Note di Matematica Vol.I, 1-17 (1981)

UNA CARATTERIZZAZIONE GRAFICA DEI k-ARCHI DI UN PIANO DI GALOIS DI ORDINE DISPARI CHE RISULTANO ESSERE OVALI DI UN SOTTOPIANO PROPRIO. (°)

L. Maria ABATANGELO - Grazia RAGUSO (°°)(BARI)

Summary. *In an odd order Galois plane we characterize graphically the k-arcs contained in a conic with four projective characters (cfr. B. Segre [9]): actually they are ovals of a proper subplane. Moreover we establish a necessary and sufficient condition for a k-arc to be a closed arc.*

Dato un piano proiettivo $S_{2,q}$ sopra un campo di Galois GF(q) con $q=p^r$ dispari, sia K un k-arco di $S_{2,q}$, ossia un sottoinsieme di k punti di $S_{2,q}$ a tre a tre non allineati.

Ad ogni punto P del piano si può associare il numero $\underline{i}$ delle secanti a K passanti per esso. I valori assunti dall'indice $\underline{i}$, rispetto a K, si diranno -con B. Segre [9] -caratteri (proiettivi) di K.

Se K è un'ovale di un sottopiano $S_{2,q'}$ di $S_{2,q}$, e quindi $|K| = q'+1$, si ha che K ammette quattro caratteri: $0,1,(q'-1)/2,(q'+1)/2$. Infatti in tal caso K è una conica di $S_{2,q'}$ e $\underline{i}$ assume in P il valore $(q'-1)/2$ o $(q'+1)/2$

(°) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.G.A. del C.N.R.

(°°) Università degli studi di Bari - Facoltà di Scienze - Istituto di Geometria BARI

a seconda che da P si possano condurre o meno tangenti alla conica, mentre può valere 0 o 1 se P non appartiene a $S_{2,q'}$.

Nella presente Nota si dimostra che un k-arco K (con $k > 6$ pari) di $S_{2,q}$ con q dispari, dotato solamente dei caratteri $0,1,(k-2)/2$, $k/2$ è un ovale (cioé un $(q'+1)$-arco) di un sottopiano proprio $S_{2,q'}$ $(q' \geq 7)$ di $S_{2,q}$ se K è contenuto in una conica irriducibile di $S_{2,q}$. Inoltre, anche nel caso in cui K non sia contenuto in una conica, si dà una caratterizzazione delle ovali di un sottopiano di $S_{2,q}$. Infine, nel n.4, viene trattato a parte il caso $k = 6$.

1.- Premettiamo alcune proposizioni che oltre a dare informazioni sulla distribuzione dei punti di indice maggiore di 1 rispetto ad un dato k-arco, ci permetteranno di dimostrare che un k-arco avente i suddetti caratteri e contenuto in una conica irriducibile di $S_{2,q}$ dà luogo ad una ben nota struttura di incidenza: gli archi chiusi (cfr.[1],[2],[3],[4],[6]).

Per dimostrare che i k-archi con i suddetti caratteri, contenuti in una conica irriducibile di $S_{2,q}$, sono ovali di sottopiani di $S_{2,q}$ ci serviremo di una caratterizzazione degli archi chiusi.

D'ora in poi indicheremo con K un k-arco, con k pari e $k \geq 8$, di caratteri proiettivi $0,1,(k-2)/2,k/2$, con I_i l'insieme dei punti di indice $\underline{i}$ rispetto a K e con I l'insieme dei punti di indice maggiore di 1.

PROPOSIZIONE 1. *Ogni secante a* K *contiene* k-2 *oppure* k-1 *punti di indice maggiore di* 1.

