Note di Matematica Vol. 11, 1-56 (1982)

ANELLI TERNARI DI LISTER SEMISEMPLICI

Luigi PROFERA(*)

Summary. *We investigate Lister ternary rings which are semisimple in nome details. Structural and classification theorems are given.*

W.G.Lister [S] ha definito gli *anelli ternari*, ha dato una opportuna definizione di radicale, affrontandone lo studio, e ha fornito, tra l'altro, alcune informazioni sulla struttura degli anelli ternari semplici e artiniani a destra classificando, tra questi, quelli che sono algebre ternarie di dimensione finita su un campo algebricamente chiuso o sul campo reale.

Successivamente H.C.Myung [7] ha dato una caratterizzazione intrinseca di tale radicale e noi [9] abbiamo classificato gli anelli ternari semplici e artiniani a destra (e a sinistra).

(*) L'autore appartiene al G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Il presente lavoro è dedicato allo studio degli *anelli ternari di* Lister (L-*anelli*) semisemplici.

Proviamo, innanzitutto, dopo aver fornito una opportuna definizione di modulo e una conseguente caratterizzazione del radicale, che un L-anello è semisemplice se e solo se è (isomorfo a) una somma sottodiretta di L-anelli primitivi o quasi primitivi oppure opposti di L-anelli primitivi o quasi primitivi.

Forniamo, quindi, per gli L-anelli primitivi e per quelli quasi primitivi teoremi di densità e classifichiamo gli L-anelli primitivi e quelli quasi primitivi con ideali destri minimali. In particolare classifichiamo gli L-anelli semplici con ideali destri minimali e, tra questi, anche quelli artiniani a destra ritrovando risultati da noi già stabiliti in [9].

Otteniamo, così, teoremi analoghi a quelli ben noti relativi ad anelli (binari) associativi semisemplici, primitivi e, in particolare, primitivi con ideali destri minimali (cfr. [4]).

Analoghi agli L-anelli sono gli *anelli ternari di* Hestenes (H-*anelli*). Vari Autori si sono occupati, o si occupano attualmente, di problematiche relative agli H-anelli simili a quelle qui trattate per gli L-anelli[1].

1. DEFINIZIONI, NOTAZIONI E RISULTATI PRELIMINARI.

Nel numero 1.1 diamo le definizioni che useremo nel seguito. In particolare introduciamo il concetto di modulo (destro) sopra un L-

---

(1) Cfr. [1], [2], [3], [6], [8], [10], [11] e [12]. A. Caggegi, in una nota in corso di redazione, classifica gli E-anelli primitivi con ideali destri minimali.

anello, forniamo per esso le nozioni di irriducibilità e ai quasi fedeltà e, coerentemente, diamo, per gli L-anelli, le nozioni di primitività e di quasi primitività.

Nel numero 1.2 proviamo che un modulo irriducibile sopra un L-anello definisce una coppia di corpi (non necessariamente commutativi) e un loro isomorfismo; essi costituiscono l'analogo del corpo degli endomorfismi ai un modulo irriducibile sopra un anello associativo (lemma di Schur). Inoltre caratterizziamo i moduli irriducibili, associamo a una coppia di opportuni ideali destri minimali di un L-anello un modulo irriducibile e otteniamo, per l'L-anello, una decomposizione ai tipo Pierce.

1.1. Un *anello ternario di* Lister (L-*anello*) $A(+,\omega)$, o soltanto A, è un gruppo abeliano additivo $A(+)$ con un'applicazione triadditiva $\omega : A \times A \times A \to A$ per cui, posto $xyz = (x,y,z)\omega$ se $x,y,z \in A$, risulti $(xyz)uv = x(yzu)v = xy(zuv)$ se $x,y,z,u,v \in A$ ([5], p. 37).

Sia A un L-anello. Un sottogruppo G del gruppo additivo di A è *ideale destro* di A se $GAA \subseteq G$, è *ideale sinistro* di A se $AAG \subseteq G$, è *ideale bilatero* di A se è ideale destro e ideale sinistro di A, è ideate di A se è ideale bilatero di A e se $AGA \subseteq G$; inoltre, G è *ideale bilatero effettivo* di A se è ideale-bilatero ma non ideale di A. Se G è sottogruppo del gruppo additivo di A, la struttura algebrica di L-anello si trasporta da A al quoziente A/G se e solo se G è ideale di A.

Sia A un L-anello. Un ideale destro G di A è *modulare* rispetto a una coppia (d,δ) di elementi di A se risulta $G \neq A$ e $x-d\delta x \in G$ per ogni $x \in A$; osserviamo che G è, allora, ideale destro modulare nell'anello (binario) associativo che ha lo stesso gruppo additivo di. A e la cui moltiplicazione è definita da $a \circ b = a\delta b$ se $a,b \in A$ (cfr. [4], p. 5).

Sia A un L-anello. Se X e Y sono parti non vuote di A poniamo $\sigma(X,Y) = \{z \in A \mid zXY = (o)\}$, $\mu(X,Y) = \{z \in A \mid XzY = (o)\}$, $\delta(X,Y) = \{z \in A \mid XYz = (o)\}$. A è L-anello semplice se (o) e A sono i suoi soli ideali e se $AAA \neq (o)$. A è L-anello *artiniano a destra* se ogni famiglia non vuota di ideali destri di A, ordinata per inclusione, ammette elementi minimali o, equivalentemente, se si stabilizzanotutte le successioni descrescenti di ideali destri di A. Inoltre, se $e,\varepsilon \in A$, $\{e,\varepsilon\}$ è *identità* di A se $e\varepsilon a = \varepsilon e a = a e \varepsilon = a\varepsilon e = a$ per ogni $a \in A$.

Siano A un L-anello, V e W gruppi abeliani additivi, $\rho: A \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(V,W)$ e $\sigma: A \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(W,V)$ omomorfismi additivi. Con tali dati (V,W,ρ,σ) è *modulo* (destro) sopra l'L-anello A, o brevemente A-*modulo*, se $(abc)\rho = (a\rho)(b\sigma)(c\rho)$ e $(abc)\sigma = (a\sigma)(b\rho)(c\sigma)$ per cui $a,b,c \in A$. Risulta $A(\mathrm{Ker}\rho)A \subseteq \mathrm{Ker}\sigma$, $A(\mathrm{Ker}\sigma)A \subseteq \mathrm{Ker}\rho$, $\mathrm{Ker}\rho$ e $\mathrm{Ker}\sigma$ sono ideali bilateri di A e $[\rho,\sigma] = \mathrm{Ker}\rho \cap \mathrm{Ker}\sigma$ è ideale di A. Questa definizione di modulo è analoga a quella data da R.A. Stephenson ([12], p. 92) per gli H-anelli, mentre W.G. Lister ([5], pp. 40 e 43) dà due definizioni di modulo (destro), tra loro opportunamente legate, alle quali riferisce le sue definizioni di radicale e di primitività.

Siano A un L-anello (V,W,ρ,σ) e (U,T,λ,μ) A-moduli. (V,W,ρ,σ) e (U,T,λ,μ) sono *isomorfi* se esistono isomorfismi additivi $\alpha : V \to U$ e $\beta : W \to T$ tali che, per ogni $a \in A$, risulti $\alpha(a\lambda) = (a\rho)\beta$ e

$\beta(a\mu) = (a\sigma)\alpha$ oppure se esistono isomorfismi additivi $\gamma : V \to T$ e $\delta : W \to U$ tali che, per ogni $a \in A$, risulti $\gamma(a\mu) = (a\rho)\delta$ e $\delta(a\lambda) = (a\sigma)\gamma$. Osserviamo che (W,V,σ,ρ) è A-modulo isomorfo in maniera naturale a (V,W,ρ,σ).

Siano A un L-anello e (V,W,ρ,σ) un A-modulo. Se D, risp. Δ, è sottogruppo del gruppo additivo V, risp. W, e se $D(A\rho) \subseteq \Delta$ e $\Delta(A\sigma) \subset D$, allora ρ, risp. σ, è, di fatto, omomorfismo additivo $\rho : A \to \mathrm{Hom}_Z(D,\Delta)$, risp. $\sigma : A \to \mathrm{Hom}_Z(\Delta,D)$, e l'A-modulo (D,Δ,ρ,σ) è *sottomodulo* dell'A-modulo (V,W,ρ,σ). (V,W,ρ,σ) è A-modulo *irriducibile* se è privo di sottomoduli non banali e se $V(A\rho) \neq (o)$ e $W(A\sigma) \neq (o)$ (i sottomoduli banali sono $((o),(o),\rho,\sigma)$ e tutto (V,W,ρ,σ)).

LEMMA 1.1.. *Se* (V,W,ρ,σ) *è modulo sopra l'L-anello* A, *sono equivalenti:*

1) (V,W,ρ,σ) *è irriducibile;*

2) $V \neq (o)$, $W \neq (o)$, $v(A\rho) = W$ *se* $v \in V$, $v \neq o$, $w(A\sigma) = V$ *se* $w \in W$, $w \neq 0$.

Dimostrazione. 1) $\Longrightarrow$ 2). Dalla definizione di irriducibilità segue $V \neq (o)$ e $W \neq (o)$. $B = \{x \in V \mid x(A\rho) = (o)\}$ è sottogruppo proprio del gruppo additivo dell'L-anello A e $(B,\langle B(A\rho)\rangle,\rho,\sigma)$ (2) è sottomodulo di (V,W,ρ,σ), perciò $B = (o)$ e, se $v \in V$, $v \neq o$, risulta $v(A\rho) \neq o$; in più $v(A\rho) = W$ perché $(\langle v(A\rho)(A\sigma)\rangle, v(A\rho),\rho,\sigma)$ è sottomodulo non nullo di (V,W,ρ,σ). Analogamente $w(A\sigma) = V$ se $w \in W$, $w \neq o$.

---

(2) Qui e nel seguito, se G è un gruppo e H una sua parte, con $\langle H\rangle$ indichiamo il sottogruppo di G generato da H.

2) $\Longrightarrow$ 1). Se (D,Δ,ρ,σ) è sottomodulo non nullo di (V,W,ρ,σ) risulta $D \neq (o)$ oppure $A \neq (o)$. Se $D \neq (o)$ e $v \in D$, $v \neq o$, risulta $W = v(A\rho) \subseteq A$ e (o) #A= W; se $w \in W$, $w \neq o$, è $V = w(A\sigma) \subset D$ e $D = V$. Allo stesso modo, se $A \neq (o)$ è $D = V$ e $A = W$.

Il lemma è provato.

Siano A un L-anello e (V,W,ρ,σ) un A-modulo. (V,W,p,a) è *quabi fedele* se $[\rho,\sigma]$ = Kerp ∩ Kera = (o), è *fedele* se Kerp = Kero = (o), è *propriamente quasifedele* se è quasi fedele e se risulta Kerρ ≠ (o) e Kerσ ≠ (o).

LEMMA 1.2. *Se (V,W,ρ,σ) è A-modulo irriducibile e quabi fedele risulta* Kerp = (o) *se e solo se* Kero = (o), *cioè* (V,W,ρ,σ) è *(irriducibile* e) *fedele oppure propriamente quabi fedele.*

Dimostrazione. Sia Kerp = (o) e Kera ≠ (o). Se $x \in$ Kera , $x \neq o$, risulta $x \notin$ Kerp = (o) ed esiste $v \in V$, $v \neq o$, tale che $v(x\rho) \neq o$. Per il lemma 1.1 è $v(x\rho)(A\sigma) = V$ e risulta $v = v(x\rho)(y\sigma)$ con $y \in A$. Allora $0 \neq v = v(x\rho)(y\sigma) = v(x\rho)(y\sigma)(x\rho)(y\sigma) = v(x\rho)((yxy)\sigma) = 0$ (infatti risulta A(Kerσ)A $\subseteq$ Kerp= (o) e, perciò, yxy = o), assurdo. Allo stesso modo si raggiunge un assurdo se Kerp ≠ (o) e Kera = (o).

Il lemma è Provato.

LEMMA *1.3. Se* A è un *L-anello e se (V,W,ρ,σ) è un A-modulo irriducibile e quasi fedele, sono equivalenti:*

1) A *possiede ideati bilateri effettivi* non contenenti *ideali* non *nulli di* A;

2) (V,W,ρ,σ) *è (irriducibile e) phophiamente quasi fedele. Pertanto, se l'L-anello* A *pobbiede moduti irriducibili e quabi fedeli, questi o sono tutti fedeli oppuhe dono tutti phophiamente quabi fedeli.*

Dimostrazione. 1) $\Longrightarrow$ 2). Supponiamo che B sia ideale bilatero effettivo di A non contenente ideali non nulli di A. Ragionando per assurdo supponiamo che (V,W,ρ,σ) sia fedele (cfr. Lemma 1.2). Da $\mathrm{Ker}\rho = \mathrm{Ker}\sigma = (o)$ segue $V(B\rho) \neq (o)$ essendo $B \neq (o)$.
$(\langle V(B\rho)(A\sigma)\rangle, \langle V(B\rho)\rangle, \rho, \sigma)$ è sottomodulo non nullo di (V,W,ρ,σ), pertanto $\langle V(B\rho)\rangle = W$. Analogamente $\langle W(B\sigma)\rangle = V$. Allora $W = \langle V(B\rho)\rangle = \langle W(B\sigma)(B\rho)\rangle = \langle V(B\rho)(B\sigma)(B\rho)\rangle = \langle (V(BBB)\rho\rangle$ e $BBB \neq (o)$. $\langle ABA\rangle \cap B$ (3) è ideale di A contenuto in B e non nullo perché contiene BBB,' assurdo.

2) $\Longrightarrow$ 1). Risulta $\mathrm{Ker}\rho \neq (o)$ e $\mathrm{Ker}\sigma \neq (o)$. Si verifica che $\mathrm{Ker}\rho$ è ideale bilatero effettivo di A. Sia H ideale di A contenuto in $\mathrm{Ker}\rho$. Risulta $AHA \subseteq H \subseteq \mathrm{Ker}\rho$ e $AHA \subseteq \mathrm{Ker}\sigma$ (perché $A(\mathrm{Ker}\rho)A \subseteq \mathrm{Ker}\sigma$); quindi $AHA \subset \mathrm{Ker}\rho \cap \mathrm{Ker}\sigma = (o)$ e $AHA = (o)$. Allora $V((AHA)\rho) = (o)$, cioé $V(A\rho)(H\sigma)(A\rho) = (o)$; $(\langle V(A\rho)(H\sigma)\rangle, (o), \rho, \sigma)$ è sottomodulo di (V,W,ρ,σ), quindi $W(H\sigma) = V(A\rho)(H\sigma) = (o)$ (cfr. lemma 1.1) e $H \subseteq \mathrm{Ker}\sigma$. Pertanto $H \subseteq \mathrm{Ker}\rho \cap \mathrm{Ker}\sigma = (o)$ e $H = (o)$. Abbiamo provato che $\mathrm{Ker}\rho$ è ideale bilatero effettivo di A non contenente ideali non nulli di A. Anche $\mathrm{Ker}\sigma$ gode di questa proprietà.

Il lemma è provato.

Stante il lemma 1.3, poniamo le seguenti definizioni. Un L-anello *è primitivo* se possiede un modulo irriducibile e fedele, è *quasi*

---

(3) $\langle ABA\rangle$ è il sottogruppo del gruppo additivo di A generato da ABA (cfr. nota (2)).

primitivo se possiede un modulo irriducibile e propriamente quasi fedele.

Sia $A = A(+,\omega)$ un L-anello. L'applicazione $\omega^* : A \times A \times A \to A$, definita da $(x,y,z)\omega^* = (z,y,z)\omega$ se $x,y,z \in A$, rende il gruppo additivo $A(+)$ L-anello $A^{op} = A(+,\omega^*)$ che chiamiamo *opposto* dell'L-anello A. Ovviamente risulta $A = (A^{op})^{op}$.

Sia A un L-anello. Una coppia (x,y) di elementi di A è *quasi invertibile*, o x è *quasi invertibile* rispetto a y, se esiste $z \in A$ tale che $z - x = xyz = zyx$, z è, allora, *quasi inverso* della coppia (x,y) o *quasi inverso* di x rispetto a y; osserviamo che z è quasi inverso di x nell'anello (binario) associativo che ha lo stesso gruppo additivo di A e la cui moltiplicazione è definita da $a \circ b = ayb$ se $a,b \in A$. Un elemento di A è *propriamente quasi invertibile* se è quasi invertibile rispetto a ogni elemento di A. L'insieme J(A) degli elementi di A propriamente quasi invertibili è il *radicale* dell'L-anello A; osserviamo che risulta $J(A) = J(A^{op})$. Questa definizione di radicale è quella data da H.C.Myung ([7], pp. 228 e 232) equivalente a quella data da W.G.Lister ([5], pp. 43) (almeno nel caso di caratteristica diversa da due). A è L-anello *semisemplice* se $J(A) = (o)$.

