Note di Matematica Vol.III, 267-280 (1983)

SULLE (k,n;f)-CALOTTE DI TIPO (1,n)(*)

Grazia RAGUSO - Luigia RELLA (**)

Summary. *This paper deals with (k,n;f)-caps in a Galois space* $S_{t,q}$ $(t \geq 3)$, *that is caps of type (1,n) with weighted points. A necessary condition for the existence of (k,n;f)-caps is found on the weight of the space. Finally, two particular classes of (k,n;f)-caps of type (1,n) are exhaustively investigated.*

INTRODUZIONE. Nel 1977 A. Barlotti in [2] ha introdotto la nozione di {k,n}-insieme con punti dotati di peso di uno spazio proiettivo, $S_{t,q}$, di dimensione $t \geq 2$ e ordine q, generalizzando così quella classica di {k,n}-insieme. Per $t = 2$ e $t \geq 3$ tali insiemi sono detti rispettivamente archi e calotte. Tale nozione, per $t = 2$ e con nome diverso, era già stata introdotta da M. Tallini Scafati in [12] allo scopo di dare caratterizzazioni grafiche per le curve algebriche dei piani di Galois. Lo studio di particolari insiemi di punti con peso è stato affrontato successivamente da M. Barnabei e da E. D'Agostini (cfr. [3], [5], [6], [7]). Le autrici in [8] hanno dato alcuni risultati sugli archi con punti dotati di peso di tipo (1,n).

(*) Dipartimento di Matematica - Via Nicolai, 2 - Università degli Studi - BARI

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Nella presente Nota si danno risultati sulle calotte con punti dotati di peso di tipo (1,n). Più precisamente, dopo aver richiamato, nel paragrafo 1, le nozioni fondamentali sulle (k,n;f)-calotte di tipo (1,n) in uno spazio di Galois $S_{t,q}$, $t \geq 3$, si studiano nel paragrafo 2, siffatte calotte, determinando una condizione, sul peso totale dello spazio, necessaria per la loro esistenza. Nel paragrafo 3 si prova la non esistenza di alcune (k,n;f)-calotte di tipo (1,n), e infine, nel paragrafo 4, si caratterizzano le (k,n;f)-calotte monoidali di tipo (1,n).

1. RICHIAMI DI CARATTERE GENERALE.

In uno spazio lineare $S_{t,q}$ $(q = p^h)$, $t \geq 3$, si denotino con $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$, rispettivamente, l'insieme dei punti e delle rette di $S_{t,q}$. Supposta assegnata una funzione f di $\mathcal{P}$ nell'insieme N dei numeri interi non negativi, si dice *peso del punto* $P \in \mathcal{P}$ il valore $f(P)$ e supporto di f l'insieme dei punti dello spazio di peso non nullo.

A partire da f si può considerare la funzione $F : \mathcal{R} \to N$ tale che per ogni $r \in \mathcal{R}$,

$$F(r) = \sum_{P \in r} f(P);$$

F(r) si dice *peso della retta* r.

DEFINIZIONE 1. Si dice (k,n;f)-*calotta* dello spazio $S_{t,q}$ un sottoinsieme K di punti dello spazio tale che

i) K è il supporto di f,

ii) $k = |K|$

iii) $n = \max \{F(r) : r \in \mathcal{R}\}$.

Si osservi che una {k,n}-calotta K (cfr. [11] è una (k,n;f)-calotta se si sceglie come f la funzione caratteristica di K.

Nel seguito, per escludere casi banali, si assumerà $n \geq 2$ e $1 < k < Q_t$, ove $Q_t = q^t + q^{t-1}+\ldots+q+1$. E' ovvio che, in tal caso, se $\omega = \max f$ allora $\omega \leq n-1$ e che, se si pone

$$\ell_i = |f^{-1}(i)| \qquad \text{per } i = 0,1,\ldots,\omega$$

e

$$w = \sum_{P\in\mathscr{P}} f(P) \qquad \text{(peso totale dello spazio o peso della calotta)},$$

si ha

$$w = \sum_{i=1}^{\omega} i\,\ell_i, \qquad k = \sum_{i=1}^{\omega} \ell_i\,. \tag{1.1}$$

DEFINIZIONE 2. Una (k,n;f)-calotta si dice *monoidale* se $\mathrm{Im} f = \{0,1,\omega\}$ e $\ell_\omega = 1$.

