Note di Matematica Vol. III, 245-265 (1983)

DISEGUAZIONI VARIAZIONALI PER FLUIDI VISCOSI INCOMPRIMIBILI CON CONVESSO DIPENDENTE DAL TEMPO

Rodolfo SALVI (*)

Sunto. *Si dimostra l'esistenza di una soluzione debole di disequazioni variazionali per fluidi viscosi incomprimibili omogenei e non omogenei con ostacolo dipendente dal tempo.*

1. INTRODUZIONE. Sia $\Omega \subset R^n$ $(n = 2,3)$ un tubo con sezione iniziale Γ_1, sezione finale Γ_2 e parete laterale Γ_3; si assume che il tubo termini in Γ_2. Si considera il moto di un fluido viscoso incomprimibile che attraverso Γ_1 scorre in Ω e passa nell'atmosfera attraverso la sezione Γ_2 con un vincolo sul flusso del fluido su Γ_2 dipendente dal tempo.

Nel § 1 si considera lo scorrimento in Ω di un fluido viscoso incomprimibile omogeneo (nel senso che la densità del fluido è costante) retto dal sistema di Navier-Stokes.

Nel § 3 si considera lo scorrimento in Ω di un fluido viscoso incomprimibile non omogeneo (nel senso che la densità del fluido non è costante) retto dal sistema. 3.1), 3.2).

Il modo con cui il fluido entra ed esce da Ω sarà precisato in seguito.

(*) Dipartimento di Matematica - Via Bonardi, 9 - MILANO

Un problema di scorrimento di un fluido viscoso incomprimibile omogeneo in Ω con convesso indipendente dal tempo e con diverse condizioni al bordo rispetto a quelle considerate in questa nota è stato trattato in [2] [3].

Inoltre per i fluidi di Bingham, il problema del § 2, ma con convesso indipendente dal tempo, è stato trattato in [5].

2. FLUSSO IN Ω PER FLUIDI VISCOSI INCOMPRIMIBILI OMOGENEI.

Il moto di un fluido viscoso incomprimibile omogeneo è retto dal sistema di Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\nabla u - \mu\,\Delta u = f - \nabla P$$

$$\nabla\cdot u = 0$$

ove $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t)\ldots u_n(x,t))$ è il vettore velocità, $P = P(x,t)$ è la pressione e μ la viscosità (considerata costante) e $u\cdot\nabla u = \Sigma\, u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$, f la forza esterna. Si considera il seguente problema

PROBLEMA 1. Trovare il campo delle velocità u ed il campo delle pressioni P in un flusso di un fluido viscoso incomprimibile omogeneo in Ω soddisfacente le seguenti condizioni iniziali ed al contorno

$a_1)$ $u(x,0) = z(x)$ $\quad x \in \Omega$

$b_1)$ $u(x,t) = 0$ $\quad x \in \Gamma_3;\ t \geq 0$

$$c_1)\quad (P\,\nu - \mu \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\nu_i) = 0 \qquad\qquad x \in \Gamma_2;\ t > 0$$

$$d_1)\quad u(x,t)\cdot\nu \geq 0\ ,\ u(x,t)\cdot\nu \leq \psi(x,t) \qquad\qquad x \in \Gamma_2;\ t > 0$$

$$c_1)\ \nu((P + \frac{1}{2}|u|^2)\nu - \mu \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\nu_i) = \vec{\alpha}\nu$$

$$|u\cdot\nu| = |u| \qquad\qquad x \in \Gamma_1;\ t \geq 0$$

ove ν è la normale esterna ad Ω e $\vec{\alpha}$, ψ sono funzioni date. Diamo l'interpretazione fisica delle condizioni sopra esposte.

La condizione a_1) assegna il valore della velocità in tutti i punti di Ω per $t = 0$. La condizione b_1) impone che sulla parete Γ_3 la velocità del fluido sia nulla. La condizione c_1 è la condizione di equilibrio sulla superficie Γ_2 tra la forza interna e la pressione atmosferica (considerata nulla). La condizione d_1) interpreta il fatto che il fluido esce da Ω attraverso Γ_2 col flusso controllato dal vincolo Ψ. La condizione e_1) assegna la densità del flusso di energia del fluido su Γ_2 e si assume che la velocità su Γ_2 è diretta come la normale a Ω.

