Note di Matematica Vol. VI, 61-98(1986)

QUESTIONI DI SURIETTIVITA' DI UN MORFISMO CANONICO TRA DUE COMPLESSI APPROSSIMANTI (*)

Lucia DORETTI (**)

Summary. *In this paper, we introduce the concept of* i*-couple for two ideals,* J, I, $J \supseteq I$, *in a local noetherian ring* (R, m). *This concept is expressed in terms of the structure of* $H_i(\mathcal{M})$ *(where* $\mathcal{M}$ *is an approximation complex for the double Koszul complex* $\mathcal{L}$ *associated to the system of generators of* J), *and it generalizes the idea of* (d, i)*-sequence introduced in* [M-R].

We study the relationship between the following properties: 1) (J, I) *is an* i*-couple of ideals in* R ; 2) $(\bar{J}, \bar{I})$ *is an* i*-couple of ideals in* $\bar{R}=R/I$, *more generally, in* R/I', $I' \subseteq I$. *So we get some sufficient conditions for the "ascendent" and "descendent" properties of the* i*-couple. In particular, we study the surjectivity of the natural morphism* $\bar{\varphi}_1 : H_1(\mathcal{M}) \to H_1(\bar{\mathcal{M}})$, *since the surjectivity of* $\bar{\varphi}_i$ *is a sufficient condition for the "descendent" property of the* i*-couple from* R *to* $\bar{R}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (sez.3) del C.N.R..

(**) Desidero ringraziare la Prof. Carla Massaza per gli utili suggerimenti e la critica costruttiva.

Nella presente nota si introduce il concetto di $(d,i)_{\mathscr{M}}$-successione $(i,d \in N)$ $\underline{z}=z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ di elementi di un anello locale, noetheriano $(R,\mathfrak{m})$. Tale concetto è definito in termini di struttura di $H_i(\mathscr{M})$ con $\mathscr{M}$ complesso approssimante del doppio complesso di Koszul $\mathscr{L}$ associato alla successione $\underline{z}$ (cfr.def.1.4),ed estende quello di (d,i)-successione introdotto in [M-R], che è relativo all'i-esimo modulo di omologia del complesso di Koszul. In particolare si osserva che $\underline{z}$ è una $(n,i)_{\mathscr{M}}$-successione se e solo se $H_i(\mathscr{M}) = 0$, e che, per $i=1$, questo implica l'esistenza di un isomorfismo tra algebra di Rees e algebra simmetrica dell'ideale generato da $\underline{z} = z_1,\dots,z_n$.

Si dimostra che il concetto di $(d,i)_{\mathscr{M}}$-successione dipende, oltre che dall'intero i, solo dagli ideali $J=(z_1,\dots,z_d,\dots,z_n)$ e $I=(z_{d+1},\dots,z_n)$ e non dal loro sistema di generatori, cosicché si può parlare di i-coppia riferendosi alla coppia di ideali (J,I) (cfr.def.1.13).

Nel lavoro si studiano le relazioni esistenti tra le due proprietà: (J,I) è una i-coppia in R e $(\bar{J},\bar{I})$ è una i-coppia in $\bar{R}=R/I$ e, più in generale, in R/I', con $I' \subseteq I$.

Si osserva che una condizione sufficiente per il passaggio delle i-coppie da R a R/I', è una specie di suriettività debole del morfismo $\bar{\varphi}_i:H_i(\mathscr{M}(J,R)) \to H_i(\mathscr{M}(\bar{J},R/I'))$, che coincide con la suriettività del caso $I'=I$. Si prova che la suriettività di $\bar{\varphi}_i$ dipende solo dagli ideali J e I' e non dal loro sistema di generatori.

Per $i=1$, si dà un esempio di 1-coppia che non passa all'anello quoziente $\bar{R}=R/I$ (ovviamente il morfismo $\bar{\varphi}_1$ non è suriettivo).

