Note di Matematica Vol. II, 131-143 (1982)

CALOTTE COMPLETE IN PG(3,8) (*)

Luca Maria ABATANGELO - Michele PERTICHINO (**)

Summary. *In this paper we have constructed complete caps in PG(3,8) having 37 points on an elliptic quadric.*

INTRODUZIONE.

Il problema della costruzione di calotte complete, non ovaloidi, già risolto per $h > 3$ (cfr. [1] [2] [4]) è tuttora aperto per $h = 3$. Infatti vengono meno in tal caso i procedimenti adottati per la trattazione generale, tra l'altro l'uso del teorema di Hasse-Weil nella dimostrazione della completezza di tali calotte. In questo lavoro, gli autori si propongono di colmare tale lacuna costruendo calotte complete, non ovaloidi, in PG(3,8). A tale scopo fanno vedere, in primo luogo, che è possibile scegliere 37 punti su una qua-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Istituto di Geometria dell'Università - BARI -

Gli autori ringraziano G.Korchmàros per le discussioni con lui avute riguardo l'argomento del presente lavoro, durante la sua permanenza a Bari, in qualità di "Visiting Professor".

drica ellittica di PG(3,8) in modo da ottenere, con l'aggiunta di un punto, una calotta completa. Costruiscono inoltre una calotta completa che ha ancora 37 punti su una quadrica ellittica ma che contiene anche due punti che non vi appartengono.

1.- Richiamiamo innanzitutto alcune proprietà del campo di Galois GF(8). A tal fine consideriamo GF(8) come l'estensione algebrica di terzo grado ottenuta mediante l'aggiunzione del simbolo u radice della seguente equazione:

$$x^3 + x + 1 = 0$$

irriducibile su GF(2). Gli elementi di GF(8) sono

$$\{0,1,u,u^2,u+1(=u^3),u^2+u(=u^4),u^2+u+1(=u^5),u^2+1(=u^6)\}.$$

In particolare, ne segue, che u è un generatore del gruppo moltiplicativo di GF(8). Al solito modo [3], definiamo

$$C_0 = \{a \in GF(8)\,|\,x^2+x+a = 0 \text{ ha due soluzioni}\},$$
$$C_1 = \{a \in GF(8)\,|\,x^2+x+a = 0 \text{ non ha soluzioni}\}.$$

Si verifica facilmente che

$$C_0 = \{0,u,u^2,u^4\} \qquad C_1 = \{1,u^3,u^5,u^6\}.$$

Oltre alle solite proprietà di un campo di caratteristica due si ha:

(a) Per ogni $x \in GF(8)-GF(2)$ risulta che x appartiene a C_i se e solo se x^{-1} appartiene a C_j, essendo $i \neq j$.

(b) $C_0 - \{0\} = \{ab \mid a,b \in C_1-\{1\} \wedge a \neq b\}$ $\quad C_1 - \{1\} = \{ab \mid a,b \in C_0-\{0\} \wedge a \neq b\}$.

2. In questo numero costruiamo in PG(2,8) una classe di archi completi, che interverranno nella costruzione della calotta del n.3.

Siano Γ la conica di equazione $x^2+yz = 0$ e

$$\Gamma_0 = \{(t,t^2,1) \mid t \in C_0\} \qquad \Gamma_1 = \{(t,t^2,1) \mid t \in C_1\}$$

due suoi sottoinsiemi tali che:

(i) $|\Gamma_0| = |\Gamma_1| = 4$

(ii) $U_2(0,1,0)$ è l'unico punto all'infinito di Γ.

(iii) $U_1(1,0,0)$ è il nucleo di Γ.

(iv) $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \{U_2\}$.