Diamo la formulazione variazionale del problema 1.
Introduciamo qualche classico spazio funzionale. Siano

$$\mathscr{V} = \{v | v \in (C^\infty(\bar{\Omega}))\ :\ v_{\Gamma_3} = 0;\ |v\cdot\nu|_{\Gamma_1} = |v|_{\Gamma_1};\quad \nabla\cdot v = 0\}$$

$$H^S = (\Omega) = \{\text{spazio di Sobolev di ordine S su } L^2(\Omega)\}$$

$$H^1_o(\Omega) = \{\text{chiusura di } C^\infty_o(\Omega) \text{ in } H^1(\Omega)\}$$

$$V = \{\text{ chiusura di } \mathscr{V} \text{ in } (H^1(\Omega))^n\}$$

$H = \{\text{chiusura di } \mathscr{V} \text{ in } (L^2(\Omega))^n\}$

Si pone

$(u,v) = \int u_i \, v_i \, dx \; ; \qquad |u|^2 = (u,u);$

$((u,v))_s = (u_i, v_i)_{H^s(\Omega)} \; ; \qquad ((u,v))_1 = (u,v));$

$\|u\|_s^2 = ((u,u)_s \; ; \quad \|u\|^2 = ((u,u); \quad a(u,v) = ((u,v))$

$(u\cdot v, z)_\Gamma = \int_\Gamma (u\cdot v)(z\cdot\nu)dx$

$u^+ = (\mathrm{Sup}(u_i, 0)) \qquad ; \qquad u^- = (\inf(u_i, 0))$

$(i = 1,2,\ldots u)$

(si usa la convenzione della somma sugli indici ripetuti).

Consideriamo per i vettori u,v,z l'espressione (quando ha senso)

$$b(u,v,z) = \int u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} z_i \, dx$$

Vale la seguente relazione

$$|b(u,v,z)| \leq c \, \|u\|^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}} \|z\|^{\frac{1}{2}} \, |z|^{\frac{1}{2}} \, \|v\|_{\frac{n}{2}}$$

ed assumendo $\nabla\cdot u = 0$ si ha

$$b(u,v,z) = -b(u,z,v) + \int_\Gamma (v\cdot z) u\cdot\nu \, dx$$

Sia $\Psi(x,t)$ una funzione definita in Ω e $\Psi_{\Gamma_2}(x,t) \geq 0$ ($\Psi_{\Gamma_2}(x,t)$ è la traccia di $\Psi(x,t)$ su Γ_2); si pone

$$K(t) = \{v \mid v \in L^2(0,T;V);\quad 0 \leq v\cdot\nu\big|_{\Gamma_2} \leq \Psi_{\Gamma_2}(x,t)$$

$$W(t) = \{v \mid v \in K(t) \cap H^{\frac{n}{2}}(\Omega)\ ;\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;H)\}$$

Il problema 1 si riduce a trovare una funzione $u = (u_1(x,t), u_2(x,t),\dots,u_n(x,t)$ appartenente al convesso $K(t)$ tale che

$$2.1.\quad (\frac{\partial u}{\partial t}, v-u)+\mu a(u,v-u)+b(u,u,v-u) + (\alpha - \frac{1}{2}|u|^2, v-u)_{\Gamma_1} \geq (f,v-u)$$

$$\forall\ v \in K(t).$$

Si ha, così, una disequazione variazionale con un ostacolo sul bordo Γ_2 dipendente dal tempo.

Diamo la definizione di soluzione debole del problema 2.1.

u è detta soluzione debole del problema 2.1. se $u \in K(t)$ e soddisfa $\forall v \in K(t)$ la seguente disequazione

$$2.2.\quad \int_0^T \{(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u) + \mu\, a(u,v-u) + b(u,u,v) + (\alpha, v-u)_{\Gamma_1} - \frac{1}{2}(|u|^2, v)_{\Gamma_1}\}\, dt \geq -\frac{1}{2}\ |v(0) - u(0)|^2$$

Dimostriamo il seguente teorema

TEOREMA 1. *Siano*

$$u(x,0) = 0\quad ;\quad \alpha(x,0)=0;\ \alpha(x,t) \in L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$$

$$\Psi(x,t) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \quad ; \qquad \Psi(x,t)_{\Gamma_2} \geq 0$$

$$f(x,t) \in L^2(0,T;H)$$

Allora esiste una funzione u tale che

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \cap K(t)$$

e soddisfacente 2.2. $\forall\ v \in W(t)$.

