Note di Matematica Vol. II, 213-234 (1982)

SULLA VARIETA' GENERATA DALL'ALGEBRA PRIMALE DI TRE ELEMENTI

Roberto PALMAS (*)

Summary. *This work specifies the results obtained by* R. Magari *in* [7] *and* [8], *in the case of* W=3, *developping a beginning of* w-*atoms theory but, expecially, considering* M.H.Stone [11], *a similar topological representation theory for* 3-*algebras.*

So we must introduce some particular orderly tripartitions of ι *set, to replace the usual closed or open subsets.*

We can observe the most immediate effecte of this modification, in the definitions of compactness and connection: we must change from two possible dual definitions in the Boolean situation, to six equivalent definitions in this situation.

The conclusive argument is the proof of a theorem similar to th Stone *theorem for Boolean algebras.*

INTRODUZIONE. In [7], [8]R.Magari studia, per ogni cardinale $\underline{W}$, la varietà di algebre generata da $\mathscr{W}$, ossia dall'algebra di insiem di base $\underline{W}$ avente per operazioni tutte le operazioni finitarie su

(*) Università degli Studi - Siena -

Note di Matematica Vol. II, 213-234 (1982)

SULLA VARIETA' GENERATA DALL'ALGEBRA PRIMALE DI TRE ELEMENTI

Roberto PALMAS (*)

Summary. *This work specifies the results obtained by* R. Magari *in* [7] *and* [8], *in the case of* W=3, *developping a beginning of* w-*atoms theory but, expecially, considering* M.H.Stone [11], *a similar topological representation theory for* 3-*algebras.*

So we must introduce some particular orderly tripartitions of ι *set, to replace the usual closed or open subsets.*

We can observe the most immediate effecte of this modification, in the definitions of compactness and connection: we must change from two possible dual definitions in the Boolean situation, to six equivalent definitions in this situation.

The conclusive argument is the proof of a theorem similar to th Stone *theorem for Boolean algebras.*

INTRODUZIONE. In [7], [8]R.Magari studia, per ogni cardinale $\underline{W}$, la varietà di algebre generata da $\mathscr{W}$, ossia dall'algebra di insiem di base $\underline{W}$ avente per operazioni tutte le operazioni finitarie su

---

(*) Università degli Studi - Siena -

$\underline{W}$ o, ciò che fa lo stesso dal punto di vista algebrico universale, talune di esse per cui il clono generato sia proprio quello di tutte le operazioni finitarie su $\underline{W}$, per esempio l'insieme delle binarie (cfr. anche A.L.Foster [4])

Le algebre della varietà generata da $\mathcal{W}$ si diranno W-*algebre*.

Scopo di questo lavoro è l'approfondimento del caso $\underline{W} = 3 (=\{0,1,2\})$.

Osserviamo, subito, che è sufficiente un'opportuna operazione finitaria per generare l'intero clono. Si ricorda, infatti, che le operazioni binarie sono di per se stesse sufficienti e che, nel caso dell'algebra 3, sono addirittura sufficienti le operazioni d'ordine reticolarmente legate ai tre ordini totali ottenibili in 3 (R. Magari [7]) (sarebbero sei se non si considerassero "equivalenti" un ordine e il suo inverso). Quest'ultime operazioni sono,poi, esprimibili, a loro volta, sfruttando solo le operazioni di "somma modulo 3", "prodotto modulo 3" e l'operazione ε di complementazione ciclica così definita:

$\underline{x}$	$\varepsilon\underline{x}$
0	1
1	2
2	0

E' facile, ora, verificare che l'operazione binaria

$$\varepsilon^{\underline{k}} (\varepsilon^{\underline{r}}\, \underline{x} \wedge \varepsilon^{\underline{s}} \underline{y})$$

dove $\underline{k},\underline{r},\underline{s} \in 3$ $\wedge$ è l'operazione di infimo nell'ordine totale 0,1,2 ed ε è la complementazione ciclica, intendendo che:

ε^{0} consiste nel non applicare affatto la complementazione,

ε^1 consiste nell'applicare la complementazione una volta,

ε^2 consiste nell'applicare la complementazione due volte, genera, banalmente, assumendo particolari valori per k,r,s, le tre operazioni di infimo legate ai tre ordini totali 0,1,2; 1,2,0; 2,0,1, e, altrettanto banalmente, la complementazione ciclica stessa.

Mediante successive applicazioni di queste quattro operazioni e dell'operazione binaria introdotta, possiamo poi verificare che sono ottenibili, a partire da essa, anche le operazioni di somma e prodotto modulo 3.

Introduciamo, infine, il seguente:

LEMMA. *Ogni funzione* n-*aria su* 3 *è esprimibile come:*

$$\sum_{\underline{k}\in 3^{\underline{n}}} \eta_{\underline{k}}\ \varepsilon^{\mu_0}\ \underline{x}_0 \cdot\ldots\ldots\cdot \varepsilon^{\mu_{\underline{n}}} \underline{x}_{\underline{n}}$$

dove $\cdot$ *e il prodotto modulo* 3, $\eta_{\underline{k}}$ *è un coefficiente che può assumere valori tra* 0,1,2; $\mu_{\underline{i}}$ *è anch'esso un coefficiente che può assumere valori tra* 0,1,2; ε *è l'operazione di complementazione ciclica, intendendo come al solito, che* ε^0 *implica la non applicazione di tale operazione,* ε^1 *ne implica l'applicazione una sola volta ed* ε^2 *due colte.*

Dim. E' sufficiente considerare una funzione del tipo:

$$\underline{f}_{\underline{k}}\ \underline{h} = \begin{cases} 1 & \textit{se } \underline{h} = \underline{k} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

con $\underline{k} \in 3^{\underline{n}}$ e $\underline{h} \in 3^{\underline{n}}$.

Dopo aver espresso tale funzione nella forma di prodotto del tipo di quelli che compaiono come addendi nell'espressione dell'enunciato, è ovvio che, per ogni $\underline{f} \in 3^{3^{\underline{n}}}$, si abbia

$$\underline{fh} = \sum_{\underline{k} \in 3^{\underline{n}}} \eta_{\underline{k}} \underline{f}_{\underline{k}} \underline{h}$$

per opportune scelte di $\eta_{\underline{k}}$

A conclusione di questa breve introduzione, per quanto abbiamo detto, si conviene di considerare come operazioni di base per l'algebra 3, l'operazione di somma modulo 3 che indicheremo con +, l'operazione di prodotto modulo 3 il cui simbolo rimarrà $\cdot$ e l'operazione ε di complementazione ciclica.

