Note di Matematica Vol.I, 155-185 (1981)

PROBLEMI AL CONTORNO PER SISTEMI ELLITTICI SIMMETRICI DEL PRIMO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI IN APERTI DI CLASSE C^1 (°)

Renata SELVAGGI - Irene SISTO (°°)

Summary. *In this paper boundary value problems are studied for symmetrical first order elliptic systems of linear partial differential equations with constant coefficients, in an open subset* Ω *of* $\mathbf{R}^m (m \geq 3)$. Ω *is assumed to be of class* C^1 *with boundary data in* $L^s(\partial\Omega)(2 \leq s < +\infty)$.

n.1. - INTRODUZIONE.

In [1] A.AVANTAGGIATI, assegnati un aperto Ω di $\mathbf{R}^m (3 \leq m)$ di classe C^2, un sistema

$$(1.1) \qquad \sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{m} a_{rs}^{p} \frac{\partial u_s}{\partial x_p} = f_r \qquad r=1,\dots,2n$$

(°) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

(°°) Istituto di Analisi Matematica - Università degli Studi - BARI -

lineare del primo ordine, simmetrico, a coefficienti reali costanti, ellittico con $f=(f_r)_{1\le r\le 2n}\in(C^{0,\lambda}(\bar\Omega))^{2n}$ $(0<\lambda<1)$, una matrice $B=(b_{kq})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le q\le 2n}}$ con elementi di classe $C^{0,\lambda}(\partial\Omega)$ avente caratteristica uguale a n in ogni punto di $\partial\Omega$ nonché un vettore $b_o=(b_{ko})_{1\le k\le n}\in(C^{0,\lambda}(\partial\Omega))^n$, risolve il problema di determinare una soluzione $u=(u_q)_{1\le q\le 2n}\in(C^{0,\lambda}(\bar\Omega)\cap C^1(\Omega))^{2n}$ di (1.1) verificante in ogni $P\in\partial\Omega$ le condizioni

$$\sum_{q=1}^{2n} b_{kq}(P)u_q(P)=b_{ko}(P)\qquad k=1,\dots,n. \tag{1.2}$$

Lo studio di alcune trasformazioni integrali relative ad aperti di classe C^1 già fatto dalle scriventi in [11], ha suggerito di affrontare il problema di sopra nel caso in cui Ω sia un aperto di classe C^1 ed i dati al contorno siano in $L^s(\partial\Omega)$ con $1<s<+\infty$. Si pone, pertanto, il seguente problema la soluzione del quale, assieme ad un certo numero di risultati preliminari occorrenti allo scopo, è principalmente oggetto del presente lavoro:

I. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^m (3\le m)$ *di classe* C^1, *sia* $B=(b_{kq})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le q\le 2n}}$ *una matrice con elementi di classe* $C^\circ(\partial\Omega)$ *avente caratteristica uguale a n in ogni punto di* $\partial\Omega$ *e sia* $b_o=(b_{ko})_{1\le k\le n}\in(L^s(\partial\Omega))^n$ $(1<s<+\infty)$. *Assegnato, allora, il sistema* (1.1) *si determini una soluzione* $u=(u_q)_{1\le q\le 2n}\in(C^1(\Omega))^{2n}$ *dello stesso tale che:*

i - *per ogni* $\alpha\in]0,1[$ *esiste* $\delta>0$ *tale che per ogni* $q\in\{1,\dots,2n\}$ *la funzione massimale non tangenziale di* u_q

$$u_q^*(P)=\sup\{|u_q(X)|: X\in C_\alpha(P)\cap B(P,\delta)\}$$

(dove $C_\alpha(P) = \{X \in \Omega : (X-P)\cdot N(P) > \alpha|X-P|\}$, $N(P)$ è la normale interna a $\partial\Omega$ in P e $B(P,\delta)$ è la sfera aperta di centro P e raggio δ) *sia in* $L^s(\partial\Omega)$,

ii - *per quasi tutti i* $P\in\partial\Omega$ *e per ogni* $q\in\{1,\dots,2n\}$ *esiste il*

$$\lim_{\substack{X\to P\\ X\in C_\alpha(P)}} u_q(X)$$

e denotato questo con $u_q(P)$ *siano verificate le condizioni* (1.2) *quasi ovunque.*

Lo studio del problema I viene qui affrontato seguendo il classico metodo del potenziale. Pertanto, si cercano le eventuali soluzioni del sistema (1.1) tra le funzioni rappresentate, mediante la (5.5) di [1], come somme di potenziali di doppio strato e di dominio. Imponendo a tali funzioni di verificare le condizioni al contorno (1.2), mediante la proposizione 3.1 di [11] si ottiene un sistema di equazioni ad integrali singolari sulla varietà $\partial\Omega$ di classe C^1 al quale si associa una trasformazione lineare S tra certi spazi di Banach. L'esame di questa trasformazione è oggetto dei n.3 e 4. Più precisamente nel n.3, seguendo un ordine di idee indicato da R.T.SEELEY in [10], considerati alcuni particolari operatori integrali singolari di tipo C_0^∞ su $L^s(\partial\Omega)(1<s<+\infty)$, viene definito il simbolo di tali operatori dimostrando l'indipendenza dello stesso dall'intorno coordinato usato nella definizione. Le tecniche adoperate in questa fase, come in [11], si ispirano al lavoro [2] di A.P.CALDERÓN. Nel n.4 viene, quindi, definita la matrice simbolica di S e supponendo che questa verifichi la (5.8) di [1] viene costruita una trasformazione riducente di S, tenendo presenti alcune considerazioni fatte da A.AVANTAGGIATI in [1] (teor. 2.1) a proposito degli spazi $L^2(\{\Gamma\}_A)$ nonché i risultati di A.P.CALDERÓN di [3] riguardanti gli operatori integrali singolari su $L^s(\mathbb{R}^m)$.

Il successivo n.5 è dedicato alla costruzione di una equazione integrale equivalente al problema I sotto una certa ipotesi (*). Per far ciò, seguendo ancora [1] viene introdotto un ulteriore problema (problema II) per il quale si dimostra un teorema di esistenza ed unicità per $s \geq 2$: la dimostrazione dell'unicità per $s \geq 2$ si basa sulle "formule di Gauss" (cfr.teor.2.1), quella dell'esistenza per $s=2$ è analoga a quella di [1], mentre l'esistenza per $s>2$ si prova mediante un teorema di regolarizzazione per le soluzioni in L^2 di un particolare sistema di equazioni integrali singolari alla cui dimostrazione si perviene attraverso alcune valutazioni locali della norma negli spazi L^s di un certo operatore compatto (cfr. prop. 5.1). Una volta pervenuti, attraverso il problema II, all'equazione integrale di cui sopra, teoremi analoghi ai teoremi 8.3, 8.4 di [1] si ottengono, ora, in riferimento al problema I (cfr. teor. 5.2 e 5.3). Altrettanto, evidentemente, si può fare per i teoremi 8.5 e 8.7 di [1] che qui si tralasciano per brevità.

n.2.- NOTAZIONI E PREMESSE.

Qui e nel seguito Ω è un aperto di R^m $(3\leq m)$ di classe C^1. Se $\{A_1,\ldots,A_N\}$ è un ricoprimento aperto di $\partial\Omega$, posto $L = \{(i,j)\in\{1,\ldots N\}^2 : A_i\cap A_j \neq \emptyset\}$, si denota con $\{\Gamma\}_A$ ogni famiglia di matrici $\{\Gamma^{i,j}\}_{(i,j)\in L}$ verificante le seguenti condizioni:

1. $\Gamma^{i,j}$ è una matrice quadrata di ordine n con elementi di classe $C^\infty(A_i\cap A_j)$,
2. $\Gamma^{j,i}$ è l'inversa di $\Gamma^{i,j}$
3. se $A_i\cap A_j\cap A_b \neq \emptyset$, allora $\Gamma^{i,j} = \Gamma^{i,b}\,\Gamma^{b,j}$.