Si denoti con t_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ il numero delle rette di peso i. Gli interi t_1 si dicono *caratteri* della (k,n;f)-calotta.

DEFINIZIONE 3. Una (k,n;f)-calotta si dice di *tipo* $(n_1,n_2,\ldots n_h = n)$ con $n_1 < n_2 < \ldots<n_h$, se i caratteri diversi da zero sono soltanto t_{n_i} (per $i = 1,2,\ldots,h$).

D'ora in poi si studieranno (k,n;f)-calotte di tipo (1,n).

Da alcuni risultati di E. D'Agostini (cfr. [6], [7]) si ottengono le seguenti proprietà per le (k,n;f)-calotte di tipo (1,n):

a) $\mathrm{Im}\, f \subseteq \{0,1,\omega\}$.

b) Se P è un qualunque punto dello spazio si ha

$$\sum_{r\in[P]} F(r) = w + (Q_{t-1}-1) \quad f(P),$$

ove $[P]$ denota l'insieme delle rette per P.

c) Per il peso w di una (k,n;f)-calotta risulta:

$$Q_{t-1} \le \omega \le (n-\omega)Q_{t-1} + \omega = (n-\omega)\ q\ Q_{t-2} + n.$$

d) Indicati con v_1^s e v_n^s rispettivamente il numero delle rette di peso 1 e di peso n passanti per un punto di peso s risulta:

(1.2)
$$v_1^s = \frac{(n-s)\ q\ Q_{t-2} - w + n}{n-1},$$

$$v_n^s = \frac{(s-1)\ q\ Q_{t-2} + w - 1}{n-1}.$$

e) Condizione necessaria per l'esistenza di una (k,n;f)-calotta tipo (1,n) è che sia

$$q \equiv 0 \quad \text{mod. } (n-1).$$

f) I caratteri di una (k,n;f)-calotta di tipo (1,n) sono dati da

(1.3)
$$t_1 = \frac{Q_{t-1}}{n-1}\left(n\ \frac{Q_t}{Q_1} - w\right),$$

$$t_n = \frac{Q_{t-1}}{n-1}\left(w - \frac{Q_t}{Q_1}\right).$$

g) Il peso w dello spazio deve essere radice della equazione di secondo grado

$$(1.4) \qquad w^2-w(n\ Q_{t-1}+1) + n\ Q_{t-1}\ \frac{Q_t}{Q_1} + q\ Q_{t-2}\ \omega(\omega-1)\ell_\omega = 0.$$

Infine, si può verificare, con semplici considerazioni, che $|\mathrm{Im}\ f| \geq 2$, $\ell_o > 0$, $\ell_1 > 0$ e quindi dalla a) segue che $\mathrm{Im}\ f = \{0,1\}$ oppure $\mathrm{Im}\ f = \{0,1,\omega\}$, $\omega \geq 2$.

2. PROPRIETA' DELLE (k,n;f)-CALOTTE DI TIPO (1,n).

Se K è una (k,n;f)-calotta di tipo (1,n) di $S_{t,q}$ con $\mathrm{Im}\ f = \{0,1\}$, è immediato che K è una ordinaria {k,n}-calotta di tipo (1,n). Dai risultati di Tallini Scafati (cfr. [11] Propp. IX e X) segue che siffatte calotte non esistono per $n \leq q$, invece per $n=q+1$ esistono e risultano iperpiani di $S_{t,q}$.

D'ora in poi K indicherà una (k,n;f)-calotta di $S_{t,q}$ di tipo (1,n) con $\mathrm{Im}\ f = \{0,1,\omega\}$ ed $\omega \geq 2$.

