APPENDICE A

Il teorema principale 3.10 permette una descrizione degli elementi del gruppo di Brauer $\mathcal{B}(K)$ mediante i prodotti incrociati nel caso che tali elementi abbiano un campo di spezzamento L galoissiano su K. Più esattamente, tale teorema collega strutturalmente il sottogruppo $\mathcal{B}_L(K)$ e la coomologia per l'azione del gruppo di Galois di (K, L) su $\dot{L}$. Inoltre, grazie al teorema di Köthe 3.14, si ha una riduzione del caso arbitrario al caso galoissiano trattato in 3.10. Molto più tardi si è visto che i sottocampi massimali separabili in un'algebra di divisione centrale di dimensione finita (v. 3.14) permettono una caratterizzazione molto soddisfacente in termini della teoria delle algebre di Lie. Tale risultato sarà lo scopo di questa aggiunta all'esposizione nei capitoli precedenti.

Mettiamo in evidenza che la nostra dimostrazione del Lemma di Noether 3.13 (nella forma generalizzata successivamente da Jacobson[32]) utilizza soltanto poche regole elementari del ≪Lie bracket≫ che la rendono molto trasparente. Così non vogliamo nascondere la speranza che ci saranno da scoprire altri legami tra le teorie delle algebre associative e di Lie.[33] Già la base storica, la dimostrazione che l'algebra dei quaternioni sia centrale semplice, può essere vista in questa luce: In [**P**], 1.6, si lavora vantaggiosamente con la struttura di Lie dell'algebra per ottenere il risultato in maniera elegante.

Ci serviremo del risultato seguente che diamo senza dimostrazione.[34]

Proposizione. *Sia (K, L) un'estensione di campi di dimensione finita. Sono equivalenti:*

(i) *(K, L) è separabile.*
(ii) *La K-algebra $L \underset{K}{\otimes} L$ è semisemplice.*[35]

A.1. Proposizione. *Se (K, L) è un'estensione di campi separabile di dimensione finita, allora l'applicazione $L \to \{0_K\}$ è l'unica derivazione K-lineare di L.*

Dimostrazione. Sia ∂ una derivazione di L. Applichiamo l'esempio (3) in 1.5 (con $S = A = B = L$). Cioè otteniamo una realizzazione prodotto $(L^{2\times 2}, \varphi, \psi)$ per (L, L) tramite

$$\varphi : x \mapsto \begin{pmatrix} x & x\partial \\ 0_L & x \end{pmatrix}, \qquad \psi : y \mapsto \begin{pmatrix} y & 0_L \\ 0_L & y \end{pmatrix} \qquad (x, y \in L).$$

[32] La formulazione in 3.13 è di nuovo più generale di una piccolezza.

[33] Non sarà sfuggito al lettore attento che la dimostrazione di 3.12 e quindi di 3.13 è collegata alla nozione di algebra di Lie ristretta.

[34] In una forma più generale si trova una dimostrazione per esempio in [**DK**], 6.1.2.

[35] $L \underset{K}{\otimes} L$ è commutativa, allora è semisemplice se e solo se non ha elementi nilpotenti non nulli.

Allora la sottoalgebra $(L\varphi)(L\psi)$ di $L^{2\times 2}$ è immagine epimorfa di $L \underset{K}{\otimes} L$ e contiene le matrici

$$\begin{pmatrix} 0_L & x\partial \\ 0_L & 0_L \end{pmatrix} = x\varphi - x\psi \qquad (x \in L)$$

che generano un'ideale di $(L\varphi)(L\psi)$ nel quale ogni prodotto è zero. Per la separabilità di (K, L) la proposizione precedente mostra che $L \underset{K}{\otimes} L$, quindi anche ogni sua immagine epimorfa, è semisemplice. Ne segue che ∂ è l'applicazione zero. $\square$

Per ogni K-sottospazio T di una K-algebra $(A, +, \circ)$ poniamo

$$N_A(T) := \{x | x \in A,\ T \circ x \subseteq T\},$$

detto il normalizzante di T in A. Se A è associativa o un'algebra di Lie, allora $N_A(T)$ è una sottoalgebra di A. Nella teoria delle algebre di Lie sono di massima importanza le sottoalgebre di Cartan che sono le sottoalgebre (Lie-)nilpotenti T tali che $N_A(T) = T$.