Dimostrazione. Detta p una secante di K, ogni altra secante non passante per i punti di intersezione di p con K, incontra p in un punto di indice $(k-2)/2$ o di indice $k/2$. Indicati con x e y il numero dei punti di p appartenenti rispettivamente a $I_{(k-2)/2}$ e a $I_{k/2}$, si ha la seguente equazione diofantea:

$$x(k-4)/2 + y(k-2)/2 = (k-2)(k-3)/2 \tag{1}$$

che esprime in modo diverso il numero totale delle secanti non passanti per i punti di intersezione di p con K. Dalla (1) si ricava:

$$x = \rho(k-2)/2 \tag{2}$$

avendo posto $\rho = 2(k-3-y)/(k-4)$, con ρ non negativo essendo $x \geq 0$.

Proviamo che ρ è un intero non maggiore di 2. Dalla (2) segue che ρ è un razionale, pertanto si può scrivere nella forma:

$$\rho = \lambda + m/n$$

con λ, m, n interi e $m < n$. Allora

$$x = \lambda(k-2)/2 + \tau$$

con $\tau = m(k-2)/2n$ intero positivo minore di $(k-2)/2$, dovendo x essere un intero. Dalla (1) si ha:

$$y = \frac{(2-\lambda)k-2(3-2\lambda)}{2} - \tau \frac{k-4}{k-2} = \frac{(2-\lambda)k-2(3-2\lambda)}{2} - \tau + \frac{2\tau}{k-2}$$

essendo $2\tau < k-2$ e dovendo y essere un intero segue che $\tau = 0$ e quindi $m = 0$. Si può pertanto concludere che ρ è un intero.

Proviamo, ora, che ρ è minore o uguale di 2. Infatti, non potendo y essere negativo, dalla (1) si ha:

$$y = k-3 - \rho(k-4)/2 \geq 0, \tag{3}$$

e quindi, essendo $k-4 > 0$:

$$\rho \leq \frac{2k-6}{k-4} = 2 + \frac{2}{k-4}$$

Si può, pertanto, concludere che $\rho \leq 2$ essendo $k \geq 8$.

Proviamo, infine, che ρ è diverso da zero. Per $\rho = 0$ su p vi sono solo k-3 punti di indice k/2 (cfr. (1) e (2)). Fissato, allora, un riferimento proiettivo avente come punti fondamentali tre qualsiasi punti $A_1.A_2,A_3$ di K-p:

$$A_1(1,0,0) \qquad A_2(0,1,0) \qquad A_3(0,0,1)$$

si ha che ogni retta r_i, passante per A_i $(1 \leq i \leq 3)$ e distinta da A_iA_j (con $i \neq j$ e $1 \leq j \leq 3$) ha equazione del tipo:

$$r_1: x_3 = \lambda_1 x_2 \qquad r_2: x_1 = \lambda_2 x_3 \qquad r_3: x_2 = \lambda_3 x_1$$

ove λ_i, che conveniamo di chiamare coefficiente angolare, denota un elemento non nullo del campo base GF(q). Detto H_i l'insieme formato dalle k-3 secanti per A_i, distinte dalle due secanti A_iA_j, sia Λ_i il prodotto dei coefficienti angolari delle rette di H_i. Si prova che:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = 1 \tag{4}$$

Infatti, detto P uno qualunque dei k-3 punti di K, distinto da $A_1,A_2.A_3$, e indicato con m_i il coefficiente angolare della retta PA_i, poiché le tre rette PA_i formano fascio, si ha $m_1m_2m_3 = 1$ e quindi

$$\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 = \prod_{P \in K-\{A_1,A_2,A_3\}} m_1m_2m_3 = 1$$

Indicati, ora, con b_i i coefficienti angolari delle rette A_iB_i, dove B_i sono i seguenti punti

$$B_1 = p \cap A_2A_3 \qquad B_2 = p \cap A_1A_3 \qquad B_3 = p \cap A_1A_2$$

si ha, per il teorema di Ceva-Menelao,

$$b_1b_2b_3 = -1$$

Siano, poi, L l'insieme dei k-1 punti di p appartenenti a $K \cup I_{k/2}$ e Q uno qualsiasi dei k-4 punti di L distinto dai punti B_1, B_2, B_3, se v_i indica il coefficiente angolare della retta QA_i, si ha ancora $v_1v_2v_3 = 1$ e quindi