Se $\{\Gamma\}_A$ è una siffatta famiglia di matrici, si denota con $L^s(\{\Gamma\}_A)(1<s<+\infty)$

(rispettiv. con $C^{\circ}(\{\Gamma\}_A)$) lo spazio di Banach delle N-ple $\varphi = (\varphi^{(i)})_{1\leq i\leq N}$ di vettori $\varphi^{(i)} = (\varphi_{\ell}^{(i)})_{1\leq\ell\leq n}$ appartenenti a $(L^s(A_i))^n$ (rispettiv. $(C^{\circ}(A_i))^n$) tali che

$$\varphi^{(i)} = \Gamma^{i,j}\cdot\varphi^{(j)} \quad q.o.\ in\ A_i\cap A_j \quad (\text{rispettiv. in } A_i\cap A_j) \tag{2.1}$$

munito della norma

$$\|\varphi\|_{L^s(\{\Gamma\}_A)} = \max_{i,\ell} \|\varphi_{\ell}^{(i)}\|_{L^s(A_i)} \quad \left(\text{rispettiv. } \|\varphi\|_{C^{\circ}(\{\Gamma\}_A)} = \max_{i,\ell}\|\varphi_{\ell}^{(i)}\|_{C^{\circ}(A_i)}\right),$$

mentre si denota con $\{\Gamma^*\}_A$ la famiglia di matrici $\{\Gamma^{*j,i}\}_{(j,i)\in L}$ dove $\Gamma^{*j,i}$ è la trasposta di $\Gamma^{i,j}$.

Ulteriormente se, per ogni $i\in\{1,\dots,N\}$, $c^{(i)} = (c_{qk}^{(i)})_{\substack{1\leq q\leq 2n\\ 1\leq k\leq n}}$ è una matrice di funzioni definite in A_i, avente caratteristica n in ogni punto di A_i e tale che posto per ogni $q\in\{1,\dots,2n\}$ $c_q^{(i)} = (c_{qk}^{(i)})_{1\leq k\leq n}$, risulti $(c_q^{(i)})_{1\leq i\leq N} \in C^{\circ}(\{\Gamma\}_A)$, allora per ogni $\varphi\in L^s(\{\Gamma^*\}_A)$ si denota con $c\cdot\varphi$ l'unico vettore appartenente a $(L^s(\partial\Omega))^{2n}$ (cfr. Lemma 2.2 di [1]) tale che per ogni $i\in\{1,\dots,N\}$ risulti

$$c\cdot\varphi = c^{(i)}\cdot\varphi^{(i)} \quad q.o.\ in\ A_i. \tag{2.2}$$

Se, inoltre, $\mathcal{D}_A = \{D_1,\dots,D_N\}$ è un ricoprimento di $\partial\Omega$ formato da chiusi abbastanza regolari, a due a due privi di punti interni in comune e tali che $D_i\subset A_i$ per ogni $i\in\{1,\dots,N\}$, si pone

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{D}_A) = \prod_{i=1}^{N} (L^s(D_i))^n. \tag{2.3}$$

Osservazione 2.1. Posto, per ogni $\varphi = (\varphi^{(i)})_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{H}^s(\mathcal{D}_A)$,

$$F_\varphi(P) = \begin{cases} \varphi^{(i)}(P) & \text{se } P \in \overset{\circ}{D}_i \\ \\ r^{ij}(P)\varphi^{(j)}(P) & \text{se } P \in \overset{\circ}{D}_j \cap A_i; \end{cases} \tag{2.4}$$

con ragionamento analogo a quello adoperato da A.AVANTAGGIATI in [1] per provare il teor.2.1, si dimostra che

$$F \quad \textit{è un isomorfismo di } \mathcal{H}^s(\mathcal{D}_A) \textit{ in } L^s(\{r\}_A).$$

Essendo, ora, Ω un aperto di classe C^1, esiste $\delta > 0$ tale che ad ogni $P \in \partial\Omega$ si possa associare un sistema di riferimento con origine in P rispetto al quale risulti:

$$\Omega \cap B(P,\delta) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \ : \ t > \xi(x)\},$$

$$\partial\Omega \cap B(P,\delta) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \ : \ t = \xi(x)\}$$

dove ξ è una funzione di classe $C^1_0(\mathbb{R}^{m-1})$ tale che

$$0 = \xi(0) = \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(0) \qquad \forall i \in \{1,\dots,m-1\} \ e \quad \max|\nabla \xi(x)| \leq m_o, \tag{2.5}$$

m_o essendo la costante della prop. 1.1 di [11]. Pertanto l'iperpiano t=o, nel seguito denotato con π_p, è tangente a $\partial\Omega$ in P e l'asse t, il cui versore è nel seguito denotato con N(P), è la normale interna a $\partial\Omega$.

Infine, per ogni $P\in\partial\Omega$ e per ogni $r\in\,]0,\delta]$, $\partial\Omega\cap B(P,r)$ viene chiamato *intorno coordinato* di P, mentre con il simbolo $\tilde{x}$ si denota l'omeomorfismo canonico associato a $\partial\Omega\cap B(P,r)$ (cioé l'omeomorfismo che ad ogni $Q\in\partial\Omega\cap B(P,r)$, $Q=(y,\xi(y))$, associa y).

Si assume la seguente

DEFINIZIONE 2.1. *Si dice che una funzione* f *definita in* Ω *ha traccia non tangenziale interna* (rispettiv. *esterna*) *in* $L^s(\partial\Omega)$ *se sono verificate le seguenti condizioni:*

i. *per ogni* $\alpha\in\,]0,1[$ *esiste* $\delta>0$ *tale che la funzione massimale non tangenziale interna* (rispett. *esterna*) *di* f

$$f^*(P) = \sup\{|f(X)| : X\in C_\alpha(P)\cap B(P,\delta)\}$$

(rispett. $f^*(P) = \sup\{|f(X)| : X\in C_{-\alpha}(P)\cap B(P,\delta)\}$ dove $C_{-\alpha}(P) =$

$$=\{X\in\mathbb{R}^m - \bar{\Omega} : (X-P)\cdot N(P) < -\alpha|X-P|\})$$ *sia in* $L^s(\partial\Omega)$;

ii. *per quasi tutti i* $P\in\partial\Omega$ *esiste il*

$$\lim_{\substack{X\to P\\ X\in C_\alpha(P)}} f(X) \qquad (\text{rispett.} \lim_{\substack{X\to P\\ X\in C_{-\alpha}(P)}} f(X))$$

e si denota con f(P).

Nel seguito si farà uso del successivo teorema alla cui dimostrazione si perviene seguendo un ordine di idee indicato da J.NEČAS in [8] (teor. 1.1 di pag. 121):

TEOREMA 2.1. *Sia* $f\in C^1(\Omega)$. *Allora, se per ogni* $j\in\{1,\dots,m\}$ *risulta* $\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\Omega)$ *e se, inoltre,* f *ha traccia interna non tangenziale in* $L^1(\partial\Omega)$, *si ha che*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(X)dX = -\int_{\partial\Omega} f(P)N_j(P)dP \tag{2.6}$$

(dove $N(P) = (N_j(P))_{1\le j\le m}$ è la normale interna a $\partial\Omega$ in P).

Osservazione 2.2. Dal teorema 2.1 consegue che ogni eventuale soluzione del sistema (1.1) in Ω di classe $(C^1(\Omega))^{2n}$ avente traccia interna non tangenziale in $(L^s(\partial\Omega))^{2n}$ è del tipo

$$u(X) = \int_\Omega M(X-Y)f(Y)dY + \int_{\partial\Omega} M(X-Q)a(N(Q))u(Q)dQ \tag{2.7}$$

dove per ogni $\lambda = (\lambda_i)_{1\le i\le m} \in \mathbb{R}^m$ si ha

$$a(\lambda) = (a_{rs}(\lambda))_{1\le r,s\le 2n} = \left(\sum_{p=1}^{m} a^p_{rs}\lambda_p\right)_{1\le r,s\le 2n} \tag{2.8}$$

ed $M = (M_{rs})_{1\le r,s\le 2n}$ è la matrice fondamentale del sistema (1.1) definita dalle (5.1") di [1].

n.3 - OPERATORI INTEGRALI SINGOLARI DI TIPO C_o^∞ SU $L^s(\partial\Omega)$ $(1<s<+\infty)$ (1) E LORO SIMBOLI.