PROPOSIZIONE 1. *Condizione necessaria perché esista in* $S_{t,q}$ *una (k,n;f)-calotta di tipo* (1,n) *con* $\omega \geq 2$ *è che il peso totale dello spazio sia* $w = (n-\omega)\ q\ Q_{t-2} + n$.

Dim. Da $\omega \geq 2$ segue $n \geq 3$ per cui, posto $j = n - \omega$, risulta $1 \leq j \leq n-2$. Tenendo conto della c), si conviene, per comodità, di scrivere il generico elemento dell'insieme dei valori di w nella forma $w = j\ q\ Q_{t-2} + n - i$ con $0 \leq i \leq (j-1)\ q\ Q_{t-2} + n - 1$.

Il numero delle rette di peso n passanti per un punto di peso $\omega = n-j$ è dato da

$$v_n^{n-j} = Q_{t-1} - \frac{i}{n-1}.$$

Poiché per un punto di peso ω passano solo rette di peso n, essendo la (k,n;f)-calotta di tipo (1,n), deve essere $v_n^{n-j} = Q_{t-1}$ da cui i=0, onde l'asserto.

E' di immediata verifica la

PROPOSIZIONE 2. *Se* K *è una* (k,n;f)-*calotta di* $S_{t,q}$, $t \geq 3$, *di tipo* (1,n) *l'intersezione di* K *con uno spazio subordinato* $S_{h,q}$, $h \geq 2$, *contenente un punto di peso* ω *e una retta di peso* 1, *è una* (k',n;f') *-calotta di tipo* (1,n) *con* $f'=f_{|S_{h,q}}$ *e* $\mathrm{Im}\, f' = \{0,1,\omega\}$.

E' opportuno, per il seguito, determinare i parametri v_1^s, v_n^s, t_1, t_n, ℓ_1, ℓ_{n-j} per t = 3 e $w = j(q^2+q)+n$ con $j = n-\omega$ e $1 \leq j \leq$ $\leq$ n-2 (cfr. Prop. 1).

Dalle (1.2) e (1.3) si ha

$$v_1^o = \frac{(n-j)(q^2+q)}{n-1}, \qquad v_n^o = \frac{(j-1)(q^2+q)}{n-1} + 1 ,$$

$$v_1^1 = \frac{(n-j-1)(q^2+q)}{n-1}, \qquad v_n^1 = \frac{j(q^2+q)}{n-1} + 1,$$

$$v_n^{n-j} = q^2+q+1, \qquad t_1 = \frac{q(q^2+q+1)(nq-jq-j)}{n-1} \tag{2.1}$$

$$t_n = (q^2 + q + 1) \left[\frac{q}{n-1}(jq - q+j) + 1\right] .$$

Si noti che i valori che esprimono i suddetti parametri risultano effettivamente degli interi per ogni valore di q,n e j tenuto conto che, a norma della e),(n-1) divide q.

I parametri ℓ_1 e ℓ_{n-j} si ottengono tenendo conto delle (1.4) e (1.1). Più precisamente, poiché il peso totale w dello spazio è soluzione dell'equazione (1.4) si ha:

$$[j(q^2+q)+n]^2 - [j(q^2+q)+n][n(q^2+q+1)+1] + n(q^2+q+1)(q^2+1)+q(q+1)(n-j)(n-j-1)\ell_{n-j} = 0$$

da cui

$$(2.2)\qquad \ell_{n-j} = \frac{q^2[n(j-1)-j^2] + (n-1)(n-j)}{(n-j)\ (n-j-1)} + \frac{q\,j}{n-j-1} - \frac{n\,q}{(q+1)(n-j)(n-j-1)} ,$$

ove $n > j + 1$, essendo $\omega \geq 2$. Dalla (1.1) allora

$$\ell_1 = j\ (q^2+q) + n - (n-j)\ \ell_{n-j}$$

e quindi

$$(2.3)\qquad \ell_1 = \frac{q^2(n-1) - j\ (q+1)}{n-j-1} + \frac{n\,q}{(q+1)(n-j-1)} .$$

Si osservi che ℓ_1 e ℓ_{n-j}, per definizione, sono interi. Pertanto, dalle espressioni ottenute per essi si possono trarre nuove condizioni di divisibilità del tipo della condizione e).

