Note di Matematica Vol. II, 235-258 (1982)

METODO DELLA DEPARAMETRIZZAZIONE APPLICATO A PROBLEMI DI CONTROLLO TIPO RITARDO

Elena MUSELLI (*)

Summary. *We obtain an existence theorem for the minimum of the functional* $F(x,u) = \int_0^T f(t,x(t),x(\omega(t)),u(t))dt$ *associated to the differential equation* $\dot{x}(t) = g(t,x(t),x(\omega(t)),u(t))$ *a.e.* $t\varepsilon(0,T)$, *reducing our problem a simpler model where control variables are not present.*

1. INTRODUZIONE. Il presente lavoro riguarda il problema dell'esistenza di controllo ottimo per un funzionale integrale associato ad un'equazione che generalizza quelle con ritardo.

Recentemente altri Autori hanno considerato l'ottimizzazione di problemi di controllo associati ad equazioni funzionali contenenti, come caso particolare, equazioni con ritardo. Tra questi Angell [3],[4], Cesari [5],[8] e Berkovitz [6]. In tali lavori, che

(*) Istituto di Matematica - Università - Genova -

Note di Matematica Vol. II, 235-258 (1982)

METODO DELLA DEPARAMETRIZZAZIONE APPLICATO A PROBLEMI DI CONTROLLO TIPO RITARDO

Elena MUSELLI (*)

Summary. *We obtain an existence theorem for the minimum of the functional* $F(x,u) = \int_0^T f(t,x(t),x(\omega(t)),u(t))dt$ *associated to the differential equation* $\dot{x}(t) = g(t,x(t),x(\omega(t)),u(t))$ *a.e.* $t\in(0,T)$, *reducing our problem a simpler model where control variables are not present.*

1. INTRODUZIONE. Il presente lavoro riguarda il problema dell'esistenza di controllo ottimo per un funzionale integrale associato ad un'equazione che generalizza quelle con ritardo.

Recentemente altri Autori hanno considerato l'ottimizzazione di problemi di controllo associati ad equazioni funzionali contenenti, come caso particolare, equazioni con ritardo. Tra questi Angell [3],[4], Cesari [5],[8] e Berkovitz [6]. In tali lavori, che

(*) Istituto di Matematica - Università - Genova -

per altro affrontano un problema più generale, si fanno però ipotesi più restrittive circa la regolarità della funzione f. In [3], [4] e [6] vi sono ipotesi meno generali anche sulla regione a cui appartengono gli stati e sulla regolarità della mappa U.

Il problema che noi affrontiamo consiste nel determinare condizioni sufficienti per l'esistenza del minimo per un funzionale integrale

$$F(x,u) = \int_0^T f(t,x(t),x(\omega(t)),u(t))dt$$

su una classe opportuna di coppie di funzioni (x,u), x assolutamente continua su $[0,T]$ ed u Lebesgue-misurabile, che soddisfino l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = g(t,x(t),x(\omega(t)),u(t))$$

per quasi ogni $t \in (0,T)$ e dati vincoli.

La funzione $\omega : [0,T] \to I$, con I intervallo, presente nell'equazione di stato e nell'integranda è tale che la controimmagine, secondo ω, di un insieme Lebesgue-misurabile è ancora Lebesgue-misurabile. Questa funzione estende il caso con ritardo nel senso che non è necessaria un'ipotesi del tipo $\omega(t) \leq t$ per ogni $t \in [0,T]$.

Per ottenere un teorema di esitenza viene usato il metodo della "deparametrizzazione" introdotto da Rockafellar in [1].

Si definisce, in un primo tempo, una funzione K che coincide con l'integranda del nostro funzionale sui vincoli e valga $+\infty$ al di fuori di essi, ottenendo un nuovo problema di controllo equivalente al primo.

Nel V° capitolo, viene introdotto un problema libero di calcolo delle variazioni, la cui integranda è ottenuta dalla funzione K minimizzandola rispetto al controllo e si verifica come l'esistenza del minimo su un'opportuna classe Ω per quest'ultimo problema, implica l'esistenza della coppia ottimale per il problema originale.

Osserviamo che nel quadro di ipotesi è presente al punto (B), una condizione di convessità per la coppia di funzioni (f,g) già usata da altri autori, tra i quali Ioffe-Tikomirov in [7] (cap.1, § 1.1, teorema 3). Tale ipotesi, in questo lavoro, è legata al metodo usato. Indebolendola si può ancora dare un teorema di esistenza rinunciando però a ricondurre il problema dato ad un problema libero; questo è l'argomento trattato nel lavoro "Su problemi di controllo tipo ritardo ancora da pubblicare.

L'autrice desidera esprimere la sua gratitudine al Prof. J.P. CECCONI per averle suggerito l'argomento del lavoro.

2. NOTAZIONI. Data una funzione $f : [0,T] \times \mathbb{R}^k \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-misurabile, dove $\mathcal{L}([0,T]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ rappresenta la σ-algebra generata dal prodotto della σ-algebra di Lebesgue su $[0,T]$ e di Borel su $\mathbb{R}^k$, per ogni $z : [0,T] \to \mathbb{R}^k$, Lebesgue-misurabile, definiamo

$$I(z) = \int_0^T f(t,z(t))dt \in \bar{\mathbb{R}}$$

se $f(.,z(.))$ è maggiorata o minorata da una funzione integrabile; altrimenti $I(z) = +\infty$.

Siano $AC([0,T], \mathbb{R}^k)$ e $M([0,T])$ rispettivamente l'insieme delle funzioni assolutamente continue su $[0,T]$ a valori in $\mathbb{R}^k$ e l'insieme delle funzioni Lebesgue-misurabili su $[0,T]$ a valori in $\mathbb{R}^m$. Sia B un intervallo di $\mathbb{R}$; denotiamo con C(B) l'insieme delle fun zioni continue e limitate su B a valori in $\mathbb{R}^n$. Tale insieme diventa spazio di Banach se per ogni $\psi \in C(B)$ si considera la norma

$$\|\psi\| = \sup(|\psi(t)|,\ t \in B).$$

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^k$ Lebesgue-misurabile sarà semplicemente detto misurabile; analoga terminologia verrà usata per le funzioni e le mappe.

3. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA.

Siano $[0,T]$ ed I intervalli di $\mathbb{R}$ tali che $[0,T] \subset I$ e $-T \leq t \leq T$ per ogni $t \in I$; $\beta_i \subset C(\tilde{I})$ per $i = 1,2$, dove $\tilde{I} = I \cap \bar{\mathbb{R}}_-$. Sia $x: I \to \mathbb{R}^n$; per ogni $t \in [0,T]$, indichiamo con x_t la funzione definita

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \qquad \text{dove} \quad \theta \in \tilde{I}.$$

Sia $\omega : [0,T] \to I$ tale che $\omega^{-1}(A)$ è misurabile per ogni $A \subset \mathbb{R}$, A misurabile.

Consideriamo il problema, che denotiamo con (P), di minimizzare il funzionale

$$F(x,u) = \int_0^T f(t,x(t),x(\omega(t)),u(t))dt$$

sulla classe (supposta non vuota) delle coppie (x,u) di funzioni, $x : I \to \mathbb{R}^n$ tale che $x_{/[0,T]} \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ ed $u \in M([0,T])$, che soddisfano i vincoli

$$(3.1) \qquad \dot{x}(t) = g(t,x(t),x(\omega(t)),u(t)) \quad \text{quasi ovunque su } (0,T)$$

(3.2) $(x_o, x_T) \in \beta_1 \times \beta_2$ per quasi ogni $t \in (0,T)$;

(3.3) $x(t) \in X(t)$ per quasi ogni $t \in (0,T)$;

(3.4) $x(\omega(t)) \in X(\omega(t))$ per quasi ogni $t \in (0,T)$;

(3.5) $u(t) \in U(t,x(t))$ per quasi ogni $t \in (0,T)$;

dove $f : [0,T] \times \mathbb{R}^{2n+m} \to \bar{\mathbb{R}}$ è $L\times B$-misurabile, inferiomente semicontinua nelle ultime tre variabili e non identicamente $+\infty$ sui vincoli (3.1) $\sim$ (3.5). Le mappe $X : I \to 2^{\mathbb{R}^n}$ ed $U : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$ sono a valori non vuoti (eventualmente che ricoprono rispettivamente $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$).

Denotiamo

$$W(I)=\{x:I \to \mathbb{R}^n \text{ , tale che } x_{/[0,T]} \in AC([0,T],\mathbb{R}^n),\ (x_o,x_T)\in\beta_1\times\beta_2\}.$$

I seguenti gruppi di ipotesi servono per determinare l'esistenza di soluzioni per il problema (P).

(A) Le funzioni $f : [0,T] \times \mathbb{R}^{2n+m} \to \bar{\mathbb{R}}$ e $g : [0,T] \times \mathbb{R}^{2n+m} \to \mathbb{R}^n$ sono entrambe $L\times B$-misurabili, inoltre $f(t,.,.,.)$ e $g(t,.,.,.)$ sono, rispettivamente, inferiormente semicontinua e continua per ogni $t\in[0,T]$. La mappa X è misurabile e a valori chiusi, la mappa U è $L\times B$-misurabile e superiormente semicontinua in x.

(B) Fissati $(t,x) \in [0,T] \times X(t)$, per ogni $(w,u),(\bar{w},\bar{u})\in X(\omega(t)) \times U(t,x)$ e per ogni $\lambda\in(0,1)$, esiste un elemento $u\in U(t,x)$ tale che

(3.6) $$\lambda g(t,x,w,u)+(1-\lambda)g(t,x,\bar{w},\bar{u})=g(t,x,\tilde{w},\tilde{u})$$

$$(3.7) \qquad \lambda f(t,x,w,u)+(1-\lambda)f(t,x,\bar{w},\bar{u}) \geq f(t,x,\tilde{w},\tilde{u})$$

dove $\tilde{w} = \lambda w+(1-\lambda)\bar{w} \in X(\omega(t))$.

(C) Per ogni $r > 0$ esiste una funzione $\Phi_r : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \bar{\mathbb{R}}$ sommabile in t, tale che

(i) $\qquad zw+qu+pg(t,x,w,u) - f(t,x,w,u) \leq \Phi_r(t,p,z,q)$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| \leq r$ e per ogni $(w,u) \in \mathbb{R}^{n+m}$,

(ii) $\qquad \Phi_r(t,0,0,0)$ è indipendente da r,

(iii) esiste $s > 0$ tale che $\Phi_r(t,p,z,0) = \Phi_o(t,p,z)+r\Phi_1(t,p,z)$ per ogni $(p,z) \in \mathbb{R}^n$ tale che $|(p,z)| = s$, con Φ_o e Φ_1 sommabili in t.

(D) β_1 è un compatto e β_2 un chiuso di $C(\tilde{I})$.

4. LEMMI PRELIMINARI.

Sia Q un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{k+1}$ e $\vec{Q} = \{(v,\alpha+s):(v,\alpha)\in Q, s\geq 0\}$. Fissato $v \in \mathbb{R}^k$, sia $A_v = \inf\{\alpha : (v,\alpha)\in Q\}$, allora tale estremo inferiore coincide con $\inf\{\beta : (v,\beta)\in\vec{Q}\}$. Infatti $A_v \leq A_v+s \leq \alpha+s$ per ogni α tale che $(v,\alpha)\in Q$ e per ogni $s \geq 0$.

Sia $G : \mathbb{R}^k \to \bar{\mathbb{R}}$ la funzione definita

$$(4.1) \qquad G(v) = \inf\{\alpha : (v,\alpha) \in Q \};$$

per l'osservazione precedente si ha $G(v) = \inf\{\beta : (v,\beta) \in \vec{Q}\}$.

LEMMA 4.1. *Con le notazioni precedenti,* $G(.)$ *è convessa se* $\tilde{Q}$ *è sottoinsieme convesso di* $\mathbb{R}^{k+1}$.