Se G(X) è una funzione analitica in $\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$, positivamente omogenea di

(1) Nel senso di R.T.SEELEY (cfr. [10]: def. 4).

grado 1-m e dispari, l'operatore integrale singolare

$$(3.1) \qquad \mathcal{A} : f \longrightarrow f(P)\int^{*}_{\pi_P} G(P-Q+N(P))dQ + \int^{*}_{\partial\Omega} G(P-Q)f(Q)dQ$$

(dove gli integrali con * sono definiti assumendo come regioni di esclusione nel primo le regioni di π_P esterne alle sfere di centro P e raggio divergente e nel secondo le porzioni di $\partial\Omega$ che hanno come proiezioni su π_P sfere di centro P e raggio infinitesimo) a causa della prop. 3.1 di [11] risulta un operatore continuo da $L^s(\partial\Omega)$ $(1<s<+\infty)$ in sé. Si ha, ora, la seguente

PROPOSIZIONE 3.1. *L'operatore* A *è di tipo* C^{∞}_{o} *su* $L^s(\partial\Omega)$.

Dim. Siano Φ e Ψ funzioni di classe $C^1_o(\partial\Omega)$. Se Φ e Ψ hanno supporti disgiunti, dalle ipotesi fatte su G consegue che l'operatore $\Phi\mathcal{A}\Psi$ è compatto su $L^s(\partial\Omega)$. Se, invece, Φ e Ψ hanno il supporto in uno stesso intorno coordinato $B(P,r)\cap\partial\Omega$, dalla (3.10) di [11] consegue che per quasi tutti i $\bar{P}\in\partial\Omega$ con $\bar{P} = (x,\xi(x))$, risulta

$$(3.2) \qquad (\Phi\mathcal{A}\Psi)\, f(\bar{P}) = a(x)(\Phi\Psi f)(\bar{P}) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Phi(x,\xi(x))\cdot\int_{|x-y|>\varepsilon} G(x-y,\xi(x)-\xi(y))\cdot\Psi(y,\xi(y))\, f(y,\xi(y))\sqrt{1+|\nabla\xi(y)|^2}\, dy$$

con

$$(3.3) \qquad a(x) = \sqrt{1+|\nabla\xi(x)|^2}\,\Big(\int_{|z|\le 1} G(z,1+\nabla\xi(x)\cdot z)dz + \int_{|z|>1}\big[G(z,1+\nabla\xi(x)\cdot z)-G(z,\nabla\xi(x)\cdot z)\big]dz\Big) .$$

Posto, allora, per ogni $\varepsilon > 0$.

(3.4) $$R_{\varepsilon}^{(1)}f(\bar{P}) = \Phi(x,\xi(x)) \int_{|x-y|>\varepsilon} [G(x-y,\xi(x)-\xi(y))-G(x-y,\nabla\xi(x)\cdot(x-y))]\cdot \cdot\sqrt{1+|\nabla\xi(x)|^2}\cdot f(y,\xi(y))\cdot\psi(y,\xi(y))dy$$

(3.5) $$R_{\varepsilon}^{(2)}f(\bar{P}) = \Phi(x,\xi(x)) \int_{|x-y|>\varepsilon} G(x-y,\xi(x)-\xi(y))$$

$$(\cdot[\sqrt{1+|\nabla\xi(y)|^2}\cdot f(y,\xi(y))\cdot\Psi(y,\xi(y))dy$$

e

(3.6) $$R_{\varepsilon} f(\bar{P}) = R_{\varepsilon}^{(1)}f(\bar{P}) + R_{\varepsilon}^{(2)}f(\bar{P})$$

nonché

(3.7) $$R_1 f(\bar{P}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} R_{\varepsilon}^{(1)}f(\bar{P}), \quad R_2 f(\bar{P}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} R_{\varepsilon}^{(2)}f(\bar{P})$$

(3.8) $$Rf(\bar{P}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} R_{\varepsilon} f(\bar{P}) = (R_1 + R_2)f(\bar{P})$$

e

(3.9) $$Hf(x) = a(x)\cdot f(x) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \sqrt{1+|\nabla\xi(x)|^2}\, G(x-y,\nabla\xi(x).(x-y))f(y)dy.$$

risulta

(3.10) $$(\Phi \mathbf{Q} \psi)f(\bar{P}) = \Phi(\bar{P})\cdot H((\psi f)\circ\tilde{x}^{-1})(\tilde{x}(\bar{P}))+Rf(\bar{P}).$$

Si prova, ora, che R è un operatore compatto su $L^s(\partial\Omega)$. A questo scopo si consideri una successione $(\xi_j)_{j\in N}$ di elementi di $C_o^\infty(\mathbb{R}^{m-1})$ tale che

$\lim_j \| \xi_j - \xi \|_{C_o^1(\mathbb{R}^{m-1})} = 0.$

Posto, ancora, per ogni $j\in \mathbf{N}$,

$$R_j f(\bar{P}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (R_{j,\varepsilon} f)(\bar{P}) \tag{3.11}$$

dove, per ogni $\varepsilon > 0$, $R_{j,\varepsilon}$ è l'operatore ottenuto sostituendo in R_ε, cioé (cfr. (3.6), (3.5) e (3.4)) in $R_\varepsilon^{(1)}$ e $R_\varepsilon^{(2)}$, ξ_j a ξ con ragionamento analogo a quello della prop. 1.3 di [11] si dimostra che

$$\left\| \sup_\varepsilon |R_\varepsilon f - R_{j,\varepsilon} f \right\|_{L^s(\partial\Omega)} \leq C \max |\nabla\xi_j - \nabla\xi| \, \| f \|_{L^s(\partial\Omega)}$$

e, quindi, che $\lim_j \| R_j f - Rf \|_{L^s(\partial\Omega)} = 0$. Da ciò consegue che R è compatto su $L^s(\partial\Omega)$ non appena si tiene presente che tale è ogni R_j. Per quanto riguarda l'operatore H, si osservi che esso risulta un operatore integrale singolare del tipo C_o^∞ su $L^s(\mathbb{R}^{m-1})$ in quanto a è una funzione continua su $\partial\Omega \cap B(P,r)$ e, posto, per ogni $(x,z)\in R^{m-1} \times (R^{m-1} \setminus \{0\})$

$$h(x,z) = \sqrt{1+|\nabla\xi(x)|^2}\; G(z, \nabla\xi(x)\cdot z), \tag{3.12}$$

h risulta una funzione C_o^∞ omogenea di grado 1-m (cfr. (10)).

Dopo ciò la

DEFINIZIONE 3.1. *Se* $\mathfrak{A}$ *è l'operatore definito in* (3.1) *si chiama simbolo di* $\mathfrak{A}$ *la funzione* $\sigma(\mathfrak{A})$ *definita sul fibrato cotangente di* $\partial\Omega$ *nel modo seguente:*

$$\sigma(\mathfrak{A})(\bar{P}, \Sigma\, \xi_i dx_i) = a(\tilde{x}(\bar{P})) + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon<|\eta|<1/\varepsilon} e^{i\xi\cdot\eta}\, h(\tilde{x}(\bar{P}),\eta)\, d\eta \tag{3.13}$$

per ogni $\bar{P} \in \text{supp}\ \Phi \cap \text{supp}\ \Psi$ (dove $a(x)$ e $h(x,z)$ sono le funzioni definite rispettivamente in (3.3) e (3.12)).