$$\prod_{Q \in L - \{B_1, B_2, B_3\}} v_1v_2v_3 = 1$$

Osservato che H_i coincide con l'insieme formato dalla retta A_iB_i e dalle rette A_iQ si ha:

$$A_1 A_2 A_3 = b_1b_2b_3 \prod_{Q \in L - \{B_1, B_2, B_3\}} v_1v_2v_3 = -1$$

Confrontando, infine, quest'ultima uguaglianza con la (4) segue che la caratteristica del piano è pari contro l'ipotesi iniziale.

Si può, pertanto, concludere che ρ può assumere solo i valori 1 e 2 in corrispondenza dei quali si ottiene rispettivamente

(5) $$x = (k-2)/2 \qquad y = (k-2)/2 \qquad e \qquad x+y = k-2$$

(6) $$x = k-2 \qquad y = 1 \qquad e \qquad x+y = k-1$$

PROPOSIZIONE 2. *Sia* p *una secante a* K *e siano* N_i, N_j, N_h *tre suoi punti d'indice maggiore di* 1, *allora non esiste alcun punto* H *su* K *tale che le tre rette* HN_i, HN_j, HN_h *risultino tangenti a* K.

La dimostrazione è un'ovvia conseguenza della Prop. 1.

PROPOSIZIONE 3. *Ogni tangente* t *a* K, *priva di punti di indice* 1, *ha* $k-1$ *punti di indice* $(k-2)/2$.

Dimostrazione. Ogni secante incontra t in un punto di indice $(k-2)/2$ essendo t priva di punti di indice 1. Detto x il numero dei punti di $I_{(k-2)/2}$ appartenenti a t, si ha, allora, la seguente uguaglianza

$$x(k-2)/2 = (k-1)(k-2)/2 \tag{7}$$

che esprime in modi diversi il numero totale delle secanti di K non passanti per il punto di contatto di t con K. Dalla (7) si ha

$$x = k-1$$

qualunque sia la t ad intersezione vuota con I_1.

PROPOSIZIONE 4. *Sia* t *una tangente a* K *priva di punti di indice* 1 *e siano* N_i *e* N_j *due suoi punti di indice* $(k-2)/2$, *allora non esiste alcun punto* H *di* K *tale che le rette* HN_i *e* HN_j *risultino tangenti a* K.

La dimostrazione è un' ovvia conseguenza della Proposizione 3.

PROPOSIZIONE 5. *Sia* K *un* k*-arco, con* $k \geq 8$, *di caratteri* $0,1,$ $(k-2)/2$, $k/2$ *contenuto in una conica irriducibile* C *di* $S_{2,q}$. *Allora:*

(i) *ogni tangente a* C *in un punto di* K *contiene esattamente* $k-1$ *punti di* $I_{(k-2)/2}$;

(ii) *ogni secante a* K *contiene esattamente* $k-2$ *punti di* I;

(iii) *la cardinalità di* I *è* $(k-1)^2$;

(iv) *ogni tangente a* K *che contenga un punto di indice* $(k-2)/2$ *ne contie-*

ne esattamente k-1.

Dimostrazione. Per dimostrare la (i) proviamo innanzitutto che l'intersezione di una tangente t a C in un punto T di K con una secante p di K è un punto di indice $(k-2)/2$. Detto N_1 un punto di p di indice $k/2$ (cfr. (5) e (6)), sia H_1 l'ulteriore intersezione con K di TN_1, secante a K poiché per N_1 non escono tangenti. L'insieme K' dei punti di K, diversi da T e non appartenenti a p, contiene almeno quattro punti diversi da H_1. Detti H_2, H_3,H_4 tre di tali punti, siano N_2,N_3,N_4 i punti di intersezione con p delle rette congiungenti T con i punti H_2,H_3,H_4. Tra le rette congiungenti H_1 con N_2,N_3,N_4 al più due risultano tangenti a K (cfr. Prop. 2) e quindi almeno una di esse, diciamo H_1N_2, incontra K in due punti. Posto $A_1 = A_2 = T$, $A_3 = H_2$, $A_6 = H_1$, siano rispettivamente A_4 e A_5 gli ulteriori punti di intersezione con K delle secanti N_1H_2 e N_2H_1. L'esagono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ degenere è pascaliano essendo inscritto in C, ne segue che i punti di intersezione delle tre coppie di lati opposti:

