Résumé

La biomécanique des tissus mous est récemment devenue un sujet de recherche important dans nombreux domaines de l'ingénierie, y compris en bio-médicine et en mathématique. Les tissus mous sont des matériaux biologiques qui peuvent subir des déformations importantes (dans les régimes physiologiques et pathologiques) et qui présentent clairement un comportement mécanique nonlinéaire. Dans ce contexte, l'étude des déformations en s'appuyant sur des méthodes de calcul numérique, comme les éléments finis, peut être s'avérer compliquée. En effet, il est difficile de connaître avec certitude les équations constitutives "exactes" capables de décrire le comportement du matériau et les logiciels commerciaux sont souvent insuffisants pour aborder avec certitude la résolution des équations nonlinéaires correspondantes. La nonlinéarité géométrique de ces modèles complique grandement la réalité physique du problème et l'intuition de l'ingénieur est souvent peu utile si elle n'est pas accompagnée par l'analyse mathématique détaillée et rigoureuse. Dans ce contexte, la possibilité d'avoir des solutions exactes simples pour les équations du champ est un outil important et privilégié pour nous aider à comprendre plusieurs phénomènes biomécaniques.

La méthode semi-inverse est un des rares outils à notre disposition pour obtenir des solutions exactes dans la théorie mathématique de la mécanique des milieux continus. La méthode semi-inverse a déjà été utilisée de manière systématique par les fondateurs de la théorie de l'élasticité linéaire (on pense aux célèbres solutions de Saint Venant [5, 6]); malheureusement, cette utilisation a toujours été employée d'une manière heuristique et complètement détachée d'une méthodologie générale.

Essentiellement, le but de la méthode semi-inverse est d'établir a priori un certain nombre d'hypothèses concernant les champs inconnus dans une théorie donnée et de réduire les équations génerales de l'équilibre à des sous-ensembles simplifiés d'équations. Ici, simplifier signifie généralement que les équations de l'équilibre sont réduites à un système d'équations différentielles plus faciles (par exemple en partant d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles, on peut obtenir un système d'équations différentielles ordinaires, voir [90]).

Cette thèse, qui se développe en six chapitres, étudie divers aspects de cette méthode et aussi d'autres méthodes, dans un certain sens, connexes. Les premiers chapitres sont introductifs et généraux, alors que les suivants présentent les résultats nouveaux obtenus pendant mon doctorat ([26, 27, 28]).

Le Premier Chapitre est consacré aux définitions, symboles et concepts de base de la thorie non-linéaire de l'élasticité. Ce chapitre définit la cinématique des déformations finies par l'introduction des notions de corps déformable et de déformation. Nous passons ensuite aux équations de bilan, à la définition des contraintes et à la formulation des équations du mouvement. Puis nous abordons les concepts constitutifs comme la notion d'isotropie matérielle et le concept d' hyperélasticité. Nous analysons les restrictions imposées sur des modèles mathématiques pour assurer un comportement mécanique raisonnable, comme les inégalités de Truesdell et Noll.

Le Deuxième Chapitre expose certaines lois constitutives pour les matériaux hyperélastiques. Un des principaux problèmes rencontrés dans les applications en mécanique des milieux continus concerne le choix de modèles pour la fonction d'énergie potentielle, permettant de mieux décrire un comportement mécanique des materiaux "réels". Nous décrivons ici certains modèles (pour materiaux compressibles comme incompressibles) qui sont souvent utilisés dans la littérature, y compris: le modèle néo-Hookéen, le modèle Mooney-Rivlin, le modèle néo-Hookéen généralisé, le modèle d'Hadamard, le modèle de Blatz-ko, et finalement une fonction d'energie potentielle obtenue comme expansion en termes d'invariants du tenseur de Green-Lagrange, et utile pour des déformations finies mais modérées.

Le Troisième Chapitre présente un aperçu de l'utilisation de la méthode semi-inverse en élasticité. Nous exposons des exemples qui pourraient être considérés comme les plus représentatifs et/ou importants, et nous mettons en évidence leurs forces et leurs faiblesses. Nous appliquons la méthode inverse dans la recherche de solutions universelles dans le cas compressible (où les seules déformations possibles sont homogènees, [34]) comme dans le cas incompressible (où, en plus des déformations homogènes, existent cinq autres "familles" de solutions universelles).

Le résultat de Ericksen [34] montre qu'il n'y a pas d'autres déformations finies autres qu' homogènes qui soient contrôlables pour tous les matériaux compressibles. L'impact de ce résultat sur la théorie de l'élasticité non-linéaire a été fondamental. Pendant de nombreuses années, on a eu "la fausse impression que les seules déformations possibles pour un corps élastique sont celles qui sont universelles" (voir [25]). À la mème époque que celle de la publication des résultats de Ericksen, une activité considérable de recherche était en cours pour essayer de trouver des solutions en utilisant la méthode semi-inverse. La contrainte d'incompressibilité a facilité la recherche de solutions exactes par rapport aux matériaux compressibles, où il a été possible de trouver des solutions exactes qui ne soient pas universelles.