Si considera il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$2.3. \quad \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}, w_j\right) + \mu a(u_m, w_j) + b(u_m, u_m, w_j) + \left(\alpha - \frac{1}{2}|u|^2; w_j\right)_{\Gamma_1}$$

$$- \frac{1}{2}(|u_m|^2, w_j)_{\Gamma_2} + m((u_m\cdot\nu-\psi)^+, w_j)_{\Gamma_2} + m((u_m\cdot\nu)^-, w_j)_{\Gamma_2} = (f, w_j)$$

$$(j = 1,2,3,\dots,m)$$

ove $w_1, w_2, \dots w_m \dots$ è una base di $V \cap (H^{\frac{n}{2}}(\Omega))^3$. Il sistema 2.3. ammette una soluzione u_m per t_m sufficientemente piccolo. Proviamo l'esistenza della soluzione u_m in tutto $(0,T)$ con stime a priori standard.

Posto

$$u_m = \sum_1^m c_{jm}(t) w_j$$

moltiplichiamo 2.3. per $c_{jm}(t)$ e sommiamo su j da 1 ad m, si ottiene

$$2.4. \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + \mu\|u_m\|^2 + b(u_m, u_m, u_m) + m((u_m\cdot\nu - \psi)^+, u_m)_{\Gamma_2}$$

$$+ m((u_m\cdot\nu)^-,u_m)_{\Gamma_2} + (\alpha - \tfrac{1}{2}|u_m|^2,u_m)_{\Gamma_1} - \tfrac{1}{2}(|u_m|^2,u_m)_{\Gamma_2} = (f,u_m).$$

Dato che

$$b(u_m,u_m,u_m) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} |u_m|^2\, u_m\cdot\nu\, dx;$$

$$((u\cdot\nu-\psi)^+,u_m)_{\Gamma_2} = ((u\cdot\nu-\psi)^+,(u_m\cdot\nu-\psi))_{\Gamma_2} + ((u_m\cdot\nu-\psi)^+,\psi)_{\Gamma_2};$$

$$((u_m\cdot\nu)^-,u_m)_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} |(u_m\cdot\nu)^-|^2\, dx .$$

La 2.4 diviene

2.5. $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + \mu\|u_m\|^2 + \int_{\Gamma_2} |(u_m\cdot\nu-\psi)^+|^2 dx + m\int_{\Gamma_2} |(u_m\cdot\nu)^-|^2 dx \leq f,u_m) - (\alpha,u_m)$$

da cui segue che

2.6. u_m appartiene ad un insieme limitato di $L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$ indipendente da m;

inoltre si ha

2.7. $$m\int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} |(u_m\cdot\nu-\psi)^+|^2 dx\right)dt \leq c_1 \ ; \quad m\int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} |(u_m\cdot\nu)^-|^2 dx \leq c_2\right.$$

c_1, c_2 costanti indipendenti da m.

Proviamo che

2.8. $\dfrac{\partial u_m}{\partial t}$ appartiene ad un insieme limitato di $L^2(0,T;\tilde{V}')$ indipendente da m.

$(\tilde{V}'$ è il duale di $\tilde{V} = \{v|\ v \in L^2(0,T;(H_o^{n/2}(\Omega))^3);\quad \nabla\cdot v = 0\ .$

Infatti, sia $v \in \tilde{V} \cap V_m$ ove V_m è lo spazio generato da $w_1, w_2, w_3, \ldots w_m$, allora si ha

$$|\int_0^T (\frac{\partial u_m}{\partial t}, v)dt| \leq \int_0^T (\mu \|u_m\|\ \|v\| + c\|u_m\|\|u_m\|_{\frac{3}{2}} + |f|\|v\|)dt$$

da cui segue

$$|\int_0^T (\frac{\partial u_m}{\partial t}, v)dt| \leq c\ \|v\|_{\frac{n}{2}}$$

così è provata la 2.8.