$$X = t \cap A_4A_5 \ , \ N_2 \ N_1$$

sono allineati e quindi X appartiene a p. Pertanto il punto X, che risulta anche punto di intersezione di p con t, è di indice $(k-2)/2$.

Allora, su una tangente t a C in un punto T di K non esistono punti di indice 1, pertanto su t vi sono k-1 punti di indice $(K-2)/2$ (cfr. Prop. 3).

Per dimostrare la (ii) proviamo innanzitutto che l'intersezione di due tangenti t e t' a C rispettivamente nei punti T e T' di K è un punto di indice $(k-2)/2$. Infatti, sia H_1 un altro punto di K ed N_1 l'intersezione di TH_1 con t'. N_1, per la (i), è un punto di indice $(k-2)/2$. L'insieme K' dei punti di K diversi da T, T', H_1 e dal punto di contatto della ulteriore tangente per N_1 contiene almeno quattro punti. Detti H_2 ed H_3 due di essi, siano rispettivamente N_2 e N_3 i punti di intersezione con t' delle rette TH_2 e TH_3. Poiché, per la (i), ogni tangente a C in un punto di K è priva di punti di indice 1, per la Prop. 4 le rette N_2H_1 e H_3H_1 non possono essere contemporaneamente tangenti a K, e quindi almeno una di esse, diciamo N_2H_1, è secante K. Posto $A_1 = A_2 = T, A_3 = H_2$, $A_6 = H_1$, siano rispettivamente A_4 e A_5 gli ulteriori punti di intersezione con K delle secanti N_1N_2 e N_2H_1. L'esagono

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

degenere è pascaliano, essendo inscritto in C, ne segue che i punti di intersezione delle tre coppie di lati opposti:

$$X = t \cap A_4A_5 \ , \ N_2, \ N_1$$

sono allineati e quindi X appartiene a $t' = N_1N_2$. Pertanto il punto X, che risulta anche punto di intersezione di t con t', è di indice $(k-2)/2$ poiché per esso passa una secante.

Si ha, pertanto, che ogni secante p di K è la polare, rispetto a C, di un punto P di indice $(k-2)/2$. Detto A un generico punto di $K-p$, la retta PA risulta secante K, indicheremo con $\bar{A}$ l'ulteriore intersezione di tale retta con K. Ciascuna delle $(k-2)/2$ secanti per P incontra p in un punto X di indice maggiore di 1. L'indice di tale punto X è un numero pari, poiché comunque si consideri per X un'altra secante CD, diversa dalle secanti p e PX, la retta $\bar{C}\bar{D}$, ancora secante K, passa per X per una proprietà delle polari. Pertanto i $(k-2)/2$ punti X sono di indice $k/2$ o $(k-2)/2$ a seconda che sia $k \equiv 0 \pmod 4$ oppure $k \equiv 2 \pmod 4$. Ogni altro punto di p di indice maggiore di 1 sarà allora di indice dispari. Si può pertanto concludere che se $k \equiv 2 \pmod 4$ si ha $x = (k-2)/2$ e che se $k \equiv 0 \pmod 4$ si ha $y = (k-2)/2$, in ogni caso la (1) ammette l'unica soluzione $x = y = (k-2)/2$, onde l'asserto.

