Note di Matematica Vol. II, 59-166 (1982)

# FORMULE ATTUALI ED EREDITARIE NELLA LOGICA INTUIZIONISTA

Silvio BOZZI (*)

SUNTO. *Vengono isolate due classi di formule, dette rispettivamente* attuali *ed* ereditarie, *la cui verità ad un livello di una struttura in prefasci coincide con la verità classica a quel livello o a tutti i livelli precedenti e si dimostra come le due classi siano caratterizzabili sintatticamente in termini di* formule *e* sequenti geometrici.

0. Come è noto, la logica intuizionista è completa rispetto alle interpretazioni in categorie di prefasci, in particolare quei prefasci che sono definiti su categorie preordinate. In questo caso, le strutture che si ottengono costituiscono una naturale generalizzazione delle *strutture di Kripke*. Fissato un linguaggio elementare L, una interpretazione sarà data da $M = \langle I, \leq M, \models \rangle$ dove $\langle I, \leq \rangle$ è un preordine, $M : \langle I, \leq \rangle \to \Sigma(L)$ un prefascio di strutture per L che ad ogni i $\in I$ associa una struttura classica $M(i) \in \Sigma(L)$ e se $\underline{j} \leq \underline{i}$ ci dà un omomorfismo $\mu^{\underline{i}}_{\underline{j}}: M(\underline{i}) \to M(\underline{j})$ (che coincide con l'identità se $\underline{i} = \underline{j}$) e $\models$ è la relazione di *soddisfazione* definita nel modo seguente, livello per livello.

(*) Università della Calabria.

Per ogni $\bar{\underline{a}}$ e $M(\underline{i})^{\underline{n}}$:

$$\text{i)}\quad M \models_{\underline{i}} A[\bar{\underline{a}}] \qquad \text{sse} \quad M(\underline{i}) \models A[\bar{\underline{a}}]$$

per le atomiche. Inoltre:

$$\text{ii)}\quad M \models_{\underline{i}} (A\wedge B)[\bar{\underline{a}}] \qquad \text{sse} \qquad M \models_{\underline{i}} A[\bar{\underline{a}}] \quad \text{e} \quad M \models_{\underline{i}} B[\bar{\underline{a}}]$$

$$M \models_{\underline{i}} (A\vee B)[\bar{\underline{a}}] \qquad \text{sse} \qquad M \models_{\underline{i}} A[\bar{\underline{a}}] \quad \text{o} \quad M \models_{\underline{i}} B[\bar{\underline{a}}]$$

$$M \models_{\underline{i}} (\exists \underline{x} B)[\bar{\underline{a}}] \qquad \text{sse} \qquad \exists \underline{a}' \in M(\underline{i}) \quad \text{t.c.} \quad M \models_{\underline{i}} B[\underline{a}', \bar{\underline{a}}]$$

$$\text{iii)}\quad M \models_{\underline{i}} (A\to B)[\bar{\underline{a}}] \qquad \text{sse} \qquad \forall \underline{j\le i} \quad M \models_{\underline{j}} A[\mu^{\underline{i}}_{\underline{j}}\, \bar{\underline{a}}] \Rightarrow M \models_{\underline{j}} B[\mu^{\underline{i}}_{\underline{j}}\, \bar{\underline{a}}]$$

$$M \models_{\underline{i}} (\forall \underline{x} B)[\bar{\underline{a}}] \qquad \text{sse} \qquad \forall \underline{j}\le\underline{i},\ \forall \underline{a}' \in M(\underline{j}) \quad M \models_{\underline{j}} B[\underline{a}', \mu^{\underline{i}}_{\underline{j}}\, \bar{\underline{a}}].$$