Osservazione 3.2. L'indipendenza del simbolo dal sistema coordinato si prova con ragionamento analogo a quello del teor. 1 di [10] ed utilizzando il seguente

LEMMA 3.1 *Siano* P_1 *e* P_2 *in* $\partial\Omega$ *tali che* $|P_1-P_2|<\delta$ *e inoltre,*

$$B(P_1,\delta)\cap\Omega=\{(x,x_m)\in\mathbb{R}^{m-1}\times\mathbb{R}\ :\ x_m>\xi_1(x)\}$$

e

$$B(P_2,\delta)\cap\Omega=\{(\bar{x},\bar{x}_m)\in\mathbb{R}^{m-1}\times\mathbb{R}\ :\ \bar{x}_m>\xi_2(\bar{x})\}$$

con ξ_i (1=1,2) *verificante le condizioni* (2.5) *e sia* $\tilde{x}_i$ (i=1,2) *l'omeomorfismo canonico associato a* $\partial\Omega\cap B(P_i,\delta)$. *Allora, posto* $u=\tilde{x}_1\circ\tilde{x}_2^{-1}$ e $V=\tilde{x}_2(\partial\Omega\cap B(P_1,\delta)\cap B(P_2,\delta))$, *l'operatore* U *definito come segue*

$$(3.14)\qquad Uf(\bar{x})=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|\bar{x}-\bar{y}|>\varepsilon}[G(\bar{x}-\bar{y},\nabla\xi_1(u(\bar{x}))\cdot(\bar{x}-\bar{y}))-$$

$$-G(u(\bar{x})-u(\bar{y}),\nabla\xi_1(u(\bar{x}))\cdot u(\bar{x})-u(\bar{y}))]f(\bar{y})d\bar{y}$$

risulta compatto da $L^s(V)$ (2) *in sé.*

Dim. Sia $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le m}$ una matrice ortogonale con la quale si passa

(2) Quando V è un aperto di $\mathbb{R}^m$, con $L^s(V)$ si denota il sottospazio di $L^s(\mathbb{R}^m)$ costituito dalle funzioni che si annullano fuori di V.

dal sistema di riferimento (x,x_m) al sistema di riferimento $(\bar{x},\bar{x}_m)$. Allora se P_2 ha coordinate $(a, \xi_1(a))$ nel sistema di riferimento (x,x_m), si ha

$$(3.15) \qquad (u(\bar{x}))_i = a_i + \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij}\, \bar{x}_j + a_{im}\, \xi_2(\bar{x}) \qquad i=1,\dots,m-1.$$

Essendo ξ_2 di classe $C^1_o(\mathbb{R}^{m-1})$, esiste una successione $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di elementi di $C^\infty_o(\mathbb{R}^{m-1})$ convergente a ξ_2 in $C^1_o(\mathbb{R}^{m-1})$. Se quindi, u_j è la funzione definita in V sostituendo nel secondo membro di (3.15) ξ_2 con φ_j, si ponga quasi ovunque in V.

$$(3.16) \qquad U_{\varepsilon,j}f(\bar{x}) = \int_{|\bar{x}-\bar{y}|>\varepsilon} \Big[G(u_j(\bar{x})-u_j(\bar{y}),\ \nabla\xi_1(u(\bar{x}))\cdot(u_j(\bar{x})-u_j(\bar{y}))) -$$

$$-G(u(\bar{x})-u(\bar{y}),\nabla\xi_1(u(\bar{x}))\cdot(u(\bar{x})-u(\bar{y})))\Big]f(\bar{y})d\bar{y}.$$

Ora si tenga presente che, posto $B = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq m-1}$ e $b = -\nabla\xi_1(a)/\sqrt{1+|\nabla\xi_1(a)|^2}$, per ogni $\sigma \in R^{m-1}$ con $|\sigma| = 1$ per l'ortogonalità di A risulta

$$i = |A(\sigma,0)|^2 = |B\sigma|^2 + |\nabla\xi_1(a)\cdot B\sigma|^2$$

e, quindi, se $B\sigma + bz = 0$, cioé se $B\sigma = \dfrac{\nabla\xi_1(a)}{\sqrt{1+|\nabla\xi_1(a)|^2}}\, z$ si ha che

$1 = |z|^2 \cdot |\nabla\xi_1|(a)|^2$ donde

$$|z|^2 = \frac{1}{|\nabla\xi_1(a)|^2} > \frac{1}{m_o^2} > m_o^2 \quad \text{e, quindi,}$$

$$(3.17) \qquad B\sigma + bz = 0 \Rightarrow |z| > m_o \qquad \forall\sigma\in\mathbb{R}^{m-1} \text{ tale che } |\sigma| = 1$$

Dopo ciò, adoperando un procedimento analogo a quello usato per dimostrare la prop. 1.3 di [11], tenendo ora presente che la funzione

$$(3.18)\qquad K(\sigma,z) = G(B\sigma + bz,\ \nabla\xi_1(u(\bar{x}))\cdot(B\sigma + bz))$$

a causa di (3.17) per ogni $\sigma \in \mathbb{R}^{m-1}$ con $|\sigma| = 1$ risulta olomorfa per $|z| < m_o$, si prova che per j abbastanza grande risulta

$$(3.19)\qquad \|\sup_{\varepsilon}|U_{\varepsilon,j}f|\|_{L^s(U)} \leq C \max|\nabla(\varphi_j - \xi_2)|\cdot\|f\|_{L^s(U)}.$$

Quindi, se

$$U_j f(\bar{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|\bar{x}-\bar{y}|>\varepsilon} [G(\bar{x}-\bar{y},\ \nabla\xi_1(u(\bar{x}))\ (\bar{x}-\bar{y})) -$$

$$- G(u_j(\bar{x})-u_j(\bar{y}),\ \nabla\xi_1(u(\bar{x}))\cdot(u_j(\bar{x})-u_j(\bar{y})))]\ f(\bar{y})\ d\bar{y},$$

si ha che $\lim_j \|U_j f - Uf\|_{L^s(U)} = 0$ donde la compattezza di U essendo ogni U_j compatto in virtù del lemma 6 di [10].

Osservazione 3.3. La funzione $\sigma(\mathcal{Q})(\bar{P},\xi)$ definita nel secondo membro di (3.13) è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^{m-1} - \{0\})$ e positivamente omogenea di grado zero rispetto a ξ ed ha derivate continue ancora rispetto a ξ in $(\partial\Omega \cap B(P,r)) \times \{\xi \in \mathbb{R}^{m-1} : |\xi| \geq 1\}$ (cfr. teor. 3 di [3]).

Si hanno ulteriormente, le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 3.2. *L'operatore* R *definito in* (3.8) *ha norma piccola con* $\nabla\xi$.

Dim. Basta provare separatamente l'asserto per R_1 e R_2. Ora, per il secondo l'asserto consegue dalla prop. 1.1 di [11] osservando che

$$\sqrt{1+|\nabla\xi(y)|^2}-\sqrt{1+|\nabla\xi(x)|^2}=$$

$$=(\sqrt{1+|\nabla\xi(y)|^2}-1)-(\sqrt{1+|\nabla\xi(x)|^2}-1)$$

Per quanto riguarda R_1, applicando il metodo della rotazione si ottiene che (cfr. prop. 1.1 di [11])

$$\int_{|x-y|>\varepsilon}[G(x-y,\ \xi(x)-\xi(y))-G(x-y\ ,\nabla\xi(x)\cdot(x-y))]\ f(y)dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma}d\sigma\int_{|z|=\nu}G(\sigma,z)dz\int_{|t-r|>\varepsilon}[\frac{1}{z-\frac{\xi(t\sigma+w)-\xi(r\sigma+w)}{t-r}}-\frac{1}{z}]\cdot$$

$$\frac{f(r\sigma+w)}{t-r}\ dr+\int_{\Sigma}[G(\sigma,\nabla\xi(x)\cdot\sigma)-G(\sigma,0)\ d\sigma\int_{|t-r|>\varepsilon}\frac{f(r\sigma+w)}{t-r}\ dr.$$

Pertanto, tenendo presente che $|G(\sigma,\ \nabla\xi(x)\cdot\sigma)-G(\sigma,\ o)|\leq C\max|\nabla\xi|$ e che la funzione olomorfa $F(w)=\dfrac{1}{z-w}-\dfrac{1}{z}$ si annulla per $w=o$, l'asserto consegue dal teor. 2 di [2] .

PROPOSIZIONE 3.3. *Siano*

$$H_i\ f(x)=\int^{*}_{R^{m-1}}h_i(x,x-y)f(y)dy \qquad (i=1,2)$$

due operatori integrali singolari C^∞_0 *su* $L^s(\mathbb{R}^{m-1})$ (cfr. [3]). *Allora, se*

$$(3.20) \qquad h_2(x,x-y) = G(x-y, \nabla\xi(x)\cdot(x-y))$$

con $\xi\in C^1_0(\mathbb{R}^{m-1})$ *verificante le condizioni* (2.5) *e* G *funzione analitica in* $\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$ *positivamente omogenea di grado* (1-m) *e dispari, per ogni* $f\in L^s(\mathbb{R}^{m-1})$ *si ha* (3)

$$\|(H_1\cdot H_2 - H_1\circ H_2)f\|_s \leq C \max|\nabla\xi|\,\|f\|_s$$

con C *costante dipendente da* s,m,h_1 *e* h_2.