Siano A un L-anello e (V,W,ρ,σ) un A-modulo. Un elemento $a \in A$ *annulla* l'A-modulo (V,W,ρ,σ) se $a \in [\rho,\sigma] = \operatorname{Ker}\rho \cap \operatorname{Ker}\sigma$.

1.2. LEMMA **1.4.** *Siano A un L-anello, (V,W,ρ,σ) un A-modulo irriducibile, Σ, risp. Σ', il sottoanello dell'anello (binario) associativo $\operatorname{Hom}_Z(V,V)$, risp. $\operatorname{Hom}_Z(W,W)$, generato da* $\{(a\rho)(b\sigma) \mid a,b \in A\}$, *risp.* $\{(a\sigma)(b\rho) \mid a,b \in A\}$.

Il gruppo **additivo** V, *hibp.* W, *acquista struttura* **di** *modulo debtho irriducibile bopha l'anello associativo* Σ, *hhbp.* Σ', *e, perciò, strut tura* **di** *bpazio vettoriale debtho bopha il corpo* $k=\{t\in Hom_{\mathbf{Z}}(V,V)\,|\,ts = st \text{ se } s\in\Sigma\}=\{t\in Hom_{\mathbf{Z}}(V,V)\,|\,t(a\rho)(b\sigma) = (a\rho)(b\sigma)t \text{ se } a,b\in A\}$, *hibp.* $k' = \{t'\in Hom_{\mathbf{Z}}(W,W)\,|\,t's' = S't' \text{ se } s'\in\Sigma'\} = \{t'\in Hom_{\mathbf{Z}}(W,W)\,|\,t'(a\sigma)(b\rho) = (a\sigma)(b\rho)t' \text{ se } a,b\in A\}$.

Uimobthazione. L'irriducibilità dell'A-modulo (V,W,ρ,σ) comporta $V(A\rho)(A\sigma)\neq(o)$ e, perciò, $VC\neq(o)$. Inoltre, se U è sottomodulo non nullo del C-modulo destro V, è $U\Sigma\subseteq U$, perciò $U(A\rho)(A\sigma)\subseteq U$ e $(U,\langle A\rho\rangle,\rho,\sigma)$ è sottomodulo non nullo di (V,W,ρ,σ). Pertanto è U=V, V ha struttura di C-modulo destro irriducibile e, per il lemma di Schur, anche struttura di k-spazio vettoriale destro. In modo analogo si provano le altre affermazioni del lemma.

Il lemma è provato.

LEMMA **1.5.** Con *i* **dati** *e* Le notazioni *del lemma* **1.4**, *i corpi* k *e* k' *dono isomorfi.*

Dimostrazione. Sia $t\in k$. Se $v\in V$, $v\neq o$, risulta $v(A\rho) = W$. Allora, se $w\in W$ e $w = v(a\rho)$ con $a\in A$, ponendo $wt^* = (v(a\rho))t^*=vt(a\rho)= = w'$, si definisce un'applicazione $t^*: W\to W$. Infatti, se fosse $v(a\rho) = v'(a'\rho)$ $(v'\in V,\ v'\neq o,\ a'\in A)$ e $vt(a\rho)\neq v't(a'\rho)$, esisterebbe $b\in A$, $b\neq o$, tale che $(vt(a\rho)-v't(a'\rho))(b\sigma)\neq o$, quindi $o\neq vt(a\rho)(b\sigma)-v't(a'\rho)(b\sigma) = v(a\rho)(b\sigma)t-v'(a'\rho)(b\sigma)t = (v(a\rho)- - v'(a'\rho))(b\sigma)t = o$, assurdo. Risulta $t^*\in k'$. Infatti, si verifica che $t^*\in Hom_{\mathbf{Z}}(W,W)$; inoltre, tenendo presente che è $v(A\rho) = W$ con $v\in V$, $v\neq 0$, se $w\in W$, $w = v(a\rho)$ con $a\in A$, per ogni $b,c\in A$ si ha

$wt^*(b\sigma)(c\rho) = v(a\rho)t^*(b\sigma)(c\rho) = vt(a\rho)(b\sigma)(c\rho) = vt((abc)\rho) =$
$= v((abc)\rho)t^* = v(a\rho)(b\sigma)(c\rho)t^* = w(b\sigma)(c\rho)t^*$, cioé $t^*(b\sigma)(c\rho) = (b\sigma)(c\rho)t^*$. In modo analogo sia, ora, $t' \in k'$. Se $w \in W$, $w \neq o$, risulta $w(A\sigma) = V$. Allora, se $v \in V$, $v = w(a\sigma)$ con $a \in A$, ponendo $vt'_* = (w(a\sigma)t'_* = wt'(a\sigma)$, si definisce un'applicazione $t'_* : V \to V$ e risultati $\in k$.

Se $t \in k$ è $(t^*)_* = t$. Infatti, con $v \in V$, $v \neq o$, $w \in W$, $w \neq o$, è $v(A\rho) = W$ e $w(A\sigma) = V$, perciò $w = v(\delta\rho)$ con $\delta \in A$ e $V = v(\delta\rho)(A\sigma)$; allora, se $v' \in V$ e $v' = v(\delta\rho)(b\sigma)$ con $b \in A$, risulta $v'(t^*)_* =$
$= v(\delta\rho)(b\sigma)(t^*)_* = w(b\sigma)(t^*)_* = wt^*(b\sigma) = v(\delta\rho)t^*(b\sigma) = vt(\delta\rho)(b\sigma) =$
$= v(\delta\rho)(b\sigma)t = v't$. In modo analogo, se $t' \in k'$, è $(t'_*)^* = t'$. Ponendo $t\tau = t^*$ se $t \in k$, risp. $t'\tau' = t'_*$ se $t' \in k'$, si definisce un'applicazione $\tau : k \to k'$, risp. $\tau' : k' \to k$. Si verifica che τ e τ' sonoomomorfismi di corpi e, per quanto già provato, sono isomorfismi uno inverso dell'altro.

Il lemma è provato.

Osservazione 1.1. Stanti i lemmi 1.4 e 1.5, l'immersione di k in $Hom_{\mathbb{Z}}(V,V)$ definisce sul gruppo additivo V una struttura di k-spazio vettoriale destro e l'isomorfismo $\tau : k \to k'$ (cfr. la dimostrazione del lemma 1.5) è, di fatto, monomorfismo di k in $Hom_{\mathbb{Z}}(W,W)$ e definisce sul gruppo additivo W una struttura di k-spazio vettoriale destro. Perciò, V e W hanno entrambi strutture di k-spazi vettoriali destri e ρ, risp. σ, è omomorfismo additivo $\rho : A \to Hom_k(V,W)$, risp. $\sigma : A \to Hom_k(W,V)$.

LEMMA 1.6. Se G è *ideale destro dell'*L*-anello* A *modulare rispetto* *a* (d,δ) *allora* $\Gamma = \{x \in A \mid dxA \subseteq G\}$ *è ideate destro* di A *modulare rispetto a* (δ, d) *e risulta* $d\Gamma A \subseteq G$ *e* $\delta GA \subseteq \Gamma$; *inoltre, se G è* ideate *destro massimale di* A anche Γ *lo è e risulta* $G = \{x \in A \mid \delta xA \subseteq \Gamma\}$

Dimostrazione. Si verifica che Γ è ideale destro di A. Risulta $\Gamma \neq A$ perché $dAA \subseteq G$ comporta $d\delta A \subseteq G$ e, per la modularità di G rispetto a (d,δ), $A = G$, assurdo. Per la modularità di G rispetto a (d,δ), per ogni $x,a \in A$, risulta $d(x-\delta dx)a = dxa-d\delta xa \in G$, quindi $x - \delta dx \in \Gamma$ e Γ è modulare rispetto a (δ,d). Per definizione di Γ è $d\Gamma A \subseteq G$; risulta $d\delta GAA \subseteq d\delta G \subseteq G$, quindi $\delta GA \subseteq \Gamma$. Sia, ora, G ideale destro massimale di A. Se Γ' è ideale destro di A con $\Gamma \subset \Gamma' \subseteq A$ (4), risulta $\Gamma' = A$. Infatti, se $x \in \Gamma' - \Gamma$, per definizione di Γ, risulta $dxA \nsubseteq G$. Allora $G \subset G+dxA$, con $G+dxA$ ideale destro di A, e $G+dxA=A$. Risulta $d = b + dxa$ con $b \in G$, $a \in A$. Allora, se $y \in A$ è $\delta dy = \delta(b+dxa)y = \delta by+\delta dxay$ e $\delta dy-\delta dxay = \delta by \in \delta GA \subseteq \Gamma$, $\delta d(y-xay) \in \Gamma$ e, per la modularità di Γ rispetto a (δ,d), $y-xay \in \Gamma$; quindi $y-xay \in \Gamma'$ con $xay \in \Gamma'$ e, perciò, $y \in \Gamma'$ e $\Gamma' = A$. $\{x \in A \mid \delta xA \subseteq \Gamma\}$ è ideale destro di A contenente G; da $\delta AA \subseteq \Gamma$ segue $\delta DA \subseteq \Gamma$ e $A = \Gamma$, assurdo. Quindi $G = \{x \in A \mid \delta xA \subseteq \Gamma\}$.

Il lemma è provato.

Siano A un L-anello, G un ideale destro di A modulare rispetto a (d,δ), $\Gamma = \{x \in A \mid dxA \subseteq G\}$. Stante il lemma 1.6, si considerino i gruppi additivi A/G e A/Γ. Sia $a \in A$; ponendo $(x+G)(a\lambda) = \delta xa+\Gamma$, se $x \in A$, si definisce un omomorfismo $a\lambda: A/G \to A/\Gamma$ è l'applicazione

(4) Col simbolo $\subset$ indichiamo l'inclusione propria.

$\lambda : A \to Hom_Z(A/G, A/\Gamma)$ che manda $a \in A$ in $a\lambda$ e $Hom_Z(A/G,A/\Gamma)$ è omomorfismo additivo. Allo stesso modo, ponendo $(x+\Gamma)(a\mu) = dxa+G$, se $x \in A$, si definisce un omomorfismo $a\mu : A/\Gamma \to A/G$ e l'applicazione $\mu : A \to Hom_Z(A/\Gamma, A/G)$ che manda $a \in A$ in $a\mu \in Hom_Z(A/\Gamma,A/G)$ è omomorfismo additivo. Allora $(A/G,A/\Gamma,\lambda,\mu)$ è A-modulo che chiamiamo *relativo* a G e a (d,δ). Con tali dati sussiste il

LEMMA 1.7. Sono *equivalenti:*

1) *G è Ideale debtho massimale di* A;

2) $(A/G,A/\Gamma,\lambda,\mu)$ è A-*modulo irriducibile.*

Dimostrazione. 1) $\Longrightarrow$ 2). Per il lemma 1.6 Γ è ideale destro di A massimale modulare rispetto a (δ,d). Risulta $(A/G)(A\lambda) \neq \Gamma/\Gamma$ perché da $(x+G)(a\lambda) = \delta xa+\Gamma = o+\Gamma$ per ogni $x,a \in A$ segue $\delta da \in \Gamma$ e, per la modularità di Γ rispetto a (δ,d), $a \in \Gamma$ e $\Gamma = A$, assurdo. Allo stesso modo si prova $(A/G)(A\mu) \neq G/G$. Sia $(P/G,Q/\Gamma,\lambda,\mu)$ un sottomodulo di $(A/G,A/\Gamma,\lambda,\mu)$. Se $x \in P$ e $a,b \in A$ risulta $(\delta xa+\Gamma)(b\lambda) = = d\delta xab+G \in P/G$, $d\delta xab \in P$ e, siccome $xab-d\delta xab \in G \subseteq P$, è $xab \in P$. Quindi P è ideale destro di A. Allo stesso modo si prova che Q è ideale destro di A. Tenuto conto che G e Γ sono ideali destri massimali e osservato che è $P = G$ se e solo se $Q = \Gamma$, si conclude che $(A/G,A/\Gamma,\lambda,\mu)$ è A-modulo irriducibile.

2) $\Longrightarrow$ 1). Sia G' ideale destro di A con $G \subset G' \subseteq A$. Se $x \in G'-G$ risulta $(x+G)(A\lambda) = A/\Gamma$, cioé $\delta xA+\Gamma= A/\Gamma$. Perciò $\delta+\Gamma = \delta xa+\Gamma$ con $a \in A$, cioé $\delta - \delta xa \in \Gamma$. Quindi, per definizione di Γ, se $z \in A$ è $d(\delta- \delta xa)z \in G$, cioé $d\delta z - d\delta xaz \in G \subset G'$; siccome $xaz \in G'$ e G' è modulare rispetto a (d,δ) come G, risulta $d\delta xaz \in G'$, quindi $d\delta z \in G'$

e $z \in G'$. Abbiamo provato che G è ideale destro massimale di A.

Il lemma è provato.

LEMMA 1.8. *Se* (V,W,ρ,σ) *è modulo sopra l'L-anello* A, *sono equivalenti:*

1) (V,W,ρ,σ) *è irriducibile;*

2) *esiste un ideale destro G di A massimale e modulare rispetto a una coppia* (d,δ) *di elementi di A tale che* (V,W,ρ,σ) *è isomorfo all'A-modulo relativo a G e a* (d,δ).

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2). Fissiamo $v \in V$, $v \neq o$, $w \in W$, $w \neq o$. Per il lemma 1.1 risulta $v(A\rho) = W$, $w(A\sigma) = V$. Siano $d,\delta \in A$ tali che $v(\delta\rho) = w$, $w(d\sigma) = v$; allora $v = v(\delta\rho)(d\sigma)$ e $w = w(d\sigma)(\delta\rho)$. L'applicazione $\eta : A \to V$ che manda $x \in A$ in $w(x\sigma) \in V$ è omomorfismo additivo. Proviamo che $G = \mathrm{Ker}\,\eta$ è ideale destro di A massimale e modulare rispetto a (d,δ). Verificato che G è ideale destro di A, risulta $G \neq A$ perché $w(A\sigma) = V \neq (o)$ (cfr. lemma 1.1) e, se $x \in A$, si ha $(x-d\delta x)\eta = w((x-d\delta x)\sigma) = w(x\sigma)-w((d\delta x)\sigma) = w(x\sigma)-w(d\sigma)(\delta\rho)(x\sigma)=o$ e $x-d\delta x \in G$. Se G' è ideale destro di A con $G \subset G' \subseteq A$, allora $(w(G'\sigma), \langle w(G'\sigma)(A\rho)\rangle,\rho,\sigma)$ è sottomodulo non nullo di (V,W,ρ,σ), quindi di $w(G'\sigma) = V = w(A\sigma)$. Se $a \in A$ esiste $x \in G'$ tale che $w(a\sigma) = w(x\sigma)$, cioé $w((a-x)\sigma) = o$, quindi $a-x \in G \subset G'$, $a \in G'$, $G' = A$. Stante il lemma 1.6 si consideri $\Gamma = \{x \in A \mid dxA \subseteq G\}$. L'applicazione $\nu : A \to W$ che manda $x \in A$ in $v(x\rho) \in W$ è omomorfismo additivo e risulta $\mathrm{Ker}\,\nu = \Gamma$. Se $x \in \Gamma$ è $dxA \subseteq G = \mathrm{Ker}\,\eta$, $w((dxA)\sigma) = (o)$, $w(d\sigma)(x\rho)(A\sigma) = (o)$, $v(x\rho)(A\sigma) = (o)$, quindi, per il lemma 1.1, $v(x\rho) = o$ e $x \in \mathrm{Ker}\,\nu$. Viceversa, se $x \in \mathrm{Ker}\,\nu$ è $v(x\rho) = o$, $w(d\sigma)(x\rho) = o$, $w((dxA)\sigma) = w(d\sigma)(x\rho)(A\sigma) = (o)$, $dxA \subseteq G$, cioé $x \in \Gamma$.

L'applicazione $\alpha : V \to A/G$ che manda $w(x\sigma) \in V$ (con $x \in A$) in $x+G \in A/G$ è isomorfismo additivo come l'applicazione $\beta : W \to A/\Gamma$ che manda $v(x\rho) \in W$ in $x+\Gamma \in A/\Gamma$. Si consideri l'A-modulo $(A/G, A/\Gamma,\lambda,\mu)$ relativo a G e a (d,δ). Si verifica che risulta $\alpha(a\lambda) = (a\rho)\beta$ e $\beta(a\mu) = (a\sigma)\alpha$ per ogni $a \in A$; quindi (V,W,ρ,σ) e $(A/G, A/\Gamma,\lambda,\mu)$ sono isomorfi.