Nel caso i=1, si dimostra inoltre che $\bar{\varphi}_1$ è necessariamente suriettiva se $(z_1,\dots,z_n) = \mathbf{m}$, mentre se $(z_1,\dots,z_n)=J\neq\mathbf{m}$, si trovano una condizione (solo) sufficiente ed una (solo) necessaria per tale suriettività.

Se $(\bar{J},\bar{I})$ è una i-coppia di ideali in R/I', si ha il rimontamento della proprietà, se esiste in R una successione $\underline{z}=z_1,\dots,z_d,\dots,z_h,\dots,z_n$ con $(\underline{z})=J$, $(z_{d+1},\dots,z_n)=I$, $(z_{h+1},\dots,z_n)=I'$ per cui, indicato con φ_i il morfismo da $\mathcal{M}_i$ in $\bar{\mathcal{M}}_i$, i bordi i-esimi di $\bar{\mathcal{M}}_i$ provengono, tramite φ_i, dai bordi i-esimi di $\mathcal{M}_i$ e i cicli sono ottenuti come φ_i-immagini; in particolare, se I'=I, la condizione di rimontamento è quella sui bordi (in tal caso è, infatti, $H_i(\bar{\mathcal{M}}) = 0$).

Si prova, infine, che per i=1 se $\underline{z}=z_1,\dots,z_n$ è un sistema minimale di generatori per $\mathbf{m}$, la condizione "$\underline{z}$ è una $(d,1)_{\mathcal{M}}$-successione in R" è equivalente alla condizione "$\underline{z}=z_1,\dots,z_d$ è una $(d,1)_{\mathcal{M}}$-successione in $\bar{R}=R/I$" e ciò equivale ancora all'esistenza di un isomorfismo tra algebra di Rees e algebra simmetrica dell'ideale generato da $\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_d$.

N.1. - In questo paragrafo, richiamiamo definizioni e proprietà usate nel seguito.

Siano $(R,\mathbf{m})$ un anello locale noetheriano e $\underline{z}=z_1,\dots,z_n$ una successione di elementi di R, tale che $J=(\underline{z})\neq R$.

Indichiamo con ΛR^n e $\mathrm{Sym}(R^n) \simeq R[T_1,\dots,T_n]$ (anello dei polinomi in n indeterminate a coefficienti in R), rispettivamente, l'algebra di Rees e l'algebra simmetrica dell'R-modulo libero R^n con base $\{e_1,\dots,e_n\}$, e con $\Lambda^t R^n$ e $Sym_t(R^n)$ le loro componenti di grado t.

DEFINIZIONE 1.1.- Si definisce *complesso di Koszul* in R rispetto alla successione $\underline{z}$, l'algebra graduata differenziale:

$$\mathbb{K}(\underline{z},R) : 0 \to \Lambda^n R^n \xrightarrow{\partial_n} \Lambda^{n-1}R^n \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \to \Lambda^2 R^n \xrightarrow{\partial_2} R^n \xrightarrow{\partial_1} R \to 0$$

generata da e_i, $i=1,\dots,n$, con differenziale ∂ definito come segue:

$$\partial_i : \Lambda^i R^n \to \Lambda^{i-1}R^n$$

$$e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_i} \to \sum_{k=1,\dots,i}(-1)^{k+1} z_{j_k}\, e_{j_1}\wedge\dots\wedge \check{e}_{j_k}\wedge\dots\wedge e_{j_i}$$

Alla stessa successione $\underline{z}$ è anche possibile associare un doppio complesso.