Dim. Sviluppate le $h_i(x,z)$ $(i=1,2)$ in serie di funzioni ultrasferiche sulla superficie sferica unitaria di $\mathbb{R}^{m-1}$ come segue

$$h_1(x,z) = \Sigma\, a_{n\ell}(x)y_{n\ell}(z')\cdot|z|^{-(m-1)}$$

$$h_2(x,z) = \Sigma\, b_{\nu\mu}(x)y_{\nu\mu}(z')\cdot|z|^{-(m-1)}$$

si ottiene (cfr. (2) di pag. 257 di [9]) (3)

$$(3.21) \qquad H_1\cdot H_2 - H_1\circ H_2 = \Sigma\, a_{n\ell}(G^{n\ell}\, b_{\lambda\mu} - b_{\lambda\mu}\, G^{n\ell})G^{\lambda\mu}.$$

Si osservi dapprima che se $g\in L^s(\mathbb{R}^{m-1})$ a causa del lemma 2 di [3] si ha

(3) Con $H_1\circ H_2$ si denota l'operatore avente $\sigma(H_1)\cdot\sigma(H_2)$ quale simbolo, mentre si denota con $H_1\cdot H_2$ l'operatore composto di H_1 e H_2.

$$\|G^{n\ell}b_{\lambda\mu} - b_{\lambda\mu}\, G^{n\ell})g\,\|_s \leq \|(b_{\lambda\mu} - b_{\lambda\mu}(0))\; G^{n\ell}g\,\|_s +$$
$$+\|G^{n\ell}_{\lambda\mu}(b_{\lambda\mu}-b_{\lambda\mu}(0))g\,\|_s \leq C_{s,m}\sup|b_{\lambda\mu}-b_{\lambda\mu}(0)|\;\|g\|_s.$$

D'altra parte per ogni $r\in\mathbf{N}$ si ha (cfr. (8) di [3])

$$b_{\lambda\mu}(x) = (-1)^r\; \mu^{-r}(\mu+m-3)^{-r}\int_\Sigma y_{\lambda\mu}(z')\; L^r(h_2(x,z'))dz'$$

con $L=|z|^2\Delta_z$ e, quindi, applicando la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$|b_{\lambda\mu}(x)-b_{\lambda\mu}(0)| \leq \mu^{-2r}\Big(\int_\Sigma |L^r h_2(x,z')-L^r h_2(0,z')|^2 dz'\Big)^{1/2}$$

Pertanto, a causa di (3.20) risulta $|b_{\lambda\mu}(x) - b_{\lambda\mu}(0)| \leq C_r|\nabla\xi(x)|\,\mu^{-2r}$

e, quindi

$$\|G^{n\ell}b_{\lambda\mu} - b_{\lambda\mu}G^{n\ell})g\,\|_s \leq C_r\;\mu^{-2r}\;\max|\nabla\xi|\cdot\|g\|_s. \tag{3.23}$$

In definitiva si ha, allora (cfr. teor. 4.5 di [9]),

$$\|(H_1\cdot H_2 - H_1\circ H_2)f\,\|_s \leq C\,\Sigma\,|a_{n\ell}|\;\sup|\nabla\xi|\sum_{\mu=1}^{+\infty}\;\sum_{\lambda=1}^{d(\mu)}\mu^{-2r}\;\|f\|_s \leq$$

$$\leq C\sup|\nabla\xi|\sum_{\mu=1}^{+\infty}\mu^{-2r}\cdot\mu^{(m-3)}\cdot\|f\|_s\;.$$

n.4.- TRADUZIONE DEL PROBLEMA I IN UN SISTEMA DI EQUAZIONI INTEGRALI.

Sia $\{\vartheta\}_B$ un sistema di matrici relative ad un ricoprimento $\{B_1,\dots,B_T\}$ di $\partial\Omega$ costituito da intorni coordinati e, per ogni $q\in\{1,\dots,T\}$ sia

$d^{(q)} = (d^{(q)}_{pk})_{\substack{1\leq p\leq 2n\\ 1\leq k\leq n}}$ una matrice avente le stesse proprietà delle $c^{(i)}$ del n.2. Posto, allora:

$$u_1(X) = \int_{\partial\Omega} M(Q-X)(d(Q)\cdot\varphi(Q))dQ \tag{4.1}$$

e

$$u_2(X) = \int_{\Omega} M(X-Y)f(Y)dY, \tag{4.2}$$

dove $M = (M_{rs})_{1\leq r,s\leq 2n}$ è la matrice fondamentale del sistema (1.1) definita dalle (5.1'') di [1], f è il vettore che compare in (1.1) e $\varphi \in L^s(\{\vartheta^\bullet\}_B)$, le eventuali soluzioni del problema I si rappresentano mediante la formula

$$u(X) = u_1(X) + u_2(X). \tag{4.3}$$

Osservazione 4.1. Ogni elemento M_{rs} della matrice M è una funzione analitica in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ positivamente omogenea di grado 1-m e dispari. Pertanto da una parte, essendo $f\in C^{0,\lambda}(\bar\Omega)$(cfr. teor. 12.1 di [7] e teor. 3.1 di [6]), risulta $u_2\in(C^\circ(\bar\Omega)\cap C'(\Omega))^{2n}$ mentre dall'altra si ha che $u_1\in C^1(\Omega)$ ed ha traccia non tangenziale in $(L^s(\partial\Omega))^{2n}$ essendo $d\cdot\varphi\in(L^s(\partial\Omega))^{2n}$ (cfr. prop. 3.1 e teor. 3.1 di [11]).

Imponendo, ora, al vettore u definito in (4.3) le condizioni al contorno (1.2) e tenendo presente la (3.5) di [11], per quasi tutti i $P\in\partial\Omega$ si ha

$$B\cdot C\cdot(d\cdot\varphi)(P) + \int^{*}_{\partial\Omega} B(P)\ M(Q-P)(d\cdot\varphi)(Q)\,dQ = g(P) \tag{4.4}$$

dove

$$C(P) = (C_{rs}(P))_{1\leq r,s\leq 2n} = -\int^{*}_{\pi_P} M(P-Q+N(P))dQ, \tag{4.5}$$

$$(4.6) \qquad g(P) = b_o(P) - B(P) \int_\Omega M(P-Y)f(Y)dY$$

e gli integrali con $*$ sono definiti assumendo come regioni di esclusione in (4.4) le porzioni di $\partial\Omega$ che hanno come proiezione su π_P le sfere di centro P e raggio infinitesimo ed in (4.5) le regioni di π_P esterne alle sfere di centro P e raggio divergente. Si noti, ulteriormente, che se

$$(4.7) \qquad S = (S_j)_{1\leq j\leq n} : L^s(\{\vartheta^*\}_B) \longrightarrow (L^s(\partial\Omega))^n$$

è la trasformazione che ad ogni $\varphi \in L^s(\{\vartheta^*\}_B)$ associa l'elemento di $(L^s(\partial\Omega))^n$ che figura al primo membro di (4.4), questa assume anche la forma seguente

$$(4.4') \qquad S\varphi = g \ .$$

Osservato, infine, che la (4.4) è un sistema di equazioni integrali singolari al quale si associano le seguenti *matrici simboliche*

$$(4.8) \qquad \mathcal{M}^q(P,\tau) = (\mu^q_{j\ell}(P,\tau))_{1\leq j,\ell\leq n} = B(P)\cdot\psi(P,\tau)\cdot d^q(P) \qquad \forall P\in B_q$$

dove $\psi(P,\tau)$ è la matrice simbolica del seguente sistema di operatori integrali singolari di tipo C^∞_o su $\partial\Omega$

$$(4.9) \qquad \mathfrak{A}: f\in(L^s(\partial\Omega))^{2n} \longrightarrow C(P)f(P) + \int^*_{\partial\Omega} M(Q-P)f(Q)dQ,$$

si passa alla dimostrazione del seguente fondamentale

TEOREMA 4.1. *Se per ogni* $P\in\partial\Omega$ *e per ogni* $\tau\in R^{m-1}$ *con* $|\tau| = 1$ *risulta* $\mathcal{M}^q(P,\tau) \neq 0$ *per* $P\in B_q$, *allora la trasformazione* S *è a* *codominio chiuso.*

