

CAPITOLO 4

Semicontinuità forte-debole su spazi prodotto

In questo capitolo dimostriamo risultati di semicontinuità per funzionali del tipo $\mathcal{F}[u, v] := \int_{\Omega} F(x, u(x), v(x)) dx$ con $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{\nu} \rightarrow \mathbb{R}$, (cfr. teoremi 4.3.4 e 4.4.1) particolarmente utili per dimostrare teoremi di esistenza in *teoria del controllo ottimale*: in tale contesto $\mathcal{F}[u, v]$ rappresenta il costo totale da minimizzare e si interpreta u come stato del sistema e v come la funzione di controllo, usualmente legate da una equazione differenziale.

Nei problemi classici del Calcolo delle Variazioni è $v = \nabla u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\nu}$ con $\nu = n \times N$.

4.1. Risultati di De Giorgi e di Ioffe.

L'ipotesi (i) del teorema 3.3.1 di Morrey può essere indebolita. A tal fine premettiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 4.1.1. Diciamo che una funzione $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ è di Carathéodory se:

- (i) $g(x, y)$ è misurabile in x per ogni $y \in \mathbb{R}^k$;
- (ii) $g(x, y)$ è continua in y per q.o. $x \in \Omega$.

Il lemma che segue garantisce che i funzionali (integrali) variazionali che considereremo nel seguito sono ben definiti sugli spazi di Sobolev.

LEMMA 4.1.2.

Sia $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Allora, per ogni funzione misurabile $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, la funzione composta

$$x \mapsto g(x, w(x))$$

è misurabile in Ω .

DIM. Poiché w è misurabile esiste una successione di funzioni semplici s_j

$$s_j(x) = \sum_{i=1}^{l_j} \lambda_i \chi_{A_i}(x)$$

dove λ_i ($i = 1, \dots, l_j$) sono numeri reali e χ_{A_i} sono le funzioni caratteristiche di A_1, A_2, \dots, A_{l_j} insiemi misurabili e disgiunti con $\bigcup_{i=1}^{l_j} A_i = \Omega$, tale che $\lim_{j \rightarrow +\infty} s_j(x) = w(x)$ q.o. in Ω .

Osservato che per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{x \in \Omega : g(x, s_j(x)) > a\} = \bigcup_{i=1}^{l_j} \{x \in A_i : g(x, \lambda_i) > a\}$$

è misurabile (essendo g misurabile in x), deduciamo che $g(x, s_j(x))$ è misurabile.

Poiché g è continua rispetto alla seconda variabile risulta

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} g(x, s_j(x)) = g(x, w(x))$$

per q.o. $x \in \Omega$. Ne segue che $g(x, w(x))$ è misurabile (cfr. osservazione 1.1.6(iii)). \square

4.2. Funzionali convessi e sequenziale debole semicontinuità inferiore.

Allo scopo di pervenire alla s.c.i. forte-debole in spazi prodotto (teorema 4.3.4) proviamo preliminarmente due proposizioni e facciamo delle considerazioni conseguenti (osservazione (4.2.3)).

PROPOSIZIONE 4.2.1. *Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$ una Lagrangiana tale che*

- (i) $F(x, y)$ è di Carathéodory.

Sia $\{y_h\}$ una successione tale che $y_h \rightarrow y$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Allora

$$\int_{\Omega} F(x, y(x)) dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, y_h(x)) dx.$$

(cioè, $\int_{\Omega} F(x, y(x)) dx$ è seq. fortemente s.c.i. in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$).

DIM. L'integrale $\int_{\Omega} F(x, y(x)) dx$ è ben definito per il lemma 4.1.2. Sia $\{y_{h_j}\}$ una successione estratta da $\{y_h\}$ tale che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, y_{h_j}(x)) dx = \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, y_h(x)) dx. \quad (4.36)$$

Poiché, ovviamente, $y_{h_j} \rightarrow y$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ risulta, a meno di estratte, $y_{h_j}(x) \rightarrow y(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.

Per la continuità di $F(x, \cdot)$ si ha:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} F(x, y_{h_j}(x)) = F(x, y(x)) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega. \quad (4.37)$$

Allora, per il lemma di Fatou (teorema 1.1.10), risulta:

$$\int_{\Omega} \liminf_{j \rightarrow +\infty} F(x, y_{h_j}(x)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, y_{h_j}(x)) dx$$

e quindi, da (4.37) e (4.36) segue

$$\int_{\Omega} F(x, y(x)) dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, y_h(x)) dx.$$

□

PROPOSIZIONE 4.2.2. *Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$ una Lagrangiana tale che*

- (i) $F(x, y)$ è di Carathéodory;
- (ii) $y \mapsto F(x, y)$ è convessa per q.o. $x \in \Omega$.