Ces dernières années, s'est développé un grand intérèt pour la possibilité de trouver des classes de solutions exactes pour les solides compressibles. Une des stratégies utilisées pour trouver des solutions exactes dans ce dernier cas est de s'inspirer des solutions non-homogènes pour matériaux élastiques incompressibles et de rechercher des solutions similaires pour les matériaux compressibles. Dans le Chapitre Quatre nous nous intéressons précisément aux résultats obtenus pour les matériaux compressibles dans cette ligne de recherche. Il s'agit de déterminer les matériaux compressibles qui peuvent soutenir des déformations isochores comme la "torsion pure", le "cisaillement axial pur" et le "cisaillement de rotation pur". Nous pensons que ces lignes de recherche peuvent être très trompeuses. Pour illustrer nos arguments, nous avons considéré des petites perturbations sur certaines classes de matériaux compressibles capables de supporter une certain deformation isochore particulière. Il s'ensuit que même si la perturbation peut être considérée comme étant petite, le changement de volume ne peut cependant pas être négligeable. Nous soulignons par conséquent qu'il n'est pas important de comprendre quels

materiaux isotropes élastiques et compressibles peuvent subir par exemple une torsion pure et isochore, parce que dans de tels matériaux n'existent pas, mais plutôt de comprendre la géométrie qui accompagne l'action d'un couple dans un cylindre qui est idéalisé comme élastique et isotrope. C'est uniquement de cette façon que les résultats obtenus avec la méthode semi-inverse peuvent être compris d'une manière approfondie.

Parmi les exemples d'application de la méthode semi-inverse nous rapportons la recherche de solutions à la déformation de "cisaillement anti-plan" et à la déformation "radiale". Dans le cas incompressible nous savons que les équations de bilan, pour n'importe quel solide élastique, sont compatibles avec l'hypothèse de cisaillement anti-plan seulement dans le cas de symmétrie cylindrique. Nous ne pouvons pas progresser lorsque la géométrie du corps est plus générale, parce qu'alors, les équations d'équilibre sont réduites à un système surdéterminé qui n'est pas toujours compatible. Cela signifie qu'en général, la déformation de cisaillement anti-plan doit être couplée avec une déformation secondaire. Donc même si les conditions aux limites sont compatibles avec une deformation de cisaillement anti-plan, celle-ci ne peut pas être pure pour être admissible. Automatiquement dans le corps on a créé un état de contrainte complexe. Rechercher des modèles spéciaux pour lesquels cet état de contraintes est absent, ne peut pas vraiment nous aider comprendre ce qui se passe dans la réalité.

Dans le Cinquième Chapitre, après avoir brièvement présenté les résultats déjà obtenus dans la littérature sur les déformations latentes (voir [39, 63, 83]), nous présentons un nouvel exemple analytique de la question (voir aussi [27]). En fait nous considérons un champ de déformation complexe pour un cylindre elastique non-linéaire isotrope et incompressible: une combinaison d'une inflation, d'une torsion, et d'un cisaillement hélicoïdal. Avec le choix de certaines conditions aux limites, nous montrons que dans le cas néo-Hookéen le cisaillement de rotation est inessentiel, peu importe si la torsion est présente. Si le matériau est idealisé comme un modèle de Mooney-Rivlin, alors il faut avoir nécessairement le cisaillement de rotation avec la torsion non nulle. Avec l'application à la mécanique de l'extraction d'un bouchon d'une bouteille de vin, enfin, nous conjecturons qu' il faut nécessite plus de force pour "tirer" seulement que "tirer et tordre".

La thèse se termine par un Sixième Chapitre dans lequel une nouvelle application de la méthode semi-inverse est discutée (voir aussi [26]). La célèbre formule d'Euler sur l'instabilité en "flambage" trouve la valeur critique de la force axiale d'un cylindre "svelte" instable. Ce calcul est basé sur l'hypothèse d'une élasticité linéaire, où la finesse du cylindre est infinitésimale. Considérant un ordre supérieur pour la "minceur", nous trouvons une première correction non-linéaire à la formule d'Euler. Á cette fin, nous spécialisons les solutions exactes de l'élasticité non-linéaire pour la compression homogène d'un cylindre "épais" avec extrémités lubrifiées à la théorie de l'élasticité de troisième ordre. Cet exemple est particulièrement intéressant car il implique l'utilisation d'une méthodologie générale, bien que dans un certain sens approximative, qui peut être appliquée dans différents contextes.

Ces résultats démontrent une fois de plus que la théorie de l'élasticité est un sujet complexe, où est difficile choisir des simplifications raisonnable. Les résultats obtenus ont aussi une leur importance dans la biomécanique, qui sera l'objet de notre prochaine recherche.