Dalle 2.6, 2.7,2.8, ne consegue che

2.9. $\lim_{m\to\infty} u_m =_{L^2(0,T,V)} u$ nella topologia debole

2.10 $\lim_{m\to\infty} u_m =_{L^\infty(0,T,H)} u$ nella topologia debole*

2.11. $\lim_{m\to\infty} u_m =_{L^2(Q)} u$ nella topologia forte

2.12. $\lim_{m\to\infty} (u_m\cdot\nu - \psi)^+ =_{L^2(0,T,\Gamma_2)} 0$ nella topologia forte

2.13. $\lim_{m\to\infty} (u_m\cdot \nu =_{L^2(0,T;\Gamma_2)} 0$ nella topologia forte

2.14. $\lim_{m\to\infty} u_m =_{L^2(0,T;(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} u$ nella topologia debole

2.15 $$\lim_{m\to\infty} u_m \underset{L^2(0,T,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))}{=} u$$ nella topologia forte.

Dalle 2.12, 2.13 ne consegue che $u \in K(t)$. Ora, con procedimenti standard, si ottiene che u è soluzione della disequazione.

Consideriamo, ora, il seguente problema.

PROBLEMA II. Trovare il campo delle velocità u ed il campo delle pressioni P in un flusso di un fluido viscoso incomprimibile omogeneo in Ω soddisfacente le seguenti condizioni iniziali ed al contorno

$a_2)$ $u(x,0) = z(x)$ $\qquad x \in \Omega$

$b_2)$ $u(x,t) = 0$ $\qquad x \in \Gamma_3;\ t > 0$

$c_2)$ $\nu\left(\left(P+\frac{1}{2}|u|^2\right)\nu-\mu\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i\right) = \alpha\cdot\nu$ $\qquad x \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2; t\geq 0$

$d_2)$ $u(x,t)\cdot\nu \leq \psi(x,t)\cdot\nu$ $\qquad x \in \Gamma_2;\ t \geq 0$

$e_2)$ $|u\ (x,t)| = |u(x,t)\cdot\nu|$ $\qquad x \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2; t\geq 0$

ove ν è la normale esterna ad Ω ed α,ψ sono vettori assegnati. L'interpretazione fisica delle condizioni sopra esposte sono quelle del problema I.

Siano inoltre

$$\tilde{V} = \{v|\ v \in V\ ,\ |v\cdot\nu\ |_\Gamma = |v\ |_\Gamma\}$$

$$\tilde{K}(t) = \{v|\ v \in K(t)\cap \tilde{V}\ \}$$

$$\tilde{W}(t) = \{v |\ v \in \tilde{K}(t) \cap (H^{\frac{n}{2}}(\Omega))^n , \qquad \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T); H)$$

Il problema II conduce alla disequazione $\forall v \in K(t)$

$$2.16. \qquad \int_0 \{(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u) + \mu a(u,v-u) + b(u,u,v-u) + (\alpha - \frac{1}{2}|u|^2, v-u)_\Gamma$$
$$-(f,v-u)\}dt \geq 0.$$

Si dice che u è soluzione debole della 2.16 se soddisfa le seguenti relazioni

$$2.17. \qquad \int_0^T \{(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u) + \mu a(u,v-u) + b(u,u,v) + (\alpha, v-u)_\Gamma$$
$$- \frac{1}{2}(|u|^2, v)_\Gamma - (f,v-u) \quad dt \geq - |v(0) - u(0)|^2$$
$$\forall v \in \tilde{W}(t), \qquad u \in \tilde{K}(t).$$

La esistenza di una soluzione debole della 2.16 si ottiene procedendo come nel teorema 1. Diamo il seguente risultato di regolarità.

TEOREMA 2. *Si assume che* $n = 2$

$$u(x,0) = 0; \quad \alpha(x,0) = 0; \quad \alpha(t) \in H^1(0,T;(L^2(\Gamma))^3$$

$$\psi(x,t) \in H^1(0,T,\tilde{V}) \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \in L^2(0,T;H); \quad \psi \cdot \nu_{|\Gamma_2} \geq 0$$

$$f \in H^1(0,T;H)$$

Allora esiste una unica soluzione della disequazione 2.16 tale che

$$u \in L^2(0,T;\tilde{V}) \cap L^\infty(0,T;H) \cap \tilde{K}(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;\tilde{V}) \cap L^\infty(0,T;H)$$

Riprendendo la parte iniziale della dimostrazione del teorema 1) si ha che esiste una soluzione u_ε dell'equazione $\forall v \in \tilde{V}$.