2) $\Longrightarrow$ 1). Segue dal lemma 1.7.

Il lemma è provato.

LEMMA 1.9. *Sia A un L-anello possedente ideali destri minimali D e A tali che $DAD \neq (o)$.*

Esistono $d \in D$, $\delta \in A$ tali che $d\delta x = x$ se $x \in D$ e $\delta d y = y$ se $y \in \Delta$

Dimostrazione. Da $DAD \neq (o)$ segue che esistono $d' \in D$, $\delta \in A$ tali che $d'\delta D \neq (o)$. $d'\delta D$ è ideale destro non nullo di A contenuto in D, quindi $d'\delta D = D$. Sia $d \in D$ tale che $d'\delta d = d'$. E' $d' = d'\delta d = (d'\delta d)\delta d = d'(\delta d\delta)d = d'\delta(d\delta d)$, perciò $\delta d\delta \neq o$, $d\delta d \neq o$ e risulta $d\delta D = D$ e $\delta d\Delta = A$. Da $d'\delta d = d'\delta(d\delta d)$ segue $d = d\delta d$ perché $\{z \in D \mid d'\delta z=o\}$ è ideale destro di A contenuto in D e diverso da D perché d non vi appartiene e, perciò, è l'ideale nullo. Se $x' \in D$ esiste $x \in D$ tale che $d\delta x = x'$; risulta $d\delta x' = d\delta(d\delta x) = (d\delta d)\delta x = d\delta x$ e, perciò, $x' = x$. Se $y' \in A$ esiste $y \in A$ tale che $\delta d y = y'$ e risulta $y' = y$.

Il lemma è provato.

Stante il lemma 1.9, con i suoi dati, definiamo il seguente modulo sopra l'L-anello A. Sia $a \in A$. Ponendo $x(a\lambda) = \delta x a$ se $x \in D$ si definisce un omomorfismo additivo $a\lambda : D \to A$ e l'applicazione $\lambda : A \to \mathrm{Hom}_Z(D,\Delta)$ che manda $a \in A$ in $a\lambda$ e $\mathrm{Hom}_Z(D,\Delta)$ è omomorfismo additivo. Allo stesso modo, ponendo $y(a\mu) = dya$ se $y \in A$, si definisce un omomorfismo additivo $a\mu : A \to D$ e l'applicazione $\mu : A \to \mathrm{Hom}_Z(\Delta,D)$ che manda $a \in A$ in $a\mu$ e $\mathrm{Hom}_Z(\Delta,D)$ è omomorfismo additivo. Si verifica che (D,Δ,λ,μ) è modulo sopra l'L-anello A. Con tali dati, sussiste il

LEMMA 1.10. *L'A-modulo (D,Δ,λ,μ) è irriducibile. $(1-d\delta)A = \{a-d\delta a \mid a\in A\}$ è ideate destro di A massimale (e modulare rispetto a (d,δ)) e, a livello additivo, risulta*

$$A = d\delta A \oplus (1-d\delta)A$$

con $D = d\delta A$.

L'A-modulo (D,Δ,λ,μ) è isomorfo all'A-modulo relativo a $(1-d\delta)A$ e a (d,δ).

Dimostrazione. Proviamo che se $x \in D$, $x \neq o$, risulta $x(A\lambda) = \delta xA = \Delta$. $x(A\lambda) = \delta xA$ è ideale destro di A contenuto in A. Da $\delta xA = (o)$, siccome $\{z \in D \mid \delta zA = (o)\}$ è ideale destro di A contenuto in D e non nullo perché contiene x, risulta $\{z \in D \mid \delta zA = (o)\} = D$ e $\delta DA = (o)$, assurdo. Perciò è $x(A\lambda) = \delta xA = A$. Allo stesso modo si prova che se $y \in A$, $y \neq o$, risulta $y(A\mu) = dyA = D$. Per il lemma 1.1 (D,Δ,λ,μ) è irriducibile.

Per quanto già provato risulta $d(A\lambda) = A$ e $\delta(A\mu) = D$; inoltre è $d(\delta\lambda) = \delta d\delta = \delta$ e $\delta(d\mu) = d\delta d = d$. Come nella dimostrazione del lemma 1.8, pensando $V = D$, $W = A$, $\rho = \lambda$, $\sigma = \mu$, con $v = d$ e $w = \delta$, duli irriducibili sopra il suo supporto.

Nel numero 2.2 proviamo che un L-anello è semisemplice se e solo se è (isomorfo a una) somma sottodiretta di L-anelli primitivi o quasi primitivi oppure di loro opposti.

2.1. LEMMA 2.1. *Se* $J(A)$ *è il radicale dell'*L-*anello* A *e* de $d \in A$, *sono equivalenti:*

1) $d \in J(A)$;

2) d *annulla* ogni A-*modulo irriducibile e* ogni A^{op}-*modulo irriducibile.*

Dimostrazione. 1) $\Longrightarrow$ 2). Sia (V,W,ρ,σ) un A-modulo irriducibile non annullato da $d \in A$, cioé $d \notin [\rho,\sigma] = \mathrm{Ker}\rho \cap \mathrm{Ker}\sigma$; allora $d \notin \mathrm{Ker}\rho$ oppure $d \notin \mathrm{Ker}\sigma$. Se $d \notin \mathrm{Ker}\rho$ esiste $\delta \in A$ tale che (d,δ) non è quasi invertibile e, perciò, $d \notin J(A)$. Infatti, se $d \notin \mathrm{Ker}\rho$, esiste $v \in V$, $v \neq o$, tale che $v(d\rho) \neq o$. Per il lemma 1.1 risulta $v(d\rho)(A\sigma) = V$ ed esiste $\delta \in A$ tale che $v(d\rho)(\delta\sigma) = v$. Allora, per ogni $a \in A$, risulta $v(d\rho)(\delta\sigma)(a\rho) = (a\rho)$, $v(d\delta a)\rho)-v(a\rho) = o$, $v(d\delta a-a)\rho) = o$. $B = \{a-d\delta a \mid a \in A\}$ è contenuto in $N = \{a \in A \mid v(a\rho) = o\}$. Siccome $d \notin N$ risulta $d \notin B$; perciò, per ogni $a \in A$, $d \neq a-d\delta a$, $a-d \neq d\delta a$ e (d,δ) non è quasi invertibile. Se $d \notin \mathrm{Ker}\sigma$ si ragiona allo stesso modo e si conclude $d \notin J(A)$. Analogamente si prova che, se (U,T,λ,μ) è A^{op}-modulo irriducibile non annullato da $d \in A$, risulta $d \notin J(A)$.

2) $\Longrightarrow$ 1). Se $d \in A$ e $d \notin J(A)$ esiste $\delta \in A$ tale che (d,δ) non è quasi invertibile. $B = \{x-d\delta x \mid x \in A\}$ è ideale destro di A modulare rispetto a (d,δ) oppure $C = \{x-x\delta d \mid x \in A\}$ è ideale destro di A^{op}-modulare rispetto a (d,δ). Infatti risulta $B \neq A$ oppure $C \neq A$ perché, se

fosse $B = C = A$, risulterebbe $d = x-d\delta x$, $d = y-y\delta d$ con $x,y \in A$ e $x \neq y$ perché (d,δ) non è quasi invertibile; quindi, $x-d\delta x = d=y-y\delta d= = y-y\delta(x-d\delta x) = y-y\delta x+y\delta d\delta x = y-(y-y\delta d)\delta x = y-d\delta x$ e $x = y$, assurdo. Sia $B \neq A$. Allora B è ideale destro di A modulare rispetto a (d,δ) e, usando il lemma di Zorn, si prova che B è contenuto in un ideale destro G di A massimale e modulare rispetto a (d,δ). L'A-modulo $(A/G,A/\Gamma,\lambda,\mu)$ relativo a G e a (d,δ) è irriducibile (cfr. lemma 1.7). Risulta $d \notin \operatorname{Ker}\mu = \{a \in A \mid dAa \subseteq G\}$; infatti, $dAd \subseteq G$ comporta $d\delta d \in G$, allora $d \in G$ perché $d-d\delta d \in G$, e, per ogni $x \in A$, $x-d\delta x \in G$ implica $x \in A$ e $A = G$, assurdo. Quindi $d \notin [\lambda,\mu]$. Sia $C = A$. Allora C è ideale destro dell'L-anello A^{op}, opposto di A, modulare rispetto a (d,δ) e, come prima, si prova che esiste un A^{op}-modulo irriducibile non annullato da d.

Il lemma è provato.

Osservazione 2.1. Il lemma 2.1 assicura che ogni L-anello primitivo o quasi primitivo è semisemplice.

LEMMA 2.2. ([5], p. 44; [7], p. 231) *Il radicale* $J(A)$ *dell'*L*-anello* A *è ideale di* A. $A/J(A)$ *è* L*-anello semisemplice.*

Dimostrazione. Osserviamo che se $x \in A$ annulla ogni A-modulo irriducibile e ogni A^{op}-modulo irriducibile e se $a,b \in A$, anche xab, abx e axb godono di questa proprietà; perciò, per il lemma 2.1, $J(A)$ è ideale di A.

Supponiamo che $x+J(A) \in A/J(A)$ (con $x \in A$) annulli ogni $A/J(A)$-modulo irriducibile; ci proponiamo di provare che x annulla ogni A-modulo irriducibile. Sia, perciò, (V,W,ρ,σ) un A-modulo irriducibile.

Ponendo $(a+J(A))\rho' = a\rho$ se $a \in A$, si definisce un'applicazione $\rho' : A/J(A) \to Hom_Z(V,W)$; infatti, $a+J(A) = b+J(A)$ con $a,b \in A$, cioé $a-b \in J(A)$, comporta $a-b \in Ker\rho$ (cfr. lemma 2.1), $(a-b)\rho = o$, $a\rho=b\rho$. Si verifica che ρ' è omomorfismo additivo. Allo stesso modo, ponendo $(a+J(A))\sigma' = a\sigma$ se $a \in A$, si definisce un omomorfismo additivo $\sigma' : A \to Hom_Z(W,V)$. Si verifica che (V,W,ρ',σ') è $A/J(A)$-modulo che risulta irriducibile perché è $V \neq (o)$, $W \neq (o)$, $v((A/J(A))\rho') = v(A\rho) = W$ se $v \in V$, $v \neq o$ e $w((A/J(A))\sigma' = w(A\sigma) = V$ se $w \in W$, $w \neq o$ (cfr. lemma 1.1). Risulta $(a+J(A))\rho' = a\rho$ se $a \in A$; quindi $a + J(A) \in Ker\rho'$ se e solo se $a \in Ker\rho$ e, perciò $x \in Ker\rho$. Allo stesso modo si prova che $x \in Ker\sigma$. Quindi $x \in [\rho,\sigma]$. Abbiamo provato che x annulla ogni A-modulo irriducibile. Allo stesso modo si prova che se $x+J(A) \in (A/J(A))^{op} = A^{op}/J(A)$ annulla ogni $(A/J(A))^{op}$-modulo irriducibile allora x annulla ogni A^{op}-modulo irriducibile. Pertanto, per il lemma 2.1, se $x+J(A) \in J(A/J(A))$ allora $x \in J(A)$; dunque $x+J(A) = o+J(A)$ e $A/J(A)$ è L-anello semisemplice.

Il lemma è provato.

2.2. Per gli L-anelli, come per gli anelli (binari) associativi (cfr. [4], pp. 13 e 14), si dà la definizione di *somma sottodiretta* e si prova che un L-anello A è somma sottodiretta della famiglia di L-anelli $\{A_i\}_{i\in I}$ (I è un insieme d'indici arbitrario) se e solo se per ogni $i \in I$ esiste un ideale H_i dell'L-anello A tale che l'L-anello A_i risulti isomorfo all'L-anello quoziente A/H_i e, inoltre $\bigcap_{i\in I} H_i = (o)$.

TEOREMA 2.1. *Se A è L-anello, sono equivalenti:*

1) A *è semisemplice;*

2) A *è (isomorfo* a una) *somma sottodiretta* di *L-anelli primitivi o quasi primitivi oppure opposti di L-anelli primitivi o quasi primitivi.*

Dimostrazione. 1) $\Longrightarrow$ 2). Se $x \in A$, $x \neq 0$, per il lemma 2.1, esiste un modulo irriducibile $(V_x, W_x, \rho'_x, \sigma_x)$ sopra l'l-anello A o sopra il suo opposto A^{op} tale che $x \notin [\rho_x, \sigma_x] = \operatorname{Ker}\rho_x \cap \operatorname{Ker}\sigma_x$. Ci proponiamo di provare che l'l-anello $A/[\rho_x, \sigma_x]$, oppure il suo opposto $(A/[\rho_x, \sigma_x])^{op} = A^{op}/[\rho_x, \sigma_x]$, è primitivo o quasi primitivo. Se $(V_x, W_x, \rho_x, \sigma_x)$ è modulo irriducibile sopra l'l-anello A, ponendo $(a+[\rho_x, \sigma_x])\rho'_x = a\rho_x$ se $a \in A$, si definisce un'applicazione $\rho'_x : A/[\rho_x, \sigma_x] \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(V_x, W_x)$; infatti, $a+[\rho_x, \sigma_x] = b+[\rho_x, \sigma_x]$ comporta $a-b \in [\rho_x, \sigma_x]$, $a-b \in \operatorname{Ker}\rho_x$, $(a-b)\rho_x = 0$, $a\rho_x = b\rho_x$. Si verifica che ρ'_x è omomorfismo additivo. Allo stesso modo, ponendo $(a+[\rho_x, \sigma_x])\sigma'_x = a\sigma_x$ se $a \in A$, si definisce un omomorfismo additivo $\sigma'_x : A/[\rho_x, \sigma_x] \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(W_x, V_x)$. Si verifica che $(V_x, W_x, \rho'_x, \sigma'_x)$ è modulo sopra l'L-anello $A/[\rho_x, \sigma_x]$ il quale risulta irriducibile perché $V_x \neq (0)$, $W_x \neq (0)$, $v((A/[\rho_x, \sigma_x])\rho'_x) = v(A\rho_x) = W_x$ se $v \in V_x$, $v \neq 0$, e $w((A/[\rho_x, \sigma_x])\sigma'_x) = w(A\sigma_x) = V_x$ se $w \in W_x$, $w \neq 0$ (cfr. lemma 1.1). Inoltre, se $a \in A$, $a+[\rho_x, \sigma_x] \in \operatorname{Ker}\rho'_x$ se e solo se $a \in \operatorname{Ker}\rho_x$ e $a+[\rho_x, \sigma_x] \in \operatorname{Ker}\sigma'_x$ se e solo se $a \in \operatorname{Ker}\sigma_x$. Allora $a+[\rho_x, \sigma_x] \in [\rho'_x, \sigma'_x]$ se e solo se

$a \in [\rho_x,\sigma_x]$, cioé se e solo se $a+[\rho_x,\sigma_x] = o+[\rho_x,\sigma_x]$. Abbiamo provato che $(V_x,W_x,\rho'_x,\sigma'_x)$ è quasi fedele e, quindi, che $A/[\rho_x,\sigma_x]$ è L-anello primitivo 0 quasi primitivo. Allo stesso modo si ragiona se $(V_x,W_x,\rho_x,\sigma_x)$ è modulo irriducibile sopra l'L-anello A^{op}, opposto di A, e si prova che l'L-anello $(A/[\rho_x,\sigma_x])^{op} = A^{op}/[\rho_x,\sigma_x]$ è primitivo o quasi primitivo. Resta da osservare soltanto che risulta $\bigcap_{x\in A-(o)} [\rho_x,\sigma_x] = (o)$.

2) $\Longrightarrow$ 1). L'L-anello A risulti somma sottodiretta della famiglia di L-anelli $\{A_i\}_{i\in I}$ dove ciascun L-anello A_i è primitivo o quasi primitivo oppure opposto di un L-anello primitivo.0 quasi primitivo. Allora, per ogni i e 1, esiste un ideale H_i dell'L-anello A tale che l'L-anello A_i è isomorfo all'L-anello A/H_i e risulta $\bigcap_{i\in I} H_i = (o)$. Se $x \in A$ è propriamente quasi invertibile anche $x + H_i$ e A/H_i lo è; allora, osservato che A/H_i, oppure il suo opposto $(A/H_i)^{op}$, è L-anello primitivo 0 quasi primitivo, risulta $J(A/H_i) = J((A/H_i)^{op}) =$ $= (o+H_i)$ e da $x \in J(A)$ segue $x + H_i \in J(A/H_i) = (o+H_i)$, cioé $x \in H_i$. Pertanto $x \in \bigcap_{i\in I} H_i = (o)$, $x = o$ e A è L-anello semisemplice.