Sia $\{y_h\}$ una successione tale che $y_h \rightharpoonup y$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Allora

$$\int_{\Omega} F(x, y(x)) dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, y_h(x)) dx.$$

(cioè, $\int_{\Omega} F(x, y(x)) dx$ è seq. deb. s.c.i. in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$).

DIM. Basta applicare il corollario 1.6.7 tenendo conto della proposizione 4.2.1. □

OSSERVAZIONE 4.2.3. Nella precedente proposizione 4.2.2 si vede il ruolo svolto dalla convessità nel passaggio dalla topologia forte, proposizione 4.2.1, alla topologia debole.

Peraltro la convessità di $F(x, \cdot)$ si traduce, nel caso del funzionale

$$\mathcal{F}[u, v] = \int_{\Omega} F(x, u(x), v(x)) dx,$$

nella convessità di $F(x, u, v)$ nella coppia (u, v) , che è ancora un'ipotesi troppo forte nelle applicazioni, per cui il risultato precedente è significativo nel caso in cui $F = F(x, v)$, cioè la Lagrangiana è indipendente da u .

D'altra parte, per il corollario 1.3.20 del teorema di compattezza di Rellich-Kondrachov 1.3.16, la convergenza debole delle derivate implica la convergenza forte delle funzioni. Nel caso $v = \nabla u$, questo suggerisce che mentre da un lato, dovendo limitarci alla convergenza debole delle derivate, la convessità della Lagrangiana $F(x, u, v)$ rispetto alla variabile v sia in qualche modo essenziale per la semicontinuità, dall'altro si possa usare la convergenza forte per le funzioni, e dunque limitarsi a supporre la sola continuità rispetto alla variabile u .

4.3. Teorema di semicontinuità di De Giorgi.

Iniziamo con un primo risultato in cui la Lagrangiana F è assunta molto regolare.

PROPOSIZIONE 4.3.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) aperto limitato, $M \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso ($N \geq 1$) e sia $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ ($\nu \geq 1$) una Lagrangiana tale che*

- (i) $F(x, u, v)$ e $F_v(x, u, v)$ (cioè $F_{v^i}(x, u, v)$, $i = 1, \dots, \nu$) sono continue in $\Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu$;
- (ii) $F(x, u, v) \geq 0$;
- (iii) $v \mapsto F(x, u, v)$ è convessa in \mathbb{R}^ν per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $u \in M$.

Allora il funzionale $\mathcal{F}[u, v]$ è per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ seq. s.c.i. nello spazio prodotto $L^1_{forte}(\Omega', M) \times L^1_{debole}(\Omega', \mathbb{R}^\nu)$.

DIM. Sia $\{u_h\}$ una successione di $L^1(\Omega, M)$ ¹, $u_h \rightarrow u$ in $L^1(\Omega, M)$, e $\{v_h\}$ una successione di $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, $v_h \rightharpoonup v$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$. Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$. Per i teoremi di Severini-Egorov 1.1.14, di Lusin 1.1.15 e dell'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega'$ con $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \varepsilon$ tale che $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε , u e v sono continue in K_ε e

$$\int_{K_\varepsilon} F(x, u, v) dx \geq \int_{\Omega'} F(x, u, v) dx + O(\varepsilon).$$

¹ $u \in L^1(\Omega, M)$ significa che $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $u(x) \in M$ per q.o. $x \in \Omega$.

Per l'ipotesi (iii) di convessità di F in v , abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{K_\varepsilon} F(x, u_h, v_h) dx &\geq \int_{K_\varepsilon} F(x, u_h, v) dx + \int_{K_\varepsilon} F_{v^i}(x, u_h, v) (v_h^i - v^i) dx \\ &= \int_{K_\varepsilon} F(x, u_h, v) dx + \int_{K_\varepsilon} \underbrace{F_{v^i}(x, u, v)}_{\text{limitata}} (v_h^i - v^i) dx \\ &\quad + \int_{K_\varepsilon} \underbrace{[F_{v^i}(x, u_h, v) - F_{v^i}(x, u, v)]}_{\rightarrow 0} (v_h^i - v^i) dx. \end{aligned}$$

Se si passa al limite per $h \rightarrow +\infty$, il primo integrale a secondo membro tende a $\int_{K_\varepsilon} F(x, u, v) dx$ in virtù della continuità di $F(x, \cdot, v)$ e del fatto che $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε .

Dall'ipotesi (i), poiché u e v sono continue su K_ε , risulta $F_{v^i}(x, u, v)$ limitata su K_ε , pertanto il secondo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} F_{v^i}(x, u, v) (v_h^i - v^i) dx \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow +\infty.$$

Poiché le funzioni $(v_h^i - v^i)$ sono equilimitate in norma $L^1(\Omega')$ e $F_{v^i}(x, u_h, v) - F_{v^i}(x, u, v)$ converge uniformemente a zero su K_ε per $h \rightarrow +\infty$, abbiamo che anche il terzo integrale

$$\int_{K_\varepsilon} [F_{v^i}(x, u_h, v) - F_{v^i}(x, u, v)] (v_h^i - v^i) dx \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow +\infty.$$

In definitiva abbiamo

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{K_\varepsilon} F(x, u_h, v_h) dx \geq \int_{K_\varepsilon} F(x, u, v) dx \geq \int_{\Omega'} F(x, u, v) dx + O(\varepsilon).$$

Poiché $F \geq 0$ ed essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, abbiamo

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, u_h, v_h) dx \geq \int_{\Omega'} F(x, u, v) dx;$$

prendendo l'estremo superiore al variare di $\Omega' \subset \subset \Omega$, otteniamo la tesi. \square

Per indebolire l'ipotesi (i) di continuità per F e F_v richiesta nella proposizione 4.3.1, premettiamo i seguenti lemmi.

LEMMA 4.3.2. *Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ aperto, con $|\Sigma| < +\infty$, e sia $\{v_h\}$ una successione convergente debolmente in $L^m(\Sigma)$ ($m > 1$) a una funzione v . Posto, per $L > 0$,*

$$v^L := \begin{cases} v & \text{se } |v| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases},$$

si ha che per ogni intero L esistono una sottosuccessione $\{v_{h_j}\}$ e una funzione z^L tale che $v_{h_j}^L \rightharpoonup z^L$ in $L^2(\Sigma)$. Inoltre, per $L \rightarrow +\infty$, la successione $\{z^L\}$ tende a v in $L^1(\Sigma)$.

DIM. La successione $\{v_h^L\}$ è limitata, quindi lo è, in particolare, in $L^2(\Sigma)$, perché $|v_h^L| \leq L$ e $|\Sigma| < +\infty$; allora da essa possiamo estrarre una sottosuccessione (che indichiamo per brevità con $\{v_h^L\}$) debolmente convergente ad una funzione $z^L \in L^2(\Sigma)$. Questo è possibile perché $L^2(\Sigma)$ è uno spazio di Hilbert, quindi riflessivo.

Sia ora $\varphi \in L^\infty(\Sigma)$ e poniamo $\Sigma_{h,L} := \{x \in \Sigma : |v_h(x)| > L\}$. Abbiamo:

$$\int_{\Sigma} (v_h - v_h^L) \varphi dx = \int_{\Sigma_{h,L}} v_h \varphi dx \leq \sup_{\Sigma} |\varphi| \int_{\Sigma_{h,L}} |v_h| dx. \quad (4.38)$$

Per la disuguaglianza di Chebyshev 1.2.2 abbiamo:

$$|\Sigma_{h,L}| \leq \left(\frac{\|v_h\|_{L^m(\Sigma)}}{L} \right)^m \leq cL^{-m}, \text{ essendo } \|v_h\|_{L^m(\Sigma)} \leq c \text{ (indipendente da$$

h) poiché v_h converge debolmente in $L^m(\Sigma)$. Applicando la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\int_{\Sigma_{h,L}} |v_h| dx \leq |\Sigma_{h,L}|^{1-\frac{1}{m}} \|v_h\|_{L^m(\Sigma)}.$$

In conclusione possiamo asserire che, fissato $\varepsilon > 0$, l'integrale $\int_{\Sigma_{h,L}} |v_h| dx$ può essere reso minore di ε prendendo L sufficientemente grande ma indipendente da h . A questo punto in (4.38) passiamo al limite per $h \rightarrow +\infty$ e, tenendo conto che $v_h \rightarrow v$ e che $v_h^L \rightarrow z^L$, otteniamo

$$\int_{\Sigma} (v - z^L) \varphi dx \leq \varepsilon \sup |\varphi|$$

per ogni $\varphi \in L^\infty(\Sigma)$ e per $L > L(\varepsilon)$.

Scelta ora $\varphi = H(v - z^L)$ dove H è la funzione di Heaviside, risulta:

$$\int_{\Sigma} |v - z^L| dx \leq \varepsilon \quad \forall L > L(\varepsilon).$$

Pertanto $z^L \rightarrow v$ in $L^1(\Sigma)$. □

LEMMA 4.3.3. *Siano $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto, $M \subset \mathbb{R}^N$ chiuso e sia $F : K \times M \times \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che*

- (i) $F(x, u, v)$ è continua in $K \times M \times \mathbb{R}^\nu$;
- (ii) $F(x, u, v) \geq 0$;
- (iii) $v \mapsto F(x, u, v)$ è convessa in \mathbb{R}^ν per ogni $(x, u) \in K \times M$.