$$2.18. \quad \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\, v\right) + \mu a(u_\varepsilon v) + b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + \left(\alpha - \frac{1}{2}|u_\varepsilon|^2, v\right)_\Gamma$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left((u_\varepsilon \cdot \nu - \psi\cdot\nu)^+\, v\right)_{\Gamma_2} = (f,v)$$

Differenziamo rispetto a t l'equazione 2.18 (ovvero si considerano i quozienti differenziali) ed otteniamo

$$2.19. \quad \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}, v\right) + a\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\right) + b\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u_\varepsilon, v\right) + b\left(u_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\right) +$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon \cdot \nu - \psi\cdot\nu)^+, v\right)_{\Gamma_2} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha - \frac{1}{2}|u_\varepsilon|^2\right), v\right)_\Gamma = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, v\right)$$

Poniamo nella 2.19 , $v = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t}$ ed integriamo tra 0 e t

il risultato si ha

$$\int_0^t \Big\{ \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \mu a\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + b\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$$

$$+ b\left(u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon \cdot \nu - \psi\cdot\nu)^+, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_\Gamma$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha - \frac{1}{2}|u|^2\right), \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\} dt = 0 .$$

Osserviamo che

2.20 $$\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon \cdot \nu - \psi \cdot \nu)^+, \frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon - \psi)\right)_{\Gamma_2} dt = \int \left|\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon \cdot \nu - \psi \cdot \nu)^+\right|^2_{L^2(\Gamma_2)} dt$$

Inoltre da ben noti teoremi di immersione si ha

$$\left|b\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right)\right| \le \frac{\mu}{8} \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2 + c \|u_\varepsilon\| \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2$$

$$\left|b\left(u_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right)\right| \le \frac{\mu}{8} \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2 + c \|u_\varepsilon\|^4_{L^4(\Omega)} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2$$

2.21. $$\int_\Gamma |u_\varepsilon| \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dx \le \frac{\mu}{8} \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2 + c\, |u_\varepsilon| \, \|u_\varepsilon\|^2 \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2$$

$$\int_\Gamma \left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right| \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right| dx \le \frac{1}{2} \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{\mu}{8} \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\| \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2$$

Dalle 2.20, 2.21 segue che

2.22. $$\frac{1}{2} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 + \frac{\mu}{2} \int_0^t \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2 dt \le \frac{1}{2} \left|\frac{\partial u_\varepsilon(0)}{\partial t}\right|^2 + c \int_0 \{ \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right|^2 +$$

$$\left\|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\| + \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 (|1 + \|u\|^2 + \|u\|^4_{L^4(\Omega)} + |u_\varepsilon| \, \|u_\varepsilon\|^2)\} dz$$

da cui

$$\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 \leq \left\{\left|\frac{\partial u_\varepsilon(0)}{\partial t}\right|^2 + \int_0^t \left(\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right|^2 + \left\|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\|^2\right) dt\right\} \exp$$

$$c \int_0^t (1 + \|u_\varepsilon\|^2 + \|u_\varepsilon\|^4_{L^4(\Omega)} + \|u_\varepsilon\| \cdot \|u_\varepsilon\|^2)\, d\tau$$

Dato che

$$u_\varepsilon \in L^4(0,T;(L^4(\Omega))^3) \subset L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$$

si ha

$$\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 \leq \left|\frac{\partial u_\varepsilon(0)}{\partial t}\right|^2 + c$$

Ponendo nella 2.18 $t = 0$ si ottiene

2.23. $$\left(\frac{\partial u_\varepsilon(0)}{\partial t}, v\right) = (f(0), v).$$

Dalle 2.22, 2.23. segue che

$$\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right| < c_1 \quad ; \quad \int_0^T \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\| dt \leq c_2 .$$

Ora, con procedimenti standard, si dimostra che u soddisfa la disequazione 2.16 ed è unica.

3. FLUSSO IN Ω PER FLUIDI VISCOSI INCOMPRIMIBILI NON OMOGENEI.

Il moto dei fluidi viscosi incomprimibili non omogenei è retto dal sistema

3.1. $$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \nabla u - \mu \Delta u = f - \nabla p$$

3.2. $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \nabla \rho = 0$$

equazione di continuità

$$\nabla . u = 0$$

ove $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots u_n(x,t))$ è la velocità, $P=P(x,t)$ la pressione $\rho = \rho(x,t)$ è la densità del fluido, μ la viscosità (considerata costante) f la forza esterna e $\rho u . \nabla u = \Sigma \rho u_i \frac{\partial}{\partial x_i} u$.

