Note di Matematica Vol.V, 125-137(1985)

SOLUZIONI MASSIMALI E MINIMALI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI MULTIVOCHE

Lorenza DIOMEDA - Benedetta LISENA

INTRODUZIONE. Vari autori, [2],[3],[6],[7], si sono occupati della ricerca di soluzioni per un problema di valori iniziali multivoco del tipo

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{array}{l} x' \in F(t,x) \\ x(0) = x_o \end{array}$$

dove $F(t,x)$ è un sottinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$.

Il problema (I) può essere riguardato come una generalizzazione di un problema di valori iniziali per equazioni differenziali ordinarie nel caso particolare in cui $F(t,x)$ si riduce ad un sol punto.

In questo lavoro abbiamo affrontato la questione dell'esistenza "in piccolo" della soluzione massimale e minimale per l'equazione (I) analogamente a quanto già noto per equazioni differenziali ad un unico valore ([8],[9]).

I risultati trovati valgono quando $F(t,x)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Il metodo da noi usato non fa prevedere l'estensione di questo risultato al caso $n > 1$.

Abbiamo anche determinato la dipendenza della soluzione

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività di ricerca dei Gruppi Nazionali per la Matematica del C.N.R (G.N.A.F.A.) e sui fondi 40% e 60% del Ministero Pubblica Istruzione.

massimale dal parametro λ , mostrando in particolare, che questa soluzione è semicontinua superiormente rispetto al parametro se $F(t,\lambda,x)$ si suppone misurabile rispetto a t e continua rispetto a (λ,x). In questo modo per n=1, miglioriamo il risultato ottenuto in [5].

§1. ESISTENZA DELLA SOLUZIONE MASSIMALE E MINIMALE

Sia X un sottospazio limitato di $\mathbb{R}$.

Denoteremo con compX la famiglia dei sottoinsiemi compatti di X, con conv X la famiglia dei sottoinsiemi compatti e convessi di X.

In questo lavoro ci occuperemo di funzioni multivoche F definite in un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$ e a valori in conv X oppure in comp X. Per semplicità supponiamo che

$$X = [-M,M], \quad M > 0 \quad \text{ed } F \text{ sia definita in } I \times B \text{ dove } I = [0,T]$$

e

$$B = [x_0 - b,\ x_0 + b],\ x_0 \in \mathbb{R},\ b > 0,\ \text{con } T \leq \frac{b}{M} \quad .$$

L'insieme comp X è munito di una struttura di spazio metrico mediante la distanza di Hausdorff in X che denoteremo con d_H cioé

$$d_H(A,B) = \max(\delta(A,B),\ \delta(B,A))$$

dove $\delta(A,B) = \sup_{a \in A} d(a,B)$ e d è l'usuale distanza di un punto da un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Sia

$$F : [0,T] \times B \to \text{comp } X$$

e consideriamo l'equazione differenziale multivoca con condizione iniziale

$$(1.1) \qquad \begin{cases} x' \in F(t,x) \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

Una soluzione di (1.1) è una funzione assolutamente continua definita in $[0,T]$ tale che $x'(t) \in F(t,x(t))$ q.o. e che in 0 assume valore x_o.

Introdurremo ora il concetto di soluzione massimale e minimale analogamente a quanto si fa per le equazioni differenziali ordinarie.

DEFINIZIONE 1.1. *Sia* $r(t)$ *una soluzione di* (1.1) *Allora* $r(t)$ *si dice soluzione massimale di* (1.1) *su* $[0,T]$ *se, per ogni soluzione* $x(t)$ *di* (1.1) *su* $[0,T]$ *vale la disuguaglianza*

$$(1.2) \qquad x(t) \leq r(t) \qquad \forall t \in [0,T]$$

La soluzione minimale $S(t)$ *può essere definita analogamente cambiando il verso della diseguaglianza in* (1.2)

Mostriamo ora l'esistenza della soluzione massimale di (1.1) sotto l'ipotesi che F abbia valori convessi.

TEOREMA 1.1. *Sia* $F : [0,T] \times R \to \text{conv } X$ *semicontinua superiormente e* Γ *l'insieme delle soluzioni di* (1.1) *in* $[0,T]$. *Poniamo*

$$(1.3) \qquad r(t) = \sup_{x \in \Gamma} x(t) \qquad t \in [0,T]$$

allora r *è la soluzione massimale di* (1.1).