Dim. A causa del teor. 2.5 di [1] basta provare che la trasformazione S è riducibile cioé che esiste $S' : (L^s(\partial\Omega))^n \longrightarrow L^s(\{\vartheta^*\}_B)$ tale che $S' \circ S = I+K$ essendo I l'identità e K un operatore compatto su $L^s(\{\vartheta^*\}_B)$ A questo scopo, sia

$$\mathcal{N}^q(P,\tau) = (\vartheta^q_{j\ell})_{1\leq j,\ell\leq n}$$

la matrice inversa di $\mathcal{A}^q(P,\tau)$. Tenuto conto dell'osser. 3.3, ogni $\vartheta_{j\ell}(P,\tau)$ risulta una funzione positivamente omogenea di grado zero e di classe $C^\infty(\mathbb{R}^{m-1}-\{0\})$ rispetto a τ con derivate rispetto a τ continue su $B_q \times \{\tau\in R^{m-1} : |\tau|\geq 1\}$. Posto allora,

$$h^q_{ij}(P) = \frac{1}{\omega_{m-1}} \int_\Sigma \vartheta^q_{ij}(P,\tau)d\tau \qquad \forall P\in B_q \tag{4.10}$$

dove ω_{m-1} è la misura della superficie della sfera unitaria in $\mathbb{R}^{m-1}$, dal teor. 3 di [3] consegue che esiste una funzione $H^q_{ij}(P,\tau)$ positivamente omogenea di grado $1-m$ e di classe $C^\infty(\mathbb{R}^{m-1}-\{0\})$ rispetto a τ, con derivate rispetto a τ continue su $B^q\times\{\tau\in\mathbb{R}^{m-1} : |\tau|\geq 1\}$ e tale che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon<|\eta|<\frac{1}{\varepsilon}} H^q_{ij}(P,\eta)e^{i\eta\tau}\, d\eta = -h^q_{ij}(P) + \vartheta^q_{ij}(P,\tau). \tag{4.11}$$

Sia $(D_q)_{1\leq q\leq T}$ un ricoprimento di $\partial\Omega$ formato da chiusi abbastanza regolari a due a due privi di punti interni in comune e tali che $D_q\subset B_q$ e sia $\alpha_q\in C_0^\infty(B_q)$ uguale a 1 su D_q. A causa del teor. 2 di [3] si ha, allora, che l'operatore euclideo T^q_{ij} definito come segue

$$(4.12)\qquad T^q_{ij}\,\varphi(x) = \alpha_q(x,\ \xi_q(x))\,\{h^q_{ij}(x,\ \xi_q(x))\ \varphi(x) +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x-y|>\varepsilon} H^q_{ij}\,((x,\xi_q(x)),x-y)\varphi(y)dy\,\}$$

è continuo in $L^s(\mathbb{R}^{m-1})$ e lo stesso ha quale simbolo (cfr. def. 2 di [3]) la funzione

$$(4.13)\qquad \sigma(T^q_{ij})(x,\tau) = \alpha_q(x,\xi_q(x))\ \vartheta^q_{ij}((x,\xi_q(x)),\tau)\ .$$

Inoltre, se δ_q è una funzione di classe $C^1_o(B_q)$ uguale a 1 su supp α_q, posto $\widetilde{T}^q = (T^q_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, l'operatore T^q definito come segue

$$(4.14)\qquad T^q\,\varphi = \widetilde{T}^q\,(\,\delta_q\ \varphi\circ\widetilde{x}^{-1}_q)\circ\widetilde{x}_q$$

risulta continuo da $(L^s(\partial\Omega))^n$ in sé. Infine, se S' è l'operatore che ad ogni $\varphi\in(L^s(\partial\Omega))^n$ associa il vettore $S'\varphi = (S'^q\varphi)_{1\leq q\leq T}$ definito ponendo

$$(4.15)\qquad S'^q\,\phi(P) = \begin{cases} T'^q\varphi\,(P) & \text{se}\quad P\in\overset{\circ}{D}_q \\ \vartheta^{*q\ell}(P)T^\ell\,\varphi(P) & \text{se}\quad P\in B_q\cap\overset{\circ}{D}_\ell\ , \end{cases}$$

a causa dell'osserv. 2.1 S' risulta continuo da $(L^s(\partial\Omega))^n$ in $L^s(\{\vartheta^*\}_B)$.

Si passa, allora, a dimostrare che esiste un operatore compatto K su $L^s(\{\vartheta^*\}_B)$ tale che $S'\circ S = I+K$. A questo scopo, si osservi dapprima che se $\varphi\in L^s(\{\vartheta^*\}_B)$, se $\bar\delta_q$ è una funzione di classe $C^1_o(B_q)$ uguale a 1 su un intorno del supporto di δ_q e se γ_q è una funzione di classe $C^1_o(B_q)$ uguale a 1 su un intorno del supporto di $\bar\delta_q$, tenuto conto di (4.9) si ha

$$(4.16)\qquad \bar{\delta}_q S\varphi = (\bar{\delta}_q B\cdot\mathcal{Q}\cdot\gamma_q)(d\cdot\varphi) + (\bar{\delta}_q\cdot B\cdot\mathcal{Q}\cdot(1-\gamma_q))(d\cdot\varphi),$$

Inoltre, per la prop. 3.1, esiste una matrice $\widetilde{H}^q = (\widetilde{H}^q_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq 2n}}$ di cperatori integrali singolari di tipo C^{∞}_o su $L^s(\mathbf{R}^{m-1})$ avente simbolo

$$\bar{\delta}_q(x, \xi_q(x))\ B(x, \xi_q(x))\,\Psi((x, \xi_q(x)), \tau)$$

ed una matrice R^q di operatori compatti su $L^s(B_q)$ tali che

$$(4.17)\qquad (\bar{\delta}_q\cdot B\cdot\mathcal{Q}\cdot\gamma_q)(d\cdot\varphi) = R^q(d\cdot\varphi) + \bar{\delta}_q\cdot\widetilde{H}^q(\gamma_q\cdot(d\cdot\varphi)\circ\widetilde{x}_q^{-1})\circ\widetilde{x}_q\ .$$

Pertanto, tenendo presente che $\bar{\delta}_q(P)M(P-Z)(1-\gamma_q(Z))$ è continua, consegue che l'operatore

$$(4.18)\qquad \widetilde{K}^q : \varphi \longrightarrow R^q(d\cdot\varphi) + \bar{\delta}_q\cdot(B\cdot\mathcal{Q}\cdot(1-\gamma_q))(d\cdot\varphi)$$

è compatto da $L^s(\{\vartheta^*\}_B)$ in $(L^s(\partial\Omega))^n$. Quindi, se $\varphi\in L^s(\{\vartheta^*\}_B)$, risulta

$$(4.19)\qquad T^q(S\varphi) = T^q\cdot\widetilde{K}^q(\varphi) + T^q(\bar{\delta}_q\cdot\widetilde{H}^q(\gamma_q\cdot d\cdot\varphi\circ\widetilde{x}_q^{-1})\circ\widetilde{x}_q).$$

Con ragionamento simile a quello del lemma 4 di [10] si prova, poi, che esiste una matrice $\bar{K}^q$ di operatori compatti su $L^s(\widetilde{x}_q(B_q))$ tale che risulti (cfr. ([2]))

$$(4.20)\qquad \widetilde{T}^q(\delta_q\circ\widetilde{x}_q^{-1}\cdot\widetilde{H}_q) = \bar{K}^q + \widetilde{T}^q\circ(\delta_q\circ\widetilde{x}^{-1}\cdot\widetilde{H}_q).$$