Se $u_h \rightrightarrows u$ in K e $v_h \rightarrow v$ in $L^m(K, \mathbb{R}^\nu)$, con $m > 1$, risulta

$$\int_K F(x, u, v) dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_K F(x, u_h, v_h) dx.$$

DIM. Possiamo supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che la successione degli integrali $\int_K F(x, u_h, v_h) dx$ abbia limite.

Sia $\sup_h \|u_h\|_{L^\infty(K, M)} \leq R$ e sia $M_R = M \cap \overline{B}_R$. Dalla proposizione 4.2.2 e dal lemma 4.3.2 deduciamo

$$\int_K F(x, u, v) dx \leq \liminf_{L \rightarrow +\infty} \int_K F(x, u, z^L) dx \quad (4.39)$$

e

$$\int_K F(x, u, z^L) dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_K F(x, u, v_h^L) dx. \quad (4.40)$$

D'altra parte, poiché $F \geq 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_K F(x, u, v_h^L) dx &= \int_K F(x, u_h, v_h^L) dx + \int_K [F(x, u, v_h^L) - F(x, u_h, v_h^L)] dx \\ &= \int_{K \setminus K_{h,L}} F(x, u_h, v_h) dx + \int_{K_{h,L}} F(x, u_h, 0) dx \\ &\quad + \int_K [F(x, u, v_h^L) - F(x, u_h, v_h^L)] dx \\ &\leq \int_K F(x, u_h, v_h) dx + \int_{K_{h,L}} F(x, u_h, 0) dx \\ &\quad + \int_K [F(x, u, v_h^L) - F(x, u_h, v_h^L)] dx \end{aligned} \quad (4.41)$$

dove $K_{h,L} := \{x \in K : |v_h(x)| > L\}$.

Per $h \rightarrow +\infty$ il terzo integrale nell'ultimo membro di (4.41) tende a zero poiché F è uniformemente continua sul compatto $K \times M_R \times \overline{B}_L^\nu$ e $u_h \rightrightarrows u$ in K .

Per il secondo integrale sempre nell'ultimo membro di (4.41) abbiamo la maggiorazione indipendente da h :

$$\begin{aligned} \int_{K_{h,L}} F(x, u_h, 0) dx &\leq \sup_{K \times M_R} F(x, u, 0) \cdot |K_{h,L}| \quad (4.42) \\ &\leq \sup_{K \times M_R} F(x, u, 0) \cdot \left(\frac{\sup \|v_h\|_{L^m(K, \mathbb{R}^\nu)}}{L} \right)^m, \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Chebyshev 1.2.2. In definitiva, da (4.40), (4.41) e (4.42), otteniamo

$$\begin{aligned} \int_K F(x, u, z^L) dx &\leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_K F(x, u_h, v_h) dx \\ &\quad + \sup_{K \times M_R} F(x, u, 0) \cdot \left(\frac{\sup \|v_h\|_{L^m(K, \mathbb{R}^\nu)}}{L} \right)^m, \end{aligned}$$

da cui la tesi per $L \rightarrow +\infty$, tenuto conto di (4.39). \square

A questo punto passiamo a dimostrare il teorema principale di questo capitolo.

TEOREMA 4.3.4 (SEMICONTINUITÀ INFERIORE, DE GIORGI, 1968 [23]).
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) aperto limitato, $M \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso ($N \geq 1$) e sia $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ ($\nu \geq 1$) una Lagrangiana tale che

- (i) $F(x, u, v)$ è di Carathéodory (cioè misurabile in x per ogni $(u, v) \in M \times \mathbb{R}^\nu$ e continua in (u, v) per q.o. $x \in \Omega$);
- (ii) $F(x, u, v) \geq 0$;
- (iii) $v \mapsto F(x, u, v)$ è convessa in \mathbb{R}^ν per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $u \in M$.

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u, v] = \int_{\Omega} F(x, u(x), v(x)) dx$$

è seq. s.c.i. nello spazio prodotto $L^1(\Omega, M) \times L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ dove $L^1(\Omega, M)$ è dotato della topologia forte e $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ è dotato della topologia debole. (i.e. se $\{u_h\}$, $u \in L^1(\Omega, M)$ e $u_h \rightarrow u$ in $L^1_{loc}(\Omega, M)$ e se $\{v_h\}$, $v \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ e $v_h \rightarrow v$ in $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, allora

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u, v] &= \int_{\Omega} F(x, u(x), v(x)) dx \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, u_h(x), v_h(x)) dx = \liminf_{h \rightarrow \infty} \mathcal{F}[u_h, v_h]. \end{aligned}$$

DIM. Siano $\{u_h\}$ una successione di $L^1(\Omega, M)$, $u_h \rightarrow u$ in $L^1_{loc}(\Omega, M)$, e $\{v_h\}$ una successione di $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, $v_h \rightarrow v$ in $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$. Possiamo supporre (a meno di estratte) che esista

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, u_h, v_h) dx =: \lambda$$

e che $u_h \rightarrow u$ q.o. in Ω .