Dimostrazione. Fissati $v_1, v_2 \varepsilon \mathbb{R}^k$, sia $\alpha_1 = G(v_1)$ e $\alpha_2 = G(v_2)$, allora $\alpha_1 = \inf\{\beta : (v_1,\beta) \varepsilon \tilde{Q}\}$ e $\alpha_2 = \inf\{\beta : (v_2,\beta) \varepsilon \tilde{Q}\}$. Poiché $\tilde{Q}$ è convesso si ha $(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \varepsilon \tilde{Q}$, per ogni $\lambda \varepsilon [0,1]$, per ogni α, β tali che (v_1,α) e $(v_2,\beta) \varepsilon \tilde{Q}$.

Osserviamo che $G(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) = \inf\{\gamma : (\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2, \gamma) \varepsilon \tilde{Q}\} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$ per ogni $\lambda \varepsilon [0,1]$ e per ogni α, β tali che (v_1,α) e $(v_2,\beta) \varepsilon \tilde{Q}$; dalla disuguaglianza precedente segue che $G(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \leq \lambda G(v_1) + (1-\lambda)G(v_2)$ per ogni $\lambda \varepsilon [0,1]$.

COROLLARIO 4.1. *Sia* Q *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^{k+1}$ *e* G *la funzione definita nella* (4.1). *Se* Q *verifica le proprietà seguenti:*

a) se $(v,\alpha) \varepsilon Q$, *allora* $(v,\beta) \varepsilon Q$ *per ogni* $\beta \geq \alpha$;

b) $Q \cap (v \times \mathbb{R})$ *è chiuso per ogni* $v \varepsilon \mathbb{R}^k$;

allora Q *è convesso se e solo se* $G(.)$ *è convessa.*

Dimostrazione. La tesi si ottiene se verifichiamo che epi $G(.) = Q$. L'inclusione $Q \subset$ epi $G(.)$ è immediata. Per l'altra inclusione è sufficiente verificare che, fissato $v \varepsilon \mathbb{R}^k$, $(v,G(v)) \varepsilon Q$.

Per definizione si ha $G(v) = \inf\{\alpha : (v,\alpha) \varepsilon Q\}$; fissato $v \varepsilon \mathbb{R}^k$ considero una successione minimizzante $\{\alpha_n^v\}_{n \varepsilon \mathbb{N}}$ tale che $\alpha_n^v \to G(v)$, da cui $(v,\alpha_n^v) \to (v,G(v))$; per la *b)* si ha $(v,G(v) \varepsilon Q$.

LEMMA 4.2. *Siano* f,g,U *ed* X *le funzioni e le mappe del capitolo 3. Sia* $\tilde{Q} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^{2n+1}}$ *la mappa definita*

$$\tilde{Q}(t,x)=\begin{cases}\{(g(t,x,w,u),w,f(t,x,w,u)+s) : w\varepsilon X(\omega(t)), u\varepsilon U(t,x), s\geq 0\} & \text{se } x\in X(t)\\ \emptyset & \text{se } x\notin X(t)\end{cases}$$

Allora, la mappa $\tilde{Q}$ *è a valori convessi se e solo se vale la*(B).

Dimostrazione. Sia $(t,x)\varepsilon[0,T]\times\mathbb{R}^n$; se $\tilde{Q}(t,x)=\emptyset$ è ovviamente convesso. Se $\tilde{Q}(t,x)\neq\emptyset$ si ha $x\varepsilon X(t)$; siano (v,w,α) e $(\bar{v},\bar{w},\beta)\varepsilon$ $\varepsilon\,\tilde{Q}(t,x)$, allora esistono (u,s) e $(\bar{u},\bar{s})\,\varepsilon\,\mathbb{R}^m\times\bar{\mathbb{R}}_+$ tali che

$$v=g(t,x,w,u),\ w\varepsilon X(\omega(t)),\ u\varepsilon U(t,x),\ \alpha=f(t,x,w,u)+s$$

$$\bar{v}=g(t,x,\bar{w},\bar{u}),\ \bar{w}\varepsilon X(\omega(t)),\ \bar{u}\varepsilon U(t,x),\ \beta=f(t,x,\bar{w},\bar{u})+\bar{s}.$$

Verifichiamo che

$$(4.2)\qquad (\lambda v+(1-\lambda)\bar{v},\lambda w+(1-\lambda)\bar{w},\ \lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)\varepsilon\tilde{Q}(t,x)\quad \text{per ogni } \lambda\varepsilon[0,1].$$

Per ipotesi esiste $\tilde{u}\varepsilon U(t,x)$ tale che, posto $\tilde{w}=\lambda w+(1-\lambda)\bar{w}$, si ha

$$\lambda v+(1-\lambda)\bar{v}=\lambda g(t,x,w,u)+(1-\lambda)g(t,x,\bar{w},\bar{u})=g(t,x,\tilde{w},\tilde{u})$$

$$(4.3)\qquad \lambda f(t,x,w,u)+(1-\lambda)f(t,\bar{w},\bar{u})=f(t,x,\tilde{w},\tilde{u})+\tilde{s}\quad \text{con } \tilde{s}\geq 0,$$

da cui $\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta = f(t,x,\tilde{w},\tilde{u})+\tilde{\tilde{s}}$ per ogni $\lambda\varepsilon[0,1]$, dove $\tilde{\tilde{s}}=\tilde{s}+\lambda s+(1-\lambda)\bar{s}\geq 0$. Allora, $(g(t,x,\tilde{w},\tilde{u}),\tilde{w},f(t,x,\tilde{w},\tilde{u})+\tilde{\tilde{s}})$ è un elemento di $\tilde{Q}(t,x)$ poiché $\tilde{w}\varepsilon X(\omega(t))$ e $\tilde{u}\varepsilon U(t,x)$ per ipotesi e $x\varepsilon X(t)$, quindi la (4.2) è vera per ogni $\lambda\varepsilon[0,1]$.

