Note di Matematica Vol. II, 167-176 (1982)

BLOCKING-SETS CONTENUTI NELL'UNIONE DI TRE RETTE FORMANTI FASCIO (*)

Rosa STANGARONE - Antonio TERRUSI (**)

Summary. *Let* PG(2,q) *be the Galois plane of order* q *and let* n(q) *be the minimum integer such that there exists a* n(q) *blocking-set of* PG(2,q) *contained in the union of three lines which pass through the same point. In this paper we prove that, if* q *is odd*, $n(q) \geq \frac{3q+5}{2}$ *and we give an example of minimal blocking-set in* PG(2,9).

1. INTRODUZIONE.

Un blocking-set $\mathcal{B}$ di un piano proiettivo finito π è, notoriamente, (cfr. [4]) un sottoinsieme di punti di π tale che ogni retta di π contiene almeno un punto di $\mathcal{B}$ e un punto non appartenente a $\mathcal{B}$.

Lo studio dei blocking-sets ha interesse per numerose questioni tra cui quella di ottenere limitazioni per la cardinalità delle fibrazioni parziali massimali di uno spazio proiettivo finito (cfr. [1], [3]). In relazione a tali argomenti, si è posto innanzi tutto il problema di determinare il più piccolo intero n(q) per cui esi-

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - Bari.

sta un $n(q)$-blocking-set in un piano proiettivo d'ordine q[1].

Una risposta significativa, sebbene parziale, a questo problema è stata data da Bruen (cfr. [2]), il quale ha dimostrato che $n(q) \geq q + \sqrt{q} + 1$, ove vale l'uguaglianza se e solo se il blocking-set è un insieme di punti di un sottopiano di Baer del piano proiettivo ~~finito~~.

Di recente Senato (cfr. [5]) ha affrontato il problema citato, in relazione ai blocking-sets contenuti nell'unione di tre rette, denominati per brevità blocking-sets di indice 3, provando tra l'altro che, se un blocking-set è contenuto nell'unione di tre rette formanti fascio, $n(q) \geq \frac{3}{2} q+1$, ove vale l'uguaglianza se q è pari.

Nella presente nota gli autori migliorano quest'ultima relazione, dimostrando (cfr. teorema 1) che, in un piano di Galois d'ordine q dispari, $n(q) \geq \frac{3q+5}{2}$ e forniscono inoltre un esempio di blocking-set minimale nel piano di Galois d'ordine 9.

Gli autori desiderano ringraziare G. Korchmaros, visiting professor presso l'Università di Bari, per le discussioni sull'argomento.

2. BLOCKING-SETS CONTENUTI NELL'UNIONE DI TRE RETTE FORMANTI FASCIO.

In un piano proiettivo d'ordine q siano $\mathcal{F}$ l'unione di tre rette formanti fascio e $\mathcal{B}$ un blocking-set contenuto in $\mathcal{F}$.

Se q è dispari, risulta che (cfr. [5])

$$(2.1) \qquad |\mathcal{B}| > \frac{3}{2} q + 1 \ .$$

(1) Poiché il piano proiettivo d'ordine 2 non contiene blocking-sets, d'ora in poi supporremo che i piani abbiano ordine $q>2$.

Al fine di migliorare la relazione (2.1) esaminiamo il caso immediatamente successivo; verifichiamo, cioé, l'esistenza o meno di blocking-sets, contenuti nell'unione $\mathcal{F}$ di tre rette formanti fascio, di cardinalità $\frac{3}{2}(q+1)$.

Indicate con a,b,c le rette di $\mathcal{F}$ e con P il centro del fascio, dimostriamo il seguente

LEMMA 1. *In un piano proiettivo d'ordine* q *dispari, se* $\mathcal{B}$ *è un blocking-set di cardinalità* $\frac{3}{2}(q+1)$ *contenuto in* $\mathcal{F}$, *allora le intersezioni, distinte da* P, *di* $\mathcal{B}$ *con le rette di* $\mathcal{F}$ *hanno cardinalità (a meno dell'ordine)* $\frac{q+1}{2}$, $\frac{q-1}{2}$, $\frac{q+1}{2}$.