Consideriamo il seguente problema per i fluidi viscosi incomprimibili non omogenei.

PROBLEMA III. Trovare il campo delle velocità u, il campo delle pressioni P e delle densità ρ in un flusso di un fluido viscoso incomprimibile non omogeneo in Ω soddisfacente le seguenti condizioni iniziali ed al contorno

a_3) $$u(x,0) = z(x) \qquad x \in \Omega$$

b_3) $$\nu \cdot ((p + \tfrac{1}{2}\rho |u|^2) \nu - \mu \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i = \alpha \cdot \nu \qquad x \in = \Gamma_1 U \Gamma_2 ; t \geq 0$$

c_3) $$u(x,t)\, \nu \leq \psi(x,t)\, \nu \qquad x \in \Gamma_2 ;\ t \geq 0$$

d_3) $$|u(x,t) \cdot \nu| = |u(x,t)| \qquad x \in \Gamma = \Gamma_1 U \Gamma_2$$

e_3) $$u(x,t) = 0 \qquad x \in \Gamma_3 \quad t \geq 0$$

ove ν è la normale esterna ad Ω ed α e ψ sono vettori assegnati .

L'interpretazione fisica delle condizioni sopra esposte sono quelle del problema I).

Il problema III) conduce al sistema

3.3. $(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \nabla u, v-u) + \mu a(u,v-u) + (\alpha - \frac{1}{2}\rho|u|^2, v-u)_\Gamma \geq (f,u)$

3.4. $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u.\nabla\rho = 0.$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

Diamo la definizione di soluzione debole del sistema 3.3.,3.4. . Si dice che (u,ρ) è soluzione debole del sistema 3.3, 3.4 se soddisfa le seguenti relazioni $\forall v \in \tilde{W}$

3.5. $$\int_0^T \{(\rho \frac{\partial v}{\partial t}, v-u) + \int \rho u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(v-u)_i dx + \int_\Gamma \rho u_i v_i u.\nu \, dx.$$

$$- \frac{1}{2}\int_\Gamma \rho|v|^2 u \, dx + (\alpha, v-u)_\Gamma + \mu a(u,v-u)\} \, dt \geq |\sqrt{\dot\rho}(o)(u(o)-v(o))|^2$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u.\nabla\rho = 0 \quad \text{in forma debole}$$

$$u \in L(0,T;\tilde{V}) \cap L^2(0,T;H) \cap \tilde{K}(t)$$

$$\rho \in L^\infty(Q)$$

La disequazione 3.5 si deduce dalla 3.3, formalmente, nel seguente modo. Moltiplicando per $u(v-u)$ la 3.4 ed integriamo il risultato in x e t e ne sommiamo il risultato alla 3.3. così si ottiene

3.6. $$\int_0^T \{(\frac{\partial \rho u}{\partial t}, v-u) + \int \rho u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(v-u)dx + \int u\nabla\rho u \, (v-u)dx + \mu a(u,v-u)$$

$$+(\alpha\ v-u)_\Gamma - \frac{1}{2}(\rho|u|^2, v-u)_\Gamma - (f, v-u)\}dt \geq 0$$

Aggiungendo e togliendo $\int_o^T (\frac{\partial \rho v}{\partial t}, v-u)dt$ alla 3.6. si ottiene

$$\int_o^T (\rho\frac{\partial v}{\partial t}, v-u) + (v\ \frac{\partial \rho}{\partial t}, v-u) + \int \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (v-u)_i dx + \int \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} u_i (v-u)_i\ dx$$

$$+\ \mu a(u, v-u) + (\alpha, v-u)_\Gamma - \frac{1}{2}(\rho|u|^2, v-u)_\Gamma = (f, v-u)\}\ dt \geq$$

$$\frac{1}{2} \int_o^T (\ \frac{\partial \rho}{\partial t}(v-u), v-u)dt$$

da cui segue

$$3.7.\quad \int_o^T \{(\rho\ \frac{\partial v}{\partial t}, v-u) - \int v_i (v-u)_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}\ dx + \int \rho u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} (v-u)_i\ dx +$$

$$\int \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} u_i (v-u)_i dx + \mu a(u, v-u) + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} |v-u|^2\ dx + (\alpha, v-u)_\Gamma -$$

$$-\ \frac{1}{2}(\rho|u|^2, v-u)_\Gamma - (f, v-u)\}\ dt \geq |\sqrt{\rho(o)}(u(o)-v(o))|^2.$$