Per dimostrare la (iii) calcoliamo separatamente la cardinalità degli insiemi $I_{(k-2)/2}$ e $I_{k/2}$. Per la (ii), tenendo conto che la cardinalità dell'insieme I_i è data dal prodotto del numero totale delle secanti per il numero dei punti di indice $\underline{i}$ appartenenti ad una secante diviso il numero i delle secanti uscenti da un tale punto, si ha:

$$|I_{(k-2)/2}| = \frac{k(k-1)(k-2)/4}{(k-2)/2} = k(k-1)/2$$

$$|I_{k/2}| = \frac{k(k-1)(k-2)/4}{k/2} = (k-1)(k-2)/2$$

da cui

$$|I| = (k-1)^2.$$

Per dimostrare infine la (iv) basta osservare che, in virtù delle (i) e (ii) e della cardinalità di $I_{(k-2)/2}$ non esistono punti di indice $(k-2)/2$ che non appartengano alle secanti per un punto A di K e alla tangente in A alla conica. Si può, allora, concludere che l'unica tangente ad intersezione non vuota con $I_{(k-2)/2}$ è la tangente in A a C, onde, per la (i), l'asserto.

2.- Possiamo ora dimostrare che:

Un k-*arco* K *(con* $k \geq 8$ *pari) di* $S_{2,q}$ *con* q *dispari, contenuto in una conica irriducibile, è una conica di un sottopiano proprio di* $S_{2,q}$.

Infatti, dalla Prop. 5 discende che ogni k-arco ($k \geq 8$) K, di caratteri $0,1,(k-2)/2,k/2$ contenuto in una conica irriducibile C, dà luogo ad un arco chiuso rispetto all'insieme I dei punti di indice maggiore di 1.

Allora K è una conica di un sottopiano proprio di $S_{2,q}$ (cfr.[6]).

3.- In questo numero verrà dimostrato il seguente

TEOREMA. *Un* k-*arco* ($k \geq 8$) K *di caratteri* $0,1,(k-2)/2$, $k/2$ *dà luogo ad un arco chiuso purché ogni sua tangente ad intersezione non vuota con l'insieme dei punti di indice* $(k-2)/2$ *sia priva di punti di indice* 1 .

Dimostrazione. D'ora in poi ogni tangente ad intersezione non vuota con $I_{(k-2)/2}$ la diremo tangente privilegiata. Per la Prop. 3 e per l'ipotesi del Teorema ogni tangente privilegiata contiene $k-1$ punti di indice $(k-2)/2$.

Proviamo, ora, che da ogni punto di K esce almeno una tangente privilegiata. Infatti, dall'esistenza di punti di indice $(k-2)/2$ segue la esistenza di tangenti privilegiate. Detta t una di esse, siano T il suo punto di contatto con K ed A un punto di K diverso da T. Le $k-2$ secanti per A diverse da AT incontrano t stessa in altrettanti punti di indice $(k-2)/2$ e quindi su t esiste un unico punto di $I_{(k-2)/2}$ tale che congiunto con A dia una tangente privilegiata.

Se p è una secante di K e x ed y il numero dei punti di p di indice rispettivamente $(k-2)/2$ e $k/2$, per la Prop. 1, si ha

$$(8) \qquad x = \rho(k-2)/2 \qquad y = k-3 - \rho(k-4)/2,$$

dove ρ può assumere solo i valori 1 e 2. Dimostriamo che nelle ipotesi del Teorema si ha solo $\rho = 1$.

Infatti, per $\rho = 2$ su p si ha:

$$x = k-2 \qquad y = 1$$

cioé su p vi sono $k+1$ punti di $K \cup I$ di cui uno solo di indice $k/2$. Pertanto da ogni punto A di $K-p$ escono esattamente due tangenti privilegiate oltre le $k-1$ secanti (poiché se per A uscisse un'ulteriore tangente privilegiata essa incontrerebbe p in un punto di indice $(k-2)/2$ distinto dai precedenti). Per quanto precede e per la Prop. 4, una sola di tali tangenti per A incontra una assegnata tangente privilegiata in un punto di indice $(k-2)/2$. Cioé, considerati due punti A e B di $K-p$ e dette t_A e t'_A, t_B e t'_B le tangenti privilegiate rispettivamente per A e B, si ha che se, ad esempio, t_A e t_B si incontrano in un punto di indice $(k-2)/2$ necessariamente t_A e t'_B si incontrano in un punto di indice 0.