Al solito $(\sim A)$ starà per $(A\to\bot)$ dove $\bot$ è il simbolo per l'assurdo.
Diremo che $A(\bar{\underline{x}})$ è *soddisfatta* da $\bar{\underline{a}} \in M(\underline{i})^{\underline{n}}$ (e scriveremo $M \models A[\bar{\underline{a}}]$) se per ogni $\underline{j\le i}$ si ha che $M \models_{\underline{j}} A[\mu^{\underline{i}}_{\underline{j}}\, \bar{\underline{a}}]$ e lo stesso per ogni $\underline{l\ge i}$ e ogni $\bar{\underline{b}} \in M(\underline{l})^{\underline{n}}$ per cui $\mu^{\underline{l}}_{\underline{i}}(\bar{\underline{b}}) = \bar{\underline{a}}$. Nel caso $A$ sia un enunciato, cioé non contenga variabili libere, diremo che $A$ è *vera* in $M$ (e scriveremo $M \models A$). Questo significa che per ogni $\underline{i} \in I$ avremo $M \models_{\underline{i}} A$.

Esiste un rapporto tra soddisfacibilità classica ad un livello e la soddisfacibilità ora definita. E' immediato infatti che se $A(\underline{x})$ è *geometrica* (ottenuta cioé dalle atomiche con i soli $\wedge, \vee\ \exists$) per ogni $\underline{i} \in I$:

$$*)\quad M \models_{\underline{i}} A[\bar{\underline{a}}] \qquad \text{sse} \qquad M(\underline{i}) \models A[\bar{\underline{a}}]$$

Se invece $(A \to B)(\underline{\bar{x}})$ è un *sequente geometrico* (vale a dire, $A$, $B$ sono formule geometriche) $\underline{\bar{y}}$ è una successione di variabili occorrenti fra le $\underline{\bar{x}}$, allora:

$$**)\quad M \models_{\underline{i}} \forall\underline{\bar{y}}(A \to B)[\underline{\bar{a}}] \quad \text{sse} \quad \forall \underline{j} \leq \underline{i} \quad M(\underline{j}) \models \forall\underline{\bar{y}}(A \to B)[\mu^{\underline{i}}_{\underline{j}}\ \underline{\bar{a}}]$$

Chiameremo *chiusure* di sequenti geometrici le formule del tipo $\forall\underline{\bar{y}}(A \to B)(\underline{\bar{x}})$. Sorge naturale il problema di caratterizzare le formule che godono di $*$) e $**$), a meno di equivalenze rispetto alla logica intuizionista. In questa nota, sfruttando due risultati di Chang e Keisler sulla teoria dei modelli classica, daremo una caratterizzazione di questo tipo mostrando come le formule *attuali* (che soddisfano cioé la $*$)) coincidano con le geometriche e come le *ereditarie* (che soddisfano la $**$)) coincidano con le chiusure di sequenti geometrici.

1. Cominciamo col richiamare alcuni fatti.

PROPOSIZIONE 1. *Se con* $\vdash_i$ *indichiamo la dimostrabilità intuizionista, con* $\vdash$ *quella classica e con* $\Vdash$ *la conseguenza rispetto alle interpretazioni in prefasci, abbiamo che:*

i) $T \vdash_i A$ sse $T \Vdash A$

ii) Per ogni sequente geometrico $A$ e ogni teoria $T$ di sequenti geometrici

$T \vdash_i A$ sse $T \vdash A$

iii) Per ogni $M$ e ogni $\underline{i} \in I$

$$M \models_{\underline{i}} A[\underline{\bar{a}}] \Rightarrow \forall \underline{j} \leq \underline{i} \quad M \models_{\underline{j}} A[\mu^{\underline{i}}_{\underline{j}}\ \underline{\bar{a}}]\ .$$

E' immediato verificare che la ii) vale più in generale per $A$ e $T$ attuali o ereditarie. Avremo così che:

LEMMA 1. *Se* $A$ *e* $A'$ *sono attuali o ereditarie:*

$$\vdash_i (A \leftrightarrow A') \qquad \text{sse} \qquad \vdash (A' \leftrightarrow A')$$

Possiamo ora fornire una caratterizzazione sintattica delle formule attuali.