Dimostrazione. E' noto che con le ipotesi fatte sussiste l'analogo del teorema di Peano che afferma l'esistenza di una soluzione per l'inclusione differenziale (1.1) in $[0,T]$ essendo $T \le \frac{b}{M}$.

Mostriamo che $r(t)$ definita da (1.3) è anche soluzione di (1.1). Osserviamo che se $x \in \Gamma$ allora:

$$x(t) \in x_o + \int_0^t F(s,x(s))ds \text{ (1)}$$

e quindi

$$|x(t)-x_o| \le Mt \le MT \le b \qquad t \in [0,T]$$

Poniamo per ogni intero positivo m

$$t_{m,k} = \frac{K}{2^m} T \qquad K=0,1,2,\dots,2^m .$$

Per la (1.3), per ogni m e K esiste $X_{m,K} \in \Gamma$ tale che

$$0 \le r(t_{m,k}) - X_{m,k}(t_{m,k}) < 1/m \quad .$$

Definita su $[0,T]$ la funzione:

$$\theta_m(t) = \max_{0 \le K \le 2^m} X_{m,k}(t)$$

si avrà

$$(1.4) \qquad 0 \le r(t_{m,k}) - \theta_m(t_{m,k}) < 1/m \qquad k=0,1,2,\dots,2^m$$

Il procedimento qui adoperato per costruire la θ_m è simile a quello adoperato da Sansone [9]. Con ragionamenti dello stesso tipo si verifica che θ_m soddisfano la (1.1).

Inoltre le θ_m sono equilimitate e equicontinue e perciò esiste

---

(1) Per la definizione di integrale per funzioni multivoche vedi [3] o [10].

$$\lim_{m\to\infty} \theta_m(t) = \theta(t) \text{ uniformemente in } [0,T] .$$

Poiché la (1.4)

$$\theta(t_{m,k}) = r(t_{m,k})$$

si deduce che $\theta(t) = r(t)$, cioé

$$\lim_{m\to\infty} \theta_m(t) = r(t) \text{ uniformemente} .$$

Poiché

$$|\theta_m'(t)| \leq M \qquad \text{q.o. in } [0,T]$$

le funzioni θ_m' appartengono a $L^\infty([0,T],\mathbb{R})$. Allora, per la compattezza dei limiti in $L^\infty([0,T],\mathbb{R})$, munito della topologia debole*, esiste una sottosuccessione, ancora denotata con θ_m', convergente debolmente ad una certa funzione $v(t)$. Poiché

$$\theta_m(t) - \theta_m(s) = \int_s^t \theta_m'(\tau)d\tau$$

si deduce

$$r(t) - r(s) = \int_s^t Mv(\tau)d\tau .$$

Quindi, per quasi tutti i t, $r'(t) = Mv(t)$, cioé la successione (θ_m') converge a r' debolmente in $L^\infty([0,T],\mathbb{R})$.

Essendo F a valori convessi, l'insieme Γ delle soluzioni di (1.1) è un sottoinsieme compatto di

$$A([0,T];\mathbb{R}) = \{x \in C([0,T],\mathbb{R}) \mid x' \in L^\infty([0,T];\mathbb{R})\}$$

dove $C([0,T],\mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni continue munito della topologia della convergenza uniforme e $L^\infty([0,T];R)$ è munito della topologia debole* (vedi [3]).

Da quanto mostrato sopra $r(t)$ appartiene alla chiusura di Γ in $A([0,T];\mathbb{R})$ e quindi è essa stessa elemento di Γ cioé

$$r'(t) \in F(t,r(t)).$$

Passiamo ora ad esaminare il caso non convesso, supponendo che F verifichi la condizione di Caratheodory.