Consideriamo a tale scopo l'algebra $\Lambda R^n \otimes_R Sym(R^n) = \bigoplus_{\substack{r=0,\dots,n \\ t\geq 0}} \Lambda^r R^n \otimes Sym_t(R^n)$ e su essa i differenziali ∂ e ∂' così definiti

$$\partial : \Lambda^r R^n \otimes Sym_t(R^n) \to \Lambda^{r-1} R^n \otimes Sym_t(R^n)$$

$$e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_r} \otimes h \to \sum_{k=1,\dots,i}(-1)^{k+1} z_{j_k}\, e_{j_1}\wedge\dots\wedge \check{e}_{j_k}\wedge\dots\wedge e_{j_r}\otimes h$$

$$\partial' : \Lambda^r R^n \otimes Sym_t(R^n) \to \Lambda^{r-1} R^n \otimes Sym_{t+1}(R^n)$$

$$e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_r} \otimes h \to \sum_{k=1,\dots,i}(-1)^{k+1} e_{j_1}\wedge\dots\wedge \check{e}_{j_k}\wedge\dots\wedge e_{j_r}\otimes T_{j_k} h$$

Semplici verifiche mostrano che tali differenziali commutano, ovvero $\partial\partial' = \partial'\partial$. L'algebra graduata differenziale che ne risulta si indica con $\mathscr{L}$ (cfr. [H-S-V]).

DEFINIZIONE 1.2. - Il complesso $\mathscr{L}$ sopra definito è detto *doppio complesso di Koszul* associato alla successione $\underline{z}$.

Una parte del complesso $\mathscr{L}$ è rappresentato dallo schema seguente:

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda^{r+2}R^n \otimes \mathrm{Sym}_{t-1}(R^n) & \xrightarrow{\partial'} & \Lambda^{r+1}R^n \otimes \mathrm{Sym}_t(R^n) & \xrightarrow{\partial'} & \Lambda^r R^n \otimes \mathrm{Sym}_{t+1}(R^n) \\
\downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial \\
\Lambda^{r+1}R^n \otimes \mathrm{Sym}_{t-1}(R^n) & \xrightarrow{\partial'} & \Lambda^r R^n \otimes \mathrm{Sym}_t(R^n) & \xrightarrow{\partial'} & \Lambda^{r-1}R^n \otimes \mathrm{Sym}_{t+1}(R^n) \\
\downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial \\
\Lambda^r R^n \otimes \mathrm{Sym}_{t-1}(R^n) & \xrightarrow{\partial'} & \Lambda^{r-1}R^n \otimes \mathrm{Sym}_t(R^n) & \xrightarrow{\partial'} & \Lambda^{r-2}R^n \otimes \mathrm{Sym}_{t+1}(R^n)
\end{array}$$

Osserviamo che $\mathscr{L}(\partial)$ è semplicemente l'ordinario complesso di Koszul associato a $\underline{z}$, tensorizzato con l'anello dei polinomi $R[T_1,\dots,T_n] \simeq \mathrm{Sym}(R^n)$, mentre $\mathscr{L}(\partial')$ è l'ordinario complesso di Koszul associato alla successione $\{T_1,\dots,T_n\}$ di elementi di $R[T_1,\dots,T_n]$.

Dall'ultima osservazione, segue che, essendo $\{T_1,\dots,T_n\}$ una successione regolare, il complesso $\mathscr{L}(\partial')$ è esatto, e quindi tale è ogni suo sottocomplesso

$$\mathscr{L}_t = \sum_{r+s=t} \Lambda^r(R^n) \otimes \mathrm{Sym}_s(R^n) \quad , \qquad t > 0.$$

Per la commutatività di ∂ e ∂', alcuni complessi che si originano da $\mathbb{K}(\underline{z},R)$ danno luogo a complessi più ampi se si tensorizzano per $R[T_1,\dots,T_n]$ e si considera il differenziale indotto da ∂'. In particolare, considerati i complessi $Z(\mathbb{K})$, $B(\mathbb{K})$ e $H(\mathbb{K})$, rispettivamente, dei cicli, dei bordi e delle omologie del complesso di Koszul $\mathbb{K}(\underline{z},R)$, si hanno i seguenti complessi, con differenziale indotto da ∂':

$$\mathscr{Z} = Z(\mathbb{K}) \otimes \mathrm{Sym}(R^n) \cong Z(K) \otimes R[T_1,\dots,T_n];$$

$$\mathscr{B} = B(\mathbb{K}) \otimes \mathrm{Sym}(R^n) \cong B(\mathbb{K}) \otimes R[T_1,\dots,T_n];$$

$$\mathscr{M} = H(\mathbb{K}) \otimes \mathrm{Sym}(R^n) \cong H(\mathbb{K}) \otimes R[T_1,\dots,T_n] \cong \mathscr{Z}/\mathscr{B}.$$