Proviamo ora la seguente

PROPOSIZIONE 2.1. *L'insieme*

$$K = \Gamma_0 \cup \{U_2, D\},$$

dove D *è il punto di coordinate* $(1,u^5,0)$, *è un* 6-*arco completo.*

Proviamo innanzitutto che K è un arco. Per le (ii) e (iv) basta verificare che non esistono due punti di Γ_0 allineati con D. Siano P_1,

P_2 due punti di Γ_0. Dette $(t_1,t_1^2,1)$ e $(t_2,t_2^2,1)$ le loro coordinate, l'equazione della retta P_1P_2 è

(2.1) $$y = (t_1+t_2)x + t_1t_2.$$

Affinché tale retta passi per D deve essere

$$t_1 + t_2 = u^5 ,$$

ma tale relazione non può sussistere essendo t_1 e t_2 elementi di C_0.

Verifichiamo ora la completezza di K. A tal fine basta provare che per ogni punto del piano passa almeno una secante. Distinguiamo perciò vari casi:

(a) Per P(1,m,0) passa la retta DU_2 secante di K.

(b) Per P(a,b,1), con $a \in C_0$ passa la retta, congiungente il punto $X(a,a^2,1) \in \Gamma_0$ con U_2, secante di K.

(c) Per P(1,c,1), con $c \in GF(8)-\{1\}$, passa la secante P_1P_2 di Γ_0 se e solo se (cfr. (2.1))

$$c = t_1 + t_2 + t_1t_2 .$$

E' facile verificare (cfr. anche la (b) del n.1) che al variare di t_1 e t_2 in C_0 descriver GF(8)-GF(2). Se c = 0 si ha che per (1,0,1) passa la retta, congiungente il punto $(u^2,u^4,1)$ con D, secante di K. Se c=1 si ha che per (1,1,1) passa la retta, congiungente il punto $(u^4,u,1)$ con D, secante di K.

(d) Per $P(a,c,1)$, con $a\in C_1-\{1\}$, passa la retta trasformata della secante s per $(1,c,1)$ mediante la collineazione ω di equazioni

$$\rho x' = x+\lambda, \qquad \rho y' = y+\lambda^2, \qquad \rho z' = z, \quad \text{con} \quad \lambda = a+1 \text{ e } C_0-\{0\}.$$

La retta $\omega(s)$ è ancora secante di K, in quanto la collineazione ω lascia fissi i punti all'infinito e trasforma Γ_0 in sé.

PROPOSIZIONE 2.2. *Detto*

$$\Gamma_h = \{(hu^2t, h^2(u^4t^2+u^2t+1), 1) \mid t\in C_0\},$$

l'insieme $K_h = \Gamma_h \cup \{U_1,U_2\}$ *è un 6-arco completo per un qualsiasi* h *non nullo di* GF(8).

Poiché l'immagine di un arco completo mediante una collineazione è ancora un arco completo, l'asserto discende dalla Prop. 2.1 e dal fatto che la collineazione di equazioni

$$\rho x' = hu^2x, \qquad \rho y' = h^2u^2x+h^2u^4y+h^2z, \qquad \rho z' = z$$

trasforma K in K_h.

3. Costruiamo ora una calotta di PG(3,8) avente 37 punti su una quadrica ellittica Q ed un punto non appartenente a Q. Fissato in PG(3,8) il tetraedro fondamentale $U_1(1,0,0,0)$, $U_2(0,1,0,0)$, $U_3(0,0,1,0)$ $U_4(0,0,0,1)$ siano:

(a) Q la quadrica ellittica di equazione $x^2+xz+z^2+yt = 0$.

(b) $\Gamma = \{(w,w^2,0,1) | w \in GF(8)\}$

(c) $\Delta_j = \{(u^{j+2}w,\ u^{2j}(u^4w^2+u^2w+1),u^j,1) | w \in C_0\}$, con $j \in\{1,\dots,7\}$.

(d) $\Delta = \bigcup_j \Delta_j$.

Si verificano subito le seguenti

PROPOSIZIONE 3.1. *U_1 è il nucleo di Γ.*

PROPOSIZIONE 3.2. $\Gamma \cup \Delta \subset Q$.