L'algebra 3 assumerà, quindi, la forma:

$$3 = \langle 3,+,\cdot,\varepsilon,0,1\rangle .$$

I prossimi paragrafi saranno dedicati allo studio della varietà generata da quest'algebra.

1. w-IDEALI E w-NUCLEI. TEORIA DELLA RAPPRESENTAZIONE.

Particolarizzando i concetti espressi da R. Magari in [7], ricordiamo che:

Definizione 1.1. Se $\mathscr{A}$ è una 3-algebra e $\underline{w} \in 3$, si dirà $\underline{w}$-*ideale* ogni sottoinsieme $\underline{J}$ del dominio $\underline{A}$ di $\mathscr{A}$ tale che:

per ogni espressione $\underline{F}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_m,\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n)$ coinvolgente i simboli di variabile indicati e operazioni dell'algebra tale che la

$$\bar{\underline{F}}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_m, \underline{w}, \underline{w},\ldots, \underline{w}) = \underline{w}$$

ottenuta da $\underline{F}$ sostituendo ogni occorenza libera degli $\underline{y}_i$ con $\underline{w}$, sia un'identità, si abbia:

per ogni $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_m \in \underline{A}$ e $\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n \in \underline{J}$,

$$\underline{F}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_m, \underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n) \in \underline{J}.$$

Consideriamo, ora, alcune particolari operazioni su 3:

i) - le due operazioni binarie:

$$\mathring{\underline{w}}(\underline{x},\underline{y}) = \begin{cases} \underline{w} & \textit{se} \quad \underline{x} \neq \underline{w} \\ \underline{y} & \textit{se} \quad \underline{x} = \underline{w} \end{cases} \qquad \underset{\circ}{\underline{w}}(\underline{x},\underline{y}) = \begin{cases} \underline{y} & \textit{se} \quad \underline{x} \neq \underline{w} \\ \underline{w} & \textit{se} \quad \underline{x} = \underline{w} \end{cases}$$

ii) - in un ordine totale in cui $\underline{w}$ sia il primo elemento, l'operazione $\vee$ di supremo.

Consideriamo poi la relazione binaria su 3 così definita:

$$\underline{y} \leq_{\underline{w}} \underline{x} \ \underline{\text{sse}} \ \mathring{\underline{w}}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{w} \, .$$

Una caratterizzazione più "comoda" del concetto di $\underline{w}$-ideale ci è fornita dalla seguente

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia $\mathscr{A}$ una 3-algebra e* A *il suo dominio.* $\underline{J} \subseteq$ A *è un $\underline{w}$-ideale* sse:

i) - J *non è vuoto;*

ii) - *se* $x,y \in J$ *allora* $x \vee y \in J$;

iii) - *se* $x \in J$ *e* $y \leq_{\underline{w}} x$ *allora* $y \in J$.

Definizione 1.3. Siano $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ due 3-algebre e $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ i lorp domini. Si dirà *omomorfismo* da $\mathscr{A}_1$ ad $\mathscr{A}_2$ ogni applicazione ϕ da $\underline{A}_1$ ad $\underline{A}_2$ tale che:

$$\phi\underline{f}(x,y) = \underline{f}(\phi x, \phi y).$$

(è sufficiente porre la condizione per operazioni binarie visto che ogni altra operazione è generata da esse).

Definizione 1.4. Sia ϕ un omomorfismo tra due 3-algebre e $\underline{w} \in 3$. Si dirà $\underline{w}$*-nucleo* di ϕ la controimmagine di $\underline{w}$ in ϕ.

TEOREMA 1.5. *Se* $w \in 3$ *e* ϕ *è un omomorfismo il cui dominio è una 3-algebra* $\mathscr{A}$, *il* w*-nucleo di* ϕ *è un* w*-ideale di* $\mathscr{A}$. *Ogni* w*-ideale proprio è il* w*-nucleo di almeno un omomorfismo.*

Possiamo dare un cenno di teoria della rappresentazione introducendo le seguenti definizioni:

Definizione 1.6. Sia $\underline{S}$ un insieme non vuoto. Si dirà *campo completo* ogni sistema

$$\mathscr{C} = \langle \underline{S}, 3^{\underline{S}} \rangle$$

Definizione 1.7. Si dirà *rappresentazione* di una 3-algebra $\mathscr{A}$ ogni omomorfismo da $\mathscr{A}$ all'alstratto $3^{\underline{S}}$ di un opportuno campo completo di insiemi.

TEOREMA 1.8. (Teorema di rappresentazione per le 3-algebre). *Sia* $\mathcal{A}$ *una 3-algebra,* Ω = Hom($\mathcal{A}$,3) (*insieme degli omomorfismi da* $\mathcal{A}$ *a* 3) *e sia* ϕ *l'applicazione di* $\mathcal{A}$ *in* 3^{Ω} *definita da:*

$$(\phi \underline{x})\omega = \omega \underline{x} \quad \textit{con} \quad x \in A \quad \textit{e} \quad \omega \in \Omega .$$

Allora ϕ *è un omomorfismo da* $\mathcal{A}$ *all'astratto del campo completo* $<\Omega,3>$.

2. $\underline{w}$-ATOMI.

Se $\underline{w}$ $\in 3$, consideriamo l'ordine in cui $\underline{w}$ precede $\varepsilon\underline{w}$ ed $\varepsilon^2\underline{w}$, ma $\varepsilon\underline{w}$ e $\varepsilon^2\underline{w}$ sono tra loro inconfrontabili.

A tale ordine, che naturalmente non è totale, associamo la seguente operazione:

$$\underline{x} \; \lambda \; \underline{y} = \begin{cases} \underline{w} & \textit{se} \quad \underline{x}=\underline{y} \quad \text{o} \quad \underline{x}=\underline{w} \\ \underline{x} & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Possiamo ora introdurre in 3 una relazione binaria di questo tipo:

$$\underline{x} \leq \underline{y} \quad \underline{\text{sse}} \quad \underline{x} \; \lambda \; \underline{y} = \underline{w}$$

E' facile verificare che la relazione così definita è un ordine parziale.