TEOREMA 1.2. *Sia* $F:[0,T] \times B \to \text{comp}X$ *tale che*

(i) *per ciascuna* $x \in B$, $t \to F(t,x)$ *è misurabile in* I

(ii) *per ciascun* $t \in I$, $x \to F(t,x)$ *è continua in* B

Allora l'inclusione differenziale (1.1) *è dotata di soluzione massimale.*

Dimostrazione. Definiamo la seguente selezione di F

$$\forall (x,t) \in [0,T] \times B \quad f(t,x) = \max F(t,x) \quad .$$

Mostriamo che se $(\bar{x},\bar{t})$ e (x,t) appartengono a $[0,T] \times B$

$$|f(\bar{t},\bar{x}) - f(t,x)| \leq d_H(F(\bar{t},\bar{x}), F(t,x)) \quad . \tag{1.5}$$

Infatti se $f(\bar{t},\bar{x}) \geq f(t,x)$

$$|f(\bar{t},\bar{x}) - f(t,x)| = d(f(\bar{t},\bar{x}),F(t,x))$$

da cui

$$|f(\bar{t},\bar{x})-f(t,x)| \leq \sup_{z\in F(\bar{t},\bar{x})} d(z,F(t,x)) \leq d_H(F(\bar{t},\bar{x}),F(t,x))$$

Se $f(t,x) \geq f(\bar{t},\bar{x})$ si ottiene lo stesso risultato scambiando i ruoli di $f(t,x)$ e $f(\bar{t},\bar{x})$.

Dalla (1.5) segue che, per ogni $t\in[0,T]$, $f(t,x)$ è continua rispetto ad x.

Sia x fissato in B. $F(t,x)$ è misurabile in $[0,T]$, dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste E sottoinsieme chiuso di $[0,T]$ con misura di $[0,T] \setminus E$ minore di ε e $F(\cdot,x)$ continua in E.

Utilizzando la (1.5) si ha che $f(\cdot,x)$ è continua in E e dunque per il teorema di Lusin $f(\cdot,x)$ è misurabile in $[0,T]$. f soddisfa pertanto la condizione di Carathéodory.

Consideriamo il problema di Cauchy in $[0,T] \times B$

$$(1.6) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

e sia $\bar{x}(t)$ la soluzione massimale di (1.6) in $[0,T]$.

Ovviamente $\bar{x} \in \Gamma$, inoltre per ogni $x(t)$ soluzioni di (1.1)

$$x'(t) \leq f(t,x(t))$$

Allora per un noto teorema (cfr. [8]) $x(t) \leq \bar{x}(t)$. $\bar{x}(t)$ è dunque la soluzione massimale di (1.1).

Osservazione. Nel caso $F(t,x)$ sia convesso, l'esistenza della soluzione massimale si può provare utilizzando il seguente teorema di Hukuhara (c.f.r.[3]). Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 1.1.

Poniamo

$$U(t) = \{x(t) \mid x \in \Gamma\}$$

e sia $\xi \in \partial U(T)$. Allora esiste una soluzione $\bar{x}(t)$ di (1.1) tale che $\bar{x}(t) \in \partial U(t)$, per ogni $t \in [0,t]$ e $\bar{x}(T) = \xi$.

E' ovvio che i risultati trovati per la soluzione massimale valgono per la soluzione minimale.

§2. DIPENDENZA DAL PARAMETRO DELLA SOLUZIONE MASSIMALE.

In questo paragrafo vogliamo studiare come la soluzione massimale di un'equazione differenziale multivoca $x'\in F(t,\lambda,x)$ dipenda dal parametro λ. Si hanno i seguenti risultati.

TEOREMA 2.1. *Sia* $F: I\times L\times B \to \text{conv } X$ *una funzione multivoca semicontinua superiormente in* $I\times L\times B$ *dove* L *è un intervallo chiuso e limitato di* $\mathbb{R}$, I B *e* X, *sono definiti come nel paragrafo* 1.

Considerata la seguente equazione differenziale multivoca

$$(2.1)\qquad \begin{cases} x' \in F(t,\lambda,x) \\ x(0,\lambda) = x_0 \end{cases} \qquad \text{per quasi ogni } \lambda\in L$$

si ha che la soluzione massimale di (2.1) *è semicontinua superiormente rispetto a* λ.

Dimostrazione. Essendo nelle ipotesi di esistenza del teorema (1.1), per ogni $\lambda\in L$ esiste la soluzione massimale di (2.1).

Denotiamo con $r(t,\lambda)$ tale soluzione.

Supponiamo per assurdo che esiste $\bar\lambda\in L$ tali che $r(t,\lambda)$ non è semicontinua in $\bar\lambda$.