Viceversa, fissato $(t,x)\varepsilon[0,T]\times X(t)$, se (w,u) e $(\bar{w},\bar{u})\ \varepsilon$ $\varepsilon\ X(\omega(t))\times U(t,x)$, allora $\tilde{Q}(t,x)\neq\emptyset$. In particolare, $(g(t,x,w,u),w,f(t,x,w,u))$ e $(g(t,x,\bar{w},\bar{u}),\bar{w},f(t,x,\bar{w},\bar{u}))$ sono elementi di

$\tilde{Q}(t,x)$.

Poiché $\tilde{Q}(t,x)$ è convesso si ha

$$(\lambda g(t,x,w,u)+(1-\lambda)g(t,x,\bar{w},\bar{u}),\lambda w+(1-\lambda)\bar{w},\lambda f(t,x,w,u)+(1-\lambda)f(t,x,\bar{w},\bar{u}))\in\tilde{Q}(t,x)$$

per ogni $\lambda\in[0,1]$; quindi per ogni $\lambda\in(0,1)$ esiste $\tilde{u}\in U(t,x)$ tale che valgano (3.6) e (4.3) e $\tilde{w} = \lambda w+(1-\lambda)\bar{w}$ è un elemento di $X(\omega(t))$. La tesi si ottiene osservando che dalla (4.3) si ha

$$\lambda f(t,x,w,u) + (1-\lambda)f(t,x,\bar{w},\bar{u}) \geq f(t,x,\tilde{w},\tilde{u}).$$

Se f,g,X ed U sono le funzioni e le mappe del capitolo 3, definiamo $K : [0,T] \times \mathbb{R}^{4n+m} \to \bar{\mathbb{R}}$ la funzione

$$(4.4)\qquad K(t,x,y,v,w,u) = \begin{cases} f(t,x,w,u) & \text{se } x\in X(t), w\in X(\omega(t)), u\in U(t,x) \\ & \qquad v = g(t,x,w,u) \\ +\infty & \text{altrove} \end{cases}$$

LEMMA 4.3. *Se per le funzioni* f,g *e per le mappe* X *ed* U *valgono le ipotesi* (A), *allora la funzione* K *definita nella* (4.4) *è inferiormente semicontinua in* (x,y,v,w,u) *e* $L\times B$*-misurabile.*

Dimostrazione. Fissato $t\in[0,T]$ sia $\{(x_i,y_i,v_i,w_i,u_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{4n+m}$ tale che $(x_i,y_i,v_i,w_i,u_i) \to (x,y,v,w,u)$ ed

$\alpha = \underline{\lim}\, K(t,x_i,y_i,v_i,w_i,u_i)$. Se $\alpha = +\infty$, la disuguaglianza $\alpha \geq K(t,x,y,v,w,u)$ è ovvia.

Se $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, esiste un'estratta (che per comodità indichere mo nello stesso modo) tale che $K(t,x_i,y_i,v_i,w_i,u_i)< +\infty$ per ogni $i\in\mathbb{N}$ e $\underline{\lim}\, K(t,x_i,y_i,v_i,w_i,u_i) = \alpha$. Allora, dalla definizione di K si ha

$$x_i\in X(t),\ w_i\in X(\omega(t)),\ v_i=g(t,x_i,w_i,u_i),\ u_i\in U(t,x_i) \text{ per ogni } i\in\mathbb{N},$$

quindi $K(t,x_i,y_i,v_i,w_i,u_i) = f(t,x_i,w_i,u_i)$ per ogni $i\in\mathbb{N}$ e $\underline{\lim}\, f(t,x_i,w_i,u_i) = \alpha$

Per ipotesi si ha $x\in X(t)$, $w\in X(\omega(t))$, $u\in U(t,x)$, $v=g(t,x,w,u)$, da cui segue che

$$K(t,x,y,v,w,u)=f(t,x,w,u) \leq \underline{\lim}\, f(t,x_i,w_i,u_i)=\alpha = \underline{\lim}\, K(t,x_i,y_i,v_i,w_i,u_i),$$

cioé $K(t,.,.,.,.,.)$ è inferiormente semicontinua.

Per la seconda parte della tesi, osserviamo che l'insieme

$$B=\{(t,x,w,u)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2n+m} : x\in X(t),\ w\in X(\omega(t)),\ u\in U(t,x)\}$$

è $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-misurabile. Infatti, per ipotesi X è una mappa misurabile, U è $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-misurabile; allora,basta verificare che la mappa $X\circ\omega : [0,T]\to 2^{\mathbb{R}^n}$ è misurabile.

Se A è aperto di $\mathbb{R}^n$ si ha

$$[X\circ\omega]^-(A)=\{t\in[0,T]:X(\omega(t))\cap A\neq\emptyset\}= \omega^{-1}(\{\tau\in I:X(\tau)\cap A\neq\emptyset\}).$$

Osserviamo che l'insieme $\{\tau\in I:X(\tau)\cap A\neq\emptyset\} = X^-(A)$ è misurabile; allora, per l'ipotesi su ω si ha che $[X\circ\omega]^-(A)$ è misurabile

La tesi si ottiene osservando che l'insieme

$$\{(t,x,y,v,w,u)\varepsilon[0,T] \times \mathbb{R}^{4n+m} : K(t,x,y,v,w,u) \leq \alpha\} =$$

$$=\{(t,x,y,v,w,u)\varepsilon[0,T] \times \mathbb{R}^{4n+m} : (t,x,w,u)\varepsilon B,\ g(t,x,w,u)-v=0,\ f(t,x,w,u) \leq\alpha\}$$

è $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-misurabile, perché B è $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-misurabile, f è $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-misurabile e la funzione $(x,v,w,u) \to g(t,x,w,u)-v$ è continua.

5. UN TEOREMA DI ESISTENZA.

Osserviamo che se $x\varepsilon W(I)$, allora $x(\omega(.))\varepsilon L^1([0,T])$. Infatti, $x\circ\omega$ è misurabile ed esiste $M \geq 0$ tale che $|x(\omega(t))| \leq M$ per ogni $t\varepsilon[0,T]$.

Sia $y_x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ la funzione definita

$$(5.1) \qquad y_x(t) = \int_0^t x(\omega(s))\, ds .$$

Tale funzione è assolutamente continua su $[0,T]$ e $\dot{y}_x(t)=x(\omega(t))$ per quasi ogni $t\varepsilon(0,T)$.