Estendiamo tale relazione ad una generica 3-algebra ridefinendo λ oppure, essendo ogni 3-algebra isomorfa ad una potenza sottodiretta di 3, "per componenti" (le due definizioni risultano equivalenti in modo ovvio) e diamo le seguenti definizioni:

Definizione 2.1. Sia $\mathscr{A}$ una 3-algebra e $\underline{x}$ un elemento del suo dominio $\underline{A}$. $\underline{x}$ si dirà $\underline{w}$-*atomo* sse:

i)- $\underline{w} \lneq \underline{x}$
ii)- se $\underline{y} \in \underline{A}$ e $\underline{y} \lneq \underline{x}$ allora $\underline{y} = \underline{w}$.

Definizione 2.2. Una 3-algebra $\mathscr{A}$ si dirà $\underline{w}$-*atomica* (con $\underline{w} \in 3$), se per ogni suo elemento $\underline{x} \neq \underline{w}$ esiste un altro elemento $\underline{y}$ tale che $\underline{y} \lneq \underline{x}$ e $\underline{y}$ è un $\underline{w}$-atomo.

Possiamo, infine, considerare, in luogo dell'ordine preso in esame fino ad ora, uno dei due ordini totali in 3 in cui $\underline{w}$ è il primo elemento; è possibile affermare che:

LEMMA 2.3. *Una 3-algebra $\mathscr{A}$ è $\underline{w}$-atomica nell'ordine in cui $\underline{w}$ è il primo elemento e precede $\varepsilon\underline{w}$ ed $\varepsilon^2\underline{w}$, ma $\varepsilon\underline{w}$ ed $\varepsilon^2\underline{w}$ sono tra loro inconfrontabili* sse *è $\underline{w}$-atomica in uno dei due ordini totali in 3 in cui $\underline{w}$ è il primo elemento.*

3. DUALITA', SPAZI TRITOPOLOGICI, PROPRIETA' TRITOPOLOGICHE.

Costruiamo, innanzi tutto, gli analoghi degli spazi di Stone per le 3-algebre.

Sia $\underline{I}$ l'insieme degli 0-ideali massimali [3] di una 3-algebra $\mathscr{A}$.

Per ogni elemento $\underline{x}$ del dominio $\underline{A}$ di $\mathscr{A}$, consideriamo la tripartizione ordinata di $\underline{I}$ costituita dai tre insiemi seguenti:

([3]) Il ragionamento che seguirà è riproponibile in modo del tutto analogo considerando 1-ideali o 2-ideali.

$$\{j \in \underline{I} : \underline{x} \in \underline{j}\}$$

$$\{\underline{j} \in I : \varepsilon^2 \underline{x} \in \underline{J}\}$$

$$\{\underline{j} \in \underline{I} : \varepsilon \underline{x} \in J\}$$

E' facile verificare che essi sono in effetti disgiunti [4].

Sia ora $\underline{P}$ l'insieme delle tripartizioni di I così ottenute; in $\underline{P}$ definiamo le seguenti operazioni:

1) $(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) \dotplus (\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}}) = (\hat{\underline{x}},\hat{\underline{y}},\hat{\underline{z}})$ con:

$$\hat{\underline{x}} = (\underline{x} \cap \bar{\underline{x}}) \cup (\underline{y} \cap \bar{\underline{z}}) \cup (\underline{z} \cap \bar{\underline{y}})$$

$$\hat{\underline{y}} = (\underline{x} \cap \bar{\underline{y}}) \cup (\underline{y} \cap \bar{\underline{x}}) \cup (\underline{z} \cap \bar{\underline{z}})$$

$$\hat{\underline{z}} = (\underline{x} \cap \bar{\underline{z}}) \cup (\underline{y} \cap \bar{\underline{y}}) \cup (\underline{z} \cap \bar{\underline{x}})$$

2) $(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) \,\dot{\cdot}\, (\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}}) = (\hat{\underline{x}},\hat{\underline{y}},\hat{\underline{z}})$, con:

$$\hat{\underline{x}} = \underline{x} \cup \bar{\underline{x}}$$

$$\hat{\underline{y}} = (\underline{y} \cap \bar{\underline{y}}) \cup (\underline{z} \cap \bar{\underline{z}})$$

$$\hat{\underline{z}} = (\underline{y} \cap \bar{\underline{z}}) \cup (\underline{z} \cap \bar{\underline{y}})$$

---

(4) Supponendo, infatti, che esista un $\underline{j} \in I$ tale che $\underline{x}, \varepsilon\,\underline{x} \in j$, si avrebbe che, particolarizzando il lemma 12 di [7] ed esprimendo $\varepsilon^2\underline{x}$ come $(\underline{x} -_o \varepsilon\underline{x}) +_o \underline{x}$, $\varepsilon^2\,\underline{x}$ è anch'esso un elemento di $\underline{j}$. Ma allora $\varepsilon^{\varepsilon\underline{x} - \underline{x}}\,\underline{x} = 1$ è un elemento di $\underline{j}$ e $\underline{j}$ è improprio.

3) $\hat{\varepsilon}(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = (\hat{\underline{x}},\hat{\underline{y}},\hat{\underline{z}})$ con:

$\hat{\underline{x}} = \underline{z}$

$\hat{\underline{y}} = \underline{x}$

$\hat{\underline{z}} = \underline{y}$

4) Elemento neutro rispetto a $\hat{+}$: $(\underline{I},\emptyset,\emptyset)$

5) Elemento neutro rispetto a $\hat{\cdot}$: $(\emptyset,\underline{I},\emptyset)$.

Per come sono definite le operazioni è chiaro che:

$$\mathscr{P} = \langle \underline{P}, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{\varepsilon}, (\underline{I},\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\underline{I},\emptyset)\rangle$$

è una 3-algebra.