Allora esiste $\varepsilon > 0$ in corrispondenza del quale si può determinare una successione $(\lambda_n)_{n\in N}$ tale che $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \bar\lambda$ ed inoltre

$$(2.2)\qquad r(t,\lambda_n) \geq r(t,\bar\lambda) + \varepsilon \qquad n=0,1,2,...$$

per $t = \bar t \in I$.

Osserviamo che la successione $(r(t,\lambda_n))_{n\in N}$ è equilimitata poiché tutte le soluzioni dell'equazione (2.1) assumono i loro valori nell'intervallo $|x_o-b \quad x_o+b|$. Tale successione risulta anche equicontinua poiché

$$|r(t',\lambda_n)-r(t'',\lambda_n)| \leq \|\int_{t'}^{t''} F(s,\lambda_n,r(s,\lambda_n))ds\| \leq$$

$$\leq \|F\| \; |t'-t''| \leq M|t'-t''| \quad ^{(2)}$$

Possiamo allora applicare alla successione $(r(t, \lambda_n))n\epsilon N$ il teorema di Ascoli-Arzelà secondo cui è possibile estrarre una successione che denoteremo ancora con $(r(t,\lambda_n))n\epsilon N$ convergente uniformemente in $[0,T]$ ad una funzione continua $r_o(t)$. Ora se proviamo che $r_o(t)$ soddisfa l'equazione multivoca

$$(2.3) \qquad r_o'(t) \in F(t,\bar{\lambda},r_o(t))$$

si giunge ad un assurdo nel modo seguente:

infatti, poiché la successione $(r(t,\lambda_n)n\epsilon N$ converge uniformemente a $r_o(t)$ si ha che:

$$r(t,\lambda_n) < r_o(t) + \varepsilon \qquad \forall t\in[0,T], n > \nu$$

Per (2.3) si ha

$$r_o(t) \leq r(t,\bar{\lambda}) \qquad \forall t\in[0,T]$$

da cui

$$r(t,\lambda_n) < r(t,\bar{\lambda}) + \varepsilon \qquad \forall t\in[0,T], \; n > \nu$$

---

(2) $\|F\| = \max\limits_{(t,x)\in I\times B} d(0,F(t,x))$

che è in contrasto con (2.2).

Per dimostrare (2.3) è sufficiente provare

$$(2.4) \qquad d(r_o(t) - x_o, \int_0^t F(s,\bar\lambda,r_o(s))ds) = 0 .$$

Osserviamo perciò che

$$d(r_o(t) - x_o, \int_0^t F(s,\bar\lambda,r_o(s))ds) \le$$

$$\le d(r_o(t)-x_o, r(t,\lambda_n)-x_o)+d(\int_0^t r'(s, {}_n)ds, \int_0^t F(s,\bar\lambda,r_o(s))ds) .$$

Chiaramente il primo addendo del secondo membro della disuguaglianza tende a zero per $n \to +\infty$. Per il secondo addendo si ha che, essendo $F(s,\bar\lambda,r_o(s))$ misurabile in $[0,T]$, esiste una soluzione misurabile $\psi_n(s,\bar\lambda)$ di $F(s,\bar\lambda,r_o(s))$ tale che

$$d(r'(s,\lambda_n),\psi_n(s,\bar\lambda)) = d(r'(s,\lambda_n),F(s,\bar\lambda,r_o(s))$$

e perciò

$$d(\int_o^t r'(s,\lambda_n)ds, \int_0^t F(s,\bar\lambda,r_o(s))ds) \le$$

$$\le \int_0^t |r'(s, \lambda_n)-\psi_n(s,\bar\lambda)|ds = \int_0^t d(r'(s,\lambda_n), F(s,\bar\lambda,r_o(s))ds$$

Mostriamo infine che $d(r'(s, \lambda_n),F(s,\bar\lambda,r_o(s))$ tende a zero puntualmente.