Nei due paragrafi successivi si studieranno le (k,n;f)-calotte di tipo (1,n) con $\omega = 2$ e con $\omega = n-1$ rispettivamente.

3. (k,n;f)-CALOTTE DI TIPO (1,n) ED $\omega = 2$ IN $S_{t,q}$.

PROPOSIZIONE 3. *Se* K *è una (k,n;f)-calotta di tipo* (1,n) *di* $S_{3,q}$ *con* $\omega=2$ *allora risulta* $n = q+1$ *e* q *pari.*

Dim. Da $\omega = 2$ segue $j = n-2$, e quindi, per la (2.3),

$$\ell_1 = 2\,q^2 - (n-2)(q+1) + \frac{nq}{q+1}\ .$$

Poiché ℓ_1 è intero si ha $(q+1)|n$ e quindi $q + 1 < n$. D'altronde dalla e) $n < q + 1$, pertanto $n = q + 1$.

Sostituendo nella (2.2) $j = n-2$ e $n = q+1$ si ha

$$\ell_2 = q^2 + \frac{q}{2}\,[q\,(q-3) - 1]\ .$$

E' evidente che, per q dispari, ℓ_2 non è intero, onde l'asserto.

Dalla Prop. precedente segue

PROPOSIZIONE 4. *Non esistono in* $S_{3,q}$, q *dispari,* (k,n;f)-*calotte di tipo* (1,n) *con* $\omega = 2$.

PROPOSIZIONE 5. *In* $S_{3,q}$, q ($\neq 2$) *pari, non esistono* (k,n;f)-*calotte di tipo* (1,n) *con* $\omega = 2$.

Dim. Si supponga che esista una (k,n;f)-calotta K, di tipo (1,n) con $\omega = 2$. Dalle (2.1), (2.2), (2.3) e per la Prop. 3 si ricava

$$v_1^o = 2(q+1)\ , \qquad v_n^o = q^2-q-1$$

$$v_1^1 = q + 1, \quad v_n^1 = q^2, \quad v_n^2 = q^2+q+1$$

$$t_1 = (q^2+q+1)(q+1), \quad t_n = (q^2+q+1)(q^2-q)$$

$$\ell_1 = q^2+q+1, \quad \ell_2 = \frac{q}{2}\,(q^2-q-1).$$

Sia P un punto di peso 2 e si consideri il piano π passante per P e per una generica retta r di peso 1. Per la Prop. 2 l'intersezione di K con π è un (k',n;f')-arco, K', con $1 < k' < q^2 + q + 1$, di tipo (1,n). Si noti che, poiché $q = 2^h$, $h > 1$, archi siffatti possono esistere (cfr. Corollario 1, [8]). Inoltre per la Prop. 3 di [8] i punti di peso 1 di K' sono quelli di una retta e i punti di peso 2 sono quelli di un $\{\frac{q(q-1)}{2}, \frac{q}{2}\}$-arco di tipo $(0, \frac{q}{2})$. Su π ci sono esattamente q+1 rette di peso 1 (cfr. le (3.1) e la Prop. 3 [8]), per cui, essendo $t_1 = (q+1)(q^2+q+1)$, si deduce che le t_1 rette si distribuiscono a (q+1) a (q+1) sui q^2+q+1 piani per P.

E' immediato che le $(q^2+q+1)(q^2-q)$ rette di peso n di $S_{3,q}$ sono distribuite su ciascun piano per P in numero di $q^2-(q+1)$ rette non passanti per P e q+1 rette passanti per P.

In definitiva, le rette dello spazio, rispetto all'insieme, K^*, dei punti di K di peso 2, sono o 0-secanti o $\frac{q}{2}$ secanti, per cui K^* risulterebbe una $\{\frac{q}{2}(q^2-q-1), \frac{q}{2}\}$-calotta di tipo $(0, \frac{q}{2})$, il che contraddice il risultato di Tallini Scafati (cfr. Prop. VIII n.5 , [10]) secondo cui in $S_{3,q}$ non esistono calotte di tipo $(0,n^*)$ con $2 \leq n^* \leq q-1$ onde l'asserto.