DEFINIZIONE 1.3. - I complessi $\mathscr{Z},\mathscr{B},\mathscr{M}$ sono detti i *complessi approssimanti* rispetto a $\underline{z}$.

Nella presente nota siamo interessati al complesso approssimante:

$$\mathscr{M}:\ 0 \longrightarrow \mathscr{M}_n \xrightarrow{\partial'_n} \mathscr{M}_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial'_2} \mathscr{M}_1 \xrightarrow{\partial'_1} \mathscr{M}_0 \xrightarrow{\partial'_o} 0,$$ dove, per ogni r, $r=0,\dots,n$:

$$\mathscr{M}_r = \mathscr{Z}_r/\mathscr{B}_r = Z_r(\mathbb{K})R[T_1,\dots,T_n]/B_r(\mathbb{K}) \otimes R[T_1,\dots,T_n] \cong H_r(\mathbb{K}) \otimes R[T_1\dots T_n]$$

e $\partial'_r : \mathscr{M}_r \to \mathscr{M}_{r-1}$ è definito da:

$$\Big[\sum_j \sum_{o\le j_1<\dots<j_r<n} a^{(j)}_{j_1\dots j_r} e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_r} \otimes P^{(j)}(\underline{T})\Big]\mathscr{B}_r \longrightarrow$$

$$\Big[\sum_j \sum_{o\le j_1 \dots j_r\le n} a^{(j)}_{j_1\dots j_r}\Big(\sum_i (-1)^{r-i} e_{j_1}\wedge\dots\wedge\check{e}_{j_i}\wedge\dots\wedge e_{j_r} \otimes T_{j_i}\, P^{(j)}(\underline{T})\Big)\Big]\mathscr{B}_{r-1}$$

Se $z_1,\dots,z_n$ sono elementi fissati di R, con ${}_h\bar{R}$, $h=0,\dots,n$, si indica l'anello quoziente $R/(z_{h+1},\dots,z_n)$ $({}_n\bar{R}=R)$ e con $\bar{z}_i \in {}_h\bar{R}$ l'immagine di z_i tramite il morfismo canonico $R \to {}_h\bar{R}$.

Rappresentati con $\mathbb{K}=\mathbb{K}(\underline{z},R)$ e con $\bar{\mathbb{K}}=K(\bar{\underline{z}},{}_h\bar{R})$, rispettivamente, i complessi di Koszul relativi a $\underline{z}$ in R e a $\bar{\underline{z}} = \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h$ in ${}_h\bar{R}$, il morfismo $\pi: \mathbb{K} \to \bar{\mathbb{K}}$ definito da:

$$\pi_0 = \text{proiezione canonica} \quad R \to {}_h\bar{R}$$

$$\pi_i(e_i) = \begin{cases} f_i, & 1 \leq i \leq h \\ 0, & i > h \end{cases}$$

dove $e_1,\dots,e_n$ e $f_1,\dots,f_h$ sono, rispettivamente, i generatori liberi di $\mathbb{K}$ e $\bar{\mathbb{K}}$, è un morfismo tra complessi. Tale morfismo induce, per ogni i, un morfismo tra i moduli di omologia $H_i(\mathbb{K}) \to H_i(\bar{\mathbb{K}})$, da cui ha origine un morfismo tra complessi, $\varphi: \mathcal{M} \to \bar{\mathcal{M}}$ ($\bar{\mathcal{M}}$ è il complesso approssimante $\mathcal{M}$ relativo a $\bar{\underline{z}} = \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h$ in ${}_h\bar{R}$):