TEOREMA 1. *La formula* $A(\underline{\bar{x}})$ *è attuale sse esiste una formula geometrica* $A'(\underline{\bar{x}})$ *per cui:*

$$\vdash_i A(\underline{\bar{x}}) \leftrightarrow A'(\underline{\bar{x}})$$

*Dim.* Sia $\underline{n}$ la lunghezza della successione di variabili $\underline{\bar{x}}$ e sia $\underline{\bar{a}}$ una successione di $\underline{n}$ nuove costanti individuali. Per il Lemma 1 per provare $\Longrightarrow$ basterà allora trovare una $A'(\underline{\bar{x}})$ geometrica per la quale $\vdash A(\underline{\bar{a}}) \leftrightarrow A'(\underline{\bar{a}})$. La direzione $\Longleftarrow$ è ovvia.

Cominciamo col verificare che se $A(\underline{\bar{x}})$ è attuale (e quindi lo è anche $A(\underline{\bar{a}})$) $A(\underline{\bar{a}})$ sarà chiusa rispetto agli omomorfismi, vale a dire che se $\mathcal{A} \models A(\underline{\bar{a}})$ e $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è un omomorfismo avremo anche $\mathcal{B} \models A(\underline{\bar{a}})$.

Consideriamo il preordine $\langle I, \leq \rangle$ dove $I = \{0,1\}$, $\leq$ l'ordine naturale. Sia $M : \langle I, \leq \rangle \to \Sigma(L)$ il prefascio per cui $M(0) = \mathcal{B}$, $M(1) = \mathcal{A}$ e $\mu\frac{1}{0} = \mu$.

In $M$, l'interpretazione associata, avremo che $M \models_1 A(\underline{\bar{a}})$ poiché $A(\underline{\bar{a}})$ è attuale e quindi, per la iii) di Prop. 1, anche $M \models_0 A(\underline{\bar{a}})$.

Sempre per l'attualità di $A(\underline{\bar{a}})$ concludiamo allora che $B \models A(\underline{\bar{a}})$ .
Per il teorema di Chang-Keisler, una formula chiusa $X$ è chiusa rispetto agli omomorfismi sse esiste una $X'$ geometrica per cui $\vdash X \leftrightarrow X'$. Per la dimostrazione cfr. [1]. Abbiamo così che $\vdash A(\underline{\bar{a}}) \leftrightarrow A'(\underline{\bar{a}})$ dove $A'(\underline{\bar{x}})$ è geometrica e quindi, per il Lemma 1, $\vdash_{i} A(\underline{\bar{x}}) \leftrightarrow A'(\underline{\bar{x}})$ come volevasi dimostrare.

Per ottenere una caratterizzazione analoga nel caso delle formule ereditarie occorre indagare più da vicino i rapporti tra limiti diretti e interpretazioni date da prefasci su insiemi diretti. Per un'analisi più completa di quella che possiamo considerare la *logica dei sistemi diretti* cfr. [2].

Dato un preordine $<I, \leq>$ diremo che è *diretto* sse $\forall \underline{i}, \underline{j} \in I$ esiste un $\underline{k} \in I$ per cui $\underline{k} \leq \underline{i}, \underline{j}$. Un *sistema diretto* (di strutture per L) è allora un prefascio $M : I, \leq > \to \Sigma(L)$. Indichiamo con $\lim M$ il suo limite e sia $\mu_{\underline{j}} : M(\underline{j}) \to \lim M$, $\forall \underline{j} \in I$, il *morfismo canonico* associato.