Il teorema è provato.

3. ANELLI TERNARI DI LISTER PRIMITIVI.

Nel numero 3.1 classifichiamo gli L-anelli primitivi dando, per essi, un analogo del teorema di densità di Chevalley-Jacobsonrelativo ad anelli associativi primitivi.

Nel numero 3.2 classifichiamo gli L-anelli primitivi con ideali destri minimali.

Nel numero 3.3 classifichiamogli L-anelli semplici, con ideali destri minimali e privi di ideali effettivi; tra questi classifichiamo anche quelli artiniani a destra ritrovando un risultato da noi già stabilito in [9].

3.1. Siano k un corpo (non necessariamente commutativo), V e W k-spazi vettoriali destri non nulli, $\mathcal{F}$, risp. $\mathcal{F}'$, un sottogruppo denso nella topologia finita di $\mathrm{Hom}_k(V,W)$, risp. $\mathrm{Hom}_k(W,V)$, $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un isomorfismo additivo, $\mathcal{F}\mathcal{F}'\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F}'\mathcal{F}\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}_\phi$, risp. $\mathcal{F}'_{\phi^{-1}}$, la struttura algebrica che ha come insieme sostegno (quello di) $\mathcal{F}$, risp. $\mathcal{F}'$, e come operazioni l'addizione di $\mathcal{F}$, risp. $\mathcal{F}'$, e l'applicazione $\omega : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, risp. $\omega' : \mathcal{F}' \times \mathcal{F}' \times \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'$, definita da $(f,p,q)\omega = f(p\phi)q$ se $f,p,q \in \mathcal{F}$, risp. $(f',p',q')\omega' = f'(p'\phi^{-1})q'$ se $f',p' \in \mathcal{F}'$. Con tali dati, sono equivalenti:

1) $(f(p\phi)q)\phi = (f\phi)p(q\phi)$ se $f,p,q \in \mathcal{F}$;

2) la struttura algebrica $\mathcal{F}_\phi$ è L-anello;

3) $\phi : \mathcal{F}_\phi \to \mathcal{F}'_{\phi^{-1}}$ è isomorfismo (di strutture algebriche).

Classe 1. Con i dati già specificati, la struttura algebrica $\mathcal{F}_\phi$ sia L-anello. Un L-anello appartiene alla classe 1 se e solo se è (isomorfo a) uno degli L-anelli $\mathcal{F}_\phi$ siffatti.

LEMMA 3.1. *Ogni L-anello appartenente alla classe* I *è primitivo.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}_\phi$ è L-anello appartenente alla classe 1, con i dati specificati per definire tale classe, ponendo $f\rho = f'$, risp. $fo = f$, se $f \in \mathcal{F}$, si definisce un omomorfismo additivo $\rho : \mathcal{F}_\phi \to \mathrm{Hom}_k(V,W)$, risp. $\sigma : \mathcal{F}_\phi \to \mathrm{Hom}_k(W,V)$. (V,W,ρ,σ) è q-modulo irriducibile e fedele. Infatti, verificato che (V,W,ρ,σ) è ?-modulo, se $v \in V$, $v \neq o$, per ógni $w \in W$ esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $vf = w$, cioé $v(f\rho) = w$ e $v(\mathcal{F}\rho) = W$. Allo stesso modo si prova che, se $w \in W$, $w \neq o$, risulta $w(\mathcal{F}\sigma) = V$. Inoltre è $\mathrm{Ker}\rho = \mathrm{Ker}o = (0)$.

Il lemma è provato.

Siano A un L-anello primitivo e (V,W,ρ,σ) un A-modulo irriducibile e fedele. Con le notazioni dei lemmi 1.4 e 1.5, stante l'osservazione 1.1, ρ, risp. σ, è omomorfismo additivo $\rho : A \to \mathrm{Hom}_k(V,W)$, risp. $\sigma : A \to \mathrm{Hom}_k(W,V)$. Con tali dati, sussiste il

LEMMA 3.2. *Siano* $\mathcal{F} = A\rho$, $\mathcal{F}' = A\sigma$ *e definiamo l'isomorfismo additivo* $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ *ponendo* $f\phi = f\phi^{-1}\sigma$ *se* $f \in \mathcal{F}$ (5).

$\mathcal{F}$, *risp.* $\mathcal{F}'$, *è bottoghuppo dcnbo nella topologia finita di* $\mathrm{Hom}_k(V,W)$, *risp.* $\mathrm{Hom}_k(W,V)$, *la struttura algebrica* $\mathcal{F}_\phi$, *risp.* $\mathcal{F}'_{\phi^{-1}}$, *è L-anello e* $\rho : A \to \mathcal{F}_\phi$, *risp.* $\sigma : A \to \mathcal{F}'_{\phi^{-1}}$, *è isomorfismo di L-anelli.*

Pertanto, è assicurata la commutatività del seguente diagramma

(5) **Indichiamo ancora con** ρ, risp. σ, **la restrizione codominiale di** ρ ad $A\rho$, **risp.** ai σ ad $A\sigma$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}_{\varphi} \arrow[d, "\varphi"] \\ A \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \\ & \mathcal{F}'_{\varphi^{-1}} \end{tikzcd}$$

in cui tutte *le applicazioni sono isomorfismi di* L-*anelli.*

Dimostrazione. Proviamo che $\mathcal{F}$ è sottogruppo denso nella topologia finita di $\mathrm{Hom}_k(V,W)$. Sia U un sottospazio di dimensione finita del k-spazio vettoriale destro V. Vogliamo provare che, se $x \in V-U$, esiste $a \in A$ tale che $U(a\rho) = (o)$ e $x(a\rho) \neq o$. Ragioniamo per induzione sulla dimensione di U. Se $U = (o)$ dobbiamo provare che esiste $a \in A$ tale che $x(a\rho) \neq o$; ciò segue da $x(A\rho) = W$ (cfr. lemma 1.1). Sia, ora, $\dim_k U = t \geq 1$, $x \in V-U$ e supponiamo vera la tesi per ogni sottospazio di V la cui dimensione è minore di t; ci proponiamo di raggiungere un assurdo negando la tesi per U e x. Sia $U = U_{t-1} \oplus U_1$ con U_{t-1} e U_1 sottospazi di U di dimensioni t-l e 1 rispettivamente; inoltre, sia $v \in U_1$, $v \neq 0$. Per ipotesi induttiva esiste $a \in A$ tale che $U_{t-1}(a\rho) = (o)$ e $v(a\rho) \neq o$. $C = \{a \in A \mid U_{t-1}(a\rho) = (o)\}$ è ideale destro di A e risulta $(o) \neq \{v(a\rho) \mid a \in C\} = v(C\rho) \subseteq W$; allora $(\langle v(C\rho)(A\sigma)\rangle, v(C\rho), \rho, \sigma)$ è sottomodulo non nullo di (V,W,ρ,σ) e $v(C\rho) = W$. Se $y \in W$, $y = v(a\rho)$ con $a \in C$, ponendo $yh = (v(a\rho))h = x(a\rho)$, si definisce un'applicazione $h : W \to W$. Infatti, $v(a\rho) = v(b\rho)$, con $a,b \in C$, comporta $v((a-b)\rho) = o$ ed essendo $a-b \in C$ risulta $U_{t-1}((a-b)\rho) = (o)$ assieme a $U_1((a-b)\rho) = (o)$, perciò

$U((a-b)\rho) = (o)$; allora, avendo negato la tesi per U e x, è $x((a-b)\rho) = o$, cioé $x(a\rho) = x(b\rho)$. Risulta $h \in k'$; infatti, se $w,w' \in W$, $w=v(a\rho)$, $w' = v(b\rho)$ con $a,b \in C$, si ha $(w+w')h = (v(a\rho)+v(b\rho))h = (v(a+b)\rho)h = x((a+b)\rho) = x(a\rho)t + x(b\rho) = (v(a\rho))h + (v(b\rho))h = wh+w'h$, inoltre, se $c,d \in A$, è $wh(c\sigma)(d\rho) = x((acd)\rho) = (v((acd)\rho))h = v(a\rho)(c\sigma)(d\rho)h = w(c\sigma)(d\rho)h$, cioé $h(c\sigma)(d\rho) = (c\sigma)(d\rho)h$. Per il lemma 1.5 esiste (uno e un solo) $h_1 \in k$ tale che $h_1\tau = h_1^* = h$ (cfr. la dimostrazione del lemma 1.5) ; allora, se $a \in C$, si ha $(v(a\rho))(h_1^* = (v(a\rho))h$, $vh_1(a\rho) = x(a\rho)$ e $(vh_1-x)(a\rho) = o$, quindi $vh_1-x \in U_t$, e $x \in U$ perché $vh_1 \in U_1$; assurdo.

Siano $X = \{x_1,\ldots,x_r\}$ una parte libera finita di V, $Y=\{y_1,\ldots,y_r\}$ una famiglia di vettori di W, U_i il sottospazio di V generato da $X - \{x_i\}$ ($i \in \{1,\ldots,r\}$). $C_i = \{a \in A \mid U_i(a\rho) = (o)\}$ è ideale destro di A e, come già provato, risulta $v(C_i\rho) = W$. Allora esiste $a_i \in C_i$ tale che $x_i(a_i\rho) = y_i$. Posto $a = a_1+\ldots+a_r$, risulta $x_i(a\rho) = x_i(a_i\rho) = y_i$. Quindi $\mathscr{F} = A\rho$ è sottogruppo denso nella topologia finita di $\mathrm{Hom}_k(V,W)$. Analogamente si prova che $\mathscr{F}' = A\sigma$ è sottogruppo denso nella topologia finita di $\mathrm{Hom}_k(W,V)$.

Tenendo presenti le considerazioni fatte per definire la classe 1, resta da provare soltanto che la struttura algebrica $\mathscr{F}_\phi$ è L-anello, cioé che risulta $(f(p\phi)q)\phi = (f\phi)p(q\phi)$ se $f,p,q \in \mathscr{F}$, e verificare le altre affermazioni del lemma. Se $f = a\rho$, $p = b\rho$, $q = c\rho$ con $a,b,c \in A$, risulta $(f(p\phi)q)\phi = ((a\rho)(b\sigma)(c\rho))\phi = ((abc)\rho)\phi = (abc)\sigma = (a\sigma)(b\rho)(c\sigma) = (f\phi)p(q\phi)$.

Il lemma è provato.

I lemmi 3.1 e 3.2 permettono di enunciare, il

TEOREMA 3.1. Se A *è L-anello, sono equivalenti:*

1) A *è primitivo;*

2) A *appartiene alla classe* 1.

3.2. Siano k un corpo (non necessariamente commutativo), V un k-spazio vettoriale destro non nullo, $\mathscr{L} = \mathrm{Hom}_k(V,V)$ l'anello associativo delle applicazioni k-lineari di V in sé, ϕ un automorfismo additivo di $\mathscr{L}$ e $\mathscr{L}_\phi$, risp. $\mathscr{L}_{\phi^{-1}}$, la struttura algebrica che ha come insieme sostegno (quello di) $\mathscr{L}$ e come operazioni l'addizione di $\mathscr{L}$ e l'applicazione $\omega : \mathscr{L} \times \mathscr{L} \times \mathscr{L} \to \mathscr{L}$, risp. $\omega' : \mathscr{L} \times \mathscr{L} \times \mathscr{L} \to \mathscr{L}$, definita da $(f,p,q) = f(p\phi)q$, risp. $(f,p,q)\omega' = f(p\phi^{-1})q$, se $f,p,q \in \mathscr{L}$. Con tali dati, sussiste il

LEMMA 3.3. Sono *equivalenti:*

1) $(f(p\phi)q)\phi = (f\phi)p(q\phi)$ *se* $f,p,q \in \mathscr{L}$;

2) *esistono* un *automorfismo* τ *del corpo* k *il cui quadrato è l'automorfismo interno di* k *legato* a un *elemento* non *nullo* c *di* k[6] *fissato da* $\tau (\tau^2 = \gamma_c, c\tau = c)$ *e un'applicazione biettiva g di* V *sopra se stesso semilineare rispetto a* τ *tali che* $f\phi = c_s gfg$ $(= gc_s fg = gfc_s g = gfgc_s)$ *se* $f \in \mathscr{L}$[7].

---

(6) Qui e nel seguito, se c è elemento non nullo di un corpo k, indichiamo con γ_c l'automorfismo interno di k legato a c: $x\gamma_c = cxc^{-1}$ se $x \in k$.

(7) Qui e nel seguito, se V è spazio vettoriale destro sopra un corpo k e $c \in k$, indichiamo con c_s la moltiplicazione scalare per c : $xc_s = x c$ se $x \in V$.

3) $f\phi = \alpha(f\psi)$ *se* f e $\mathscr{L}$ can $\alpha = 1\phi \in \mathscr{L}$ *invertibile e* ψ *automorfismo dell'anello associativo* $\mathscr{L}$ *tali che* $\alpha\psi = \alpha$ e $f\psi^2 = \alpha^{-1}f\alpha$ *se* f $\in \mathscr{L}$;

4) *La struttura algebrica* $\mathscr{L}_\phi$ *è* L-*anello* (*perciò* $(V, V, 1, \phi)$ *è* $\mathscr{L}_\phi$-*modulo irriducibile e fedele*);

5) $\phi : \mathscr{L}_\phi \to \mathscr{L}_{\phi^{-1}}$ *è isomorfismo* (*di strutture algebriche*).

Dimostrazione. La prova del lemma è analoga a quella del lemma 1.1 di [9] (p. 42) ; si tenga presente. la nota 3 a piè di pagina 45 di [4].

Classe 1.1. Un L-anello R appartiene alla classe 1.1 se e solo se esistono un corpo k, un k-spazio vettoriale destro non nullo V e un automorfismo additivo ϕ dell'anello associativo $\mathscr{L} = \mathrm{Hom}_k(V,V)$ per' cui la struttura algebrica $\mathscr{L}_\phi$ risulta L-anello (cfr. lemma 3.3) tali. che R è (isomorfo a un) sotto L-anello dell'L-anello $\mathscr{L}_\phi$ che sia denso nella topologia* finita di $\mathscr{L}$ e contenga applicazioni lineari non nulle di rango finito.

LEMMA 3.4. Se R *è* L-*anello appartenente alla classe* 1.1, *risulta:*

1) $R\phi$ è *sottogruppo* denso *nella topologia finita* di $\mathscr{L}$;

2) ogni *ideale bilatero* non *nullo di* R *è denso nella topologia finita di* $\mathscr{L}$ *e* contiene $F = \{f \in R \mid \dim_k Vf$ è finita$\}$, ideale (non *nullo*) *di* R;

3) F *è* L-*anello semplice e privo di ideali bilateri effettivi.*

Dimostrazione. 1) Risulti $f\phi = c_s gfg$ se $f \in \mathscr{L}$, dove c e g hanno il significato a essi attribuito in 2) del lemma 3.3. Siano $\{x_1, .., x_n\}$

una famiglia di vettori di V. Siccome $\{x_1c_sg,\ldots,x_nc_sg\}$ è parte libera finita di V e R è denso nella topologia finita di $\mathscr{L}$, esiste $f \in R$ tale che, per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}$, $x_ic_sgf = y_ig^{-1}$, quindi $x_i(f\phi) = y_i$ e $R\phi$ è denso nella topologia finita di $\mathscr{L}$.

2). Sia B ideale bilatero non nullo di R. Fissiamo $f \in B$, $f \neq o$, $x,y \in V$, $y \neq o$, tali che $xf = y$. Se $\{x_1,\ldots,x_n\}$ è parte libera finita di V e se $\{y_1,\ldots,y_n\}$ è una famiglia di vettori di V, poiché R e $R\phi$ sono densi nella topologia finita di $\mathscr{L}$, per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}$, esistono $a_i,b_i \in R$ tali che $x_ia_i(b_i\phi) = x$ e $x_ja_i(b_i\phi) = o$ se $j\in\{1,\ldots,n\}$, $j\neq i$, ed esistono $c_i,d_i\in R$ tali che $y(c_i\phi)d_i = y_i$. Risulta $f_i = a_i(b_i\phi)f(c_i\phi)d_i \in B$, $x_if_i = y_i$, $x_jf_i = o$ e, con $p = f_1+\ldots f_n\in B$, risulta $x_ip = x_if_i = y_i$ e B è denso nella topologia finita di $\mathscr{L}$.