Se K è la funzione definita nella (4.4), allora non è identicamente $+\infty$, perché la funzione f non è identicamente $+\infty$ sui vincoli.

Indichiamo con (P_1) il problema di minimizzare il funzionale:

$$G(x,u) = \int_0^T K(t,x(t), \int_0^t x(\omega(s))ds,\dot{x}(t),x(\omega(t)),u(t))dt$$

sull'insieme delle funzioni $(x,u)\ \varepsilon\ W(I) \times M([0,T])$. Tale problema è equivalente al problema (P); infatti, sia

$A=\{(x,u)\varepsilon W(I)xM([0,T]):x(t)\varepsilon X(t),u(t)\varepsilon U(t,x(t)),x(\omega(t))\varepsilon X(\omega(t))$

$\dot{x}(t)=g(t,x(t),x(\omega(t)),u(t))$ per quasi ogni $t\varepsilon(0,T)\}$.

Osserviamo che, se $(x,u) \notin A$, si ha $G(x,u) = +\infty$; se $(x,u) \varepsilon A$, per come è stata definita la funzione K, esiste $C \subset [0,T]$, mis $[0,T] \setminus C = 0$, tale che

$$K(t,x(t), \int_0^t x(\omega(s))ds,\dot{x}(t),x(\omega(t)),u(t))=f(t,x(t),x(\omega(t)),u(t))$$

per ogni $t \varepsilon C$. Quindi, minimizzare $G(x,u)$ su $W(I) \times M([0,T])$ equivale a minimizzare tale funzionale su A, e per ogni coppia (x,u) appartenente a tale insieme si ha $F(x,u) = G(x,u)$, cioé i due problemi (P) e (P_i) sono equivalenti.

LEMMA 5.1. *Supponiamo che valgano le ipotesi* (A) *e* $(C)_{(i)}$. *Allora il funzionale* G *è ben definito per ogni coppia di funzioni* $(x,u) \varepsilon W(I) \times M([0,T])$, *nel senso che l'integranda*

$$t \to K(t,x(t), \int_0^t x(\omega(s))ds, \dot{x}(t),x(\omega(t)),u(t))$$

è misurabile in t *e maggiora una funzione sommabile in* t . *Inoltre, per ogni* $r > 0$, *esiste una funzione* $\Psi_r : [0,T] \to \bar{\mathbb{R}}$, *sommabile in* t , *tale che*

$$(5.3) \qquad K(t,x,y,v,w,u) \geq |u| - \Psi_r(t)$$

per ogni $t \varepsilon [0,T]$, $x,y\varepsilon \mathbb{R}^n$ *tali che* $|x| \leq r$ *e per ogni*

$(v,w,u)\in\mathbb{R}^{2n+m}$.

Dimostrazione. Osserviamo che se $x\in W(I)$ la funzione $y_x(t) = \int_0^t x(\omega(s))ds$ è assolutamente continua su $[0,T]$. Allora $x, y_x, \dot{x}, \dot{y}_x$ sono misurabili su $[0,T]$ e la misurabilità di $K(.,x(.),y_x(.),\dot{x}(.),\dot{y}_x(.),u(.))$ segue dal lemma 4.3 e dalla misurabilità della mappa $t \to (t,x(t),y_x(t),\dot{x}(t),\dot{y}_x(t),u(t))$.

Fissato $r>0$, se $(p,z,q) = (0,0,0)\in\mathbb{R}^{2n+m}$, dall'ipotesi $(C)_{(i)}$ e dalla (4.4) si ottiene

$$K(t,x,y,w,u) \geq f(t,x,w,u) \geq -\Phi_r(t,0,0,0)$$

per ogni $t\in[0,T]$, per ogni $(x,y,v,w,u)\in\mathbb{R}^{4n+m}$ tale chè $|x| \leq r$. Poiché, fissata $x\in W(I)$, esiste $r > 0$ tale che $|x(t)| \leq r$ per ogni $t\in[0,T]$, si ha

$$K(t,x(t),y(t),v(t),w(t),u(t)) \geq -\Phi_r(t,0,0,0)$$

per ogni $t\in[0,T]$ e per ogni funzione $(y(.),v(.),w(.),u(.))$ a valori in $\mathbb{R}^{3n+m}$, cioé $G(x,u)$ è ben definito per ogni $(x,u)\in W(I)\times M([0,T])$ ed è un elemento di $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Sia $\{q_i\}_{i=1,..,m+1}\subset\mathbb{R}^m$ tale che $co\{q_i\}_{i=1...m+1}\supset\{q\in\mathbb{R}^m : |q| \leq 1\}$. Per ogni $r > 0$, sia Ψ_r la funzione sommabile tale che

$$(5.4) \qquad \Psi_r(t) = \max_{i=1\ldots m+1} \Phi_r(t,0,0,q_i)$$

dove Φ_r è la funzione dell'ipotesi $(C)_{(i)}$.

Se $q \in \mathbb{R}^m, |q| \leq 1$, si ha $q = \sum_{i=1}^{m+1} a_i q_i$, con $a_i \geq 0$ per ogni $i=1\ldots m+1$ e $\sum_{i=1}^{m+1} a_i = 1$.

Dall'ipotesi $(C)_{(i)}$ si ha, fissato $r > 0$,

$$q\, u-f(t,x,w,u) \leq \sum_{i=1}^{m+1} a_i\, \Phi_r(t,0,0,q_i) \leq \sum_{i=1}^{m+1} a_i\, \Psi_r(t) = \Psi_r(t)$$

per ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $(x,w,u) \in \mathbb{R}^{2n+m}$ con $|x| \leq r$.
Questo implica che

$$K(t,x,y,v,w,u) \geq q\, u - \Psi_r(t)$$

per ogni $t \in [0,T]$, per ogni $q \in \mathbb{R}^m$ tale che $|q| \leq 1$ e per ogni $(x,y,v,w,u) \in \mathbb{R}^{4n+m}$, con $|x| \leq r$; da cui

$$K(t,x,y,v,w,u) \geq |u| - \Psi_r(t)$$

per ogni $t \in [0,T]$ e $(x,y,v,w,u) \in \mathbb{R}^{4n+m}$ con $|x| \leq r$.