Abbiamo allora il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* $A(\underline{\bar{x}})$ *una formula in cui* non *occorre* $\forall$. *Allora per ogni* $\underline{\bar{a}} \in \lim M^{\underline{n}}$:

$$(+) \qquad \lim M \models A[\underline{\bar{a}}] \qquad \text{sse} \quad \exists \underline{i} \in I,\ \exists \underline{\bar{a}}_{\underline{i}} \in M(\underline{i})^{\underline{n}} \ \text{t.c.}$$
$$\mu_{\underline{i}}(\underline{\bar{a}}_{\underline{i}}) = [\underline{\bar{a}}] \quad \text{e} \quad M \models_{\underline{i}} A[\underline{\bar{a}}_{\underline{i}}]$$

*Dim.* Procediamo per induzione sulla complessità di $A(\underline{\bar{x}})$.

Il caso delle atomiche è ovvio. Sia $A = (B \wedge C)$. Se $\lim M \models (B \wedge C)[\underline{\bar{a}}]$ avremo $\lim M \models B[\underline{\bar{a}}]$ e $\lim M \models C[\underline{\bar{a}}]$. Per ipotesi induttiva, $\exists \underline{i}, \underline{j} \in I$ t.c. $M \models_{\underline{i}} B[\underline{\bar{a}}_{\underline{i}}]$ e $M \models_{\underline{j}} C[\underline{\bar{a}}_{\underline{j}}]$. L'insieme $<I, \leq>$ è diretto e quindi esiste $\underline{k} \leq \underline{i},\underline{j}$. Per la iii) della Prop. 1 $M \models_{\underline{k}} B[\mu^{i}_{\underline{k}}\, \bar{a}_{\underline{i}}]$, $M \models_{\underline{k}} C[\mu^{j}_{\underline{k}}\, \bar{a}]$. Poiché per ipotesi $\mu_{\underline{i}}(\bar{a}_{\underline{i}}) = \bar{a} = \mu_{\underline{j}}(\bar{a}_{\underline{j}})$ avremo che $\mu^{i}_{\underline{k}}(\bar{a}_{\underline{i}}) = \mu^{j}_{\underline{k}}(\bar{a}_{j})$. Quindi $M \models_{k} (B \wedge C)[\mu^{i}_{\underline{k}}\, \bar{a}_{\underline{i}}]$ dove $\mu_{k} \circ \mu^{i}_{\underline{k}}(\bar{a}_{\underline{i}}) = \bar{a}$. L'inverso è analogo.

Sia $A = (B \rightarrow C)$. Se $\lim M \models (B \rightarrow C)[\bar{a}]$ supponiamo per assurdo che $\forall \underline{i} \in I$ sia $M \models_{\underline{i}} (B \rightarrow C)[\bar{a}_{\underline{i}}]$ se $\mu_{\underline{i}}(\bar{a}_{\underline{i}}) = \bar{a}$. Allora $\forall \underline{i} \in I$ $M \models_{\underline{i}} B[\bar{a}_{i}]$ e $M \not\models_{\underline{i}} C[\bar{a}_{\underline{i}}]$. Per ipotesi induttiva avremo $\lim M \models B[\bar{a}]$ e $\lim M \not\models C[\bar{a}]$: assurdo.

L'inverso è ovvio. I casi per $\vee$, $\exists$ si trattano analogamente.

Non è difficile verificare che il risultato di sopra non si estende a formule arbitrarie. E' però immediato rafforzarlo nel seguente:

COROLLARIO. *Se* $A$ *non contiene occorrenze di* $\forall$, *le* $\bar{y}$ *sono variabili libere in* $A$, *per ogni* $\bar{a} \in \lim M^{\underline{n}}$:

$$(\circ) \quad \lim M \models \forall \bar{y} A[\bar{a}] \quad \text{sse} \quad \forall \bar{b} \in \lim M^{\underline{k}}\ \exists \underline{i} \in I \text{ t.c. } M \models_{\underline{i}} A[\bar{b}_{\underline{i}}, \bar{a}_{\underline{i}}]$$

Sfruttando il corollario possiamo ora caratterizzare sintatticamente le formule ereditarie del tipo $\forall \bar{y} A$ ove $A$ non contiene quantificatori universali.