Consideriamo, ora, l'applicazione:

$$\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$$

così definita:

$$\phi\underline{x} = (\{\underline{j}\in\underline{I} : \underline{x}\in\underline{j}\} \; ; \{\underline{j}\in\underline{I} : \varepsilon^2 \underline{x}\in\underline{j}\} \; ; \{\underline{j}\in\underline{I} : \varepsilon \underline{x}\in\underline{j}\})$$

LEMMA 3.1. *ϕ è un monomorfismo.*

Dim. Per quanto riguarda $\hat{+}$, ed $\hat{\varepsilon}$, la dimostrazione segue in modo ovvio dalla definizione delle due operazioni e dal fatto che vale in 3 e quindi in ogni 2-algebra che:

$$\varepsilon^2\underline{x}+\varepsilon\underline{y} = \varepsilon\underline{x}+\varepsilon^2\underline{y} = \underline{x}+\underline{y}$$

$$\underline{x}+\varepsilon^2\underline{y} = \varepsilon^2\underline{x}+\underline{y} = \varepsilon\underline{x}+\varepsilon\underline{y} = \varepsilon^2(\underline{x}+\underline{y})$$

$$\underline{x}+\varepsilon\underline{y} = \varepsilon^2\underline{x}+\varepsilon^2\underline{y} = \varepsilon\underline{x}+\underline{y} = \varepsilon(\underline{x}+\underline{y}).$$

Per quanto riguarda invece $\cdot$, introduciamo le seguenti operazioni:

$\underline{x}$	$\underline{y}$	$\underline{x}\ \tau\ \underline{y}$	$\underline{x}\ \sigma\ \underline{y}$	$\underline{x}\ \psi\ \underline{y}$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	2	0	0	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0
1	2	1	1	2
2	0	0	0	1
2	1	2	2	2
2	2	2	2	0

Per la definizione di 0-ideale possiamo ora affermare che
- se $\underline{j}$ è uno 0-ideale di una 3-algebra $\mathscr{A}$ di dominio A, allora:

se $\underline{x} \in \underline{j}$ e $\underline{y} \in \underline{A}$, allora $\underline{x}\ \tau\ \underline{y} \in \underline{j}$ e $\underline{x}\ \psi\ \underline{y} \in \underline{j}$

se $\underline{x},\underline{y} \in \underline{j}$, allora $\underline{x}\ \sigma\ \underline{y} \in \underline{j}$.

La dimostrazione del lemma per quanto concerne segue ora in modo immediata dalla definizione di tale operazione e dal fatto che vale in 3 e quindi in ogni 3-algebra che:

$$(\varepsilon^2\ \underline{x} \vee \varepsilon^2\ \underline{y})\ \tau\ (\varepsilon\ \underline{x} \vee \varepsilon\ \underline{y}) = \varepsilon^2(\underline{x}\cdot y)$$

$$(\varepsilon^2\ \underline{x} \vee \varepsilon\ \underline{y})\ \psi\ (\varepsilon\underline{x}\ \sigma\ \varepsilon^2\underline{y}) = \varepsilon\ (x\cdot y).$$

ϕ è, inoltre, iniettiva in modo ovvio [5]

[5] Come corollario si ottiene subito che per ogni elemento $\underline{x}$ di $\underline{A}$ che non sia nullo, esiste almeno uno 0-ideale massimale cui $\varepsilon\underline{x}$ o $\varepsilon^2\underline{x}$ appartiene.

Sia, ora, $\mathscr{B}$ una sottalgebra di $\mathscr{P}$ tale che ϕ sia biiettiva.

Definiamo tra gli elementi di $\mathscr{P}$, e quindi di $\mathscr{B}$, le operazioni di supremo negli ordini totali:

$$\begin{array}{ccc} 0,1,2 & e & 0,2,1 \\ 1,2,0 & e & 1,0,2 \\ 2,0,1 & e & 2,1,0 \end{array}$$

Tali operazioni verranno indicate rispettivamente con U_o e $\bar{U}_o$, U_1 e $\bar{U}_1$, U_2 e $\bar{U}_2$.

Se $\cup, \cap, \nu$ sono le ordinarie operazioni insiemistiche di unione intersezione e complementazione, introduciamo allora:

$U_o(\underline{x}_i,\underline{y}_i,\underline{z}_i) = (\underline{x},\underline{y},\underline{z})$

con:

$$\underline{x} = \cap \underline{x}_i$$
$$\underline{y} = \nu\underline{x} \cap \nu\underline{z}$$
$$\underline{z} = \cup \underline{z}_i$$

$\bar{U}_o(\underline{x}_i,\underline{y}_i,\underline{z}_i) = (\underline{x},\underline{y},\underline{z})$

con:

$$\underline{x} = \cap \underline{x}_i$$
$$\underline{y} = \cup \underline{y}_i$$
$$\underline{z} = \nu\underline{x} \cap \nu\underline{y}.$$

$U_1(\underline{x}_i,\underline{y}_i,\underline{z}_i) = (\underline{x},\underline{y},\underline{z})$

con:

$$\underline{x} = \cup \underline{x}_i$$
$$\underline{y} = \cap \underline{y}_i$$
$$\underline{z} = \nu\underline{x} \cap \nu\underline{y}$$

$\bar{U}_1(\underline{x}_i,\underline{y}_i,\underline{z}_i) = (\underline{x},\underline{y},\underline{z})$

con:

$$\underline{x} = \nu\underline{y} \cap \nu\underline{z}$$
$$\underline{y} = \cap \underline{y}_i$$
$$\underline{z} = \cup \underline{z}_i$$

$U_2(\underline{x}_{\underline{i}}, \underline{y}_{\underline{i}}, \underline{z}_{\underline{i}}) = (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$

con:

$\underline{x} = \nu y \cap \nu \underline{z}$

$\underline{y} = \cup \underline{y}_{\underline{i}}$

$\underline{z} = \cap \underline{z}_{\underline{i}}$

$\bar{U}_2(\underline{x}_{\underline{i}}, \underline{y}_{\underline{i}}, \underline{z}_{\underline{i}}) = (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$

con:

$\underline{x} = \cup \underline{x}_{\underline{i}}$

$\underline{y} = \nu \underline{x} \cap \nu \underline{z}$

$\underline{z} = \cap \underline{z}_{\underline{i}}$

E' facile verificare che, essendo ϕ un omomorfismo, $\mathscr{B}$ è chiuso rispetto ad applicazioni finite di ognuna di queste sei operazioni. Possiamo, perciò, individuare sei famiglie "privilegiate" di tripartizioni di $\underline{I}$ che denomineremo, per comodità, $\underline{i},\bar{\underline{j}}$-tritopologie o $\bar{\underline{j}},\underline{i}$-tritopologie con $\underline{i},\underline{j} \in 3$ e $\underline{j} = \varepsilon^2 \underline{i}$, a seconda che siano chiuse rispetto ad applicazioni finite di $\bar{U}_{\underline{j}}$ e ad applicazioni infinite di $U_{\underline{i}}$ o, viceversa, rispetto ad applicazioni finite di $U_{\underline{i}}$ ed infinite di $\bar{U}_{\underline{j}}$.