Sia $\Omega' \subset \subset \Omega$. Per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $\Sigma \subset \Omega'$ e $|\Sigma| < \delta_\varepsilon$ allora risulta ²

$$\int_{\Sigma} F(x, u, v) dx < \varepsilon.$$

²Se $\int_{\Omega'} F(x, u, v) dx = +\infty$, $\int_{\Omega' \setminus \Sigma} F(x, u, v) dx > \frac{1}{\varepsilon}$.

Dai teoremi di Lusin 1.1.15 e di Severini-Egorov 1.1.14 e dal teorema di Scorza Dragoni 1.1.16 abbiamo che esistono un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega'$ e un numero reale $R > 0$, tali che $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \delta_\varepsilon$ e

- a. $u_h, u \in C^0(K_\varepsilon, M)$, $\sup_{K_\varepsilon} |u| \leq R$, $\sup_{K_\varepsilon} |u_h| \leq R$;
- b. $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε ;
- c. $F(x, u, v)$ ha restrizione continua in $K_\varepsilon \times M \times \mathbb{R}^\nu$.

Dal lemma 4.3.3 otteniamo

$$\int_{K_\varepsilon} F(x, u, v) dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{K_\varepsilon} F(x, u_h, v_h) dx \leq \lambda$$

e quindi ³

$$\int_{\Omega'} F(x, u, v) dx < \lambda + \varepsilon$$

(infatti, poiché $|\Omega' \setminus K_\varepsilon| < \delta_\varepsilon$, risulta $\int_{\Omega' \setminus K_\varepsilon} F(x, u, v) dx < \varepsilon$ e quindi

$$\int_{\Omega'} F(x, u, v) dx = \int_{\Omega' \setminus K_\varepsilon} F(x, u, v) dx + \int_{K_\varepsilon} F(x, u, v) dx < \varepsilon + \lambda \quad).$$

Ciò implica, poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, che $\int_{\Omega'} F(x, u, v) dx \leq \lambda$ per ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$, e dunque la tesi. \square

OSSERVAZIONE 4.3.5. Nel teorema 4.3.4 possiamo indebolire ulteriormente l'ipotesi (i) richiedendo:

- (i') $x \mapsto F(x, u, v)$ è misurabile per ogni (u, v) e
 $u \mapsto F(x, u, v)$ è continua per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $v \in \mathbb{R}^\nu$,

in quanto con l'ipotesi (iii) di convessità in v , deduciamo che $(u, v) \mapsto F(x, u, v)$ è continua per q.o. $x \in \Omega$ ⁴.

In particolare dal teorema 4.3.4 segue il seguente risultato di debole semi-continuità inferiore per il funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx$.

³Se $\int_{\Omega'} F(x, u, v) dx = +\infty$ risulta $\frac{1}{\varepsilon} < \int_{K_\varepsilon} F(x, u, v) dx \leq \lambda$ e dunque $\lambda = +\infty$.

⁴LEMMA. Sia $f(u, v)$ continua rispetto ad $u \in \mathbb{R}^N$ per ogni $v \in \mathbb{R}^\nu$ e convessa rispetto a $v \in \mathbb{R}^\nu$ per ogni $u \in \mathbb{R}^N$. Allora f è continua in v uniformemente rispetto ad u e quindi è continua globalmente in $(u, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu$.

COROLLARIO 4.3.6 (SEMICONTINUITÀ INFERIORE).

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) aperto limitato e $M \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) chiuso e sia $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^{n \times N} \rightarrow \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che

- (i) $F(x, u, p)$ è di Carathéodory;
- (ii) $F(x, u, p) \geq 0$;
- (iii) $p \mapsto F(x, u, p)$ è convessa in $\mathbb{R}^{n \times N}$ per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $u \in M$.

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

è seq. deb. s.c.i. in $W_{loc}^{1,1}(\Omega, M)$.

DIM. Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ con $\partial\Omega'$ lipschitziana e sia $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,1}(\Omega', M)$. Allora, per il corollario 1.3.20 del teorema di Rellich-Kondrachov, $u_h \rightarrow u$ in $L^1(\Omega', M)$. Scegliendo $v_h = \nabla u_h$ nel teorema 4.3.4, otteniamo la tesi. \square

OSSERVAZIONE 4.3.7. Se l'aperto Ω non è limitato, il teorema 4.3.4 e il corollario 4.3.6 continuano a sussistere, osservato che

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, u_h, v_h) dx &\geq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \cap B_R} F(x, u_h, v_h) dx \\ &\geq \int_{\Omega \cap B_R} F(x, u, v) dx \end{aligned}$$

e passando poi al limite per $R \rightarrow +\infty$.