PROPOSIZIONE 3.3. *Sul piano $z = u^j t$, l'insieme $\Delta_j \cup \{U_1,U_2\}$ è un arco completo.*

Siamo ora in grado di provare che:

PROPOSIZIONE 3.4. *L'insieme $K = \{U_1\} \cup \Gamma \cup \Delta$ è una calotta con 38 punti.*

Per le Prop. 3.1 e 3.2 sarà sufficiente verificare che non esistono due punti di Δ allineati con U_1. Siano P_1 e P_2 due punti di Δ di coordinate

$$(w_1u^{j+2},u^{2j}(u^4w_1^2+u^2w_1+1),\ u^j,1) \text{ e } (w_2u^{j'+2},u^{2j'}(u^4w_2^2+u^2w_2+1),u^{j'},1)$$

rispettivamente. Affinché tali punti siano allineati con U_1 deve aver si, oltre che $j=j'$, anche

$$w_1 + w_2 = u^5,$$

dove w_1 e w_2 sono elementi di C_0.

Si prova infine

PROPOSIZIONE 3.5. K *è una calotta completa.*

Proviamo innanzitutto che per il punto $A(a,b,c,1)$ passa almeno una secante di K. A tal fine conviene distinguere i seguenti casi:

se $c = 0$, A appartiene al piano $z = 0$ e quindi per esso passa almeno una secante, in quanto la sezione di K su tale piano è l'arco completo $\Gamma \cup \{U_1\}$;

se $c = u^j$, il punto A appartiene al piano $z = u^j t$ e quindi per esso passa almeno una secante, in quanto la sezione di K su tale piano è data dall'arco completo $\Delta_j \cup \{U_1,U_2\}$ (cfr. Prop. 3.3).

Possiamo ora limitarci a considerare solo punti del piano $t = 0$, non appartenenti alla retta U_1U_2, secante di K. Tale punto A ha pertanto coordinate $(m,n,1,0)$.

Se $m \neq 1$ e $n \neq 0$, il punto A appartiene alla secante di K, congiungente il punto $X(a,a^2,0,1)$ di Γ con il punto $Y(0,h^2,h,1)$ di Δ_h, purché $a = mn/(m^2+1)$ ed $h = n/(m^2+1)$.

Se $m = 1$ ed $n \neq 0$, il punto A appartiene alla secante di K, congiungente i punti X di Γ e Y di Δ_j, ove

$X(u^{j+2}(w+u^5),u^{2j+4}(w+u^5)^2,0,1)$ e $Y(wu^{j+2},u^{2j}(u^4w^2+u^2w+1),u^j,1)$, purché $u^j = u^5 n/w$, qualunque sia w elemento di $C_0-\{0\}$.

Rimangono infine da considerare solo i punti della retta U_2U_3. L'appartenenza di tali punti ad almeno una secante è fornita dalla seguente tabella:

$(0,0,1,0) \in XY$, dove $X(1,u^5,u^3,1) \in \Delta_3$, $Y(1,u^5,u,1) \in \Delta_1$

$(1,0,1,0) \in XY$, dove $X(u^6,u^4,u^3,1) \in \Delta_3$, $Y(u^3,u^4,u^6,1) \in \Delta_6$

$(u,0,1,0) \in XY$ dove $X(0,u^3,u^5,1) \in \Delta_5$, $Y(u^2,u^3,u^6,1) \in \Delta_6$

$(u^2,0,1,0) \in XY$, dove $X(0,u^3,u^5,1) \in \Delta_5$, $Y(u^6,u^3,1,1) \in \Delta_7$

$(u^3,0,1,0) \in XY$, dove $X(0,u,u^4,1) \in \Delta_4$, $Y(u^5,u,u,1) \in \Delta_1$

$(u^4,0,1,0) \in XY$, dove $X(u,u^2,0,1) \in \Gamma$, $Y(u^5,u^2,u^2,1) \in \Delta_2$

$(u^5,0,1,0) \in XY$, dove $X(u^2,u^3,u^6,1) \in \Delta_6$, $Y(u^6,u^3,1,1) \in \Delta_7$

$(u^6,0,1,0) \in XY$, dove $X(u^3,u^6,0,1) \in \Gamma$, $Y(u^4,u^6,1,1) \in \Delta_7$.