Si verifica che F è ideale di R e, per quanto già provato, è denso nella topologia finita di $\mathscr{L}$. Se B è ideale bilatero non nullo di R risulta $F \subseteq B$. Intanto è $F\cap B \neq (o)$. Infatti, $F\cap B = (o)$ comporta $F(R\phi)B \subseteq F\cap B = (o)$ e, se $b \in B$, fissato $x \in V$, $x \neq 0$, per ogni $y\in V$ esistono $f \in F$, $r \in R$ tali che $xf(r\phi) = y$ e, perciò, $yb=xf(r\phi)b=o$ e $B = (o)$; assurdo. Allora $F\cap B$ è ideale bilatero non nullo di R e, perciò, è denso nella topologia finita di $\mathscr{L}$. Se $f \in F$, sia $\dim_k Vf=n$. Esiste una parte libera finita $\{x_1,\ldots,x_n\}$ di V tale che, se U è il sottospazio di V da essa generato, risulta $V=\operatorname{Ker} f \oplus U$ e $\{x_1f,\ldots,x_nf\}$ è parte libera di V. Esistono $r \in R$, $p \in F\cap B$ tali che $x_if(r\phi)p = x_if$ se $i \in \{1,\ldots,n\}$. Osservato che è anche $xf(r\phi)p = xf$ se $x \in \operatorname{Ker} f$, si conclude $f = f(r\phi)p \in F\cap B$, $F \subset F\cap B$ e $F \subseteq B$.

3). Osserviamo che F è sottoL-anello dell'L-anello $\mathcal{L}_\phi$ denso nella topologia finita di $\mathcal{L}$, quindi F appartiene alla classe 1.1. Risulta $F(F\phi)F \neq (o)$; se B è ideale bilatero non nullo di F, per 2) (pensando R=F), dev'essere B = F e, perciò, F è L-anello semplice e privo di ideali bilateri effettivi.

Il lemma è provato.

LEMMA 3.5. *Ogni L-anello appartenente alla classe* 1.1 *è primitivo e possiede ideali destri minimali.*

Dimostrazione. Sia R un L-anello appartenente alla classe 1.1. Osservato che R appartiene alla classe I (cfr. 1) del lemma 3.4), per il lemma 3.1 R è L-anello primitivo. Siano $f \in R$, $f \neq o$, $\dim_k Vf = n$ $n \in \mathbb{N})$, $\{y_1,\dots,y_n\}$ base di Vf e $x_1 \in V$ tale che $x_1 f = y_1$. Esistono $a,b \in R$ tali che $y_1(a\phi)b = x_1$ e $y_i(a\phi)b = o$ se $i \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq 1$. Se U_1 è il sottospazio di V generato da x_1 e se $p = f(a\phi)b$, risulta $x_1 p = x_1$, $Vp = U_1$, $V = \mathrm{Ker}\, p \oplus U_1$ e Ker p è iperpiano di V.
$D = \{r \in R \mid \mathrm{Ker}\, p \subseteq \mathrm{Ker}\, r\}$ è ideale destro minimale dell'L-anello R. Infatti, si verifica che D è ideale destro di R; risulta $D \neq (o)$ perché $p \in D$. Se D' è ideale destro di R con $(o) \subset D' \subseteq D$, fissato $f \in D'$, $f \neq o$, se $r \in D$, siano $s,u \in R$ tali che $x_1 f(s\phi)u = x_1 r$. Osservato che anche $xf(s\phi)u = xr$ se $x \in \mathrm{Ker}\, p$ perché $f,r \in D$, siccome $V = \mathrm{Ker}\, p \oplus U_1$, si conclude $r = f(s\phi)u \in D'$ e $D' = D$.

Il lemma è provato.

Nei seguenti lemmi 3.6,...,3.11 A è un L-anello primitivo con ideale destro minimale D.

LEMMA 3.6. *Risulta* DDD $\neq$ (o).

Dimostrazione. Se (V,W,ρ,σ) è A-modulo irriducibile e fedele risulta $V(D\rho) \neq (o)$ e $W(D\sigma) \neq (o)$ perché è $D \neq (o)$. Perciò esistono v e V, $v \neq o$, w e W, $w \neq o$, tali che $v(D\rho) \neq (o)$ e $w(D\sigma) \neq (o)$. $(\langle v(D\rho)(A\sigma)\rangle, v(D\rho),\rho,\sigma)$ e $(w(D\sigma), \langle w(D\sigma)(A\rho)\rangle,\rho,\sigma)$ sono sottomoduli non nulli di (V,W,ρ,σ), quindi $v(D\rho) = W$ e $w(D\sigma) = V$. Allora da DDD = (o) segue $(o) = V((DDD)\rho) = V(D\rho)(D\sigma)(D\rho) = W(D\sigma)(D\rho)=V(D\rho)= W$, assurdo.

Il lemma è provato.

Stante il lemma 3.6, con le notazioni dei lemmi 1.9 e 1.10, pensando $D = \Delta$ escegliendo $d,\delta \in D$ tali che $(d\delta x = \delta dx = x$ e) $xd\delta= x\delta d$ se x e D (cfr. osservazione 1.2), sussistono i seguenti lemmi 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10.

LEMMA 3.7. *L'A-modulo* (D,D,λ,μ) *è irriducibile e fedele.*

Ogni A-moduto *irriducibile e fedele è isomorfo a* (D,D,λ,μ).

Dimostrazione. Sia (V,W,ρ,σ) un A-modulo irriducibile e fedele. Risulta $V(D\rho) \neq (o)$ e $W(D\sigma) \neq (o)$ perché è $D \neq (o)$. Perciò esistono v e V, $v \neq 0$, w e W, $w \neq 0$, tali che $v(D\rho) \neq (o)$ e $w(D\sigma) \neq (o)$. $(\langle v(D\rho)(A\sigma)\rangle, v(D\rho),\rho,\sigma)$ e $(w(D\sigma),\langle w(D\sigma)(A\rho)\rangle,\rho,\sigma)$ sono sottomoduli non nulli di (V,W,ρ,σ), quindi $v(D\rho) = W$ e $w(D\sigma) = V$. Siano $d',\delta' \in D$ tali che $v(\delta'\rho) = w$ e $w(d'\sigma) = v$. Risulta $v = v(\delta'\rho)(d'\sigma)$ e $w=w(d'\sigma)(\delta'\rho)$. L'applicazione $\eta: A \to Y$ che manda x e A in $w(x\sigma)$ e V è ornomorfimo additivo. Ker η è ideale destro di A massimale e modulare rispetto a (d',δ') [cfr. la dimostrazione del lemma 1.8). La restrizione η_D di' η a D è isomorfismo additivo $\eta_D : D \to V$. Infatti, risulta $D\eta = w(D\sigma) = V$ e $\mathrm{Ker}\eta_D = \mathrm{Ker}\eta \cap D = \{x\in D | x\eta = o\} = \{x\in D | w(x\sigma) = o\}$ è ideale destro di A contenuto in D e diverso da D perché $w(D\sigma) = V \neq (o)$, perciò è $\mathrm{Ker}\eta_D = (o)$. Allo stesso modo si prova che l'applicazione $\theta : A \to W$ che manda $x\in A$ in $v(x\rho)$ e W è omomorfismo additivo. $\mathrm{Ker}\theta$ è ideale destro di A massimale e modulare rispetto a (δ',d'). La restrizione θ_D di θ a D è isomorfismo additivo $\theta_D : D \to W$. Se $x\in D$ risulta $x-d'\delta'x \in \mathrm{Ker}\eta \cap D = \mathrm{Ker}\eta_D = (o)$ e $x-\delta'd'x \in \mathrm{Ker}\theta \cap D = \mathrm{Ker}\,\theta_D = (o)$, quindi $d'\delta'x = \delta'd'x = x$. Si consideri l' A-modulo (D,D,λ',μ') dove, con $a\in A$, gli omomorfismi additivi $\lambda' : A \to \mathrm{Hom}_Z(D,D)$ e $\mu' : A \to \mathrm{Hom}_Z(D,D)$ sono definiti da $x(a\lambda') = \delta'xa$ e $x(a\mu') = d'xa$ se $x\in D$. Gli isomorfismi additivi $\eta_D : D \to V$ e $\theta_D : D \to W$ realizzano isomorfismo tra gli A-moduli (D,D,λ',μ') e (V,W,ρ,σ).

Resta da provare che gli A-moduli (D,D,λ,μ) e (D,D,λ',μ') sono isomorfi. Ponendo $x\alpha = d'\delta x$ se $x\in D$ si definisce un automorfismo additivo α di D. Infatti, verificato che α è endomorfismo additivo di D, $d'\delta D$ è ideale destro di A contenuto in D. Da $d'\delta D = (o)$ segue $d'\delta DAA = (o)$ mentre $\{z\in D | d'zA = (o)\}$ è ideale destro di A contenuto in D e diverso da D perché δ' non vi appartiene (infatti è $(o) \neq D = d'\delta'A$). Allora $\{z\in D | d'zA = (o)\} = (o)$, $\delta DA = (o)$ e $(o) \neq D = \delta dD \subseteq \delta DA = (o)$, assurdo. Quindi $D\alpha = d'\delta D = D$, $\mathrm{Ker}\alpha = \{x \in D | d'\delta x = o\}$ è ideale destro di A contenuto in D, non è $\mathrm{Ker}\alpha = D$ perché $d'\delta D = D \neq (o)$, come già visto, quindi $\mathrm{Ker}\alpha = (o)$. L'automorfismo additivo α di D e l'applicazione identica di D realizzano isomorfismo tra gli A-moduli (D,D,λ,μ) e (D,D,λ',μ').

sulta $x(t\tau^2) = x((t\tau)\tau) = \delta(d(t\tau))x = \delta(\delta(dt)d)x = \delta\delta(dt)dx$ e $x(t\gamma_c) = xctc^{-1} = x1_{dd}t1_{\delta\delta} = \delta\delta(ddx)t) = \delta\delta(dt)dx$, quindi $x(t\tau^2) = x(t\gamma_c)$, $t\tau^2 = t\gamma_c$, $\tau^2 = \gamma_c$. Si verifica che cr = c.

Il lemma è provato.

Osservazione 3.1. Stanti i lemmi 3.8 e 3.9, l'immersione di k in $Hom_Z(D,D)$ definisce sul gruppo additivo di D una struttura di k-spazio vettoriale destro V e l'automorfismo τ del corpo k è, di fatto, monomorfismo di k in $Hom_Z(D,D)$ e definisce sul gruppo addivito di D una struttura di k-spazio vettoriale destro W. L'insieme $Hom_k(V,W)$, risp. $Hom_k(W,V)$, delle applicazioni k-lineari di V in W, risp. di W in V, coincide con l'insieme $\mathscr{D}$, risp. $\mathscr{D}'$, delle applicazioni di V in sé semilineari rispetto a τ, risp. τ^{-1}; quindi λ, risp. μ, è monomorfismo additivo $\lambda : A \to Hom_k(V,W) = \mathscr{D}$, risp. $\mu : A \to Hom_k(W,V) = \mathscr{D}'$. Risulta $\dim_k V = \dim_k W$; infatti, l'applicazione identica di D è applicazione biettiva di W sopra V semilineare rispetto a τ (d'altra parte, ogni applicazione biettiva di V sopra se stesso semilineare rispetto a τ è applicazione lineare biettiva di V sopra W). Inoltre risulta $Hom_k(V,V) = Hom_k(W,W)$.

LEMMA 3.10. Si *fissi (ad arbitrio) un'applicazione biettiva* g *di* V *sopra se stesso semilineare rispetto a* τ *e sia* $\mathscr{L} = Hom_k(V,V) = Hom_k(W,W)$.

Ponendo $pv = pg^{-1}$ *se* $p \in \mathscr{D}$, *risp.* $p'\xi = gp'$ *se* $p' \in \mathscr{D}$, *si definisce un isomorfismo additivo* $v : \mathscr{D} \to \mathscr{L}$ *risp.* $\xi : \mathscr{D}' \to \mathscr{L}$. *Inoltre,* ponendo $p\eta = c_s p$ *se* $p \in \mathscr{D}$ con $c = 1_{dd}$ (*cfr. lemma*

Il lemma è provato.

All'A-modulo (D,D,λ,μ), in quanto modulo irriducibile, possiamo applicare le argomentazioni dei lemmi 1.4 e 1.5 pervenendo ai risultati esposti nei seguenti lemmi 3.8 e 3.9. Osserviamo, intanto, che, se $a,b \in A$, risulta $(a\lambda)(b\mu) = (a\mu)(b\lambda) = \rho_{ab}$ con $\rho_{ab} : D \to D$ definita da $x\rho_{ab} = xab$ se $x \in D$.

LEMMA 3.8. *Sia* Σ *il sottoanello dell'anello associativo* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(D,D)$ *generato da* $\{\rho_{ab} \mid a,b \in A\}$.

Il gruppo additivo di D *acquista bthuttuha di modulo debtho irriducibile bopha l'anello associativo* Σ *e, perciò, bthuttuha di spazio vettoriale debtho* V *sopra il corpo* $k = \{t \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(D,D) \mid ts=st \text{ se } s \in \Sigma\} = \{t \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(D,D) \mid t\rho_{ab} = \rho_{ab}t \text{ se } a,b \in A\} = \{t \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(D,D) \mid (xt)ab = (xab)t \text{ se } x \in D \text{ e } a,b \in A\}$.

LEMMA 3.9. Sia $t \in k$; *se* $x \in D$, ponendo $xt^* = \delta(dt)x$ *si definisce un elemento* $t^* \in k$. *L'applicazione* $\tau : k \to k$, *definita da* $t\tau = t^*$ *se* $t \in k$, *è automorfismo del cohpo* k *il cui quadhato è l'automorfismo interno del cohpo* k *legato all'elemento* $c = 1_{dd}$ *di* k *fissato da* τ $(\tau^2 = \gamma_c,\ c\tau = c)$ *dove* $1_{dd} : D \to D$ *è definita da* $x1_{dd} = ddx$ *se* $x \in D$.

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del lemma 1.5, pensando $V = W = D$, $v = d$, $w = \delta$, $\rho = \lambda$, $\sigma = \mu$, si prova che τ è automorfismo del corpo k. Osservato che $c \in k$, si verifica che $c^{-1} = 1_{\delta\delta}$ con $1_{\delta\delta} : D \to D$ definita da $x1_{\delta\delta} = \delta\delta x$ se $x \in D$. Se $t \in k$ e $x \in D$ ri-

3.9), *si definisce* un *isomorfismo* ***additivo*** $\eta : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$. *Pertanto, l'isomorfismo* ***additivo*** $\phi = \nu^{-1}\eta\xi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ *è definito* ***da*** $f\phi = c_s gfg$ *se* $f \in \mathcal{L}$ *e la struttura algebrica* $\mathcal{L}_\phi$ *risulta* L-*anel*-Lo (*cfr. lemma* 3.3).

Il grüppo ***additivo*** $\mathcal{D}(+)$, ***hibp.*** $\mathcal{D}'(+)$, ***acquista bthuttuha di*** L-*anello* $\mathcal{D}(+,\omega)$, *hibp.* $\mathcal{D}'(+,\omega')$, con ***t'applicazione*** $\omega : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, *hibp.* $\omega' : \mathcal{D}' \times \mathcal{D}' \times \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$, *definita* ***da*** $(p,q,r)\omega = p(q\eta)r$ se' $p,q,r \in \mathcal{D}$, risp. $(p',q',r')\omega' = p'(q'\eta^{-1})r'$ *se* $p',q',r' \in \mathcal{D}'$.

L'isomorfismo ***additivo*** ν, *risp.* ξ, *è isomorfismo* ***di*** L-*anelli* $\nu : \mathcal{D}(+,\omega) \to \mathcal{L}_\phi$, *risp.* $\xi : \mathcal{D}'(+,\omega') \to \mathcal{L}_{\phi^{-1}}$. *Inoltre, l'isomorfismo* ***additivo*** η *è isomorfismo* ***di*** L-*anelli* $\eta : \mathcal{D}(+,\omega) \to \mathcal{D}(+,\omega')$.

Pertanto è assicurata ***La*** *commutatività del seguente diaghamma*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(+,\omega) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\eta"] & \mathcal{L}_\varphi \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{D}'(+,\omega') \arrow[r, "\xi"] & \mathcal{L}_{\varphi^{-1}}
\end{tikzcd}$$

in cui *tutte le applicazioni sono isomorfismi* ***di*** L-*anelli*.