Fissato nel piano un riferimento proiettivo avente come punti fondamentali tre punti qualsiasi di $K-p$:

$$A_1(1,0,0) \qquad A_2(0,1,0) \qquad A_3(0,0,1)$$

ogni retta r_i passante per A_i $(1 \leq i \leq 3)$ e distinta da A_iA_j (con $i \neq j$ e $1 \leq j \leq 3$), ha equazione del tipo:

$$r_1 : x_3 = \lambda_1 x_2 \qquad r_2 : x_1 = \lambda_2 x_3 \qquad r_3 : x_2 = \lambda_3 x_1$$

ove λ_i, che conveniamo di chiamare coefficiente angolare, denota un elemento non nullo del campo base $GF(q)$. Detto H_i l'insieme delle due tangenti privilegiate t_i e t'_i e delle $k-3$ secanti per A_i, diverse da A_iA_j $(1 \leq i,j \leq 3$ e $i \neq j)$, siano u_i e v_i i coefficienti angolari delle tangenti privilegiate per A_i e Λ_i il prodotto dei coefficienti angolari delle $k-1$ rette di H_i. Allora si ha:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = u_1 u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 \tag{9}$$

poiché, detto P uno qualunque dei $k-3$ punti di K distinto da

A_1, A_2, A_3 e detto ν_i il coefficiente angolare della secante PA_i, si ha $\nu_1\nu_2\nu_3 = 1$ per ogni punto P di K diverso A_1, A_2, A_3. Siano L l'insieme dei k+1 punti di p appartenenti a $K \cup I$ e b_i i coefficienti angolari delle rette A_iB_i dove B_i sono i seguenti punti:

$$B_1 = p \cap A_2A_3 \quad B_2 = p \cap A_1A_3 \quad B_3 = p \cap A_1A_2.$$

Per il Teorema di Ceva-Menelao si ha allora:

$$b_1b_2b_3 = -1.$$

Se Q è uno qualsiasi dei k-2 punti di L distinto dai punti B_1, B_2, B_3 e se μ_i indica il coefficiente angolare delle rette QA_i si ha ancora $\mu_1\mu_2\mu_3 = 1$, per ogni punto Q di L distinto da B_1, B_2, B_3. Poiché H_i coincide con l'insieme formato dalla retta A_iB_i e delle rette A_iQ, si ha:

(10) $$\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 = b_1b_2b_3 = -1$$

e quindi, dalla (9) e dalla (10) segue:

(11) $$u_1u_2u_3v_1v_2v_3 = -1.$$

Detto, poi, A un altro punto di K-p diverso dai precedenti A_i, siano t e t' le tangenti privilegiate per esso che, ovviamente, non passano per alcuno dei punti A_i. Per una proprietà delle tangenti privilegiate dei punti di K non appartenenti a p si ha che, se t incontra t_i in un punto di indice (k-2)/2, incontra t_i' in un punto di indice 0. Diremo t_i la tangente per A_i di coefficiente angolare u_i che incontra t in un punto di indice (k-2)/2, mentre diremo t_i' la tangente per A_i di coefficiente angolare v_i che incontra t' in un punto di indice (k-2)/2. Se indichiamo, ora, con H_i^u l'insieme $H_i - t_i'$ e con Λ_i^u il prodotto dei coefficienti angolari delle k-2 rette di H_i^u, si ha, con procedimento analogo al precedente applicando il teorema di Ceva-Meneleo alla retta t:

$$\Lambda_1^u \Lambda_2^u \Lambda_3^u = u_1 u_2 u_3 = -1. \tag{12}$$

Se, infine, indichiamo con H_i^v l'insieme $H_i - t_i$ e con Λ_i^v il prodotto dei coefficienti angolari delle k-2 rette di H_i^v si ha, seguendo lo stesso procedimento e applicando il teorema di Ceva-Menelao alla retta t':

$$\Lambda_1^v \Lambda_2^v \Lambda_3^v = v_1 v_2 v_3 = -1 \tag{13}$$

confrontando la (11) con la (12) e la (13) segue che la caratteristica del piano è pari contro l'ipotesi iniziale.