4. Costruiamo infine una calotta completa di $PG(3,8)$ avente 37 punti su una quadrica ellittica Q e due punti non appartenenti a Q. Fissato in $PG(3,8)$ il tetraedro fondamentale $U_1(1,0,0,0)$, $U_2(0,1,0,0)$, $U_3(0,0,1,0)$, $U_4(0,0,0,1)$ sia Q la quadrica ellittica di $PG(3,8)$ di equazione $x^2+xz+z^2+yt = 0$.

E' facile verificare che:

(a) i punti U_1 e U_2 non appartengono a Q e che la retta U_1U_3 è ester na a Q;

(b) le coniche Δ_0 e Δ_∞ di equazioni rispettivamente:

$$x^2 + yt = z = 0 \qquad e \qquad z^2 + yt = x = 0$$

sono contenute in Q.

(c) U_1 è il nucleo di Δ_0 ed U_3 è il nucleo di Δ_∞;

(d) Dette Δ_λ le coniche di equazione $x^2(\lambda^2 + \lambda + 1) + yt = \lambda x + z = 0$ si ha:

$$\Delta = \bigcup_{\lambda \in C_0 - \{0\}} \Delta_\lambda \subset Q.$$

PROPOSIZIONE 4.1. *L'insieme* $F = \{U_1, U_3\} \cup \Delta_0 \cup \Delta_\infty \cup \Delta$ *è una calotta di* 39 *punti.*

Per le (a),(b),(c) e (d) basta provare che per U_1 e per U_3 non escono secanti dell'insieme $\Delta \cup \Delta_0 \cup \Delta_\infty$. Infatti considerata la retta U_1P si ha che:

(i) se $P \in \Delta_0$, la retta U_1P è tangente Q (cfr. (c));

(ii) se $P \in \Delta_\infty - U_2$, la retta U_1P seca Q in un punto del piano di equazione $x = z$ e quindi non appartenente ad F;

(iii) se $P \in \Delta - \{U_2\}$, cioé se P ha coordinate $(a,b,\lambda a,1)$, con $b = a^2(\lambda^2 + \lambda + 1)$ e $\lambda \in C_0 - \{0\}$, la retta U_1P seca Q nel punto di coordinate $((\lambda+1)a,b,\lambda a,1)$ appartenente al piano di equazione $z = \lambda x/(\lambda+1)$, con $\lambda/(\lambda+1) \in C_1 - \{1\}$, e quindi non appartenente ad F.

Analogamente considerata la retta U_3P si ha che:

(j) se $P \in \Delta_\infty$, la retta U_3P è tangente Q (cfr. (c));

(jj) se $P \in \Delta_0 - \{U_2\}$ la retta U_3P seca Q in un punto del piano $x = z$ e quindi non appartenente ad F;

(jjj) se $P \in \Delta$, (cfr. (iii)) la retta U_3P seca Q in un punto di coordinate $(a,b,(\lambda+1)a,1)$ appartenente al piano di equazione $z=(\lambda+1)x$, con $(\lambda+1) \in C_1 - \{1\}$ e quindi non appartenente ad F.

LEMMA 4.2. *In PG(2,8) due ovali hanno al più cinque punti in comune.*

Ricordiamo innanzitutto che un'ovale ($(q+2)$-arco) di un PG(2,q), con q pari, è priva di tangenti. Supponiamo ora che esistono due ovali O_1 ed O_2 aventi sei punti in comune e siano A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 tali punti. Proviamo che O_1 ed O_2 coincidono. Infatti detto P un punto di O_1, distinto dai punti A_i, si ha che le sei rette PA_i risultano secanti sia O_1 che O_2. Allora P deve necessariamente appartenere ad O_2 in quanto per un punto non appartenente ad un 10-arco di PG(2,8) passano cinque secanti. Analogamente ogni punto di O_2 appartiene ad O_1.

PROPOSIZIONE 4.3. *La calotta F è completa.*

Proviamo l'asserto verificando che non esistono punti dello spazio PG(3,8) per cui non passi almeno una secante di F. Tale verifica, ovvia per i punti della retta U_1U_2, verrà fatta considerando i punti dei piani per tale retta.