TEOREMA 2. *Una formula del tipo* $\forall \bar{y} A$ dove $A$ non contiene $\forall$ è ereditaria sse esiste una chiusura $A'$ di un sequente geometrico per cui $\vdash_{i} A' \leftrightarrow \forall \underline{y} A$.

*Dim.* Un verso è ovvio. Sia $\forall \underline{\bar{y}} A$ ereditaria e sia una formula $\underline{n}$-aria. Estendiamo il linguaggio introducendo $\underline{n}$ nuove costanti individuali $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ la cui sequenza indichiamo con $\underline{a}$. Proviamo che esiste un enunciato $A^+$, chiusura di un sequente geometrico, per cui $\vdash_{i} A^+ \leftrightarrow \forall \underline{\bar{y}} A(\underline{a})$.

Per il teorema di Keisler (cfr. [1]) un enunciato $X$ equivale classicamente alla chiusura di un sequente geometrico sse dato un sistema diretto $M$ su $\langle I, \leq \rangle$ di modelli di $X$ allora $\lim M \models X$. Ci basta allora provare che se $\forall \underline{i} \in I \; M(\underline{i}) \models \forall \underline{\bar{y}} A(\underline{a})$ allora $\lim M \models \forall \underline{\bar{y}} A(\underline{a})$. Sia $M$ la struttura in prefasci associata a $M$. Per assurdo si supponga che $\lim M \not\models \forall \underline{\bar{y}} A(a)$. Allora per il corollario $\exists \underline{\bar{b}} \in \lim M^{\underline{k}}$ t.c. $\forall \underline{i} \in I \quad M \not\models_{\underline{i}} A(\underline{a})[\underline{\bar{b}}_{\underline{i}}]$. Poiché $A(\underline{a}, \underline{\bar{y}})$ è ereditaria avremo che $\exists \underline{i} \in I$ t.c $M(\underline{i}) \not\models A(\underline{a})[\underline{\bar{b}}_{\underline{i}}]$ cioè $M(\underline{i}) \not\models \forall \underline{\bar{y}} A(a)$: contro l'ipotesi. Così $\lim M \models \forall \underline{\bar{y}} A(\underline{a})$. Per il teorema di Keisler esiste allora $A^+$, chiusura di sequente geometrico, per cui $\vdash \forall \underline{\bar{y}} A(\underline{a}) \leftrightarrow A^+$. Varrà anche $\vdash_{i} \forall \underline{\bar{y}} A(\underline{x}) \leftrightarrow A'$ dove $A'$ si ottiene da $A^+$ sostituendo le costanti $\underline{a}$ con le variabili $\underline{\bar{x}}$.

Il problema che rimane aperto è di estendere la caratterizzazione ad *ogni* formula ereditaria, ma il principio di sopra è già significativo di per sè. Cfr. [3], [4].

Sullo sfondo, un problema più generale. Le nostre caratterizzazioni sono state ottenute sfruttando risultati di preservazione su strutture classiche. Si tratta di fare l'inverso, considerando le classiche come casi limite di strutture in prefasci e ottenere i risultati di preservazione come corollari della caratterizzazione di formule attuali ed ereditarie.

## BIBLIOGRAFIA

[1] C.C.CHANG e H.J.KEISLER: "*Teoria dei modelli*", Boringhieri 1980.

[2] S.BOZZI: "*La logica dei sistemi diretti*", in preparazione.

[3] S.BOZZI e G.C.MELONI: "*Ideal principles and intuitionistic algebra*", Rendiconti dell'Ist. Lomb. Scienza e Lettere, Classe di Scienze (A) vol. 111 (1977) pp. 145-150.

[4] S.BOZZI: "*Principi ideali e logica intuizionista*", in corso di stampa su Bollettino U.M.I.

*Lavoro pervenuto alla Redazione il 16 Settembre 1982*
*ed accettato per la pubblicazione il 17 Gennaio 1983*
*su parere favorevole di G. Lolli e R. Magari*