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{M}: \dots & \to H_i(\mathbb{K}) \otimes R[\underline{T}] & \xrightarrow{\partial_i'} & H_{i-1}(\mathbb{K}) \otimes R[\underline{T}] & \to & \dots \\
\downarrow \varphi & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i-1} & & \\
\bar{\mathcal{M}}: \dots & \to H_i(\bar{\mathbb{K}}) \otimes {}_h\bar{R}[\bar{\underline{T}}] & \xrightarrow{\partial_i'} & H_{i-1}(\bar{\mathbb{K}}) \otimes {}_h\bar{R}[\bar{\underline{T}}] & \to & \dots
\end{array}$$

dove $\underline{T} = T_1,\dots,T_n$ e $\bar{\underline{T}} = T_1,\dots,T_h$,

$$\text{con} \quad \varphi_i(T_i) = \begin{cases} T_i, & 0 \leq i \leq h \\ 0, & i > h \end{cases}$$

DEFINIZIONE 1.4.- Siano $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ una successione di elementi non invertibili in (R,m), i, d interi, tali che $1 \leq i \leq d \leq n$ e $\mathcal{M}$ il complesso approssimante relativo a $\underline{z}$. Si dice che $\underline{z}$ è una $(d,i)_{\mathcal{M}}$ *-successione* se ogni elemento di $H_i(\mathcal{M})$ può essere rappresentato nella forma $[\alpha]_{\mathrm{Im}\,\partial'_{i+1}}$ con

$\alpha \in (T_i^d \cap Z_i + B_i / B_i) \otimes R[\underline{T}] + (H_i(\mathbb{K}(\underline{z},R)) \otimes (T_{d+1},\dots,T_n)R[\underline{T}]$,

dove T_i^d è il sottomodulo di $\Lambda^i R^n$ generato dagli elementi $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}$, con $j_1 < \dots < j_i$ e $j_i > d$.

OSSERVAZIONE 1.5.- (i) Per n=d, $\underline{z}$ è $(n,i)_{\mathcal{M}}$ -successione se e solo se $H_i(\mathcal{M}(\underline{z},R)) = 0$. In particolare, se $\underline{z}$ è $(n,1)_{\mathcal{M}}$ -successione, da [H-S-V], l'algebra di Rees, $\mathcal{R}_R(J)$, e l'algebra simmetrica, $\mathrm{Sym}_R(J)$, dell'ideale $J=(z_1,\dots,z_n)$ sono isomorfe.

(ii) Ogni (d,i)-successione (cfr. [M-R], def. 1.1) è una $(d,i)_{\mathcal{M}}$ -successione.

(iii) Ogni $(d,i)_{\mathcal{M}}$ -successione è una $(d',i)_{\mathcal{M}}$ -successione, per $d' \leq d$.

Si prova che il concetto di $(d,i)_{\mathcal{M}}$ -successione dipende, oltre che dall'intero i, solo dagli ideali $J=(z_1,\dots,z_d,\dots,z_n)$ e $I = (z_{d+1},\dots,z_n)$ e non dalla successione $\underline{z}$ considerata.

LEMMA 1.6. - *Siano* $\underline{z} = z_1,\dots,z_n$ e $\underline{z}' = z_1',\dots,z_n'$ *due successioni in* R, *tali che* $(\underline{z}) = (\underline{z}') = J$. *Esiste allora un isomorfismo tra* $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\underline{z},R)$ *e* $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(z',R)$ *che induce un isomorfismo tra* $H_i(\mathcal{M}))$ e $H_i(\mathcal{M}')$, $i \geq 0$.

Dimostrazione. Dal Lemma 1.2 di [M], esiste una trasformazione lineare L, invertibile, di matrice $(a_{ij})_{i,j\in R}$, tale che la funzione $\sigma : \mathbb{K} = \mathbb{K}(z,R) \to \mathbb{K}' = \mathbb{K}(\underline{z}',R)$, definita come funzione di R-algebre graduate a partire da $\sigma_1 = L$, è un isomorfismo di complessi; come conseguenza il morfismo indotto $\bar{\sigma} : H(\mathbb{K}') \to H(\mathbb{K})$ è un isomorfismo.