Fissato $r>0$, poiché la funzione $\Psi_r(.)$ della (5.4) è sommabile, esiste un insieme D_r tale che

$$(5.5) \qquad D_r \subset [0,T] \quad \text{e} \quad \text{mis}\ [0,T] \setminus D_r = 0$$

tale che $\Phi_r(t) \in \mathbb{R}$ per ogni $t \in D_r$.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia D_n l'insieme della (5.5) corrispondente a $r=n$. Allora, se D è dato da

$$(5.6) \qquad D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \qquad \text{si ha} \qquad \text{mis } [0,T] \setminus D = 0.$$

Sia $L : [0,T] \times \mathbb{R}^{4n} \to \bar{\mathbb{R}}$ la funzione definita

$$(5.7) \qquad L(t,x,y,v,w) = \begin{cases} \inf\{K(t,x,y,v,w,u) : u \in \mathbb{R}^m\} & \text{se } t \in D \\ +\infty & \text{se } t \notin D . \end{cases}$$

Il teorema seguente permette di ricondurre il problema (P_1) a minimizzare un nuovo funzionale H, dato da

$$H(x) = \int_0^T L(t,x(t), \int_0^t x(\omega(s))ds, \dot{x}(t), x(\omega(t))dt$$

sulla classe $W(I)$.

TEOREMA 5.1. *Sia* L *la funzione definita nella* (5.7). *Nelle ipotesi* (A) *e* $(C)_{(i)}$ *si ha*

1) L *non assume mai il valore* $-\infty$ *e l'estremo inferiore nella sua definizione è ottenuto per qualche* $u \in \mathbb{R}^m$. *Inoltre,* L *è inferiormente semicontinua in* (x,y,v,w) *per ogni* $t \in [0,T]$ *ed è* $L \times B$*-misurabile.*

2) *per ogni funzione* $x \in W(I)$ *si ha*

$$\int_0^T L(t,x(t),y_x(t),\dot{x}(t),\dot{y}_x(t))dt = \min\{ \int_0^T K(t,x(t),y_x(t),\dot{x}(t),\dot{y}_x(t),$$

$$u(t))dt \ : \ u \in M([0,T])\}$$

dove y_x *è la funzione definita nella* (5.1).

Dimostrazione. Dalla (5.3) del lemma 5.1, si ottiene che, fissati $r \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $t \in D$, l'insieme

$$C^{\alpha}_{t,r} = \{u \in \mathbb{R}^m : \text{ esiste } (x,y,v,w) \in \mathbb{R}^{4n} \text{ con } |x| \leq r \quad \text{e}$$

$$K(t,x,y,v,w,u) \leq \alpha\}$$

è limitato. Infatti, sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $r \leq \bar{n}$, come nel lemma 5.1 si verifica che

$$|u| \leq K(t,x,y,v,w,u)+\Psi_{\bar{n}}(t)$$

per ogni $(x,y,v,u) \in \mathbb{R}^{4n+m}$ tale che $|x| \leq \bar{n}$. In particolare, per ogni $u \in C^{\alpha}_{t,r}$ si ha $|u| \leq \alpha + \Psi_{\bar{n}}(t)$, con $\Psi_{\bar{n}}(t) \in \mathbb{R}$ perché $t \in D$.

Allora, per l'inferiore semicontinuità di $K(t,.,.,.,.,.)$ è per quanto osservato in precedenza, fissati $(t,x,y,v,w) \in D \times \mathbb{R}^{4n}$, gli insiemi

$$\{u \in \mathbb{R}^m : K(t,x,y,w,u) \leq \alpha\} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

sono compatti; perciò l'estremo inferiore nella (5.7) è raggiunto, nel senso che, per ogni $(t,x,y,v,w) \in D \times \mathbb{R}^{4n}$, esiste $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$(5.8) \qquad L(t,x,y,v,w) = K(t,x,y,v,w,\bar{u}).$$

Dalla definizione di L, discende immediatamente che $L(t,.,.,.,.)$ è inferiormente semicontinua per ogni $t \in D$.

Fissato $t \in D$, sia $(x_i,y_i,v_i;w_i) \to (x,y,v,w)$ e $\beta = \underline{\lim}\, L(t,x_i,y_i,v_i,w_i)$. Se $\beta = +\infty$, allora la disuguaglianza $\beta \geq L(t,x,y,v,w)$ è ovvia. Se $\beta < +\infty$, consideriamo la successione $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tale che $L(t,x_i,y_i,v_i,w_i) = K(t,x_i,y_i,v_i,w_i,u_i)$;passando, se necessario, ad una estratta (che per comodità indicheremo nello stesso modo) possiamo supporre che esista $M>0$ tale che $K(t,x_i,y_i,v_i,w_i,u_i) \leq M$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Allora, poiché esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|x_i| \leq \nu$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, la successione $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è contenuta in $C^M_{t,\nu}$ ed è limitata. Passando, se necessario ad una estratta, si ha $u_i \to u'$ e

$$L(t,x,y,v,w) \leq K(t,x,y,v,w,u) \leq \underline{\lim}\, K(t,x_i,y_i,v_i,w_i,u_i) =$$

$$= \underline{\lim}\ L(t,x_i,y_i,v_i,w_i).$$

Per verificare che L è $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-misurabile, consideriamo le due mappe epigrafico, entrambe a valori chiusi,

$$\Gamma(t) = \{(x,y,v,w,u,\alpha) : K(t,x,y,v,w,u) \leq \alpha\}$$

$$\Gamma_o(t) = \{(x,y,v,w,\alpha) : L(t,x,y,v,w) \leq \alpha\}$$

e verifichiamo che $\Gamma_o : [0,T] \to 2^{\mathbb{R}^{4n+1}}$ è misurabile.