Dimostrazione. Si verifica che ν, ξ e η sono isomorfismi additivi. Se $f \in \mathcal{L}$ risulta $f\phi = f\nu^{-1}\eta\xi = (fg)\eta\xi = (c_s fg)\xi = gc_s fg = c_s gfg$; quindi, per il lemma 3.3, la struttura algebrica $\mathcal{L}_\phi$ risulta L-anello e $\phi : \mathcal{L}_\phi \to \mathcal{L}_{\phi^{-1}}$ è isomorfismo di L-anelli. L'opera zione ternaria che compete a $\mathscr{L}_{\phi}$, risp. $\mathscr{L}_{\phi}^{-1}$, in quanto L-anello, si trasporta da $\mathscr{L}_{\phi}$ a $\mathscr{D}$ mediante ν^{-1}, risp. da $\mathscr{L}_{\phi^{-1}}$ a $\mathscr{D}'$ mediante $\overset{-1}{\xi}$, ottenendo l'operazione ternaria ω, risp. ω', dell'enunciato del lemma. Le altre affermazioni del lemma si verificano.

Il lemma è provato.

LEMMA 3.11. *Il monomorfismo additivo λ, risp. μ, è monomorfismo di L-anelli $\lambda : A \to \mathscr{D}(+,\omega)$, risp. $\mu : A \to \mathscr{D}'(+,\omega')$.*

$A\lambda$, risp. $A\mu$, è sottoL-anello di $\mathscr{D}(+,\omega)$, risp. $\mathscr{D}'(+,\omega')$ denso nella topologia finita di $\mathscr{D} = \mathrm{Hom}_k(V,W)$, risp. $\mathscr{D}' = \mathrm{Hom}_k(W,V)$, e contiene applicazioni lineari (di V in W, risp. di W in V) non nulle di rango finito. Quindi $A\lambda\nu$, risp. $A\mu\xi$, è sottoL-anello di $\mathscr{L}_{\phi}$, risp. $\mathscr{L}_{\phi^{-1}}$, denso nella topologia finita di $\mathscr{L}$ e contiene applicazioni lineari non nulle di rango finito. Inoltre risulta $\mu = \lambda\eta$.

In definitiva è assicurata la commutatività del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{D}(+,\omega) \arrow[r, "\nu"] \arrow[dd, "\eta"] & \mathscr{L}_{\varphi} \arrow[dd, "\varphi"] \\
A \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\mu"'] & & \\
 & \mathscr{D}'(+,\omega') \arrow[r, "\xi"] & \mathscr{L}_{\varphi^{-1}}
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Per il lemma 3.2 $A\lambda$, risp. $A\mu$, è denso nella topologia finita di $\mathrm{Hom}_k(V,W)$, risp. $\mathrm{Hom}_k(W,V)$. Proviamo che $A\lambda$ contiene applicazioni lineari non nulle di rango finito. Se $a \in D$, $a \neq o$, l'applicazione lineare $a\lambda : V \to W$ ha rango uno. Esistano $x,y \in V$ con $x(a\lambda)$ e $y(a\lambda)$ vettori di W linearmente indipendenti. Allora esistono $a_1, a_2 \in A$ tali che $x((aa_1a_2)\lambda) = x(a\lambda)(a_1\mu)(a_2\lambda) = o$ e $y((aa_1a_2)\lambda) = y(a\lambda)(a_1\mu)(a_2\lambda) \neq o$ per la densità di $A\lambda$ e di $A\mu$.
Inoltre $D' = \{z \in D \mid x(z\lambda) = o\}$ è ideale destro di A contenuto in D e diverso da (o) perché contiene $aa_1a_2 \neq o$; quindi $D' = D$. Ne segue $a \in D'$ e, perciò, $x(a\lambda) = o$; assurdo.

Il lemma è provato.

Osservazione 3.2. Con i dati e le notazioni dei lemmi 3.6,...,3.11, se $e, \varepsilon \in A$, sono equivalenti:.

1) $xe\varepsilon = x\varepsilon e = x$ se $x \in D$;

2) $\{e,\varepsilon\}$ è identità dell'L-anello A;

3) $e\lambda \in \mathscr{D}$ è applicazione biettiva e $\varepsilon\mu = (e\lambda)^{-1}$.

Questa osservazione, che riguarda gli L-anelli primitivi con ideali destri minimali, era già stata da noi fatta per gli L-anelli semplici, artiniani a destra e privi di ideali bilateri effettivi ([9], osservazione 1.2, p. 48).

1 lemmi 3.5,...,3.11 permettono di enunciare il

TEOREMA 3.2. Se A è *L-anello, sono equivalenti:*

1) A *è primitivo e possiede ideali destri* minimali;

2) A *appartiene alla classe* 1.1.

Osservazione 3.3.Le tecniche qui usate per classificare gli L-anelli primitivi con ideali destri minimali, che ci consentiranno, in particolare, di classificare gli L-anelli semplici, con ideali destri minimali e privi di ideali bilateri effettivi (cfr. il seguente numero 3.3), estendono, nel senso che precisiamo in questa osservazione, quelle usate in [9] (pp. 42-49) per classificare gli L-anelli semplici, artiniani a destra e privi di ideali bilateri effettivi.

Con i dati e le notazioni dei lemmi 3.6,....,3.11, si possono scegliere d,δ e D tali che ($d\delta x = \delta dx = x$ e) $xd\delta = x\delta d$ se $x\in D$ (cfr. osservazione 1.2). Allora si prova che il sottogruppo $D\delta d$ del gruppo additivo dell'ideale destro minimale D dell'L-anello A acquista struttura di corpo, $D\delta d(+,\circ)$, con la moltiplicazione definita da $a\circ b = a\delta b$ se $a,b \in D\delta d$. Se $x\delta d \in D\delta d$, $x\in D$, ponendo $(x\delta d)\chi = 1_{x\delta}$ dove $1_{x\delta} : D \to D$ è individuata da $z1_{x\delta} = x\delta z$ se $z\in D$, si definisce un'applicazione $\chi : D\delta d \to k$ che risulta antimonomorfismo del corpo $D\delta d(+,\circ)$ nel corpo k. χ è, di fatto, antimonomorfismo di $D\delta d(+,\circ)$ in $\mathrm{Hom}_Z(D,D)$ e definisce sul gruppo additivo di D una struttura di $D\delta d(+,\circ)$-spazio vettoriale sinistro.

Allo stesso modo, il sottogruppo $Dd\delta$ ($= D\delta d$) del gruppo additivo di D acquista struttura di corpo, $Dd\delta(+,*)$, con la moltiplicazione definita da $a*b = adb$ se $a,b \in Dd\delta$. Se $xd\delta \in Dd\delta$, $x\in D$, ponendo $(xd\delta)\chi' = 1_{xd}$ dove $1_{xd} : D \to D$ è individuata da $z1_{xd} = xdz$ se $z \in D$, si definisce un'applicazione $\chi' : Dd\delta \to k$ che risulta antimonomorfismo del corpo $Dd\delta(+,*)$ nel corpo k. χ' è, di fat to, antimonomorfismo di $Dd\delta(+,*)$ in $\mathrm{Hom}_Z(D,D)$ e definisce sul gruppo additivo di D una struttura di $Dd\delta(+,*)$-spazio vettoriale sinistro.

Inoltre, ponendo $tf = \delta t\delta$ se $t \in D\delta d$, si definisce un isomorfismo del corpo $D\delta d(+,\circ)$ sopra il Corpo $Dd\delta(+,*)$; il diagramma

$$\begin{tikzcd} D\delta d(+,\circ) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "1"'] & k \arrow[d, "\tau"] \\ Dd\delta(+,*) \arrow[r, "\chi'"] & k \end{tikzcd}$$

è commutativo.

Infine, ponendo $tf' = \delta t d$ se $t \in D\delta d$ si definisce un'automorfismo f' del corpo $D\delta d(+,\circ)$ e il diagramma

$$\begin{tikzcd} D\delta d(+,\circ) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "f'"] & k \arrow[d, "\tau"] \\ D\delta d(+,\circ) \arrow[r, "\chi"] & k \end{tikzcd}$$

è commutativo.

3.3. TEOREMA 3.3. Se A *è L-anello, sono equivalenti:*

1) A *è semplice,* con *Ideali destri minimali e privo di ideali bilateri effettivi;*

2) A *appartiene atta classe* 1.1 *ed è formato da applicazioni lineari di tango finito.*

Dimostrazione. 1) $\Longrightarrow$ 2). Sia D un ideale destro minimale di A. Da DDD = (o) segue D $\subseteq \delta(D,D)$ con $\delta(D,D)$ ideale bilatero di A; perciò è $\delta(D,D)$ = A e DDA = (o). Da DDA = (o) segue D $\subseteq \mu(D,A)$ = = A e DAA = (o). Da DAA = (o) segue D $\subseteq \sigma(A,A)$ = A e AAA = (o); assurdo. Percib risulta DDD $\neq$ (o). Per i lemmi 1.9 e 1.10, con le loro notazioni, pensando D = Δ e tenendo presente l'osservazione 1.2, (D,D,λ,μ) è A-modulo irriducibile, $\mathrm{Ker}\lambda = \{a \in A \mid D(a\lambda)=(o)\}$ è ideale bilatero di A. Da $\mathrm{Ker}\lambda$ = A segue (o) $\neq$ D = $\delta dD \subseteq \delta DA$ = = $D(A\lambda)$ = (o); assurdo. Quindi $\mathrm{Ker}\lambda$ = (o) e (D,D,λ,μ) è irriducibile e fedele (cfr. lemma 1.2). Abbiamo provato che A è L-anello primitivo; ad esso possiamo applicare le argomentazioni dei lemmi 3.8 ,...,3.11. Con le notazioni di, tali lemmi, $\{a\in A \mid a\lambda\nu \in \mathscr{L}$ ha rango finito$\}$ è ideale dell'L-anello A non nullo perché A contiene applicazioni lineari non nulle di rango finito (cfr. lemma 3.11) e, per l'ipotesi di semplicità, coincide con A.

2) $\Longrightarrow$ 1). Per il lemma -3.5 A(è L-anello primitivo e) possiede ideali destri minimali; per il lemma 3.4 A è semplice e privo di ideali bilateri effettivi.

Il teorema è provato.

TEOREMA 3.4. Se A è L-*anello, sonoequivalenti:*

1) A *è semplice,* con *ideali destri minimali,* ***phivo dl*** *ideati bilateri effettivi e possiede identità;*

2) A *è semplice, artiniano* ***a debtha*** *e privo* ***di*** *ideali bilateri effettivi;*

3) A *appartiene alla classe* 1.1 *e* $\dim_k V$ *è finita.*

Dimostrazione. 1) $\Longrightarrow$ 2). A è L-anello primitivo con ideali destri minimali (cfr. la dimostrazione di 1) $\Longrightarrow$ 2) del teorema 3.3). Ad A possiamo applicare le argomentazioni dei lemmi 3.8,...,3.11. Allora se $\{e,\varepsilon\}$ è identità di A, possiamo pensare $g = e\lambda$ ($eg^{-1} = \varepsilon\mu$; cfr. osservazione 3.2) e risulta $e\lambda\nu = gg^{-1} = 1$. Da 1) $\Longrightarrow$ 2) del teorema 3.3 $V1 = V$ deve avere dimensione finita e, perciò $A\lambda\nu = \mathscr{L}_\phi$. Resta da notare che $\mathscr{L}_\phi$ è L-anello semplice, artiniano a destra e privo di ideali bilateri effettivi (cfr. teroema 1 .1 di [9] , p. 43).

2) $\Longrightarrow$ 3) A è L-anello primitivo con ideali destri minimali (cfr. la dimostrazione di 2) $\Longrightarrow$ 1) del teorema 3.3). Ad A possiamo applicare le argomentazioni dei lemmi 3.8,...,3.11. Sia $\{v_i\}_{i\in N}$ parte libera numerabile di V. $D_i = \{f \in A\lambda\nu | v_1 f = ... = v_i f = 0\}$ è ideale destro dell'L-anello $A\lambda\nu$, sottoL-anello di $\mathscr{L}_\phi$ denso nella topologia finita di $\mathscr{L}$. Quindi la successione $\{D_i\}_{i\in N}$ è strettamente decrescente ; assurdo. Si conclude che $\dim_k V$ è finita e, percib, $A = \mathscr{L}_\phi$.

3) $\Longrightarrow$ 1). Da 2) $\Longrightarrow$ 1) del teorema 3.3 A è semplice, con ideali destri minimali e privo di ideali bilateri effettivi. Poiché $\dim_k V$ è finita risulta $A = \mathscr{L}_\phi$; $\{1,1\phi^{-1}\}$ è identità di A.

Il teorema è provato.

Osservazione 3.4. L'equivalenza 2) $\Longleftrightarrow$ 3) del'teorema 3.4 è stata da noi già stabilita in [9] (teoremi 1.1 e 1.2, pp. 43 e 48).

4. ANELLI TERNARI DI LISTER QUASI PRIMITIVI.

Nel numero 4.1 classifichiamo gli L-anelli quasi primitivi dando, per essi, un analogo del teorema di densità di Chevalley-Jacobson relativo ad anelli associativi primitivi.

Nel numero 4.2 classifichiamo gli L-anelli quasi primitivi con ideali destri minimali.

Nel numero 4.3 classifichiamo gli L-anelli semplici, con ideali destri minimali e ideali bilateri effettivi; tra questi classifichi2 mo anche quelli artiniani a destra ritrovando un risultato da noi già stabilito in [9].

4.1. Siano k un corpo (non necessariamente commutativo), V e W k-spazi vettoriali destri non nulli, $\alpha = \dim_k V$ e $\beta = \dim_k W$ (con α e β numeri cardinali non necessariamente finiti). Il gruppo additivo $T = \mathrm{Hom}_k(V,W) \oplus \mathrm{Hom}_k(W,V)$ acquista struttura di L-anello $k(\alpha,\beta)$ con l'applicazione $\omega : T \times T \times T \to T$ definita da $((f_1,f_2),(p_1,p_2),(q_1,q_2))\,\omega = (f_1p_2q_1, f_2p_1q_2)$ se $f_1,p_1,q_1 \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$, $f_2,p_2,q_2 \in \mathrm{Hom}_k(W,V)$.

Classe 11. Un L-anello R appartiene alla classe II se e solo se esistono un corpo k e numeri cardinali α e β non nulli (e non necessariamente finiti) tali che R è (isomorfo a un) sottoL-anello del l'anello $k(\alpha,\beta)$ per cui $\rho_1 = \{f_1 \in Hom_k(V,W) \mid (f_1,o) \in R\}$, risp. $\rho_2 = \{f_2 \in Hom_k(W,V) \mid (o,f_2) \in R\}$, sia sottogruppo denso nella topologia finita di $Hom_k(V,W)$, risp. $Hom_k(W,V)$. $R_1 = \{(f_1,o) \in R\}$ e $R_2 = \{(o,f_2) \in R\}$ sono ideali bilateri effettivi di R e risulta $R_1 \oplus R_2 \subset R$.

LEMMA 4.1. *Ogni L-anello appartenente alla classe* II *è quabi primitivo.*

Dimostrazione. Se R è L-anello appartenente alla classe 11, con i dati specificati per definire tale classe, ponendo $(f_1,f_2)\rho = f_1$, risp. $(f_1,f_2)\sigma = f_2$, se $(f_1,f_2) \in R$, si definisce un omomorfismo additivo $\rho : R \to Hom_k(V,W)$, risp. $\sigma : R \to Hom_k(W,V)$. (V,W,ρ,σ) è R-modulo irriducibile e propriamente quasi fedele. Infatti, verificato che (V,W,ρ,σ) è R-modulo, se $v \in V$, $v \neq o$, per ogni $w \in W$ esiste $f_1 \in Hom_k(V,W)$, con $(f_1,o) \in R$, tale che $vf_1 = w$, cioé $v((f_1,o)\rho) = w$ e $v(R\rho) = W$. Allo stesso modo si prova che, se $w \in W$, $w \neq o$, è $w(R\sigma) = V$. Risulta $R_1 = Ker\sigma$, $R_2 = Ker\rho$ e $R_2 = Ker\rho$ e $R_1 \cap R_2 = \{(o,o)\}$.

Il lemma è provato.

Siano A un L-anello quasi primitivo e (V,W,ρ,σ) un A-modulo irriducibile e propriamente quasi fedele. Con le notazioni dei lemmi 1.4 e 1.5, stante l'osservazione 1.1, ρ, risp. σ, è omomorfismo additivo $\rho : A \to Hom_k(V,W)$, risp. $\sigma : A \to Hom_k(W,V)$. Con tali da ti, sussiste il

LEMMA 4.2. Se $a \in A$, ponendo $a\pi = (a\rho, a\sigma)$, *si definisce* un *monomorfismo* di L-*anelli* $\pi : A \to k(\alpha, \beta)$, *dove* $\alpha = \dim_k V$ *e* $\beta = \dim_k W$. Se A_1 = Kera , *hibp.* A_2 = Kerp, *allora* $A_1\rho$, *risp.* $A_2\sigma$, *è bottoghuppo denbo* netta *topologia finita di* $\mathrm{Hom}_k(V,W)$, *risp.* $\mathrm{Hom}_k(W,V)$. *Pertanto* A *appahtiene alla classe* 11.