Ora, si ha

$$-\int v_i (v-u)_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} dx + \int \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (v-u)_i dx + \int \frac{\partial u_j \rho}{\partial x_j} u_i (v-u)_i dx +$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} |v-u|^2 dx = -\frac{1}{2} \int |v-u|^2 \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}\ dx + \int \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (v-u)_i\ dx =$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma}|v-u|^2\rho u\ \nu dx + \int\rho u_j \frac{\partial(v-u)_i}{\partial x_j}(v-u)_i dx + \int \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(v-u)_i\ dx =$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\rho|v|^2 u\ \nu dx - \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\rho|u|^2\ u\ \nu dx + \int_{\Gamma}\rho(v\ u)u\,\nu\, dx + \int\rho u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(v-u)_i\ dx$$

per cui la 3.7. diventa la 3.4.

Dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA 3. *Si assume che*

$$f \in L^2(0,T;H)\ ;\quad u(x,0) \in H\cap\tilde{K}(0),\qquad \rho_o \in L^\infty(\Omega)$$

$$0<\delta\leq\rho_o\leq\beta \qquad\qquad \alpha \in L^2(0,T;(L^2(\Gamma))^3$$

$$\psi \in L^2(0,T;\tilde{V})\ ;\quad \frac{\partial\psi}{\partial t} \in (L^2(Q))^n\ ;\quad \psi(x,t)\ \nu\big|_{\Gamma_2} \geq 0$$

ove δ,β sono costanti strettamente positive.
Allora esistono funzioni u,ρ tali che

$$u \in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)\cap\tilde{K}(t)\ ;\qquad \rho \in L^\infty(Q)$$

e soddisfacenti il sistema 3.5.

Si considera una famiglia di approssimazioni interne V_m di $\tilde{V}$. Si assume che

V_m è un sottospazio di $\tilde{V}$ di dimensione m;

$\forall v \in \tilde{V}$ esiste una successione $v_m \in V_m$ tale che $v_m \to v$ in $\tilde{V}$;

tutte le componenti delle funzioni v in V_m appartengono a $C^1(\bar{\Omega})$. Poiché $\tilde{V}$ è denso in H ed $u_\circ \in H \cap \tilde{K}(0)$, è possibile trovare $u_{\circ m} \in V_m$ tale che $u_{\circ m} \to u_\circ$ in H per $m \to \infty$.

Sia $w_1, w_2, \dots, w_m$ una base di V_m. Consideriamo il seguente sistema (indichiamo con $u_m = u_{\varepsilon m}$)

$$(\rho_m \frac{\partial u_m}{\partial t} w_k) + \int \rho_m u_{jm} \frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} w_{ik}\, dx + \mu\, a(u_m, w_k) +$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\, ((u_m \cdot \nu - \psi \cdot \nu)^+, w_k) + (\alpha - \frac{1}{2} \rho_m |u_m|^2, w_k)_\Gamma = (f, w_k) \qquad (k=1,2,\dots m)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + u_m \nabla \rho_m = 0$$

Con procedimenti standard si ottiene (cfr. |1|)

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T,H)} \le c_1 \; ; \qquad \int_0^T \|u_m\|^2\, dt \le c_2$$

3.8.

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T |(u_m \cdot \nu - \psi \cdot \nu)^+|^2 dt \le c_3 \; ; \quad \|\rho_m\|_{L^\infty(Q)} \le c_4$$

con c_1, c_2, c_3, c_4 costanti indipendenti da m ad ε ;

3.9. $\lim_{m\to\infty} u_m \underset{L^2(0,T;V)}{=} u_\varepsilon$ nella topologia debole

3.10 $\lim_{m\to\infty} u_m \underset{L^\infty(0,T;H)}{=} u_\varepsilon$ nella topologia debole*

11. $\lim_{m\to\infty} \rho_m \underset{L^\infty(Q)}{=} \rho_\varepsilon$ nella topologia debole*