Possiamo, pertanto, concludere che $\rho = 1$ e dalle (8)

$$x = (k-2)/2 \quad \text{e} \quad y = (k-2)/2.$$

Poi, con lo stesso procedimento usato per dimostrare la (iii) della Prop. 4 si ha:

$$|I_{(k-2)/2}| = k(k-1)/2 \qquad |I_{k/2}| = (k-1)(k-2)/2$$

e quindi

$$|I| = (k-1)^2.$$

Siamo ora in grado di dimostrare che per ogni punto A di K passa una sola tangente privilegiata. Infatti, indicato con z il numero di tali tangenti per il punto A, poiché ogni punto di $I_{(k-2)/2}$ appartiene o ad una tangente privilegiata per A o ad una secante per A si ha:

$$z(k-1) + (k-1)(k-2)/2 = k(k-2)/2$$

Pertanto $z = 1$ e quindi le tangenti privilegiate a K sono esattamente k.

Per completare la dimostrazione del Teorema, basterà provare che la intersezione di due rette distinte appartenenti all'insieme delle secanti e delle k tangenti privilegiate è un punto di $K \cup I$. Infatti, escludendo il caso banale di due rette uscenti da uno stesso punto di K, la intersezione di due secanti è ovviamente un punto di I; l'intersezione di una tangente privilegiata e di una secante è un punto di $I_{(k-2)/2}$ poiché su una tangente privilegiata non esistono punti di indice 1; infine l'intersezione di due tangenti privilegiate è un punto di $I_{(k-2)/2}$, poiché solo per ciascuno dei $k-1$ punti di $I_{(k-2)/2}$ di una tangente privilegiata t esce un'altra delle k tangenti privilegiate.

Possiamo pertanto concludere che K è munito di una struttura di arco chiuso.

4.-Consideriamo ora i 6-archi verificando subito che il Teorema del n. 3 continua a valore anche per $k = 6$ e provando infine con un esempio che esistono 6-archi di caratteri 0,1,2,3 non contenuti in alcun sottopiano proprio di $S_{2,q}$.

Si vede subito che tutte le considerazioni fatte nella dimostrazione del Teorema continuano a valere anche per $k = 6$, pertanto il Teorema resterà completamente provato, se si esclude l'eventualità, possibile in tal caso, che il numero intero ρ, che compare nella (2), assuma il valore 3 (cfr. (3)).

Infatti è di immediata verifica (cfr. le (8)) che su una secante p, per $\rho = 3$, non vi sono punti di indice 3, mentre vi sono 6 punti di indice 2. Segue, allora, che tale situazione si riproduce su ogni altra secante p'. Infatti, detto A un punto di $K-p$, le congiungenti gli otto punti di p appartenenti a $K \cup I_2$ risultano ovviamente secanti o tangenti privilegiate e quindi intersecano ogni altra secante p' non passante per A, in punti di $K \cup I$. Tali otto punti sono i soli che p' ha in comune con l'insieme $K \cup I$, poiché se ve ne fosse un altro, esso, per proiezione da A, darebbe luogo ad un ulteriore punto di I su p. Detti ora x ed y i numeri dei punti di p' appartenenti rispettivamente a I_2 e ad I_3, si ha dalla (1) per $k = 6$ la

(14) $$x + 2y = 6$$

Inoltre, poiché p' ha in comune con I esattamente 6 punti, si ha

(15) $$x + y = 6$$

Dalle (14) e (15) risulta $y = 0$ su p' e per l'arbitrarietà del punto A e della secante p' segue che non esistono punti di indice 3, cioé il 6-arco K ha solo tre caratteri.