Dimostrazione. Si verifica che π è monomorfismo di L-anelli.

Proviamo che $A_1\rho$ è denso nella topologia finita di $\mathrm{Hom}_k(V,W)$. Sia U un sottospazio di dimensione finita del k-spazio vettoriale destro V. Vogliamo provare che, se $x \in V-U$, esiste $a \in A_1$ tale che $U(a\rho) = (o)$ e $x(a\rho) \neq o$. Ragioniamo per induzione sulla dimensione di U. Se $U = (o)$ e $x \neq o$ dobbiamo provare che esiste $a \in A_1$ tale che $x(a\rho) \neq o$. Per assurdo, sia $x(A_1\rho) = (o)$. $M = \{v \in V \mid v(A_1\rho) = (o)\}$ è sottogruppo di V non nullo perché contiene x; inoltre $M(A\rho)(A\sigma) \subseteq M$ perché, se $b,c \in A$ e $a \in A_1$, risulta $bca \in A_1$ (A_1 è ideale bilatero effettivo di A) e, se $v \in M$, $v(b\rho)(c\sigma)(a\rho) = v((bca)\rho) = o$, cioé $v(b\rho)(c\sigma) \in M$. Allora $(M, \langle M(A\rho)\rangle, \rho, \sigma)$ è sottomodulo non nullo di (V,W,ρ,σ), $M = V$ e risulta $V(A_1\rho) = (o)$; quindi $A_1 \subseteq A_2$, assurdo. Sia, ora, $\dim_k U = t \geq 1$, $x \in V-U$ e supponiamo vera la tesi per ogni sottospazio di V la cui dimensione è minore di t; ci proponiamo di raggiungere un assurdo negando la tesi per U e x. Sia $U = U_{t-1} \oplus U_1$ con U_{t-1} e U_1 sottospazi di U di dimensioni t-1 e 1 rispettivamente; inoltre, sia $v \in U_1$, $v \neq o$. Per ipotesi induttiva esiste

$a \in A_1$ tale che $U_{t-1}(a\rho) = (o)$ e $v(a\rho) \neq o$. $C = \{a \in A_1 \mid U_{t-1}(a\rho) = (o)\}$ è ideale destro di A e risulta $(o) \neq \{v(a\rho) \mid a \in C\} = v(C\rho) \subseteq W$; allora $(\langle v(C\rho)(A\sigma)\rangle, v(C\rho), \rho, \sigma)$ è sottomodulo non nullo di (V, W, ρ, σ) e $v(C\rho) = W$. Se $y \in W$, $y = v(a\rho)$ con $a \in C$, ponendo $yh = (v(a\rho))h = x(a\rho)$, si definisce un'applicazione $h : W \to W$. Infatti, $v(a\rho) = v(b\rho)$, con $a, b \in C$, comporta $v((a-b)\rho) = o$ ed essendo a-b e C risulta $U_{t-1}((a-b)\rho) = (o)$ assieme a $U_1((a-b)\rho) = (o)$, perciò $U((a-b)\rho) = (o)$; allora, avendo negato la tesi per U e x, è $x((a-b)\rho) = o$, cioé $x(a\rho) = x(b\rho)$. Risulta $h \in k'$; infatti, se $w, w' \in W$, $w = v(a\rho)$, $w' = v(b\rho)$, con $a, b \in C$, si ha $(w+w')h = (v(a\rho)+v(b\rho))h = (v(a\rho+b\rho))h = (v(a+b)\rho)h = x((a+b)\rho) = x(a\rho)+x(b\rho) = (v(a\rho))h+(v(b\rho))h = wh+w'h$, inoltre se $c, d \in A$, è $wh(c\sigma)(d\rho) = v(a\rho)h(c\sigma)(d\rho) = x(a\rho)(b\sigma)(c\rho) = x((acd)\rho) = (v((acd)\rho))h = v(a\rho)(c\sigma)(d\rho)h = w(c\sigma)(d\rho)h$, cioé $h(c\sigma)(d\rho) = (c\sigma)(d\rho)h$. Per il lemma 1.4 esiste (uno e un solo) $h_1 \in k$ tale che $h_1\tau = h_1^* = h$ (cfr. la dimostrazione del lemma 1.4); allora, se $a \in C$, si ha $(v(a\rho))h_1^* = (v(a\rho))h$, $vh_1(a\rho) = x(a\rho)$ e $(vh_1 - x)(a\rho) = o$, quindi $vh_1 - x \in U_t$, e $x \in U$ perché $vh_1 \in U_1$; assurdo.

Siano $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ una parte libera finita di V, $Y = \{y_1, \ldots, y_r\}$ una famiglia di vettori di W, U_i il sottospazio di V generato da $X - \{x_i\}$ $(i \in \{1, \ldots, r\})$. $C_i = \{a \in A_1 \mid U_i(a\rho) = (o)\}$ è ideale destro di A'e, come già provato, risulta $v(C_i\rho) = W$. Allora esiste $a_i \in C_i$ tale che $x_i(a_i\rho) = y_i$. Posto $a = a_1 + \ldots + a_r$, risulta $x_i(a\rho) = x_i\rho) = y_i$. Quindi $A_1\rho$ è sottogruppo denso nella topologia finita di $\mathrm{Hom}_k(V, W)$. Analogamente si prova che $A_2\sigma$ è sottogruppo denso nella topologia finita di $\mathrm{Hom}_k(W, V)$.

Il lemma è provato.

1 iemmi 4.1 e 4.2 permettono di enunciare il

TEOREMA **4.1.** Se **A** *è L-anello, sono equivalenti:*

1) A *è quasi primitivo;*

2) A *appartiene alla classe* 11.

4.2. Se k è un **corpo (non** necessariamente commutativo) e se a e β sono numeri **cardinali** non nulli (e non necessariamente finiti) **è individuato l'L-anello** $k(\alpha,\beta)$ che ha come gruppo additivo $T = \mathrm{Hom}_k(V,W) \oplus \mathrm{Hom}_k(W,V)$, con V e W k-spazi vettoriali destri tali che $a = \dim_k V$ e $\beta = \dim_k W$, e la cui operazione ternaria ω : $T \times T \times T \to T$ è definita da $((f_1,f_2),(p_1,p_2),(q_1,q_2))\omega = (f_1p_2q_1, f_2p_1q_2)$ Se $f_1,p_1,q_1 \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$, $f_2,p_2,q_2 \in \mathrm{Hom}_k(W,V)$ (cfr. numero 4.1).

Classe 11.1. Un L-anello R appartiene alla classe 11.1 se e solo se esistono un corpo k (non necessariamente commutativo) e numeri cardinali *a e* β non nulli (e non necessariamente finiti) tali che R è (isomorfo a un) **sottoL-anello dell'L-anello** $k(\alpha,\beta)$ per' cui $\rho_1 = \{f_1 \in \mathrm{Hom}_k(V,W) \mid (f_1,o) \in R\}$, risp. $\rho_2 = \{f_2 \in \mathrm{Hom}_k(W,V) \mid (o,f_2) \in R\}$, sia sottogruppo denso nella topologia finita di $\mathrm{Hom}_k(V,W)$, risp. $\mathrm{Hom}_k(W,V)$, e contenga applicazioni lineari non nulle di rango finito. $R_1 = \{(f_1,o) \in R\}$ e $R_2 = \{(o,f_2) \in R\}$ sono..

ideali bilateri effettivi di R e risulta $R_1 \oplus R_2 \subseteq R$.

LEMMA 4.3. *Siano* R un L-*anello appartenente alla classe* II.1, $F_1 = \{(f_1,o) \in R | \dim_k Vf_1$ è finita) *e* $F_2 = \{(o,f_2) \in R | \dim_k Wf_2$ è finita).

$F = F_1 \oplus F_2$ *è ideale* (non *nullo*) *di* R *e, se* 1 è *ideale* non *nullo di* R, *risulta:*

1) $\iota_1 = \{f_1 \in Hom_k(V,W) | (f_1,o) \in 1)$, *risp.* $\iota_2 = \{f_2 \in Hom_k(W,V) | (o,f_2) \in 1)$, *è sottogruppo denso nella* topologia *finita di* $Hom_k(V,W)$ *risp.* $Hom_k(W,V)$;

2) $I_1 = \{(f_1,o) \in 1)$, *risp.* $I_2 = \{(o,f_2) \in I\}$, *contiene* F_1, *risp.* F_2, *perciò* $F = F_1 \oplus F_2 \subseteq I_1 \oplus I_2 \subseteq 1$;

3) F *è* L-*anello semplice* con *ideali bilateri effettivi.*

Dimostrazione. 1). Sia $(f_1,f_2) \in 1$, $(f_1,f_2) \neq (o,o)$. Se $f_1 \neq o$, si fissino $x \in V$, $y \in W$, $y \neq o$, tali che $xf_1 = y$, con le notazioni usate per definire la classe 11.1, per la densità di ρ_1 e di ρ_2, esistono $p_2 \in \rho_2$, $q_1 \in \rho_1$, tali che $xf_1p_2q_1 \neq o$ e risulta $(f_1p_2p_1,o) = ((f_1,f_2),(o,p_2),(q_1,o))\omega \in I$ con $f_1p_2q_1 \neq o$; quindi $\iota_1 \neq (o)$. Con $i_1 \in \iota_1$, $i_1 \neq 0$, per la densità di ρ_2, esistono $p_2,q_2 \in \rho_2$ tali che $p_2i_1q_2 \neq o$, quindi $(o,p_2i_1q_2) = ((o,p_2),(i_1,o),(o,q_2))\omega \in I$ e $\iota_2 \neq (o)$. Allo stesso modo si ragiona se $f_2 \neq o$ e si conclude $\iota_1 \neq (o)$ e $\iota_2 \neq (o)$.

Fissiamo $f \in \iota_1$, $f \neq o$, $x \in V$,' $y \in W$, $y \neq o$, tali che $xf = y$. Se $\{x_1,\dots,x_n\}$ è parte. libera finita di V ($n \in N$) e se $\{y_1,\dots,y_n\}$ è una famiglia di vettori di W, per la densità di ρ_1 e di ρ_2, per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$, esistono $a_i \in \rho_1$, $b_1 \in \rho_2$ tali che $x_i a_i b_i = x$ e $x_j a_i b_i = o$ se $j \in \{1,\dots,n\}$, $j \neq i$, ed esistono $c_i \in \rho_2$, $d_i \in \rho_1$ tali che $yc_id_i = y_i$. Risulta $f_i = a_ib_ifc_id_i \in \iota_1$ (perché $(a_ib_if,o) = ((a_i,o),(o,b_i),(f,o))\omega \in I_1$ e $(a_ib_ifc_id_i,o) =$ $=((a_ib_if,o),(o,c_i),(d_i,o))\omega \in I_1$), $x_if_i = y_i$, $x_jf_i = o$ e, con $p = f_1+\dots+f_n \in \iota_1$, risulta $x_ip = x_if_iy_i$ e ι_1 è denso nella topologia finita di $Hom_k(V,W)$. Analogamente si prova che ι_2 è denso nella topolgia finita di $Hom_k(W,V)$.

2). Verificato che F è ideale non nulllo di R, per 1), $\phi_1 =$ $= \{f_1 \in Hom_k(V,W) \mid dim_k Vf_1$ è finita), risp. $\phi_2 = \{f_2 \in Hom_k(W,V) \mid$ $\mid dim_k Wf_2$ è finita$\}$, è sottogruppo denso nella topologia finita di $Hom_k(V,W)$, risp. $Hom_k(W,V)$. Proviamo che. risulta $\phi_1 \subseteq \iota_1$ e $\phi_2 \subseteq \iota_2$ Intanto è $\phi_1 \cap \iota_1 \neq (0)$ e $\phi_2 \cap \iota_2 \neq (o)$. Infatti, $\phi_1 \cap \iota_1 = (o)$ comporta $\phi_1\rho_2\iota_1 \subseteq \phi_1 = (o)$ (perché, se $f_1 \in \phi_1$, $r_2 \in \rho_2$, $i_1 \in \iota_1$, risulta $(f_1r_2i_1,o) = ((f_1,o),(o,r_2),(i_1,o))\omega \in F_1 \cap I_1$) e, se $i_1 \in \iota_1$, fissato $x' \in V$, $x' \neq 0$, per ogni $x \in V$ esistono $f_1 \in \phi_1$, $r_2 \in \phi_2$ tali che $x'f_1r_2 = x$ e, perciò, $xi_1 = x'f_1r_2i_1 = o$ e $\iota_1 = (o)$, assurdo. Quindi $\phi_1 \cap \iota_1 \neq (o)$. Allo stesso modo si prova.

$\phi_2 \cap \iota_2 \neq (o)$. Allora $(F_1 \cap I_1) \oplus (F_2 \cap I_2)$ è ideale non nullo di R contenuto in $F_1 \cap F_2$ (e in $I_1 \cap I_2$). Per 1), $\phi_1 \cap \iota_1$, risp. $\phi_2 \cap \iota_2$, è sottogruppo denso nella topologia finita di $Hom_k(V,W)$, risp. $Hom_k(W,V)$. Se $f_1 \in \phi_1$, sia $\dim_k Vf_1 = n$ ($n \in N$). Esiste una parte libera finita $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di V tale che, se U è il sottospazio di V da essa generato, risulta $V = \mathrm{Ker}\ f_1 \oplus U$ e $\{x_1f_1, \ldots, x_nf_1\}$ è parte libera di W. Esistono $r_2 \in \rho_2$, $p_1 \in \phi_1 \cap \iota_1$ tali che $x_if_1r_2p_1 = x_if_1$ se $i \in \{1, \ldots, n\}$. Osservato che è anche $xf_1r_2p_1 = xf_1$ se $x \in \mathrm{Ker}\ f_1$, si conclude $f_1 = f_1r_2p_1 \in \phi_1 \cap \iota_1$, $\phi_1 \subseteq \phi_1 \cap \iota_1$, $\phi_1 \subseteq \iota_1$. Allo stesso modo si prova $\phi_2 \subseteq \iota_2$. Pertanto $F = F_1 \oplus F_2 \subseteq I_1 \oplus I_2 \subseteq I$.

3). Osserviamo che F è sottoL-anello dell'L-anello $k(\alpha,\beta)$ tale che ϕ_1, risp. ϕ_2, è sottogruppo denso nella topologia finita di $Hom_k(V,W)$, risp. $Hom_k(W,V)$ (cfr. 1)), quindi F appartiene alla classe 11.1. Risulta $(F \times F \times F)_\omega \neq \{(o,o)\}$. Se I è ideale non nullo di F, per 2) (pensando R=F), dev'essere I=F, quindi F è L-anello semplice; F_1 e F_2 sono ideali bilateri effettivi di F.

Il lemma è provato.

LEMMA 4.4. *Ogni L-anello appartenente alla classe 11.1 è quasi primitivo e possiede ideali destri minimali.*

Dimostrazione. Sia R un L-anello appartenente alla classe 11.1. Osservato che R appartiene alla classe 11, per il lemma 4.1, R è quasi primitivo. Siano f_1 e ρ_1, $f_1 \neq 0$, $\dim_k Vf_1 = n$ ($n \in N$), $\{y_1,\ldots,y_n\}$ base di Vf_1 e $x_1 \in V$ tale che $x_1f_1 = y_1$. Esistono $a \in \rho_2$, $b \in \rho_1$ tali che $y_1ab = y_1$ e $y_iab = o$ se $i \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq 1$. Se U_1 è il sottospazio di V generato da x_1 e se $p = f_1ab$ ($p \in \rho_1$), risulta $x_1p = y_1$, $V = \text{Ker } p \oplus U_1$ con Ker p iperpiano di V. $D = \{(r,o) \in R \mid \text{Ker } p \subseteq \text{Ker } r\}$ è ideale destro minimale dell'L-anello R. Infatti, si verifica che D è ideale destro di R; risulta $D \neq (o)$ perché $(p,o) \in D$. Se D' è ideale destro di R con $\{(o,o)\} \subset D' \subseteq D$, fissato $(f,o) \in D'$, $f \neq o$, se $(r,o) \in D$ siano $s \in \rho_2$, $u \in \rho_1$ tali che $x_1fsu = x_1r$. Osserviamo che è anche $xfsu = xr$ se $x \in \text{Ker } p$ perché $(f,o),(r,o) \in D$. Quindi, essendo $V = \text{Ker } p \oplus U_1$, si conclude $r = fsu$, $(r,o) = (fsu,o) = ((f,o),(o,s),(u,o))\omega \in D'$ e $D' = D$.

Il lemma è provato.