In definitiva, risulta, allora

$$(4.21) \qquad T^q(S\cdot\varphi) = \{ T^q \cdot \tilde{K}^q(\varphi) + \bar{K}^q(\gamma_q \cdot d\circ\varphi\circ\tilde{x}_q^{-1})\circ\tilde{x}_q \} +$$

$$+[\tilde{T}^q\circ(\delta_q\circ\tilde{x}_q^{-1}\cdot\tilde{H}_q)](\gamma_q\cdot d\cdot\varphi\circ\tilde{x}_q^{-1})\circ\tilde{x}_q =$$

$$= \bar{\bar{K}}^q\,\phi + [\tilde{T}^q\circ(\delta_q\circ x_q^{-1}\cdot\tilde{H}_q)](\gamma_q\cdot d\cdot\varphi\circ\tilde{x}_q^{-1})\circ\tilde{x}_q$$

con $\bar{\bar{K}}^q$ operatore compatto da $L^s(\{\vartheta^*\}_B)$ in $(L^s(\partial\Omega))^n$ e,quindi,poiché il simbolo dell'operatore euclideo $[\tilde{T}^q\circ(\delta_q\circ\tilde{x}_q^{-}\cdot\tilde{H}_q)]\cdot(d^q\circ\tilde{x}_q^{-1})$ è $(d^q\circ\tilde{x}_q\cdot\delta_{ib})_{1\le i,b\le n}$ con δ_{ib} simbolo di Kronecher, dal Teor. 3 di [3] consegue che

$$(4.22) \qquad T^q(S\varphi) = \bar{\bar{K}}^q\,\varphi + a_q\cdot\varphi^q.$$

Da qui, per (4.15) e (2.1) consegue ancora che

$$(4.23) \qquad S'^q(S(\phi))(P) = \begin{cases} \varphi^q(P) + \bar{\bar{K}}^q\varphi\,(P) & \text{se } P\in \mathring{D}_q \\ \varphi^q(P) + \vartheta^{*\,q\ell}(P)\bar{\bar{K}}^\ell\,\varphi(P) & \text{se } P\in B_q\cap \mathring{D} \end{cases}$$

Posto, infine, per ogni $\varphi\in L^s(\{\vartheta^*\}_B)$,

$$(4.24) \qquad K^q\,\phi(P) = \begin{cases} \bar{\bar{K}}^q\,\phi\,(P) & \text{se } P\in \mathring{D}_q \\ \vartheta^{*\,q\ell}(P)\bar{\bar{K}}^\ell\,\varphi(P) & \text{se } P\in B_q\cap \mathring{D}_\ell\,, \end{cases}$$

l'operatore $K = (K^q)_{1\le q\le T}$ risulta compatto su $L^s(\{\vartheta^*\}_B)$ e $S'\circ S = I+K$.

n.5. - TEOREMI DI ESISTENZA E UNICITA' PER IL PROBLEMA I.

Se la forma quadratica

$$\sum_{r,s=1}^{2n} a_{rs}(N(P))u_r u_s$$

verifica la seguente ipotesi

(*) *ogni radice dell'equazione secolare associata alla* (5.1) *ha ordine di molteplicità costante al variare di* P *su* $\partial\Omega$

ragionando come in [1] si prova che esiste un ricoprimento finito $\{V_1,\dots,V_L\}$ di $\partial\Omega$ costituito da intorni coordinati ed esiste una matrice ortogonale $(\bar{d}^q_{rs})_{1\le r,s\le 2n}$ di funzioni di classe $C^\circ(V_q)$ tale che per ogni $P\in V_q$ e qualunque sia la 2n-pla $(u_i)_{1\le i\le 2n}$ risulti

$$(5.2)\qquad \sum_{r,s=1}^{2n} a_{rs}(N(P))u_r u_s = \sum_{\ell=1}^{n} g_\ell(P)\Big(\sum_{j=1}^{2n} \bar{d}^q_{j\ell}(P)u_j\Big)^2 +$$

$$+\sum_{\ell=1}^{n} g'_\ell(P)\Big(\sum_{j=1}^{2n} d^q_{j,n+\ell}(P)u_j\Big)^2$$

dove $g_1(P),\dots,g_n(P)$ (rispett. $g'_1(P),\dots,g'_n(P)$) sono le n radici positive (rispett. negative) dell'equazione secolare associata alla (5.1). Inoltre, se $p,q\in\{1,\dots,L\}$ ed è $V_p\cap V_q\neq\emptyset$, esiste una matrice ortogonale $(\bar{\nu}^{pq}_{j\ell})_{1\le j,\ell\le 2n}$ di funzioni di classe C° tale che in $V_p\cap V_q$ risulti

$$(5.3)\qquad \bar{d}^p_{ti} = \sum_{l=1}^{n}(\bar{\vartheta}^{pq}_{\ell i}\,\bar{d}^q_{t\ell})\quad \forall i\in\{1,\dots,n\}\quad \forall t\in\{1,\dots,2n\}\,.$$

Nel seguito si denota con $\bar{\vartheta}^{pq}$ la matrice $(\bar{\vartheta}^{pq}_{\ell i})_{1\le\ell,i\le n}$ con $\bar{d}^q$ la matrice $(\bar{d}^q_{ti})_{\substack{1\le t\le 2n \\ 1\le i\le n}}$.

Osservazione 5.1. Se $\{A_1,\dots,A_N\}$ è un ricoprimento di $\partial\Omega$ costituito da intorni coordinati tali che

$$A_i = \{(x,t)\in \mathbb{R}^{m-1}\times \mathbb{R} : t = \xi_i(x)\},$$

si denota con $\{B_1,\dots,B_T\}$ il ricoprimento $(A_i \cap V_j)_{\substack{1\le i\le N \\ 1\le j\le L}}$. Pertanto, se $q\in\{1,\dots,T\}$, si ha

$$B_q = \{(x,t)\in\mathbb{R}^{m-1}\times \mathbb{R} : t = \xi_j(x)\}\cap V_j . \tag{5.4}$$

Posto, inoltre, se $B_p\cap B_q \neq \emptyset$ con $B_p = A_i \cap V_\ell$ e $B_q = A_r \cap V_j$

$$\nu^{pq} = \vartheta^{\ell j} \quad \textit{in} \quad B_p\cap B_q \tag{5.5}$$

le matrici d^q definite in B_q ponendo

$$d^q = \bar{d}^j \tag{5.6}$$

hanno le stesse proprietà delle $c^{(i)}$ del n. 2 rispetto alla famiglia di matrici $\{\vartheta^{pq}\}$.

Osservazione 5.2. Con le notazioni e nelle ipotesi della precedente osserv. 5.1. a causa del teor. 7.3 di [1] per ogni $P\in B_q$ risulta per per ogni $q\in\{1,\dots,T\}$ (4)

$$\mathcal{N}^q(P,\tau) = d^{q*}(P)\,\psi(P,\tau)\,d^q(P) \neq 0$$

dove ψ è la matrice che figura nella (4.8). Inoltre, se C è la matrice definita in (4.5) ed S_1 è la trasformazione da $L^s(\{\vartheta\}_B)$ in sé definita

(4) Si denota con d^{q*} la matrice trasposta di d^q.

nel modo seguente,

$$(5.7) \quad S_1\varphi(P) = (d^*\cdot C\cdot(d\cdot\varphi))(P) + \int^*_{\partial\Omega} d^*(P)\, M(P-Q)(d\cdot\varphi)(Q)dQ,$$

costruiti S'_1 e K_1 rispettivamente mediante (4.23) e (4.24), sostituendo alla matrice B la matrice d^{*q} con ragionamento analogo a quello del teor. 4.1 si prova che K_1 *è un operatore compatto su* $L^s(\{\vartheta\}_B)$ e, inoltre,

$$(5.8) \qquad S'_1\circ S_1 = I + K_1 .$$

Ulteriormente l'operatore K_1 *ha localmente norma piccola* in conseguenza della proposizione successiva la cui dimostrazione discende dalle prop. 3.2 e 3.3.

PROPOSIZIONE 5.1. *Se* B_q *è l'intorno coordinato definito in* (5.4) e γ_q *è la funzione che figura in* (4.16), *si ha*

$$(5.9) \qquad \|\gamma_q K_1\gamma_q(\varphi)\|_{L^s(\{\nu\}_B)} \leq C_o \max|\nabla\xi_i|\cdot\|\varphi\|_{L^s(\{\nu\})_B)}$$

con C_o *costante indipendente da* $\{A_1,\dots,A_N\}$.

In quanto segue $\{A_1,\dots,A_N\}$ è un fissato sistema di intorni coordinati tali che

$$A_i = \{(x,t)\in\mathbb{R}^{m-1}\times\mathbb{R} : t = \xi_i(x)\} , \quad \max|\nabla\xi_i| < \frac{1}{C_o}$$

dove C_o è la costante che figura in (5.9), $\{B_1,\dots,B_T\}$ è il ricoprimento di $\partial\Omega$ costruito nell'osserv. 5.1 e d^q e $\vartheta^{p,q}$ sono le matrici definite rispettivamente in (5.6) e (5.5).