PROPOSIZIONE 6. *Fissato in* $S_{2,q}$ *(con* $q = p^r \geq 7$ *dispari) un riferimento proiettivo, i punti* $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$, $A_4(1,1,1)$, $A_5(-1,-2t,1)$ *e* $A_6(t-1,-t,t)$, *con* t *generatore di* GF(q), *cioé non appartenente ad alcun sottocampo proprio* GF(q') *di* GF(q), *costituiscono un 6-arco di caratteri* 0,1,2,3.

Dimostrazione. Il 6-arco in questione ammette le seguenti 15 secanti di coordinate:

$$(0,0,1)\ ,\ (0,1,0)\ ,\ (0,1,-1)\ ,\ (0,1,2t)\ ,\ (0,1,1)$$
$$(1,0,0)\ ,\ (1,0,-1)\ ,\ (1,0,1)\ ,\ (t,0,1-t)\ ,\ (1,-1,0)$$
$$(1,2t,0)\ ,\ (t,t-1,0)\ ,\ (1+2t,-2,1-2t),(2t,-1,1-2t),(t,-1,-t)$$

Il punto (1,0,1) è di indice 3 poiché appartiene alle secanti (0,1,0), (1,0,-1) e (t,-1,-t); inoltre il punto (1,1,0) è di indice 2 in quanto appartiene solo alle secanti (0,0,1) e (1,-1,0) e il punto (1,-1,0) è di indice 1 appartenendo solo alla secante (0,0,1). Infine si ha che il punto $(2,1,x_3)$

è di indice 0 per $x_3 = 3$ se la caratteristica p è diversa da 3 e da 5, per $x_3 = (1-t)/t$ se $p = 3$ e per $x_3 = 2t$ se $p = 5$.

BIBLIOGRAFIA

|1| L.M.ABATANGELO-G.RAGUSO, *Una caratterizzazione degli archi chiusi giacenti su una conica irriducibile di un piano pascaliano di caratteristica pari*, Rend.Mat.fascicolo 1, vol. 1, serie VII,(1981)

|2| L.M.ABATANGELO-G.RAGUSO, *Una caratterizzazione grafica dei k-archi di un piano di Galois d'ordine pari che risultano essere ovali di un sottopiano proprio*, in corso di pubblicazione sui Rend.Mat.(Roma).

|3| U.BARTOCCI, *Considerazioni sulla teoria delle ovali*, Tesi di laurea, Univ. degli Studi di Roma 1967.

|4| U.BARTOCCI-G.FAINA, *Archi chiusi di un piano proiettivo finito*, Rend. Mat. (6) 12 (1979).

|5| A.COSSU, *Su alcune proprietà dei (k,n)-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito*, Rend.Mat.,(5) 20, 271-277 (1961).

|6| G.FAINA-G. KORCHMAROS, *Risultati intorno ad una congettura sugli archi chiusi*, Rend. Mat.,fasc.1,vol. 1, serie VII (1981).

|7| J.W.P.HIRSCHFELD, *Projective Geometries over finite fields*, Clarendon Press. Oxford 1979.

|8| F.KARTESZI, *Introduzione alle geometrie finite*, Feltrinelli (Milano) 1978.

|9| B.SEGRE, *Le geometrie di Galois*, Annali di Mat. Pura Appl., 48 (1959), 1-96.

|10| B.SEGRE, *Lectures of Modern Geometry*, Cremonese (Roma) 1961.

|11| B.SEGRE, *Introduction to Galois Geometries*, Mem.Accad.Naz.Lincei, (8) 8 (1967), 137-236.

|12| M.TALLINI SCAFATI, *(k-n)-archi di un piano grafico finito con particolare riguardo a quelli con due caratteri*, Rend. Accad. Naz. Lincei, (8) 53 (1972) 71-81.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 24 Novembre 1980
ed accettato per la pubblicazione il 4 Febbraio 1981
su parere favorevole di A. Cossu e G. Tallini