Si vengono, così, a costituire due gruppi di tre famiglie ciascuno ed è importante notare la possibilità di passare da una famiglia all'altra di uno stesso gruppo applicando la complementazione ciclica $\hat{\varepsilon}$ un opportuno numero di volte e da un gruppo ad un altro applicando una sorta di "complementazione di scambio" del tipo $\mu_{\underline{j}}\underline{x} = \varepsilon^{\varepsilon^{\varepsilon^{\underline{j}}\underline{j}_{\underline{x}}}}\underline{x}$ con $\underline{x} \in 3$ ridefinita, naturalmente, per tripartizioni, se è necessario passare da una $\underline{i},\bar{\underline{j}}$-tritopologia ad una $\bar{\underline{j}},\underline{i}$-tritopologia o viceversa.

Possiamo, ora, generalizzare la situazione vista introducendo la seguente

Definizione 3.2. Sia $\underline{A}$ un insieme, $\underline{i},\underline{j} \in 3$, $\underline{j} = \varepsilon^2 \underline{i}$. Una famiglia di tripartizioni di $\underline{A}$ che comprenda anche le tripartizioni $\hat{\varepsilon}^{\underline{j}}(\emptyset,\underline{A},\emptyset)$ ed $\hat{\varepsilon}^{\underline{i}}(\emptyset,\emptyset,\underline{A})$, si dirà $\underline{i},\bar{\underline{j}}$-*tritopologia* se risulta chiusa rispetto ad applicazioni infinite di $U_{\underline{i}}$ e ad applicazioni finite di $\bar{U}_{\underline{j}}$; si dirà, invece, $\bar{\underline{j}},\underline{i}$-*tritopologia* se risulta chiusa rispetto ad applicazioni infinite di $U_{\underline{j}}$ e ad applicazioni finite di $\bar{U}_{\underline{i}}$. Gli elementi di tale insieme si diranno di $\underline{i},\bar{j}$-*specie* o di $\bar{j},i$-*specie* a seconda che valga la prima o la seconda condizione.

Definizione 3.3. Diremo *spazio tritopologico* ogni insieme dotato di una $\underline{i},\bar{\underline{j}}$-tritopologia od una $\bar{\underline{j}},\underline{i}$-tritopologia.

Introduciamo un analogo del concetto di compattezza:

Definizione 3.4. Uno spazio tritopologico $\underline{S}$ si dirà $\underline{i},\bar{\underline{j}}$-3-*compatto* se per ogni famiglia infinita $\underline{F}_{\underline{i},\bar{\underline{j}}}$ di elementi di $\underline{i},\bar{\underline{j}}$-specie tale che:

$$\bigcup_{\underline{f}_{\underline{i},\bar{\underline{j}},\underline{r}} \in \underline{F}_{\underline{i},\bar{\underline{j}}}}{}_{i} \; \underline{f}_{\underline{i},\bar{\underline{j}},\underline{r}} = \hat{\varepsilon}^{\underline{i}}(\emptyset,\emptyset,\underline{S})$$

esiste una sottofamiglia finita $\{\underline{f}_{\underline{i},\bar{\underline{j}},\underline{r},1},\ldots,\underline{f}_{\underline{i},\bar{\underline{j}},\underline{r},n}\}$ tale che:

$$\underline{f}_{\underline{i},\bar{\underline{j}},\underline{r},1} \; U_{\underline{i}} \ldots U_{\underline{i}} \underline{f}_{\underline{i},\bar{\underline{j}},\underline{r},\underline{n}} = \hat{\varepsilon}^{\underline{i}}(\emptyset,\emptyset,\underline{S})$$

Definizione 3.5. Uno spazio tritopologico $\underline{S}$ si dirà $\bar{j},i$-3-*compatto* se per ogni famiglia infinita $\underline{F}_{\bar{\underline{j}},\underline{i}}$ di elementi di $\bar{j},i$-speciecie tale che:

$$\mathop{\bar{U}_{\underline{j}}}\limits_{f_{\underline{\bar{j}},\underline{i},\underline{r}} \in F_{\underline{\bar{j}},\underline{i}}} f_{\underline{\bar{j}},\underline{i},\underline{r}} = \hat{\varepsilon}^{\underline{j}}(\emptyset,\underline{S},\emptyset)$$

esiste una sottofamiglia finita $\{f_{\underline{\bar{j}},\underline{i},\underline{r},1},\ldots,f_{\underline{\bar{j}},\underline{i},\underline{r},n}\}$ tale che:

$$f_{\underline{\bar{j}},\underline{i},\underline{r},1}\ \bar{U}_{\underline{j}} \ldots \bar{U}_{\underline{j}}\ f_{\underline{\bar{j}},\underline{i},\underline{r},\underline{n}} = \hat{\varepsilon}^{\underline{j}}(\emptyset,\underline{S},\emptyset) .$$

Si ottengono, così, sei tipi di compattezza. Siamo in grado di dimostrare, però, che:

PROPOSIZIONE 3.6. *Le sei definizioni di compattezza ora date sono equivalenti tra loro.*

Dim. Per quanto riguarda le equivalenze relative alle famiglie di uno stesso gruppo, la proposizione segue in modo immediato mediante applicazioni successive di $\hat{\varepsilon}$ ricordando che vale in 3, e quindi in ogni 3-algebra, che $\varepsilon^2(U_{\underline{w}}x_{\underline{i}}) = U_{\varepsilon^2\underline{w}}\ \varepsilon^2 x_{\underline{i}}$ e $\varepsilon^2(\bar{U}_{\underline{w}}x_{\underline{i}}) = \bar{U}_{\varepsilon^2\underline{w}}\ \varepsilon^2 x_{\underline{i}}$ con $\underline{w} \in 3$ ed $\underline{i}$ in un insieme di indici. Per quanto riguarda invece le equivalenze relative a due famiglie di gruppo distinto, è sufficiente applicare $\mu_{\underline{j}}$, per un opportuno $\underline{j} \in 3$ e considerare che valgono in 3, e quindi in ogni 3-algebra, le identità $\mu_{\underline{w}}(U_{\varepsilon\underline{w}}x_{\underline{i}}) = \bar{U}_{\underline{w}}\mu_{\underline{w}}x_{\underline{i}}$ e $\mu_{\underline{w}}(\bar{U}_{\underline{w}}x_{\underline{i}}) = U_{\varepsilon\underline{w}}\,\mu_{\underline{w}}x_{\underline{i}}$ con $\underline{w} \in 3$ ed $\underline{i}$ in un insieme di indici.