Sia, ora e nei seguenti lemmi 4.5 e 4.6, A un L-anello quasi primitivo con ideali destri minimali. Se (V,W,ρ,σ) è un A-modulo irriducibile e propriamente quasi fedele, con le notazioni del lemma 4.2, sussiste il

LEMMA 4.5. *Ogni ideale destro minimale di A è contenuto in A_1*

oppure in A_2.

A *possiede* ideali *destri minimali* $D \subseteq A_1$ *e* $\Delta \subseteq A_2$ *per i quali risulta* $D A \Delta \neq (o)$.

Se $x \in D$, $x \neq o$, *è* $\dim_k V(x\rho) = 1$; *se* $y \in \Delta$, $y \neq o$, *è* $\dim_k W(y\sigma)=1$.

Dimostrazione. Se D è ideale destro minimale di A, sia $a \in D$, $a \neq o$. Risulta $a\pi = (a\rho, a\sigma) \neq (o,o)$ perché π è monomorfismo. Sia $a\rho \neq o$. Si fissino $v \in V$, $w \in W$, $w \neq 0$, tali che $v(a\rho) = w$. Esistono $b \in A_2$, $c \in A_1$ tali che $w(b\rho)(c\rho) \neq o$ per la densità di $A_2\sigma$ e di $A_1\rho$; perciò $v(a\rho)(b\sigma)(c\rho) = v((abc)\rho) \neq o$ con $abc \in D \cap A_1$ e $D \cap A_1 \neq (o)$. $D \cap A_1$ è ideale destro di A non nullo contenuto in D, quindi $D \cap A_1 = D$ e $D \subseteq A_1$. Proviamo che, se $a \in D$, $a \neq 0$, risulta $\dim_k V(a\rho) = 1$. Osservato che non può essere $a\rho = o$, esistano $x,y \in V$ con $x(a\rho)$ e $y(a\rho)$ vettori di W linearmente indipendenti. Per la densità di $A_2\sigma$ e di $A_1\rho$ esistono $b \in A_2$, $c \in A_1$ tali che $x((abc)\rho) = x(a\rho)(b\sigma)(c\rho) = o$ e $y((abc)\rho) = y(a\rho)(b\sigma)(c\rho) \neq o$. $D' = \{z \in D \mid x(z\rho) = o\}$ è ideale destro di A contenuto in D e non nullo perché contiene abc, quindi $D' = D$ e $x(a\rho) = 6$; assurdo. Pertanto $\dim_k V(a\rho) = 1$. Se risulta $a\sigma \neq o$ allora $D \subseteq A_2$ e $\dim_k W(a\sigma)=1$. Non può essere $a\rho \neq o$ e $a\sigma \neq 0$.

Supponiamo $D \subseteq A_1$ e fissiamo $a \in D$, $a \neq o$. Per quanto già provato $U = \mathrm{Ker}(a\rho)$ è iperpiano di V. Come nella dimostrazione del lemma 4.4 si prova che $D' = \{x \in A \mid U(x\rho) = (o)\}$ è ideale destro minimale di A. Risulta $a \in D \cap D'$. Esistono $b,c \in A_2$ tali che $(abc)\sigma = (b\sigma)(a\rho)(c\sigma)$ ha rango uno. $U' = \mathrm{Ker}((abc)\sigma)$ è iperpiano di W e

$A = \{y \in A_2\ U'(y\sigma) = (o)\}$ è ideale destro minimale di A contenuto in A_2.

Il lemma è provato.

Stante il lemma 4.5, con le notazioni dei lemmi 1.9 e 1.10, sussiste il

LEMMA 4.6. *L'A-modulo* (D,Λ,λ,μ) *è irriducibile e propriamente quasi fedele.*

Ogni A-modulo *irriducibile e propriamente quasi fedele è isomorfo a* (D,Δ,λ,μ).

Dimostrazione. La prova del lemma è analoga a quella del lemma 3.7.

1 lemmi 4.2, 4.4 e 4.5 permettono di enunciare il

TEOREMA 4.2. Se A *è L-anello, sono* equivalenti:

1) A *è quasi primitivo e possiede ideali destri* minimali;

2) A *appartiene alla classe* 11.1.

Osservazione 4.1. Si può fare un'osservazione analoga all'osservazione 3.3.

4.3. Proviamo il seguente lemma 4.7 nel quale A è un L-anello semplice con ideali bilateri effettivi.

LEMMA 4.7. A *possiede* esattamente due ideali bilateri effetti vi A_1 e A_2.

Risulta $A = A_1 \oplus A_2$ a *livello* di gruppi *additivi*, $\langle A_1A_2A_1\rangle = A_1$ e $\langle A_2A_1A_2\rangle = A_2$.

Se $a,b,c \in A$, $a = a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$, $c=c_1+c_2$ con $a_1,b_1,c_1 \in A_1$, $a_2,b_2,c_2 \in A_2$, si ha $abc = a_1b_2c_1+a_2b_1c_2$ con $a_1b_2c_1 \in A_1$, $a_2b_1c_2 \in A_2$

Dimostrazione. Sia B un ideale bilatero effettivo di A. Risulta $A = B \oplus \langle ABA\rangle$ perché $B + \langle ABA\rangle$ è ideale non nullo di A e $B \cap \langle ABA\rangle$ è ideale di A diverso da A. $B' = \langle ABA\rangle$ è ideale bilatero effettivo di A perché è ideale bilatero non nullo e, se fosse $B' = A$, risulterebbe $A = \langle AAA\rangle = \langle AB'A\rangle = \langle AABAA\rangle \subseteq B$, assurdo. Per quanto già provato è $A = B \oplus B'$ e $A = B' \oplus \langle AB'A\rangle$ con $\langle AB'A\rangle \subseteq B$, quindi $\langle AB'A\rangle = B$. Fissiamo un ideale bilatero effettivo A_1 di A e poniamo $A_2 = \langle AA_1A\rangle$. Se B è ideale bilatero effettivo di A diverso da A_1, risulta $A_1 \cap B = (o)$; infatti $A_1 \cap B$ è ideale bilatero di A e, se fosse effettivo, con $A = A_1 \oplus A_2$ e $A = B \oplus \langle ABA\rangle$ si avrebbe $A =$
$= (A_1 \cap B) \oplus \langle A(A_1 \cap B)A\rangle$ e risulterebbe $A_1 \cap B = A_1 = B$, assurdo. Quindi è $A_1AB = BAA_1 = (o)$ e, in conseguenza $A_2BA_2 = (0)$; osservato che è anche $A_1AA_2 = A_2AA_1 = (o)$, risulta $ABA = (A_1+A_2)B(A_1+A_2) =$
$= A_1BA_1 + A_1BA_2 + A_2BA_1 + A_2BA_2 = A_1BA_1 \subseteq A_1$, quindi $\langle ABA\rangle = A_1$ e $B =$
$= \langle AA_1A\rangle = A_2$. Infine $A_1A_1A_1 = A_2A_2A_2 = (o)$ perché $A_1A_1A_1$ e $A_2A_2A_2$ sono contenuti in $A_1 \cap A_2 = (0)$.

Il lemma è provato.

Osservazione **4.2.** Il risultato del lemma 4.7 era già stato stabilito da W.G.Lister ([5], p. 52) per gli L-anelli semplici, artiniani a destra e possedenti ideali bilateri effettivi e da noi sfruttato per classificare tali L-anelli ([9], pp. 49-54).

TEOREMA 4.3. Se A è L-*anello, sono equivalenti:*

1) A *è semplice,* con ***ideali*** *destri minimali e* ideali *bilateri effettivi.*

2) A *appartiene alla classe* 11.1 *e* ρ_1 *e* ρ_2 *sono formati* ***d a*** *applicazioni lineari* ***dl*** *rango finito.*

Dimostrazione. *1)* ==> 2). Stante il lemma 4.7, siano A_1 e A_2 gli ideali bilateri effettivi di A. Sia D un ideale destro minimale di A. $D \cap A_1 = D \cap A_2 = (o)$ comporta $DAA = D(A_1+A_2)(A_1+A_2) \subseteq DA_1A_2+DA_2A_1 \subseteq$ $\subseteq D \cap A_2 + D \cap A_1 = (o)$, $DAA = (o)$, $D \subseteq \sigma(A,A)$, $AAA = (o)$, assurdo. Quindi $D \cap A_1 \neq (o)$ oppure $D \cap A_2 \neq (o)$. Sia $D \cap A_1 \neq (o)$, cioé, Per la minimalità di D, sia $D \subseteq A_1$. Da $DA_2D = (o)$ segue $D \subseteq \delta(D,A_2)$ con $\delta(D,A_2)$ ideale bilatero di A, perciò $\delta(D,A_2) = A$ e $DAA=(o)$, assurdo. Quindi è $DA_2D \neq (o)$ ed esistono $d' \in D$, δ' e A_2 tali che $d'\delta'D \neq (o)$. $d'\delta'D$ è ideale destro non nullo di A contenuto in D; quindi $d'\delta'D = D$. Sia $d \in D$ tale'che $d'\delta'd=d'$. Risulta $d'\delta'd\delta'd =$ $= d'\delta'd = d'$, perciò $\delta = \delta'd\delta' \in A_2$, $\delta \neq o$. $\{x \in D \mid d'\delta'x = o\}$ è ideale destro di A contenuto in D e diverso da D perché non contiene d, quindi $\{x \in D \mid d'\delta'x = o\} = (o)$; perciò da $d'\delta'(d\delta'd-d) =$ $= d'\delta'd\delta'd - d'\delta'd = d' - d' = o$ segue $d\delta'd = d$. Quindi $d\delta d =$ $= d\delta''d\delta'd = d\delta'd = d$ e $\delta d\delta = \delta'd\delta'd\delta'd\delta' = \delta'\delta'd\delta' = \delta'd\delta'd\delta' = \delta$

$\{x \in A | d\delta x = x\}$ è ideale destro di A contenuto in D e non nullo perché contiene d, quindi $D = \{x \in A | d\delta x = x\}$.

$\Delta = \{y \in A | \delta dy = y\}$ è ideale destro di A non nullo perché contiene 6; ci proponiamo di provare che Δ è minimale. L'insieme $D\delta d$ è sottogruppo del gruppo additivo di D e, poiché D è ideale destro minimale di A, acquista struttura di corpo, con d come identità, mediante la moltiplicazione definita da $a \circ b = a\delta b$ se $a,b \in D\delta d$. L'insieme $\Delta d\delta$ è sottogruppo del gruppo additivo di, A. L'applicazione $f : D\delta d \to \Delta d\delta$, definita da xf = 6x6 se $x \in D\delta d$, è isomorfismo additivo; perciò il gruppo additivo $\Delta d\delta$ acquista struttura di corpo con la moltiplicazione definita da $a * b = adb$ se $a,b \in \Delta d\delta$ e f è isomorfismo di corpi. L'identità di Ad6 è $\delta = \delta d\delta = df$. Sia Δ' ideale destro di A con $(o) \subset \Delta' \subseteq \Delta$. Risulta $\Delta' D\delta \neq (o)$. Infatti, $\Delta' D\delta = (o)$ comporta $\delta \in \delta(\Delta', D)$ con $\delta(\Delta', D)$ ideale bilatero di A, perciò $\delta(\Delta', D) = A$ e $A'DA = (o)$. Da $\Delta' DA = (o)$ segue $D \subseteq \mu(\Delta', A) = A$ e $\Delta' AA = (o)$. Da $\Delta' AA = (o)$ segue $\Delta' \subseteq \sigma(A,A) = A$ e $AAA = (o)$, assurdo. Percib esistono $y' \in \Delta'$, $x \in D$ tali che $y'x\delta \neq o$. Risulta $y'x\delta = y'x\delta d \in$ Ad6 . Se y'' è l'inverso di y' nel corpo $\Delta d\delta$, risulta $\delta = (y'x\delta) * y'' = y'x\delta dy'' \in \Delta'$. Perciò, se $y \in \Delta$ è $y = \delta dy \in \Delta'$ e $\Delta' = \Delta$.

Stante il lemma 1.10, con le sue notazioni, l'A-modulo (D,Δ,λ,μ) è irriducibile. Risulta $\mathrm{Ker}\lambda = \{a \in A | a\lambda = o\} = \{a \in A | \delta Da = (o)\} = A_1$ 'perché $\delta DA_1 = (o)$ e $\delta DA \neq (o)$; allo stesso modo risulta $\mathrm{Ker}\mu = A_2$. Perciò (D,Δ,λ,μ) è irriducibile e propriamente quasi fedele. 1 lemmi 4.2, 4.5 e 4.3 permettono di concludere.

2) $\Longrightarrow$ 1). Per il lemma 4.4 A è (L-anello quasi primitivo e) possiede ideali destri minimali; per il lemma 4.3 A è semplice con ideali bilateri effettivi.

Il teorema è provato.

TEOREMA 4.4. ([9], *teoremi* 2.1 *e* 2.2, pp. 50 *e* 52). *Se* A *è* L-*anello, sono equivalenti:*

1) A *è semplice, artiniano a destra e con ideali bilateri effettivi;*

2) A *apprtiene alla classe* 11.1 *e* $\dim_k V$ *e* $\dim_k V$ *sono finite.*

Dimostrazione. 1). $\Longrightarrow$ 2). Stante il lemma 4.7, siano A_1 e A_2 gli ideali bilateri effettivi di A. Siano D un ideale destro minimale di A contenuto in A_1, Δ un ideale destro minimale di A contenuto in A_2. Da $DAD = (o)$ segue $D \subseteq \delta(D,\Delta)$ con $\delta(D,\Delta)$ ideale bilatero di A, percib $\delta(D,\Delta) = A$ e $D\Delta A = (o)$. Da $D\Delta A = (o)$ segue $A \subset \mu(D,A) = A$ e $DAA = (o)$. Da $DAA = (o)$ segue $D \subseteq \sigma(A,A) = A$ e $AAA = (o)$; assurdo. Perciò è $DAD \neq (o)$. Stanti'i lemmi 1.9 e 1.10, con le loro notazioni, (D,Δ,λ,μ) è A-modulo irriducibile e risulta propriamente quasi fedele perché $\mathrm{Ker}\lambda = A_1$ e $\mathrm{Ker}\mu = A_2$. Ad A possiamo applicare il lemma 4.2 pensando $V = \Delta$, $W = D$, $\rho = \mu$ e $\sigma = \lambda$. Sia $\{v_i\}_{i\in N}$ parte libera numerabile di V. $D_i = \{a\in A_1 | v_i(a\rho) = \ldots v_i(a\rho) = o\}$ è ideale destro di A. Risulta $D_{i+1} \subseteq D_i$ e, per la densità di $A_1\rho$, $D_{i+1} \neq D_i$ per ogni $i \in N$. Pertanto, la successione decrescente $\{D_i\}_{i\in N}$ di ideali destri di A non si stabilizza, assurdo. Quindi $\dim_k V$ è finita. Allo stesso modo si prova che $\dim_k W$ è finita.

2) $\Longrightarrow$ 1). Cfr. [9], teorema 2.1, p. 50.

Il teorema è provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] L.BADER e A.FRANCHETTA, *Anelli ternari di Hestenes quasi primitivi*, Rend. Mat. (in corso di stampa).

[2] F.BARTOLOZZI e G.PANELLA, *Anelli ternari di Hestenes semplici, artiniani e privi di ideali bilateri effettivi.* Ricerche Mat. 26 (1977) 255-275.

[3] A.CAGGEGI, *Anelli ternari di Hestenes semplici, artiniani a destra e privi di ideali bilateri effettivi.* Rend. Mat. (in corso di stampa).

[4] N.JACOBSON, *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 37 (1964).

[5] W.G.LISTER, *Ternary rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971) 37-55.

[6] O.LOOS, *Assoziative Tripelsysteme*, Manuscripta Math. 7 (1972) 103-112.

[7] H.C.MYUNG, *A characterization of the Jacobson radical in ternary algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973) 228-234.

[8] L.PROFERA, *Anelli ternari di Hestenes semplici e artiniani*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., Serie VIII, 62 (1977) 292-299.

[9] L.PROFERA, *Anelli ternari di Lister semplici e artiniani*, Ricerche Mat. 28 (1979) 39-60.

[10] A.G.SPERA, *Radicale di un anello di Hestenes*, Atti Accad. Sci. Lett. Arti Palermo, Parte 1, Serie IV, 35 (1975-76).

[11] A.G.SPERA, *Sugli anelli ternari di Hestenes*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, 27 (1978) 289-304.

[12] R.A.STEPHENSON, *Jacobson structure theory for Hestenes ternary rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 177 (1973) 91-98.

Lavoro pervenuto alla Redazione l'1 Dicembre 1980 ed accettato per la pubblicazione il 2 Marzo 1981 su parere favorevole di G.Panella e G.Zappa