E' lecito trascurare i punti del piano $z = 0$ in quanto F seca su tale piano un 10-arco. Consideriamo i punti del piano $t = 0$, per quanto detto prima tali punti hanno coordinate $(m,n,1,0)$. Se $m \neq 1$ e $n \neq 0$ tale punto appartiene alla secante di F congiungente i punti $X(mn/(m^2+1), m^2n^2/(m^2+1)^2, 0,1)$ di Δ_0 e $Y(0,n^2/(m^2+1)^2, n/(m^2+1),1)$ di Δ_∞. Il punto $(1,n,1,0)$, per $n \neq 0$, appartiene alla secante di F, congiungente i punti $X((\lambda+1)n, (\lambda+1)^2n^2, 0,1)$ di Δ_0 e $Y(n,(\lambda^2+\lambda+1)n^2, \lambda n,1)$ di Δ, dove λ è un qualsiasi elemento di $C_0-\{0\}$. Il punto $(m,0,1,0)$ appartiene alla retta U_1U_3 secante di F.

Consideriamo ora i 6-archi Γ_k che F seca su ogni piano di equazione $z = kt$, con $k \in GF(8) - \{0\}$. Dalla definizione di F si ha che:

$$(4.1)\quad \Gamma_k = \{ U_1, U_2, A_0^k(0,k^2,k,1),\ A_1^k(ku^6,k^2u^3,k,1),\ A_2^k(ku^5,k^2u^6,k,1),\ A_3^k(ku^3,k^2u^5,k,1)\}.$$

Si verifica allora facilmente che la conica C_k di equazioni:

$$(4.2)\qquad x(y+k^2t) + k^3t^2 = z+kt = 0$$

contiene i punti $U_1, U_2, A_1^k, A_2^k, A_3^k$ ed ha come nucleo A_0^k. Allora, per il Lemma precedente, l'unica ovale O_k contenente Γ_k è data dalla co nica C_k e dal suo nucleo A_0^k. Ricordando poi che in un PG(2,8) non esistono archi completi di cardinalità diversa da 6 e da 10 (cfr.[5], [3] p. 210), per completare la dimostrazione, occorre verificare che per ogni punto di $O_k - \Gamma_k$ passa almeno una secante di F, qualunque sia $k \in GF(8) - \{0\}$. Confrontando le (4.1) e (4.2) segue che

$$O_k - \Gamma_k = \{D_1^k(k,0,k,1),\ D_2^k(ku,k^2u^2,k,1),\ D_3^k(ku^2,k^2u^4,k,1),\ D_4^k(ku^4,k^2,u,k,1)\}.$$

I punti D_2^k, D_3^k, D_4^k appartengono rispettivamente alle secanti di F congiungenti U_3 con ciascuno dei seguenti punti di Δ_0:

$$X_2(ku,k^2u^2,0,1),\ X_3(ku^2,k^2u^4,0,1),\ X_4(ku^4,k^2u,0,1).$$

Infine per D_1^k passa la secante di F congiungente il punto X_2 di Δ_0 con il punto $Y(ku^4,k^2u^4,ku^6,1)$ di Δ_2.

BIBLIOGRAFIA

[1] L.M.ABATANGELO: *Calotte complete in uno spazio di Galois* PG(2,q), q *pari* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena XXIX-54 (1980)

[2] C.DI COMITE: *Calotte complete di un* $S_{3,q}$, *con* q *pari*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend.,46 (1969),pp.385-389.

[3] J.W.P.HIRSCHFELD: *Projective Geometries over Finite Fields*,Clarendon Press, Oxford 1979.

[4] B.SEGRE: *Le Geometrie di Galois*, Ann. Mat. Pura Appl., 48(1959) pp. 1-97.

[5] M.TALLINI SCAFATI: *Sui 6-archi completi di un piano lineare* $S_{2,8}$. Convegno internazionale: Reticoli e Geometrie Proiettive (Palermo, Messina, 1957), Cremonese (1958) pp. 128-132.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 3 febbraio 1982
ed accettato per la pubblicazione il 6 novembre 1982
su parere favorevole di A. Cossu e G. Tallini