H'}$$

dove

$$\|\phi\|_{H'} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{|v|_H}.$$

Poiché

$$\phi(v) = (u_\phi|v) \qquad \forall\, v \in H,$$

dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|\phi(v)| = |(u_\phi|v)| \leq |u_\phi|_H \cdot |v|_H \qquad \forall\, v \in H.$$

Pertanto

$$\frac{|\phi(v)|}{|v|_H} \leq |u_\phi|_H \qquad \forall\, v \in H, \quad v \neq 0$$

da cui segue che

$$\|\phi\|_{H'} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{|v|_H} \leq |u_\phi|_H\,.$$

Osservato, inoltre, che preso $v = u_\phi$, si ha $\phi(u_\phi) = (u_\phi|u_\phi)$ e quindi

$$|\phi(u_\phi)| = |u_\phi|_H^2$$

ovvero, osservato che $|u_\phi|_H \neq 0$,

$$\frac{|\phi(u_\phi)|}{|u_\phi|_H} = |u_\phi|_H,$$

ne segue evidentemente la tesi. □

6.4 Teoremi di Stampacchia e di Lax-Milgram

Definizione 6.4.1. Sia $(H, |\cdot|_H)$ uno spazio di Hilbert reale.
Un funzionale <u>bilineare</u>

$$a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

si dice

(i) **continuo** se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$|a(u, v)| \leq \alpha |u|_H \cdot |v|_H \qquad \forall u, v \in H\,,$$

(ii) **coercitivo** se esiste $\beta > 0$ tale che

$$a(u, u) \geq \beta |u|_H^2 \qquad \forall u \in H\,.$$

Teorema 6.4.2. *(Teorema di Stampacchia)*
Sia $(H, |\cdot|_H)$ uno spazio di Hilbert reale; $a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ un funzionale <u>bilineare</u>, <u>continuo</u> e <u>coercitivo</u>. Sia $\mathbb{K}$ un convesso chiuso non vuoto di H.
Allora

$$\forall\, \phi \in H' \; \exists |\, u_\phi \in \mathbb{K} \;\; \textit{t.c.} \qquad \phi\,(v - u_\phi) - a\,(u_\phi, v - u_\phi) \leq 0 \qquad \forall v \in \mathbb{K}\,.$$

Inoltre, se $a(u, v)$ è <u>simmetrico</u>, allora u_ϕ è caratterizzato dalla proprietà

$$\begin{cases} u_\phi \in \mathbb{K} \\ \\ u_\phi \;\textit{minimizza}\; \frac{1}{2}a(v, v) - \phi(v) \quad \forall v \in \mathbb{K} \end{cases}$$

$$\left(\textit{cioè}\; \frac{1}{2}\, a\,(u_\phi, u_\phi) - \phi(u_\phi) = \min_{v \in \mathbb{K}} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \phi(v) \right\} \right).$$

Procedendo come nella dimostrazione del Corollario 6.2.3, dal Teorema 6.4.2 segue il seguente risultato.

Corollario 6.4.3. *(Teorema di Lax-Milgram)*
Sia $(H, |\cdot|_H)$ *uno spazio di Hilbert reale;* $a(u,v) \; : \; H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *un funzionale* *bilineare, continuo e coercitivo.*
Allora

$$\forall\, \phi \in H' \; \exists |\, u_\phi \in H \;\; \textit{t.c.} \qquad \phi(v) = a\left(u_\phi, v\right) \quad \forall v \in H$$

e risulta

$$|u_\phi|_H \;\leq\; \beta^{-1}\, \|\phi\|_{H'}\,.$$

Inoltre, se $a(u,v)$ *è simmetrico, allora* u_ϕ *è caratterizzato dalla proprietà*

$$\begin{cases} u_\phi \in H \\ \\ u_\phi \; \textit{minimizza} \; \frac{1}{2}a(v,v) - \phi(v) \quad \forall v \in H \end{cases}$$

$$\left(\textit{cioè}\; \frac{1}{2}\, a\left(u_\phi, u_\phi\right) - \phi(u_\phi) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \phi(v) \right\} \right).$$