Usando la stessa matrice $(a_{ij})_{ij\in R}$ di L, si definisce un isomorfismo $\chi : R[\underline{T}'] \to R[T]$ con $\underline{T}'=T'_1,\dots,T'_n$, ponendo $T'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}T_j$, $i = 1,\dots,n$. Gli isomorfismi $\bar{\sigma}$ e χ inducono un isomorfismo $\Psi : \mathscr{M}' \to \mathscr{M}$ che risulta essere un morfismo di complessi, poiché $\Psi\,\partial' = \partial\Psi$. Segue allora l'isomorfismo tra $H(\mathscr{M}')$ e $H(\mathscr{M})$.

PROPOSIZIONE 1.7. *Siano* $\underline{z}=z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *e* $\underline{z}'=z'_1,\dots,z'_d,\dots,z'_n$ *due successioni tali che* $(\underline{z}) = (\underline{z}') = J$ *e* $(z_{d-1},\dots,z_n) = (z'_{d+1},\dots z'_n)=I$. *Allora :* $\underline{z}'$ *è una* $(d,i)_{\mathscr{M}}$ *-successione se e solo se* $\underline{z}$ *è una* $(d,i)_{\mathscr{M}}$ *-successione.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\underline{z}'$ sia una $(d,i)_{\mathscr{M}}$ -successione, allora ogni elemento di $H_i(\mathscr{M})$ è della forma:

$$\sum_h\{\sum_J a_J^{(h)} e'_J\} \otimes P^{(h)}(\underline{T}') + \sum_k \{\sum_L b_L^{(k)} e'_L\} \otimes P^{(k)}(T'_{d+1},\dots T'_n),$$

con $J \subseteq [1,\dots,n]$, $J \cap [d+1,\dots,n] \neq \emptyset$ e ordine di $P^{(k)} \geq 1$.

L'isomorfismo $\Psi = \bar{\sigma} \otimes \chi : \mathscr{M}' \to \mathscr{M}$ definito dal Lemma 1.6 ha la proprietà:

$$\Psi_1(e'_i \otimes T'_h) = \bar{\sigma}_1(e'_i) \otimes \chi_1(T'_h) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \otimes \sum_{j=1}^{n} a_{hj}T_j,$$

dove $i > d$ implica $a_{ij} = 0$, per $j \leq d$ (e quindi, se $h > d$, $a_{hj}=0$ per $j \leq d$); così, se $J \cap [d+1,\dots,n] \neq \emptyset$, allora $\bar{\sigma}(e'_J) = \sum_k c_{JK}e_K$, $K \cap [d+1,\dots,n] \neq \emptyset$.

Come conseguenza, applicando l'isomorfismo tra $H_i(\mathscr{M})$ e $H_i(\mathscr{M}')$ del Lemma 1.6, otteniamo che ogni elemento di $H_i(\mathscr{M})$ ha la forma:

$$\sum_h\{\sum_J a_J^{(h)} \bar{\sigma}(e'_J)\} \otimes \chi(P^{(h)}(\underline{T}')) + \sum_k\{\sum_L b_L^{(k)} \sigma(e'_L)\} \otimes \chi(P^{(k)}(T'_{d+1},\dots,T'_n)) =$$

$$\sum_h \{\sum_J c_J^{(h)} e_J\} \otimes Q^{(h)}(\underline{T}) + \sum_k \{\sum_L d_L^{(k)} e_L\} \otimes Q^{(k)}(T_{d+1},\dots,T_n)$$

con ordine di $Q^{(k)} \geq 1$, cioé $\underline{z}$ è una $(d,i)_{\mathscr{M}}$ -successione.

Il viceversa è analogo.