Diremo, perciò, semplicemente, 3-*compatto* uno spazio tritopologico per cui valga una delle sei definizioni di compattezza date in precedenza.

Possiamo, ora, introdurre il seguente:

TEOREMA 3.7. $\mathcal{T} = \langle I, \mathcal{B} \rangle$ *è 3-compatto.*

Dim. Limitiamo la dimostrazione agli elementi di $\mathcal{B}$ dato che poi ogni elemento di $\underline{i},\bar{\underline{j}}$-specie o di $\bar{\underline{j}},\underline{i}$-specie è ottenibile da essi mediante $U_{\underline{i}}$ e $\bar{U}_{\underline{j}}$.

Sia $\mathcal{R}$ una famiglia infinita di elementi di $\mathcal{B}$ tale che $U_o\mathcal{R} = (\emptyset,\emptyset,\underline{I})$. Se allora $\underline{R}$ è un sottoinsieme infinito del dominio $\underline{A}$ dell'algebra $\mathcal{A}$ mediante la quale $\mathcal{T}$ è stato costruito, si avrà $\bigcup_{\underline{x}\in\underline{R}} \phi\underline{x} = (\emptyset,\emptyset,\underline{I})$. Esaminando, ora, il problema per componenti, si ottiene in modo immediato, con una dimostrazione del tutto analoga a quella svolta nel caso booleano, l'esistenza di un insieme finito $\underline{M} \subset \underline{R}$ tale che $\bigcap_{\underline{x}\in\underline{M}} \{\underline{j}\in I:\underline{x}\in j\} = \emptyset$. Dal fatto, poi, che l'unione delle terze componenti degli elementi di $\mathcal{B}$ sia tutto $\underline{I}$, si ottiene che l'intersezione delle seconde componenti è vuota. Da qui, con lo stesso procedimento svolto per le prime componenti, si ottiene un insieme finito $\underline{N} \subset \underline{R}$ tale che $\bigcap_{\underline{x}\in\underline{N}} \{j\in I : \varepsilon^2 x\in \underline{j}\} = \emptyset$.

Sia, ora, $\underline{L} = \underline{M} \cup \underline{N}$, allora $\bigcup_{\underline{x}\in\underline{L}} \{\underline{j}\in\underline{I}:\varepsilon\underline{x}\in\underline{j}\} = \underline{I}$, ossia $\bigcup^{\rho}_{\underline{x}\in\underline{L}} \phi\underline{x} = (\emptyset,\emptyset,\underline{I})$.

TEOREMA 3.8. *Gli elementi di* $\mathcal{B}$ *sono tutti e soli gli elementi di* i,$\bar{\text{j}}$*-specie e* $\bar{\text{j}}$,i*-specie.*

Dim. La congettura che gli elementi di $\mathcal{B}$ siano elementi di $\underline{i},\bar{\underline{j}}$-specie e $\bar{\underline{j}},\underline{i}$-specie è dimostrabile banalmente in senso positivo. Per quanto riguarda la proposizione inversa, sia $\underline{x}$ un elemento di $\underline{i},\bar{j}$-specie e $\bar{j},\underline{i}$-specie, allora per certi $\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_n$ ... elementi di $\mathscr{B}$ si ha che $\underline{x} = \underline{p}_1 U_o \ldots U_o\, \underline{p}_{\underline{n}}\, U_o \ldots$. Poiché $\underline{x}$ è di $0,\bar{2}$-specie, $1,\bar{0}$-specie, $2,\bar{1}$-specie e $(\emptyset,\emptyset,\underline{I})=(\underline{p}_1 U_o \ldots U_o \underline{p}_{\underline{n}} U_o \ldots) U_o \varepsilon \underline{x} U_o \varepsilon^2 \underline{x}$, si ottiene il risultato per la 3-compattezza di $\mathscr{T}$.

Introduciamo, ora, il concetto di connessione fornendo la seguente definizione:

Definizione 3.9. Uno spazio tritopologico $\underline{S}$ si dirà $\underline{i}$-$\bar{j}$-*sconnesso*, o $\bar{j},\underline{i}$-*sconnesso* se esistono due elementi $\underline{f},\underline{g}$ rispettivamente di $\underline{i},\bar{j}$-specie o $\bar{j},\underline{i}$-specie tali che:

$$\underline{f} U_i \underline{g} = \hat{\varepsilon}^{\underline{i}}(\emptyset,\emptyset,\underline{S})$$

$$\underline{f} \bar{U}_j \underline{g} = \hat{\varepsilon}^{\underline{j}}(\emptyset,\underline{S},\emptyset)$$

Possiamo affermare che:

PROPOSIZIONE 3.10. *I sei tipi di definizione di sconnessione ora ottenuti, sono tra loro equivalenti.*

Dim. E' necessario verificare che uno spazio tritopologico $\underline{S}$ è $\underline{i},\bar{j}$-sconnesso sse è $\overline{\varepsilon \underline{j}}$, $\underline{i}$-sconnesso ed anche che uno spazio tritopologico $\underline{S}$ è $\underline{i},\bar{j}$-sconnesso sse è anche $\bar{j},\underline{i}$-sconnesso. A tale scopo, è sufficiente applicare $\hat{\varepsilon}$ e $\mu_{\underline{j}}$, per un opportuno $\underline{j}$, ai due elementi esistenti per la sconnessione in ipotesi.

Diremo, perciò, semplicemente, 3-*sconnesso*, uno spazio tritopologico per cui valga una delle sei definizioni di sconnessione date in precedenza.