Sia B sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^{4^{n+1}}$; $\bar{B} = B \times \mathbb{R}^m$ è chiuso di $\mathbb{R}^{4n+m+1}$ e $\Gamma^-(\bar{B}) \cap D$ è misurabile. La misurabilità di $\Gamma_o^-(B)$ si ottiene verificando che

$$(5.9) \quad \{t\in D : \Gamma_o(t) \cap B \neq \emptyset\} = \{t\in D : \Gamma(t) \cap \bar{B} \neq \emptyset\} = \Gamma^-(\bar{B}) \cap D$$

perché $\Gamma_o^-(B) = \{t\in D : \Gamma_o(t) \cap B \neq \emptyset\} \cup \{t \in [0,T]\setminus D : \Gamma_o(t) \cap B \neq \emptyset\}$.

Se $\tau \in D$ e $\Gamma_o(\tau) \cap B \neq \emptyset$, allora esiste $(x,y,v,w,\alpha) \in B$ tale che $L(\tau,x,y,v,w) \leq \alpha$. Per la (5.8), esiste $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ tale che $\alpha \geq L(\tau,x,y,v,w) = K(\tau,x,y,v,w,\bar{u})$, quindi $\Gamma(\tau) \cap \bar{B} \neq \emptyset$, cioé il primo insieme della (5.9) è contenuto nel secondo.

Viceversa, se $\tau \in D$ e $\Gamma(\tau) \cap \bar{B} \neq \emptyset$, allora esiste $(x,y,v,w,u,\alpha) \in \bar{B} = B \times \mathbb{R}^m$ tale che

$$L(\tau,x,y,v,w) \leq K(\tau,x,y,v,w,u) \leq \alpha$$

ossia $\Gamma_\circ(\tau) \cap B \neq \emptyset$.

Osserviamo che, se $x \in W(I)$ e $\hat{x} = x_{/[0,T]}$, si ha $z_x = (\hat{x},y_x) \in AC([0,T], \mathbb{R}^{2n})$, dove y_x è la funzione definita nella (5.1). Inoltre

$$G(x,u) = \int_0^T K(t,z_x(t),\dot{z}_x(t),u(t))dt \quad \text{e} \quad H(x) = \int_0^T L(t,z_x(t),\dot{z}_x(t))dt.$$

La *b*) della tesi si ottiene se verifichiamo che per ogni $z \in AC([0,T], \mathbb{R}^{2n})$ si ha

$$\int_0^T L(t,z(t),\dot{z}(t))dt = \min\{ \int_0^T K(t,z(t),\dot{z}(t),u(t))dt : u \in M([0,T])\}$$

Se $z \in AC([0,T], \mathbb{R}^{2n})$ esiste $\tilde{E} \subset [0,T]$ tale che $\text{mis}[0,T] \setminus \tilde{E} = 0$ e $\dot{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ per ogni $t \in \tilde{E}$. Se D è l'insieme della (5.6) e $C = \tilde{E} \cap D$ si ha $\text{mis}\ [0,T] \setminus C = 0$. Per ogni $t \in C$, esiste $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$L(t,z(t),\dot{z}(t)) = K(t,z(t),\dot{z}(t),\bar{u}(t)).$$

Si può verificare, con dimostrazione analoga a quella del teorema 6 di [1] che esiste $\bar{u} \in M([0,T])$ tale che

$$L(t,z(t),\dot{z}(t)) = K(t,z(t),\dot{z}(t),\bar{u}(t)) \quad \text{per quasi ogni } t \in (0,T);$$

Inoltre si ha

$$K(t,z(t),\dot z(t),\bar u(t)) = L(t,z(t),\dot z(t)) \le K(t,z(t),\dot z(t),u(t))$$

per ogni $u \in M([0,T])$

e quindi la tesi.

TEOREMA 5.2. *Nelle ipotesi* (A),(B),(C) *e* (D) *il funzionale* H *ammette minimo sulla classe* W(I).

Dimostrazione. Se $v \in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ ed esiste $\gamma \in C(\tilde I)$ tale che $\gamma(0) = v(0)$, definiamo $\bar v_\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ la funzione

$$(5.10)\qquad \bar v_\gamma(t) = \begin{cases} v(t) & \text{se } t \in (0,T] \\ \gamma(t) & \text{se } t \in \tilde I. \end{cases}$$

Allora la funzione $y_\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ tale che $y_\gamma(t) = \int_0^t \bar v_\gamma(\omega(s))ds$ è assolutamente continua su $[0,T]$. Sia

$$\Omega = \{z=(x,y) \in AC([0,T],\mathbb{R}^{2n}) : \text{esiste } \gamma \in \beta_1, \gamma(0)=x(0), x_T \in \beta_2 \quad \text{e}$$

$$y(t) = \int_0^T \bar x_\gamma(\omega(s))ds \qquad \text{se} \quad t \in [0,T]\}$$

dove $\bar x_\gamma$ è ottenuta come nella (5.10).

Osserviamo che, se $x \in W(I)$ allora $z_x = (x_{/[0,T]}, y_x) \in \Omega$, dove y_x è data dalla (5.1). Si può quindi definire un'applicazione $\eta : W(I) \to \Omega$ tale che

$$\eta(x) = (x_{/[0,T]}, y_x)$$

con y_x definita nella (5.1).

Viceversa, esiste $\theta : \Omega \to 2^{W(I)}$ tale che, se $z = (x,y) \in \Omega$

$$\theta(z) = \{ \bar{x}_\gamma : I \to \mathbb{R}^n / \gamma \in \beta_1, \gamma(0)=x(0) \text{ e } y(t) = \int_0^t \bar{x}_\gamma(\omega(s))ds \text{ per ogni } t\in[0,T] \} .$$

Per ogni $z \in \Omega$, consideriamo il funzionale

$$N(z) = \int_0^T L(t,z(t),\dot{z}(t))dt$$

Osserviamo che dalle definizioni di N, η e θ si ha

$$H(x) = N(\eta(x)) \qquad \text{per ogni } x \in W(I)$$

$$N(z) = H(\bar{x}_\gamma) \qquad \text{per ogni } \bar{x}_\gamma \in \theta(z).$$

Se $z_1 = (x_1,y_1)$ è minimo per il funzionale N su Ω, allora ogni elemento $\bar{x}_{1,\gamma} \in \theta(z_1)$ è minimo per il funzionale H su W(I). Infatti, si ha $H(\bar{x}_{1,\gamma}) = N(z_1) \leq N(z)$ per ogni $z \in \Omega$ e per ogni $\bar{x}_{1,\gamma} \in \theta(z_1)$. D'altra parte, se $\bar{x}_{1,\gamma} \in \theta(z_1)$ ed esiste $x \in W(I)$ tale che $H(x) < H(\bar{x}_{1,\gamma})$, si ha, $N(\eta(x)) = H(x) < H(\bar{x}_{1,\gamma}) = N(z_1)$ che è una contraddizione.