PROPOSIZIONE 6. *Non esistono in* $S_{t,q}$, $t > 3$, $q \neq 2$, *(k,n;f)-calotte di tipo* (1,n) *con* $\omega = 2$.

Dim. Se esistesse una (k,n;f)-calotta K di tipo (1,n) con $\omega = 2$ in $S_{t,q}$, $t > 3$, $q \neq 2$, l'intersezione di K con un $S_{3,q}$, contenente un punto di peso 2 ed una retta di peso 1, sarebbe una (k',n,f')-calotta di tipo (1,n) con $\omega = 2$ in $S_{3,q}$, $q \neq 2$, contraddicendo la Prop. 4 o la 5.

4. (k,n;f)-CALOTTE DI TIPO (1,n) CON $\omega = n-1$ IN $S_{t,q}$.

PROPOSIZIONE 7. *Tutte e sole le* (k,n;f)-*calotte di* $S_{t,q}$ $t \geq 3$, *di tipo* (1,n) *con* $\omega = n-1$, $n \geq 3$ *sono le* (k,n;f)-*calotte monoidali aventi come punti di peso* 1 *i punti di un iperpiano.*

Dim. Sia K una (k,n;f)-calotta di tipo (1,n) con $\omega = n-1, n \geq 3$. Dalla (1.4) per $w = q\,Q_{t-2} + n$ (cfr. Prop. 1) si ha:

$$(q\,Q_{t-2} + n)^2 - (q\,Q_{t-2} + n)(n\,Q_{t-1}+1) + \frac{n\,Q_{t-1}\,Q_t}{Q_1} +$$

$$+ q\,Q_{t-2}\,(n-1)(n-2)\ell_{n-1} = 0.$$

Con calcoli privi di difficoltà si ottiene

$$(2.6) \qquad \ell_{n-1} = \frac{Q_1\,[q\,Q_{t-2}(n-1) + 1 + n\,(n-1)] - n(Q_t+q)}{Q_1(n-1)(n-2)} .$$

Essendo $\ell_{n-1} \geq 1$, risulta

$$\frac{Q_1\,[q\,Q_{t-2}(n-1) + 1 + n(n-1)] - n(Q_t+q) - Q_1(n-1)(n-2)}{Q_1(n-1)(n-2)} \geq 0,$$

da cui

$$Q_1\,[q\,Q_{t-2}(n-1) + 2n-1\,] - n\,(Q_t + q) \geq 0;$$

poiché

$$Q_t = q\,Q_{t-1} + 1,$$

si ha

$$Q_{t-2}(-q^2+qn - q) + n - q - 1 \geq 0,$$

cioé

$$q^t + (2-n)q\, Q_{t-1} - n+1 \leq 0.$$

Si verifica facilmente che il primo membro della precedente disequazione si fattorizza come segue

$$(q-n+1)Q_{t-1}.$$

Poiché $Q_{t-1} > 0$ e $(n-1)|q$ si ha $q = n-1$.

Sostituendo $n = q+1$ nella (2.6), si ottiene $\ell_{n-1}=1$ e dalla prima delle (1.1) $\ell_1 = Q_{t-1}$; pertanto, K è una (k,n;f)-calotta monoidale.

Si prova, qui di seguito, che i Q_{t-1} punti di peso 1 appartengono ad un medesimo iperpiano di $S_{t,q}$.

Siano $P,P_1,\dots,P_{t-1}$ t punti di peso 1 non appartenenti ad uno stesso spazio subordinato di dimensione t-2 (certamente esistenti) e sia $S_{t-1,q}$ l'iperpiano da essi individuato. Si prova che il suddetto iperpiano è formato da punti di peso 1. Si procede per induzione rispetto alla dimensione degli spazi subordinati, $S_{d,q}$, $d \geq 1$, di $S_{t-1,q}$ individuati da d+1 punti dei t punti fissati.