OSSERVAZIONE 4.3.8. Usando la disuguaglianza di Hölder e l'osservazione 4.3.7 segue che nel teorema 4.3.4 alla topologia

$L_{loc}^1(\Omega, M)_{\text{forte}} \times L_{loc}^1(\Omega, \mathbb{R}^{\nu})_{\text{debole}}$ si può sostituire quella di $L_{loc}^t(\Omega, M)_{\text{forte}} \times L_{loc}^m(\Omega, \mathbb{R}^{\nu})_{\text{debole}}$ con $t \geq 1$ ed $m > 1$ e supporre, al posto della condizione (ii) $F(x, u, v) \geq 0$, la condizione più generale

$$F(x, u, v) \geq -c \left(|v|^r + |u|^t \right) - h(x)$$

con $h \in L^1(\Omega)$, $c > 0$ ed $1 \leq r < m$.

4.4. Teorema di semicontinuità di Ioffe.

Generalizzazione del precedente teorema 4.3.4 è il seguente risultato che per brevità riportiamo senza dimostrazione (cfr. [45]).

TEOREMA 4.4.1 (SEMICONTINUITÀ INFERIORE, IOFFE, 1977 [5] [6]).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) aperto e sia

$F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{\nu} \rightarrow \mathbb{R}$ ($N, \nu \geq 1$) una Lagrangiana tale che

- (i) $F(x, u, v)$ è $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^\nu)$ -misurabile ⁵ e per \mathcal{L}^n q.o. $x \in \Omega$ $(u, v) \mapsto F(x, u, v)$ è s.c.i. in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\nu$ (cioè F è una funzione normale);
- (ii) $F(x, u, v) \geq 0$;
- (iii) $v \mapsto F(x, u, v)$ è convessa in \mathbb{R}^ν per \mathcal{L}^n q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $u \in \mathbb{R}^N$.

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u, v] = \int_{\Omega} F(x, u(x), v(x)) dx$$

è seq. s.c.i. nello spazio prodotto $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \times L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ dove $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è dotato della topologia forte e $L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ è dotato della topologia debole (i.e. se $\{u_h\}$, $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $u_h \rightarrow u$ in $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e se $\{v_h\}$, $v \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, $v_h \rightarrow v$ in $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, allora

$$\int_{\Omega} F(x, u(x), v(x)) dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, u_h(x), v_h(x)) dx \quad).$$

In [45] è anche provato che la semicontinuità di $(u, v) \mapsto F(x, u, v)$ e la convessità di $v \mapsto F(x, u, v)$ sono necessarie per la s.c.i..

ESEMPIO 4.4.2 (IOFFE, 1977). Il teorema di semicontinuità inferiore 4.3.4 esteso come espresso nell'osservazione 4.3.8, non sussiste per $r = m$, nemmeno in dimensione uno.

Per dimostrare ciò, consideriamo il funzionale

$$\mathcal{F}[u, v] = \int_0^1 \left(\left| \frac{u}{x} \right|^{m'} \cdot \frac{1}{m'} + \frac{u}{x} v \right) dx,$$

e le successioni

$$u_h(x) = \begin{cases} x h^{1/m'} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{h} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{h} \leq x < 1, \end{cases}$$

$$v_h(x) = \begin{cases} -h^{1/m} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{h} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{h} \leq x < 1, \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1 \right).$$

Risulta $F(x, u, v) \geq -\frac{|v|^m}{m}$ (in quanto per la disuguaglianza di Young

⁵ $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ indica la σ -algebra dei sottoinsiemi di \mathbb{R}^n misurabili secondo Lebesgue; $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ indica la σ -algebra dei sottoinsiemi di Borel di \mathbb{R}^k .

$|v| \left| \frac{u}{x} \right| \leq \frac{|v|^m}{m} + \left| \frac{u}{x} \right|^{m'} \cdot \frac{1}{m'}$, e inoltre $u_h \rightrightarrows 0$, e $v_h \rightharpoonup 0$ in $L^m((0,1))$.
D'altra parte $\mathcal{F}[0,0] = 0$, mentre $\mathcal{F}[u_h, v_h] = -\frac{1}{m}$.

4.5. Teorema di esistenza e unicità dei minimi per problemi variazionali.

Vediamo come il corollario 4.3.6 di semicontinuità inferiore per il funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx$ con Lagrangiana $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^{n \times N} \rightarrow \mathbb{R}$ può essere utilizzato per dimostrare l'esistenza di minimi per $\mathcal{F}[\cdot]$.