Quindi, minimizzare il funzionale H su W(I) equivale a minimizzare il funzionale N su Ω.

La classe Ω soddisfa le seguenti condizioni:

i) se $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$, $z_k = (x_k,y_k) \rightrightarrows z = (x,y)$ su $[0,T]$ con

$z \in AC([0,T], \mathbb{R}^{2n})$, allora $z \in \Omega$;

ii) esiste $M > 0$ tale che $|z(0)| \leq M$ per ogni $z\in\Omega$.

Infatti, se $z_k \in \Omega$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \beta_1$, tale che $\gamma_k(0) = x_k(0)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$; inoltre $x_{k_T} \in \beta_2$ e $y_k(t) = \int_0^t \bar{x}_{k,\gamma}(\omega(s))ds$.

Da $z_k \rightrightarrows z\in AC([0,T], \mathbb{R}^{2n})$ discende che $x_T \in \beta_2$. Poiché β_1 è compatto, esiste un'estratta di $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (che per comodità indicheremo nello stesso modo) tale che $\gamma_k \rightrightarrows \gamma$, con $\gamma \in \beta_1$ da cui $\gamma_k(0) \to \gamma(0)$ cioé $x(0) = \gamma(0)$. Allora, se $\bar{x}_\gamma$ è definita come nella (5.10) si ha:

$\bar{x}_{k,\gamma} \rightrightarrows \bar{x}_\gamma$ e $y(t) = \int_0^t \bar{x}_\gamma(\omega(s))ds$ per ogni $t\in[0,T]$. E' così verificata la condizione i).

Per la ii), basta osservare che, se $z = (x,y) \in \Omega$, si ha $y(0)=0$ ed esiste $\gamma \in \beta_1$ tale che $x(0) = \gamma(0)$ e la compattezza di β_1 implica che esiste $B > 0$ tale che $|\gamma(0)| \leq B$, per ogni $\gamma\in\beta_1$

Verifichiamo che valgono le ipotesi del teorema 4 di [2], il quale assicura l'esistenza del minimo per il funzionale N su Ω .

Per il teorema 5.1 l'integranda L è $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-misurabile e $L(t,.,.)$ è inferiormente semicontinua.

Sia $\tilde{Q} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^{2n+1}}$ la mappa definita

$$\tilde{Q}(t,x)=\begin{cases}\{(g(t,x,w,u),w,f(t,x,w,u)+s): w\varepsilon X(\omega(t)), u\varepsilon U(t,x), s\geq 0\} & \text{se } x\varepsilon X(t)\\ \emptyset & \text{se } x\notin X(t)\end{cases}$$

Dal teorema 5.1, dalle (4.4) e (5.7) si ha

$$L(t,x,y,v,w)=\begin{cases}\inf\{f(t,x,w,u) : u\varepsilon\mathbb{R}^m \text{ tali che } v=g(t,x,w,u),\ u\varepsilon U(t,x)\}\\ \qquad\qquad \text{se } t\varepsilon D,\ x\varepsilon X(t) \text{ e } w\varepsilon X(\omega(t))\\ +\infty \qquad \text{altrimenti}\end{cases}$$

e per quanto visto nel capitolo 4

$$L(t,x,y,v,w)=\begin{cases}\inf\{\alpha\varepsilon\mathbb{R}: (v,w,\alpha)\,\varepsilon\,\tilde{Q}(t,x)\} & \text{se } t\varepsilon D \text{ e } \tilde{Q}(t,x)\neq\emptyset\\ +\infty & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Allora, per il lemma 4.1 e lemma 4.2 le ipotesi (B) implicano che nel funzionale N la funzione L(t,z,.) è convessa. Le altre ipotesi discendono dalle ipotesi (C) e dalla definizione di K.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.T.ROCKAFELLAR: "*Optimal arcs and the minimum value functions in problems of Lagrange*". - Trans.Amer.Math.Soc. 180 (1973) , pp. 53-83.

[2] P. D'ANNA - E. MUSELLI: "*Un teorema di esistenza per campi di orientori ed applicazioni al problema libero del Calcolo delle Variazioni in dimensione infinita*". -Annali di Mat. Pura ed Appl. 122 (1979), pp. 245 - 267.

[3] T.S. ANGELL: "*Existence theorems for a class of optimal control problems involving functional differential equations*". J.Optimizations Theory Appl. 7 (1971), pp. 149 - 169.

[4] T.S. ANGELL: "*Existence theorems for ereditary Lagrange and Mayer problems of optimal control*". - Siam J. Control and Optimiz. 14 (1976), pp. 1 - 18.

[5] L. CESARI: "*Geometric and Analytic Views in Existence Theorems for Optimal Control in Banach spaces, I,II, and III*". - J.Optim. Th. Appl. 14 (1974); 15 (1975) and 19 (1976).

[6] L.D. BERKOVITZ: "*Existence and lower closure theorems for abstract control problems*". - Siam J. Control 12 (1974),pp.27-42.

[7] IOFFE - TIHOMIROV: "*Theory of Extremal problems*" - North - Holland (1979).

[8] L. CESARI - KAISER: "*Closed operators existence theorems in multidimensional problems of the Calculus of Variations*".-Bull. Am. Math. Soc. 80 (1974), pp. 473 - 478.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 14 Settembre 1982
ed accettato per la pubblicazione il 20 Aprile 1983
su parere favorevole di J.P.Cecconi e L.Pandolfi