In analogia con [1] si affronta anche qui il problema I attraverso l'esame dei problemi che seguono:

II - *Si determini una soluzione* $u = (u_\ell)_{1\leq l\leq 2n} \in (C^1(\Omega))^{2n}$ *del sistema* (1.1) *avente traccia interna non tangenziale in* $(L^s(\partial\Omega))^{2n}$ $(1<s<+\infty)$ *e tale che*

$$(5.10)\qquad \sum_{\ell=1}^{2n} d^q_{\ell r}(P)u_\ell(P) = d^q_{ro} \qquad \text{q.o. } in \quad B_q$$

dove $((d^q_{ro})_{1\leq r\leq n})_{1\leq q\leq M}$ è un fissato elemento di $L^s(\{\vartheta\}_B)$.

III - *Si determini una soluzione* $u = (u_\ell)_{1\leq \ell\leq 2n} \in (C^1(\mathbb{R}^m \bar{\Omega}))^{2n}$ *del sistema omogeneo associato al sistema* (1.1) *infinitesima all'infinito, di ordine superiore rispetto a* $|X|^{-m/2}$, *avente traccia esterna non tangenziale in* $(L^s(\partial\Omega))^{2n}$ $(1<s<+\infty)$, *verificante la* (5.10).

IV - *Si determini una soluzione* $v = (v_l)_{1\leq \ell\leq 2n} \in (C^1(\Omega))^{2n}$ *del sistema omogeneo associato al sistema* (1.1) *avente traccia interna non tangenziale in* $(L^2(\partial\Omega))^{2n}$ *ed un elemento* ψ *di* $(L^2(\partial\Omega))^n$ *tale che*

$$(5.11)\qquad v_q(P) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{r=1}^{2n} A_{rq}(N(P))b_{lr}(P)\psi_l(P) \qquad q=1,\dots,2n,$$

dove $A = (A_{rs}(N(P)))_{1\leq r,s\leq 2n}$ *è la matrice inversa della matrice* $a(P)$ *definita nella* (2.8) *e* $B = (B_{lr})_{\substack{1\leq l\leq n\\ 1\leq r\leq 2n}}$ *è la matrice che figura nelle condizioni al contorno* (1.2).

Adoperando la prop. 2.2, con procedimento analogo a quello indicato in [1] per provare i teor. 7.1 e 7.2, si provano ora le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 5.2. *Se* $s \geq 2$, *i problemi* II *e* III *ammettono al più una soluzione.*

PROPOSIZIONE 5.3. *In* $L^2(\{\vartheta\}_B)$ *il sistema omogeneo associato al seguente sistema*

$$d^*C\cdot(d\cdot\Phi)(P)+\int^*_{\partial\Omega} d^*(P)\cdot M(P-Q)\cdot(d\cdot\Phi)(Q)dQ = h(P), \tag{5.12}$$

dove

$$h(P) = d_o(P) - d^*(P)\int_\Omega M(P-Y)\ f(Y)dY, \tag{5.13}$$

$C(P)$ *è la matrice definita in* (4.5) *ed* f *è il vettore che figura in* (1.1), *nonché il sistema trasposto di detto sistema omogeneo ammettono soltanto la soluzione nulla.*

Si passa a dimostrare il seguente

TEOREMA 5.1. *Se* $s\geq 2$ *il problema* II *ammette soluzione qualunque siano i termini noti.*

Dim. Traducendo il problema II in equazioni integrali mediante la rappresentazione (4.1) si ottiene il sistema (5.12) con

$$C(P) = \frac{1}{2}\ A(N(P)). \tag{5.14}$$

Sia $s\geq 2$ e $h\in L^s(\{\vartheta\}_B)$. Essendo, a causa di (5.8), la trasformazione S_1 a codominio chiuso ed essendo, in particolare, $h\in L^2(\{\vartheta\}_B)$, a causa della prop. 5.3 in $L^2(\{\vartheta\}_B)$ esiste una ed una sola soluzione Φ del sistema (5.12). Tenendo presente la (5.8) e considerata la funzione α_q che compare in (4.13), a causa della prop. 5.1 si ha allora,

$$\alpha_q\,\phi = (I+\gamma_q K_1\,\gamma_q)^{-1}(\gamma_q\ S_1'\ (\alpha_q(h))$$

e, quindi, $\phi\in L^s(\{\vartheta\}_B)$. La funzione u costruita con tale ϕ mediante le

(4.3) è infine, soluzione del problema II.

Ragionando come si fa in [1] per provare il teor.7.5, dal precedente teor. 5.1 consegue, ora, la

PROPOSIZIONE 5.4. *Se* $s \geq 2$ *la* (4.1) *determina una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle soluzioni del sistema* (1.1) *di valori* $(C^1(\Omega))^{2n}$ *aventi traccia interna non tangenziale in* $(L^s(\partial\Omega))^{2n}$ *e l'insieme* $L^s(\{\nu\}_B)$.

Osservazione 5.3. Dalla prop. 5.4 si deduce che il sistema di equazioni integrali singolari (4.4) è equivalente al problema I nel senso che l'uno è risolubile se lo è l'altro e, inoltre, se esistono p soluzioni linearmente indipendenti del problema omogeneo associato a (4.4), allora esistono altrettante soluzioni linearmente indipendenti del problema omogeneo associato al problema I.

Ragionando come in [1] i risultati precedenti forniscono, da ultimo, i mezzi per dimostrare i seguenti teoremi nell'ipotesi $s \geq 2$:

TEOREMA 5.2. *Condizione necessaria affinché il problema* I *sia risolubile è che per ogni soluzione* (v,ψ) *del problema* IV *risulti*

$$\int_{\partial\Omega} b_o \cdot \psi \, dP + \int_{\Omega} v \cdot f \, dX = 0. \tag{5.15}$$

TEOREMA 5.3. *Nell'ipotesi (*) se per ogni* $P \in \partial\Omega$ *e* $\tau \in \mathbb{R}^{m-1}$ *con* $|\tau| = 1$ *si ha*

$$\mathcal{M}^q(P,\tau) \neq 0 \qquad \textit{per} \quad P \in B_q ,$$

risulta che:

i - *il problema omogeneo associato al problema* I *ammette un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti;*

ii - *condizione necessaria e sufficiente perché il problema* I *sia risolubile è che per ogni soluzione* (v,ψ) *del problema* IV *sia verificata la condizione di compatibilità* (5.15).

BIBLIOGRAFIA

[1] AVANTAGGIATI,A: *Problemi al contorno per i sistemi ellittici simmetrici lineari ecc.*,Ann.Mat.Pura e Appl., Vol.LXI (1963),193-268.

[2] CALDERON,A.P.:*Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A 74,4 (1977), 1324-1327.

[3] CALDERON,A.P.-ZYGMUND,A.: *Singular integral operators and differential equations* Amer.Jour.of Mathem. 79(1957), 801-821.

[4] JOHN,F.:*Plane waves and spherical means ecc.* Inter.Sc.Pubb.Inc. New York (1955).

[5] MIKHLIN,S.G.:*Multidimensional singular integrals and integral equations*, Pergamon Press (1965).

[6] MIRANDA,C.:*Sulle proprietà di regolarità di certe trasformazioni integrali*,Lincei, Memorie Sc.Fis.ecc.,Vol VII,sez.1,9 (1965),302-336.

[7] MIRANDA,C.:*Partial differential equations of elliptic type;* Springer Verlag, Berlin (1970).

[8] NECAS,J.: *Les méthodes directes in Theorie des equations elliptiques;* Masson et C., Ed. Paris (1967).

[9] NERI,U.: *Singular integrals;*Lect.Not.in Math.,200, Springer Verlag, Berlin (1971).

[10] SEELEY,R.T.:*Singular integrals on compact manifold;*Amer.Jour.of Math. (1959), 658-690.

[11] SELVAGGI,R.-SISTO,I.: *Regolarità di certe trasformazioni integrali relative ad aperti di classe C^1*,Rend.Accad.Sc.Fis. e Mat.,Soc.Naz.Sc.Lett. e Ar.,Napoli, Ser. IV- Vol.XLV (1978),393-410.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 12 Marzo 1981
ed accettato per la pubblicazione l'11 Maggio 1981
su parere favorevole di A.Avantaggiati ed E. De Giorgi