Per d=1, $S_{1,q}$ è la retta congiungente due dei t punti di peso 1 scelti. Tale retta ha peso $n = q+1$ e quindi non può contenere l'unico punto di peso n-1, per cui ogni punto di $S_{1,d}$ ha peso 1.

Sia, ora, $S_{d,q}$, $d \geq 2$, il sottospazio di $S_{t-1,q}$ individuato da $P,P_1,\dots\dots,P_d$ ed $S_{d-1,q}$ quello individuato da $P_1,P_2,\dots,P_d$. Per l'ipotesi di induzione, $S_{d-1,q}$ ha solo punti di peso 1; pertanto tutte le rette per P e per ciascun punto di di $S_{d-1,q}$ hanno i loro punti di peso 1; dunque $S_{d,q}$ è costituito da punti di peso 1. Poiché $|S_{d-1,q}| = \ell_1$, i punti di peso 1 sono tutti e soli quelli di un iperpiano.

Infine, sia K una (k,n;f)-calotta monoidale avente come punti di peso 1 i punti di un iperpiano. Per la prima delle (1.1), essendo $\ell_1 = Q_{t-1}$, $\ell_\omega = 1$ e $w = (n-\omega)q\, Q_{t-2} + n$ (cfr. Prop. 1) si ha $\omega=n-1$. Detto P l'unico punto di peso n-1, le rette non passanti per esso hanno o peso 1 o peso n(= q+1) a seconda che incontrano l'iperpiano in un punto o appartengono ad esso; mentre le rette per P hanno ovviamente peso n, dunque K è di tipo (1,n). Onde l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BARLOTTI: "*Sui* {k,n}-*archi di un piano lineare finito*, "Boll. U.M.I." (3), 11 (1956), 553-556.

[2] A. BARLOTTI: "*Recent results in Galois geometries useful incoding theory*", Colloques Internationaux du C.N.R.S. n. 276, Théorie de l'Information Cachan, 4-8 July 1977, editions du C.N.R.S. (1978), 185-187.

[3] M. BARNABEI: "*On arcs with weighted point*", Journal of statistical planning and inference, 3 (1979), 279-286.

[4] A. COSSU: "*Su alcune proprietà di* {k,n}-*archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito*", Rend. di Mat. (5), 20, (1961), 271-277.

[5] E. D'AGOSTINI: "*Alcune osservazioni sui* {k,n;f)-*archi di un piano finito*", Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna, Rendiconti, Serie XIII, 6(1979), 211-218.

[6] E. D'AGOSTINI: "*On caps with weighted points in* PG(t,q), Discrete Mathematics, 34 (1981), 103-110.

[7] E. D'AGOSTINI: "*Sulla caratterizzazione delle* (k,n;f)-*calotte di tipo* (n-2,n), Atti Sem.Mat.Fis.Univ.Modena, XXIX, (1980), 263-275.

[8] G. RAGUSO - L. RELLA: "*Sui* (k,n;f)-*archi di tipo* (1,n) *di un piano proiettivo finito*", Note Mat. 3(1983), 307-320.

[9] B. SEGRE: "*Lectures on modern geometry*", Cremonese, Roma (1961).

[10] M. TALLINI SCAFATI: "*Sulla caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di* $S_{r,q}$, Rend. di Matematica 26, (1967), 273-303.

[11] M. TALLINI SCAFATI: "*Calotte di tipo* (m,n) *in uno spazio di Galois* $S_{r,q}$", Rend. Acc. Naz. Lincei (8), 53, (1972) 71-81.

[12] M. TALLINI SCAFATI: "*Graphic curves on a Galois plane*", Atti del Convegno di Geometria Combinatoria e sue Applicazioni, Perugia 11-17 sett. 1970 (Oderisi, Gubbio 1971), 395-401.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 9 Dicembre 1983
ed accettato per la pubblicazione il 15 Maggio 1984
su parere favorevole di U.Bartocci e G. Tallini