Infatti fissato $s \in |0,T|$ e $\varepsilon > 0$, per la semicontinuità superiore di F in $(\bar\lambda,r_o(s))$:

$$\exists\, \delta_\varepsilon > 0 \ni' \forall(\lambda,x)\in L\times B: d((\lambda,x),(\bar\lambda,r_o(s))) < \delta_\varepsilon \to \delta(F(s,\lambda,x),F(s,\bar\lambda,r_o(s))) < \varepsilon$$

Poiché (λ_n) tende a $\bar{\lambda}$ e $(r(s,\lambda_n))$ tenda a $r_o(s)$, in corrispondenza di δ_ε :

$$\exists\, \nu \in N, \quad n > \nu : d((\lambda_n, r(s,\lambda_n)), (\bar{\lambda}, r_o(s))) < \delta_\varepsilon$$

e perciò:

$$\delta(F(s,\lambda_n,r(s,\lambda_n)), F(s,\bar{\lambda},r_o(s))) < \varepsilon \quad \forall n > \nu .$$

Poiché inoltre $r'(s,\lambda_n) \in F(s,\lambda_n,r(s,\lambda_n))$, si ha:

$$d(r'(s,\lambda_n), F(s,\bar{\lambda},r_o(s)) \leq \delta(F(s,\lambda_n,r(s,\lambda_n)), F(s,\bar{\lambda},r_o(s))) < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

Quindi

$$\int_0^t d(r'(s,\lambda_n),\ F(s,\bar{\lambda},r_o(s))ds$$

converge a zero per il teorema della convergenza dominata. Da ciò (2.4).

Passiamo ora al caso in cui F non è a valori convessi.

TEOREMA 2.2. *Sia* $F: I x L x B \to \mathrm{comp} X$ *una funzione multivoca. Supponiamo inoltre che* F *è misurabile rispetto a* (t, λ) *per ogni* $x \in B$ *e continua rispetto a* x, *per ogni* $(t,\lambda) \in I x L$. *Allora la soluzione massimale di* (2.1) *è misurabile rispetto a* λ . *Se* F *è misurabile rispetto a* t *per ogni* $(\lambda,x) \in L\, x B$, *e continua rispetto a* (λ,x) *per ogni* $t \in I$, *risulta che la soluzione massimale è semicontinua superiormente rispetto a* λ .

Dimostrazione. L'asserto segue dal fatto che nelle ipotesi suddette la soluzione massimale di (2.1) è la soluzione massimale del seguente problema

$$x' = f(t,\lambda,x)$$
$$x(0,\lambda) = x_o$$

dove $f(t,\lambda,x) = \max(F(t,\lambda,x))$ per ogni $(t,\lambda,x) \in I \times L \times B$.

Dai risultati relativi alle equazioni differenziali ordinarie (cfr. [1],[4]) segue l'asserto.

Osservazione. I teoremi (2.1) e (2.2) valgono anche per la soluzione minimale che risulterà però rispettivamente semicontinua inferiormente o misurabile rispetto a λ.

BIBLIOGRAFIA

[1] G.ARNESE, Sulla dipendenza dal parametro degli integrali di una equazione differenziale ordinaria del primo ordine. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova,* vol. XXXIII, 1963, 140-162.

[2] H.A.ANTOSIEWICZ-A.CELLINA, Continuous selections and differential relations, *J. Differential Equations,* 19, 2(1975) 386-398.

[3] J.P.AUBIN-A.CELLINA, *Differential incluions,* Springer-Verlag 1984.

[4] F.CAFIERO, Sui problemi ai limiti relativi ad una equazione differenziale ordinaria del 1° ordine e dipendente da un parametro. *Rend. Sem. Mat. Padova,* **18** (1949) 239-257.

[5] L.DIOMEDA, Sulla dipendenza dal parametro delle soluzioni di un'equazione differenziale multivoca $x' \in F(t, \lambda, x)$. *Boll. U.M.I.* (5) 14-B (1977) 203-221.

[6] H.HERMES, The generalized differential equation $x' \in R(t,x)$. *Advances in Math.*4 (1970) 149-169.

[7] C.OLECH, Existence of solutions of non-convex orientor Fields,*Boll. U.M.I.* **14**, Suppl. Fasc. 3(1975), 186-197.

[8] LASHMIKANTHAM-LEELA, *Differential and Integral Inequalities* vol. I, Accademic Press 1969.

[9] G.SANSONE, *Equazioni Differenziali nel campo reale,* Vol.II, Zanichelli Editore, 1949.

[10] R.G.AUMANN, Integral of Set-Valued Functions. *Journal Math. Anal. Appl.* (12), 1965, 1-12.

Ricevuto il 10/6/1985

Dipartimento di Matematica
Università
Campus Universitario
Via G. Fortunato
70121 BARI (Italy)