Dimostrazione. Poniamo :

$$\Phi = \{\mathcal{B}\cap a\}\setminus\{P\}, \quad \Psi = \{\mathcal{B}\cap b\}\setminus\{P\}, \quad \Omega = \{\mathcal{B}\cap c\}\setminus\{P\}$$

e

$$\mathcal{B} = \Phi \cup \Psi \cup \Omega \cup \{P\}.$$

Poiché $P \in \mathcal{B}$, altrimenti le rette del fascio di centro P, distinte da a,b,c non incontrerebbero il blocking-set, $\mathcal{B}$ non può contenere per intero le rette di $\mathcal{F}$.

Denotate allora con:

p_A : $b \to c$ la proiezione della retta b su c da un punto $A \in a\setminus\Phi$ e distinto da P;

p_B : $c \to a$ la proiezione della retta c su a da un punto $B \in b\setminus\Psi$ e distinto da P;

p_C : $a \to b$ la proiezione della retta a su b da un punto $C \in c\setminus\Omega$ e distinto da P, si dimostra facilmente che

$$p_A(\Psi) \cup \Omega \cup \{P\} = c; \quad p_B(\Omega) \cup \Phi \cup \{P\} = a; \quad p_C(\Phi) \cup \Psi \cup \{P\} = b.$$

Ne consegue che, posto

$$|p_A(\Psi)| = |\Psi| = \psi \qquad |p_B(\Omega)| = |\Omega| = \omega; \quad |p_C(\Phi)| = |\Phi| = \varphi \quad ;$$

$$|p_A(\Psi) \cap \Omega| = \alpha; \qquad |p_B(\Omega) \cap \Phi| = \beta; \quad |p_C(\Phi) \cap \Psi| = \gamma,$$

deve verificarsi che

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} \psi + \omega = q + \alpha \\ \varphi + \omega = q + \beta \\ \varphi + \psi = q + \gamma \end{cases}$$

da cui

$$\varphi + \psi + \omega = \frac{3}{2}q + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

cioé

$$|\mathscr{B}| - 1 = \frac{3}{2}q + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

e quindi

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = |\mathscr{B}| - \frac{3}{2}q - 1.$$

Poiché per ipotesi $|\mathscr{B}| = \frac{3}{2}(q+1)$, si ha allora che

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{3}{2}q + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}q - 1 = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

e ciò si verifica se e solo se, delle intersezioni $p_A(\Psi) \cap \Omega$,

$p_B(\Omega)\cap\phi$ e $p_C(\Phi)\cap\Psi$, due sono vuote e l'altra è costituita da un solo punto; non è restrittivo supporre, ad esempio, che

$$\alpha = \gamma = 0 \quad \text{e} \quad \beta = 1. \tag{2.3}$$

Di conseguenza il sistema (2.2) diventa

$$\begin{cases} \psi + \omega = q \\ \varphi + \omega = q + 1 \\ \varphi + \psi = q \end{cases} \tag{2.4}$$

la cui soluzione è $\varphi = \frac{q+1}{2}$, $\psi = \frac{q-1}{2}$, $\omega = \frac{q+1}{2}$ e ciò prova l'asserto.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 1. *Nel piano proiettivo* PG(2,q) *su* GF(q), *con* q *dispari, i blocking-sets* $\mathscr{B}$ *contenuti nell'unione di tre rette formanti fascio hanno cardinalità* $n(q) \geq \frac{3q+5}{2}$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che in PG(2,q) con q dispari, esista un blocking-set $\mathscr{B}$, contenuto nell'unione di tre rette formanti fascio, di cardinalità $\frac{3}{2}(q+1)$. Allora, per il lemma 1, i punti, distinti da P, del blocking-set $\mathscr{B} = \Phi\cup\Psi\cup\Omega\cup\{P\}$ sono distribuiti sulle rette del fascio in modo tale che

$$|\Phi| = |\Omega| = \frac{q+1}{2} \quad \text{e} \quad |\Psi| = \frac{q-1}{2}. \tag{2.5}$$

Assumiamo in PG(2,q) un riferimento proiettivo tale che le rette a,b,c del fascio siano rispettivamente l'asse y, la retta di equazione x=1 e la retta impropria, il centro P del fascio coincida con Y_∞ e tale che i punti O(0,0,1) e X_∞ (1,0,0) non appartengano a $\mathcal{B}$.