3.12. $\lim_{m\to\infty} (u_m \cdot \nu - \psi\cdot\nu)^+ =_{L^2(0,T;(L^2(\Gamma_2))^3} (u_\varepsilon \nu - \psi\,\nu)^+$ nella topologia debole

3.13. $\lim_{m\to\infty} u_m =_{L^2(0,T);(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^3)} u_\varepsilon$ nella topologia debole

Inoltre, con procedimento analogo a quello seguito in |4| si ottiene

3.14 $$\int_0^{T-h} |u_m(t+h) - u_m(t)|^2 \, dt \leq c_\varepsilon h$$

ove c_ε è una costante che dipende da ε ma non da h e m. Dalla 1.9. e dalla 3.14 si ha

3.15. $\lim_{m\to\infty} u_m =_{(L^2,Q))^3} u_\varepsilon$ nella topologia forte

3.16. $\lim_{m\to\infty} u_{m\,|\Gamma} =_{L^2(0,T;(L^2(\Gamma)^3)} u_{\varepsilon|\Gamma}$ nella topologia forte

Per cui $u_\varepsilon, \rho_\varepsilon$ soddisfano il sistema $\forall v \in H^1(0,T;\tilde{V})$

3.17. $$- \int_0^T \{ (\frac{\partial v}{\partial t}, \rho_\varepsilon u_\varepsilon) - \int \rho_\varepsilon u_{j_\varepsilon} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_{i_\varepsilon} dx + \mu a(u_\varepsilon v) + \frac{1}{\varepsilon}((u_\varepsilon \nu - \psi\cdot\nu)^+)_{\Gamma_2}$$

$$+ (\alpha - \frac{1}{2}\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2, v)_\Gamma + (\rho, u_\varepsilon v\, u_\varepsilon)_\Gamma - (f,v)\} dt \geq c(|V(T)| + |v(0)|)$$

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + u_\varepsilon \nabla \rho_\varepsilon = 0 \quad \text{(in forma debole)} .$$

Mostriamo, ora che u converge fortemente a u in $(L^r(Q))^3$

con $r > 2$. A tale proposito, mostriamo che u_ε soddisfa la relazione 3.14 con c indipendente da ε e da h.

Posto nella 3.17

$$v = \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} (u_\varepsilon(s) - \psi(s))ds$$

ed osservando che

$$\int_0^T ((u_\varepsilon \nu - \psi \nu)^+, \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} (u_\varepsilon - \psi)ds)_\Gamma \, ds \leq \frac{c}{\sqrt{h}} \int_0^T |(u_\varepsilon \nu - \psi \nu)^+|^2 \, dt$$

con procedimento analogo a quello seguito in |4| si ottiene la relazione

$$\int_0^{T-h} |u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t)|^2 \, dt \leq c\, h.$$

Allora si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon \underset{(L^r(Q))^n}{=} u \quad \text{nella topologia forte}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_{\varepsilon|\Gamma} \underset{L^2(0,T;(L^2(\Gamma)^3)}{=} u_\Gamma \quad \text{nella topologia forte}$$

Usando il procedimento considerato per ricavare la disequazione 3.5 e passando al limite $\varepsilon \to 0$ si ottiene il risultato.

Osservazione - Il teorema 1 vale per n arbitrario ed il teorema 3 continua a valere per $\rho \geq 0$ con $u \in L^2(0,T°,V)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J.L.LIONS: "*Problems connected with navier-Stokes non linear evolution equations*", Editor G. Grandall, Accademic Press, 1978.

[2] M. MULLER - J.NAUMANN: "*On evolution inequalities of a modified Navier-Stokes type*", I-II, Appl. Mat. 23(1978), 174-184;397-407.

[3] G.PROUS: "*On a unilateral problem for the Nav er-Stokes equations*", Rend. Ac. Naz. Lincei, nota I, vol. III, fasc. 3 (1972), nota LII, fasc. 4 (1972).

[4] R. SALVI: "*Disequazioni variazionali per i fluidi viscosi incomprimibili non-omogenei*", in corso di stampa sulla Rivista della Università di Parma.

[5] R. SALVI:"*Qualche problema unilatero per i fluidi di Bingham*", in corso di stampa su Istituto Lombardo (Rend. Sc.) All 5 (1981).

Lavoro perventuo alla Redazione il 3 Ottobre 1983
ed accettato per la pubblicazione il 16 Aprile 1984
su parere favorevole di M. Biroli e di G. Prouse