NOTAZIONE. Visto il teorema 3.8., per analogia col caso booleano, si conviene di nomare *clopen* gli elementi di $\mathcal{B}$

Definizione 3.11. Uno spazio tritopologico $\underline{S}$ si dirà totalmente i-*sconnesso* con $\underline{i} \in 3$, se dati due punti distinti $\underline{x},\underline{y}$ di S, esistono due clopen $\underline{f},\underline{g}$ tali che se $\underline{f}_{\underline{i}}$ e $\underline{g}_{\underline{i}}$ sono le rispettive $\underline{i}$-esime componenti, si ha che $\underline{f}_{\underline{i}} \cap \underline{g}_{\underline{i}} = \emptyset, \underline{x} \in \underline{f}_{\underline{i}}, \underline{y} \in \underline{g}_{\underline{i}}$.

E' facile verificare che, applicando $\hat{\varepsilon}$ e $\mu_{\underline{j}}$ per un opportuno j $\in$ 3,

PROPOSIZIONE 3.12. *Le tre definizioni di totale sconnessione ora date, sono tra loro equivalenti.*

Diremo, perciò, semplicemente, *totalmente* 3-*sconnesso* uno spazio tritopologico per cui valga una delle tre definizioni date.

NOTAZIONE. Conveniamo di indicare con $\bar{\in}$ il concetto di appartenenza alla prima componente di una determinata terna.

Si ha il seguente

TEOREMA 3.13. $\mathcal{T} = \langle \underline{I}, \mathcal{B} \rangle$ è *totalmente* 3-*sconnesso.*

Dim. Siano $\underline{j},\bar{\underline{j}} \in \underline{I}$ e $\underline{j} \neq \bar{\underline{j}}$. Poiché $\underline{j}$ e $\bar{\underline{j}}$ sono 0-ideali massimali, esiste $\underline{x}$ tale che $\underline{x} \in \underline{j}$ e $\underline{x} \notin \bar{\underline{j}}$. Se, allora, $\varepsilon\underline{x} \in \bar{\underline{j}}$, consideriamo la coppia di clopen $\phi\underline{x}$ e $\phi\varepsilon\underline{x} = \hat{\varepsilon}\phi\underline{x}$; nel caso in cui $\varepsilon^2\underline{x} \in \bar{\underline{j}}$, consideriamo i due clopen $\phi\underline{x}$ e $\phi\varepsilon^2\underline{x} = \hat{\varepsilon}^2\phi\underline{x}$.

Definizione 3.14. Siano $\underline{S}$ e $\underline{T}$ due spazi tritopologici, $\mathcal{P}(\underline{S})$, $\mathcal{P}(\underline{T})$, gli insiemi delle rispettive parti, $\underline{f}$ una biiezione tra $\underline{S}$

e $\underline{T}$ ed $\bar{\underline{f}}$ una funzione tra $\mathscr{P}(\underline{S}) \times \mathscr{P}(\underline{S}) \times \mathscr{P}(\underline{S})$ a $\mathscr{P}(\underline{T}) \times \mathscr{P}(\underline{T}) \times \mathscr{P}(\underline{T})$, dove x indica l'operazione di prodotto cartesiano, così definita:

$$\bar{\underline{f}}(\underline{p}) = (\{\underline{fx}:\underline{x}\bar{\epsilon}\underline{p}\}, \{\underline{f}\varepsilon^2\underline{x}:\underline{x}\bar{\epsilon}\underline{p}\}, \{\underline{f}\varepsilon\underline{x}:\underline{x}\bar{\epsilon}\underline{p}\}).$$

$\underline{f}$ sarà, allora, un 3-*omeomorfismo* tra $\underline{S}$ e $\underline{T}$ se $\bar{\underline{f}}$ ed $\bar{\underline{f}}^{-1}$ conservano gli elementi di $0,\bar{2}$-specie.

Possiamo, ora, enunciare il seguente

TEOREMA 3.5. *Ogni spazio tritopologico 3-compatto e totalmente 3-sconnesso è, a meno di 3-omeomorfismi, lo spazio duale di un' opportuna 3-algebra.*

Dim. Sia $\underline{T}$ uno spazio tritopologico 3-compatto e totalmente 3-sconnesso. Sia $\underline{A}$ l'insieme dei clopen di $\underline{T}$ e definiamo in $\underline{A}$, nel modo usuale, le operazioni $\hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{\varepsilon}$.

La struttura $\mathscr{A} = \langle A, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{\varepsilon}\rangle$ è una 3-algebra. $\mathscr{T}$ sia lo spazio duale di $\mathscr{A}$.

Si definisca una funzione $\underline{f}$ da $\underline{T}$ ad $\mathscr{T}$ nel seguente modo: $\underline{fx} = \{\underline{p}\epsilon\underline{A} : \underline{x}\bar{\epsilon}\underline{p}\} = J$. E' facile verificare la correttezza di tale definizione salvo introdurre, allo scopo di provare il punto iii) della proposizione 1.2., una definizione per terne dell'operazione $\mathring{\hat{\underline{w}}}$ con $\underline{w}=0$. A tale scopo, poniamo

$$\hat{\mathring{0}}[(\underline{x},\underline{y},\underline{z}),(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}})] = (\hat{\underline{x}},\hat{\underline{y}},\hat{\underline{z}})$$

con

$$\hat{\underline{x}} = \bar{\underline{x}} \cup \underline{y} \cup \underline{z}$$
$$\hat{\underline{y}} = \bar{\underline{y}} \cap \underline{x}$$
$$\hat{\underline{z}} = \bar{\underline{z}} \cap \underline{x}.$$

Diremo, allora, che $(\underline{x},\underline{y},\underline{z})\ \hat{\leq}_\circ(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}})$ sse

$$\hat{\mathring{O}}[(\underline{x},\underline{y},\underline{z}),(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}})] = (\underline{I},\emptyset,\emptyset).$$

In modo analogo al caso booleano, per dimostrare la biiettività di $\underline{f}$ introduciamo una funzione $\underline{g}$ da $\mathscr{T}$ a $\underline{T}$ così definita: $\underline{g}\underline{y} = \underline{u} \bigcup_{\underline{p}_i \in \underline{y}} {}_o\, \underline{p}_i$, dove $\underline{u} \bigcup_{\underline{p}_i \in \underline{y}} {}_o\, \underline{p}_i$ indica l'unico elemento appartenente alla prima componente di $\bigcup_{\underline{p}_i \in \underline{y}} {}_o\, \underline{p}_i$.