Per ogni $m \in GF(q)$ si consideri la corrispondenza biunivoca tra i punti dell'asse y e quelli della retta di equazione $x=1$, escluso il punto Y_∞, definita come segue

$$\varphi_m : \begin{cases} (0,b,1) \rightarrow (1,m+b,1) \\ (1,c,1) \rightarrow (0,c-m,1) . \end{cases}$$

Si vede subito che φ_m si ottiene proiettando, dal punto $P(1,m,0)$, l'asse y sulla retta di equazione $x=1$ e viceversa.

Poiché per la (2.3) $\gamma = 0$, si ha che

$$\forall P(1,m,0) \notin \mathcal{B} : |\varphi_m(\Phi) \cap \Psi| = 0$$

e quindi

$$|\varphi_m(\Phi) \cup \Psi| = |\varphi_m(\Phi)| + |\Psi| = |\Phi| + |\Psi| = q$$

da cui

$$\varphi_m(\Phi) = \bar{\Psi} = \{C\,\Psi\} \setminus \{Y_\infty\} \quad \text{se} \quad P(1,m,0) \notin \mathcal{B} .$$

In modo analogo si prova che

$$\varphi_m(\Psi) = \bar{\Phi} = \{C\,\Phi\} \setminus \{Y_\infty\} \quad \text{purché sia } P(1,m,0) \notin \mathcal{B}.$$

Possiamo quindi concludere che

$$(2.6) \qquad P(1,m,0) \notin \mathcal{B} \implies \varphi_m(\Phi) = \bar{\Psi} \quad \text{e} \quad \varphi_m(\Psi) = \bar{\Phi} .$$

Proviamo ora che la (2.6) si inverte nella

$$(2.7) \qquad \varphi_m(\Phi) = \bar{\Psi} \quad \text{e} \quad \varphi_m(\Psi) = \bar{\Phi} \Rightarrow P(1,m,0) \notin \mathcal{B} .$$

Infatti se $\varphi_m(\Psi) = \bar{\Phi}$ si ha che per ogni $A \in \bar{\Phi}$ esiste $Y \in \Psi$ tale che $A = \varphi_m(Y)$.

Considerata la retta $[AY]$, la sua intersezione con la retta impropria è il punto $P(1,m,0)$ che, d'altra parte, si può considerare come l'immagine del punto Y nella proiezione dal punto A, cioé $P = p_A(Y)$. Poiché, per la (2.3), $\alpha = 0$ cioé $p_A(\Psi) \cap \Omega = \emptyset$, risulta $p_A(Y) = P(1,m,0) \notin \mathscr{B}$.

Considerato ora l'insieme $J = \{\varphi_m | m \in GF(q)\}$ si ha che

(2.8) per ogni $\varphi_m, \varphi_n, \varphi_t \in J$: $\varphi_t \circ \varphi_n \circ \varphi_m = \varphi_u$ con $u=m-n+t$

e quindi

(2.9) per ogni $\varphi_m, \varphi_n, \varphi_t \in J$: $\varphi_t \circ \varphi_n \circ \varphi_m \in J$.

Denotato con I il sottoinsieme di J

$$I = \{\varphi_m \mid (1,m,0) \notin \mathscr{B}\}$$

dalle (2.6),(2.7) e (2.9) discende che

(2.10) per ogni $\varphi_m, \varphi_n, \varphi_t \in I$: $\varphi_t \circ \varphi_n \circ \varphi_m \in I$.