Per il teorema di Weierstrass-Fréchet 3.1.1 sarà sufficiente provare che esiste una successione minimizzante che converge nella topologia debole di $W_{loc}^{1,1}(\Omega, M)$. Lo spazio $W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ non è riflessivo e quindi in generale poco adatto allo scopo; tuttavia, poiché una successione che converge debolmente in $W_{loc}^{1,m}(\Omega, M)$ ($m > 1$) è anche debolmente convergente in $W_{loc}^{1,1}(\Omega, M)$, sarà sufficiente trovare una successione minimizzante che converge debolmente in $W_{loc}^{1,m}(\Omega)$ per qualche $m > 1$. Poiché quest'ultimo è uno spazio riflessivo, basterà trovare una successione minimizzante limitata in $W_{loc}^{1,m}(\Omega)$ per qualche $m > 1$.

Sussiste il seguente risultato (più generale del teorema 3.3.2).

TEOREMA 4.5.1 (ESISTENZA PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET).

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) aperto limitato, $M \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) chiuso e sia $F : \Omega \times M \times \mathbb{R}^{n \times N} \rightarrow \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che il funzionale

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx \text{ sia seq. deb. s.c.i. in } W_{loc}^{1,m}(\Omega, M), m > 1 \quad 6.$$

Sia inoltre $F(x, u, p) \geq c|p|^m$ ($c = \text{costante} > 0, m > 1$) per ogni (x, u, p) (cioè $F(x, u, p)$ ha crescita superlineare per $|p| \rightarrow +\infty$).

Allora esiste il minimo di

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_{\varphi} = \left\{ u \in W^{1,m}(\Omega, M), u - \varphi \in W_0^{1,m}(\Omega, M) \right\}$$

assegnata $\varphi \in W^{1,m}(\Omega, M)$ con $\mathcal{F}[\varphi] < +\infty$.

DIM. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 3.3.2. □

⁶Per questo è sufficiente che la Lagrangiana soddisfi le condizioni (i), (ii) e (iii) del corollario 4.3.6

In generale si può richiedere di trovare il minimo del funzionale $\mathcal{F}[\cdot]$ tra tutte le funzioni che verificano opportune condizioni (non necessariamente di tipo Dirichlet), o, se si vuole, che appartengano ad un sottoinsieme \mathcal{A} (in generale non sequenzialmente compatto) dello spazio $W^{1,m}(\Omega, M)$. \mathcal{A} dovrà essere chiuso nella topologia debole di $W^{1,m}(\Omega, M)$ se si vuole che il limite di una successione di funzioni di \mathcal{A} appartenga ad \mathcal{A} , o in altre parole che il limite verifichi le condizioni richieste.

Il metodo diretto nel Calcolo delle Variazioni è basato sul seguente teorema.

TEOREMA 4.5.2 (ESISTENZA).

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) aperto, $M \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) chiuso e sia

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx \text{ un funzionale seq. deb. s.c.i. in } W_{loc}^{1,m}(\Omega, M),$$

$m > 1$. Sia \mathcal{A} un sottoinsieme debolmente chiuso di $W^{1,m}(\Omega, M)$, e supponiamo che

$$\lim_{\substack{\|u\|_{W^{1,m}(\Omega, M)} \rightarrow +\infty \\ u \in \mathcal{A}}} \mathcal{F}[u] = +\infty$$

(cioè $\mathcal{F}[\cdot]$ sia coercivo in \mathcal{A}).

Allora $\mathcal{F}[\cdot]$ ammette minimo in \mathcal{A} .

OSSERVAZIONE 4.5.3. In sintesi, da quanto visto emerge che la *convessità* è usata per dimostrare la *debole semicontinuità inferiore*, mentre la *coercività* garantisce la *compattezza*.

Possiamo schematizzare con le implicazioni

(convessità + forte s.c.i.)

↓

DEB. S.C.I. + COERCIVITÀ ⇒ ESISTENZA DEI MINIMI.

↓

(compattezza)

In generale possono esistere più minimi, pertanto per assicurare l'unicità richiediamo ulteriori ipotesi.

Sussiste il seguente risultato:

TEOREMA 4.5.4 (UNICITÀ DEI MINIMI).

Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^{n \times N} \rightarrow \mathbb{R}$ una Lagrangiana tale che $F = F(x, p) \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^{n \times N})$ (F non dipendente da u); supponiamo inoltre che $p \mapsto F(x, p)$ sia uniformemente convessa per ogni $x \in \Omega$. Allora se esiste un minimo $u \in \mathcal{A}_{\varphi}$ di

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} F(x, \nabla u(x)) dx \text{ esso è unico.}$$

DIM. Siano u, \tilde{u} entrambi minimi di $\mathcal{F}[\cdot]$ in \mathcal{A}_φ . Allora $v := \frac{u + \tilde{u}}{2} \in \mathcal{A}_\varphi$. Per l'ipotesi di uniforme convessità esiste $\theta > 0$ tale che

$$F_{p_\alpha p_\beta}(x, p) \xi_\alpha \xi_\beta \geq \theta |\xi|^2 \quad (p, \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega),$$

pertanto

$$F(x, p) \geq F(x, q) + F_p(x, q) \cdot (p - q) + \frac{\theta}{2} |p - q|^2 \quad (p, q \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega).$$

Posto $q = \frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2}$, $p = \nabla u$, e integrando su Ω abbiamo

$$\mathcal{F}[u] \geq \mathcal{F}[v] + \int_\Omega F_p \left(x, \frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\nabla u - \nabla \tilde{u}}{2} \right) dx + \frac{\theta}{8} \int_\Omega |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 dx.$$

Analogamente, posto $q = \frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2}$, $p = \nabla \tilde{u}$, otteniamo

$$\mathcal{F}[\tilde{u}] \geq \mathcal{F}[v] + \int_\Omega F_p \left(x, \frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\nabla \tilde{u} - \nabla u}{2} \right) dx + \frac{\theta}{8} \int_\Omega |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 dx.$$

Sommando e dividendo per 2, deduciamo che

$$\frac{\mathcal{F}[u] + \mathcal{F}[\tilde{u}]}{2} \geq \mathcal{F}[v] + \frac{\theta}{8} \int_\Omega |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 dx.$$

Poiché $\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[\tilde{u}] = \min_{w \in \mathcal{A}_\varphi} \mathcal{F}[w] \leq \mathcal{F}[v]$, deduciamo che $\nabla u = \nabla \tilde{u}$ q.o. in Ω . Per la disuguaglianza di Poincaré 1.3.7, segue che $u = \tilde{u}$ q.o. in Ω . \square

4.6. Un risultato di esistenza nella teoria del controllo ottimo.

I Problemi di controllo ottimo (cfr. ad esempio [50]) sono problemi di minimo che descrivono il comportamento di sistemi che possono essere modificati dall'azione di un operatore; pertanto è presente una coppia di variabili (u, v) : una, la *variabile di stato* u descrive lo stato del sistema e non può essere modificata dall'azione diretta dell'operatore, invece l'altra, la *variabile di controllo* v , è sotto il controllo diretto dell'operatore che, per raggiungere un fissato obiettivo, può scegliere la strategia tra quelle ammissibili, operando sulla variabile di controllo attraverso una *equazione di stato*.

Lo scopo è perseguito attraverso un problema di minimo di un *funzionale costo* che dipende da (u, v) .

Diamo qui un esempio di applicazione del teorema di s.c.i. 4.3.4 in teoria dei controlli.

ESEMPIO 4.6.1. *Sia (il funzionale di costo totale)*

$$\mathcal{F}[u, v] := \int_\Omega |v(x)|^2 dx + \int_\Omega g(u(x) - U(x)) dx,$$

dove Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^n con frontiera lipschitziana, U rappresenta uno “stato obiettivo” e $g \geq 0$ è continua.

Supponiamo che per mezzo della funzione di controllo v , il conseguente stato u sia governato dall’equazione di stato

$$\begin{cases} \Delta u = v & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

L’integrale $\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx$ può interpretarsi come il costo del controllo v ,

mentre l’integrale $\int_{\Omega} g(u(x) - U(x)) dx$ rappresenta il prezzo da pagare se non si raggiunge lo stato obiettivo U .

Consideriamo allora il problema

$$\min_{(u,v) \in W^{2,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)} \{ \mathcal{F}[u, v]; \Delta u = v \text{ in } \Omega, u = 0 \text{ su } \partial\Omega \}.$$

Per il teorema 4.3.4 il funzionale \mathcal{F} è s.c.i. per la convergenza debole in v e forte in u in $L^2(\Omega)$.

Sia $\{v_h\}$ una successione minimizzante di controlli e sia $\{u_h\}$ la corrispondente successione degli stati.

Dalla teoria delle equazioni ellittiche (cfr. [37] cap. 10) $\{u_h\} \subset W^{2,2}(\Omega)$ e

$$\|u_h\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}.$$

Dalla limitatezza di $\{v_h\}$ in $L^2(\Omega)$ segue la limitatezza in $W^{2,2}(\Omega)$ di $\{u_h\}$, pertanto (passando eventualmente ad una sottosuccessione) possiamo supporre che $u_h \rightarrow u^0$ e $v_h \rightharpoonup v^0$ in $L^2(\Omega)$. Per il teorema 4.3.4 (u^0, v^0) è la coppia minimizzante e v^0 è il controllo ottimale.