Verifichiamo la correttezza della definizione data per $\underline{g}$: per la 3-compattezza di $\mathscr{T}$, vista la definizione di U_o e $\bar{U}_o$, grazie al lemma 13 in R.Magari ([7]) secondo il quale se $\underline{J}$ è uno 0-ideale e $\underline{x},\underline{y}\in\underline{J}$ allora $\underline{x}\ U_o\ \underline{y} \in \underline{J}$ e $\underline{x}\ \bar{U}_o\ \underline{y} \in \underline{J}$, possiamo intanto affermare che $\bigcup_{\underline{p}_i \in \underline{y}} {}_o\, \underline{p}_i \neq (\emptyset,\emptyset,\underline{I})$ e $\bigcup_{\underline{p}_i \in \underline{y}} {}_o\, \underline{p}_i \neq (\emptyset,\underline{I},\emptyset)$. Inoltre esiste un unico elemento appartenente alla prima componente di

$\bigcup_{\underline{p}_i \in \underline{y}} {}_o\, \underline{p}_i$. Se, infatti, esistessero $\underline{x},\underline{t}\in\underline{T}$ tali che $\underline{x} \neq \underline{t}$ e

$\underline{x},\underline{t}\ \bar{\in}\ \bigcup_{\underline{p}_i \in \underline{y}} {}_o\, \underline{p}_i$, per la totale 3-sconnessione di $\mathscr{T}$ si otterrebbe l'esistenza di due clopen p,q le cui prime componenti $\underline{p}_o,\underline{q}_o$, risultano disgiunte, $\underline{x}\in\underline{p}_o$ e $\underline{t}\in\underline{q}_o$. Essendo $\underline{y}$ uno 0-ideale massimale, si ha che $\underline{p}\in\underline{y}$ oppure $\hat{\varepsilon}^2\underline{p}\in\underline{y}$ o $\hat{\varepsilon}\underline{p}\in\underline{y}$. Nel primo caso

$\underline{t}\ \bar{\notin}\ \bigcup_{\underline{p}_i \in \underline{y}} {}_o\, \underline{p}_i$, mentre negli altri due casi $\underline{x}\ \bar{\notin}\ \bigcup_{\underline{p}_i \in \underline{y}} {}_o\, \underline{p}_i$.

Con una dimostrazione del tutto simile a quella del caso boolea no possiamo, poi, verificare che le composizioni $\underline{f} \circ \underline{g}$ e $\underline{g} \circ \underline{f}$ danno in realtà le identità su $\mathcal{T}$ e su $\underline{T}$ rispettivamente. Rimane ora da provare il fatto che $\underline{f}$ è un 3-omeomorfismo. A tale scopo, è sufficiente dimostrare che le funzioni $\bar{\underline{f}}$ e $\bar{\underline{g}}$ ottenute da $\underline{f}$ e $\underline{g}$ come nella definizione 3.4, conservano i clopen. Per quanto riguarda $\bar{\underline{f}}$, siamo in grado di affermare che $\bar{\underline{f}}(p) = \phi\underline{p}$ dove $\underline{p}$ è un clopen di $\underline{T}$ e ϕ è l'isomorfismo di pag. 11. Definiamo, infatti, la seguente relazione tra terne:

$$(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) \mathrel{\hat{\leq}} (\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}}) \quad \underline{\text{sse}} \quad (\underline{x},\underline{y},\underline{z}) \; U_o \; (\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}}) = (\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}}).$$

E' facile verificare che se $(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) \mathrel{\hat{\leq}} (\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}})$ e $(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}}) \mathrel{\hat{\leq}} (\underline{x},\underline{y},\underline{z})$ allora $(\underline{x},\underline{y},\underline{z}) = (\bar{\underline{x}},\bar{\underline{y}},\bar{\underline{z}})$. Vale allora che $\phi\underline{p} \mathrel{\hat{\leq}} \bar{\underline{f}}(\underline{p})$ come si deduce dal fatto che, se $\underline{j}$ è uno 0-ideale massimale, allora $\underline{j}=\{\underline{p}_{\underline{i}} \in \underline{A} : \underline{g}\underline{j}\bar{\in}\underline{p}_{\underline{i}}\}$ e $\underline{g}\underline{j}\bar{\in}\underline{p}$.

In modo analogo si ottiene che $\bar{\underline{f}}(\underline{p}) \mathrel{\hat{\leq}} \phi\underline{p}$.

Lo stesso schema di dimostrazione può essere seguito per $\bar{\underline{g}}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHEN CHUNG CHANG: *Algebraisation of infinitely many-valued logics*, in Summarie of talks presented at the Summer Institut for symbolic logic.

[2] W.W.COMFORT, S.NEGREPONTIS: *The theory of ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[3] G.EPSTEIN: *The lattice theory of Post algebras*. Trans. of the Am.Math.Soc., 95(1975), pp. 300-317.

[4] A.L.FOSTER: *Generalized Boolean theory of universal algebras. I. Subdirect sums and normal representation theorem*, Math.Z., 58, (1953), pp. 306-336.
II. Identities and subdirect sums of functionally complete algebras, Math.Z., 59, (1953), pp. 111-199.

[5] G.GRÄTZER: *Universal algebra*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1968.

[6] G.GRÄTZER: *Lattice theory: first concepts and distributive lattices*, W.H.Freeman, San Francisco, 1971.

[7] R.MAGARI: *Su una classe equazionale di algebre*, Ann. di Mat. pura ed applicata, serie IV, 75, (1967), pp. 277-312.

[8] R.MAGARI: *Sulla varietà generata da un'algebra funzionalmente completa di cardinalità infinita*, Ann. di Mat. pura ed applicata, serie IV, 76, (1967), pp. 305-324.

[9] R.MAGARI: *Costruzione di classi filtrali*, Ann.Univ. Ferrara, sez. VII, 4, (1969), pp. 35-52.

[10] R.SIKORSKI: *Boolean algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[11] M.H.STONE: *The theory of representation of Boolean algebras*, Trans.Am.Math.Soc., 40, (1936), pp.37-111.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 14 Gennaio 1983
ed accettato per la pubblicazione il 12 Aprile 1983
su parere favorevole di M.Mangani e G. Lolli