Indicato inoltre con

(2.11) $H = \{m \in GF(q) | \varphi_m \in I\} = \{m \in GF(q) \mid (1,m,0) \notin \mathscr{B}\}$

si ha che $|H| = |I| = \frac{q-1}{2}$.

Per come è stato disposto il riferimento $0(0,0,1) \notin \mathscr{B}$ e quindi per ogni $\varphi_m \in I$ i punti del tipo $\varphi_m(0,0,1)$ appartengono a $\mathscr{B}$. Tali punti sono a due a due distinti, dunque esauriscono Ψ, essendo $|\Psi| = |I| = \frac{q-1}{2}$. Poiché $\varphi_m(0,0,1) = (1,m,1)$ ne segue allora che

$$(2.12) \qquad \Psi = \{(1,m,1) \mid \varphi_m \in I\} = \{(1,m,1) \mid m \in H\}.$$

Inoltre, per come è stato assunto il riferimento, il punto $X_\infty(1,0,0) \notin \mathscr{B}$; ne segue che $\varphi_o \in I$ e, in accordo con le (2.8) e (2.10), si ha che

$$(2.13) \qquad \text{per ogni } \varphi_m, \varphi_t \in I : \varphi_t \circ \varphi_o \circ \varphi_m = \varphi_u \in I \text{ con } u=m+t,$$

cioé per ogni $m,t \in H : m + t \in H$.

Dunque H è un sottogruppo di (GF(q),+), mentre la sua cardinalità $\frac{q-1}{2}$ non è divisore di q; ciò è assurdo e quindi resta provato l'asserto.

Proviamo ora l'esistenza di un blocking-set contenuto nell'unione di tre rette formanti fascio e avente $\frac{3q+5}{2}$ punti nel piano di Galois d'ordine 9.

Osserviamo innanzi tutto che se GF(q) è il campo di Galois d'ordine $q=p^h$, con p primo e dispari, la struttura additiva di GF(q) è notoriamente un gruppo abeliano ed è possibile estrarre da (GF(q),+) un sottogruppo T di ordine p^{h-1}.

Considerato allora il piano proiettivo PG(2,q) su GF(q) e fissato in esso un riferimento proiettivo, si dimostra facilmente il seguente

TEOREMA 2. *L'insieme* $\mathcal{B} = \Phi \cup \Psi \cup \Omega \cup \{Y_\infty\}$ *ove* $\Phi = \{(0,y) \mid y \notin T\}$, $\Psi = \{(1,y) \mid y \in T\}$, $\Omega = \{(1,m,0) \mid m \notin T\}$ *è un blocking-set in* PG(2,q), *contenuto nell'unione di tre rette formanti fascio, di cardinalità* $2p^h - p^{h-1} + 1$.

Poiché per $q = 3^2$, risulta che

$$2p^h - p^{h-1} + 1 = 16 = \frac{3q+5}{2},$$

il teorema 2. assicura l'esistenza di un blocking-set di cardinalità $\frac{3q+5}{2}$ nel piano di Galois d'ordine 9.

Pertanto si può asserire che la disuguaglianza ottenuta nel teorema 1. non è migliorabile almeno per $q \le 9$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.BEUTELSPACHER: *Blocking-sets and parzial spreads in finite proiective spaces*, Geom. Ded. 9 (1980), 425-449.

[2] A.A.BRUEN: *Blocking-sets in finite projective planes*, SIAM, J. Appl. Math. 21 (1971), 380-392.

[3] A.A.BRUEN: *Collineations and extensions of translation nets*, Math. Z. (1975), 243-249.

[4] J.W.P.HIRSCHFELD: *Projective geometries over finite fields*, Oxford University Press, (1979).

[5] D.SENATO: *Blocking-sets di indice* 3, Accademia di Sc. Fis.e Mat. della Soc. Naz. di Sc. Lettere e Arti in Napoli (in corso di stampa).

Lavoro pervenuto alla Redazione il 21 Ottobre 1982
ed accettato per la pubblicazione il 14 Marzo 1983
su parere favorevole di M. Biliotti ed U. Bartocci