Se A è un'algebra di Lie e L un campo di ampliamento del campo di base K, allora lo L-spazio vettoriale destro $A \underset{K}{\otimes} L$ è un'algebra di Lie su L dove si pone

$$[x \otimes a, y \otimes b] := [x, y] \otimes ab$$

per elementi arbitrari x, y di una K-base di A, $a, b \in L$. Quindi si ottiene, come nel caso dell'algebra associativa unitaria, un ampliamento del campo di base anche per le algebre di Lie, e l'algebra di Lie che nasce così viene anche denotata con A_L. Si ha

Proposizione. *Se H è una sottoalgebra di Cartan dell'algebra di Lie A, allora H_L è una sottoalgebra di Cartan di A_L, per ogni ampliamento L di K.*

Per noi sarà interessante il caso di un'algebra *associativa* A, considerata come algebra di Lie con il «Lie bracket» come prodotto di Lie. Per esempio vale

Proposizione. *Se K è algebricamente chiuso, $n \in \mathbb{N}$, allora le sottoalgebre di Cartan dell'algebra di Lie $K^{n\times n}$ sono la sottoalgebra $\{diag[x_1, \ldots, x_n] | x_i \in K\}$ e le sue coniugate tramite automorfismi dell'algebra associativa $K^{n\times n}$.*[36]

Dati $x, y, z_1, \ldots, z_n$ elementi di un'algebra associativa, si dimostra induttivamente che

$$[xy, z_1, \ldots, z_n] = \sum [x, z_{i_1}, \ldots, z_{i_r}][y, z_{i_{r+1}}, \ldots, z_{i_n}]$$

dove la sommatoria si estende su tutte le coppie $((i_1, \ldots, i_r), (i_{r+1}, \ldots, i_n))$ tali che $0 \le r \le n$, $i_1 < \cdots < i_r$, $i_{r+1} < \cdots < i_n$, $i_j \ne i_k$ se $j \ne k$.[37] Delle molte applicazioni di questa formula una utile è questa: Se T è una sottoalgebra nilpotente di Lie e $k \in \mathbb{N}$ tale che $[T, \underset{k}{\ldots}, T] = \{0_A\}$, $n \ge 2k$, allora $[xy, z_1, \ldots, z_n] = 0_A$ per ogni $x, y, z_1, \ldots, z_n \in T$. Ora sia $m \in \mathbb{N}_0$ minimale tale che $[xy, T, \underset{m}{\ldots}, T] \subseteq T$. Segue che, se $m > 0$, allora $[xy, T, \underset{m-1}{\ldots}, T] \subseteq N_A(T)$. Nel caso di una sottoalgebra *di Cartan* T quest'ultimo implicherebbe che $[xy, T, \underset{m-1}{\ldots}, T] \subseteq T$, assurdo per la definizione di m. Concludiamo allora che $m = 0$, cioè, che $ab \in T$. Abbiamo dimostrato:

---

[36] v. il caso speciale di 2.1

[37] Il caso $n = 1$ esprime il fatto che per ogni elemento z l'applicazione $y \mapsto [y, z]$ è una derivazione dell'algebra associativa data.

A.2. Proposizione. *Se A è un'algebra associativa, allora ogni sottoalgebra di Cartan di A è una sottoalgebra associativa di A.* □

A.3. Teorema (Siciliano (2006)). *Sia $D \in \mathcal{B}(K)$, $L \subseteq D$. Sono equivalenti*

(i) *L è un sottocampo massimale di D e separabile su K.*
(ii) *L è un sottocampo di D tale che $L = N_D(L)$.*[38]
(iii) *L è una sottoalgebra di Cartan di D* [38].

Dimostrazione. (i)⇒(ii) Se $x \in N_D(L)$, allora l'applicazione $L \to L$, $y \mapsto [y, x]$, è una derivazione K-lineare di L. Per A.1 ne segue che $x \in C_D(L)$, quindi $x \in L$ per 2.4.

(ii)⇒(iii) è banale.

(iii)⇒(i) Se vale (iii), allora L è sottoalgebra associativa di D per A.2, quindi un'algebra di divisione per 1.3(1) e per 3.11 commutativa. Pertanto L è un sottocampo di A che deve essere massimale per (iii). Per dimostrare la separabilità consideriamo un'estensione algebricamente chiusa $\bar{L}$ di L. Allora vale $L \underset{K}{\otimes} \bar{L} \cong \{diag[x_1, \ldots, x_n] | x_i \in \bar{L}\}$ per 3.5.1 e 1.13.2, applicando le due proposizioni riportate prima di A.2. Evidentemente $L \underset{K}{\otimes} L$ è L-sottoalgebra di $L \underset{K}{\otimes} \bar{L}$, quindi è priva di elementi nilpotenti non nulli. Ne segue che $L \underset{K}{\otimes} L$ è semisemplice, e per la proposizione prima di A.1 la dimostrazione è completa. □

È ben noto che ogni algebra di Lie associata ad un'algebra associativa di dimensione finita ha una sottoalgebra di Cartan. Dunque il risultato A.3 (più precisamente: la implicazione (iii)⇒(i)) comporta una dimostrazione alternativa – tramite alcuni risultati della teoria delle algebre di Lie – di 3.14. È da notare, però, che si basa sulla parte meno banale di A.3, e ulteriormente che fa uso della proposizione 3.11 che può essere vista come il nocciolo dell'idea della dimostrazione presentata nel 3^o capitolo. Nonostante ciò, il legame stabilito in A.3 (v. [**Sic**]) certamente merita riconoscimento. Si tratta di una scoperta che senza dubbio sarebbe piaciuta molto a Emmy Noether.

[38] D come algebra di Lie, con il «Lie bracket» come moltiplicazione.