COROLLARIO 1.8.- *Sia* $\underline{z} = z_1,\dots,z_h,\dots,z_n$, *dove* $z_h = \sum_{i\neq h} a_i z_i$, $h \leq d$ *o* $z_h = \sum_{\substack{i>d\\ i\neq h}} a_i z_i$, $h > d$. *Allora, posto* $\underline{z}' = z_1,\dots,z_{h-1},0,z_{h+1},\dots,z_n$, $\underline{z}$ *è una* $(d,i)_{\mathscr{M}}$ *-successione se e solo se* $\underline{z}'$ *è una* $(d,i)_{\mathscr{M}}$*-successione.*

LEMMA 1.9.- *Siano* $\underline{z} = z_1,\dots,z_{h-1},0,z_{h+1},\dots,z_n$ *e* $\underline{z}^{(h)} = z_1,\dots,z_{h-1},z_{h+1},\dots,z_n$ *due successioni in* R. *Allora, per ogni* $i \geq 0$, *esiste un isomorfismo*

$$\Phi_i^{(h)} : H_i(\mathscr{M}(\underline{z},R)) \to H_i(\mathscr{M}(\underline{z}^{(h)},R)).$$

Dimostrazione. Supponiamo h=n. Indichiamo con $\mathscr{M}$ e $\mathbb{K}$ i complessi relativi a $\underline{z}$ e con $\mathscr{M}'$ e $\mathbb{K}'$ quelli relativi a $\underline{z}^{(h)}$.

Dalla definizione di $\mathscr{M}$, la sua componente $\mathscr{M}_{r,t}$ è data da (cfr. [S-V], Prop. 4.1):

$$\mathscr{M}_{r,t} = H_r(\mathbb{K}) \otimes (R[T_1,\dots,T_n])_t = (H_r(\mathbb{K}') \oplus H_{r-1}(\mathbb{K}') \otimes Re_n) \otimes$$
$$\otimes (\sum_{j=o}^{t} R[T_1,\dots,T_{n-1}])_j T_n^{t-1})$$

che possiamo scrivere come somma di tre sottocomplessi:

$$\underbrace{[H_r(K')\otimes(R[T_1,\dots,T_{n-1}])_t]}_{\mathscr{M}'_{r,t}} \oplus \underbrace{[H_r(K')\otimes(\sum_{j=o}^{t-1}(R[T_1,\dots,T_{n-1}]_j T_n^{t-j})]}_{\mathscr{A}_{r,t}} \oplus$$

$$\oplus \left[H_{r-1}(K')\otimes Re_n\otimes\left(\sum_{j=0}^{t} (R[T_1,\dots,T_{n-1}])_j T_n^{t-j}\right)\right] = \mathcal{U}'_{r,t} \oplus \mathcal{A}_{r,t} \oplus \mathcal{A}'_{r,t}.$$
$$\| \mathcal{A}'_{r,t}$$

Si osserva che $\mathcal{A}_{r,t} \overset{f}{\simeq} \mathcal{A}'_{r-1,t+1}$ (nell'isomorfismo $f:\mathcal{A}_{r,t}\to\mathcal{A}'_{r-1,t+1}$ succede che $f(e_n) = T_n$). Il complesso $\mathcal{C}_d = \{\mathcal{A}_{r,t} \oplus \mathcal{A}'_{r,t}/r+t=d\}$ con differenziale d definito da:

$$d(x,y) = (\partial' x, \partial' y + fx)$$

soddisfa alle ipotesi del Lemma 1 di [W] e quindi è, in particolare, un complesso esatto. Passando ai moduli di omologia di $\mathcal{M}$, abbiamo, allora, un isomorfismo naturale (che si ottiene eliminando le componenti in cui compaiono e_n o T_n) con i corrispondenti moduli di omologia del complesso $\mathcal{M}'$.

COROLLARIO 1.10. - *Siano* $\underline{z}=z_1,\dots,z_h,\dots,z_n$ *e* $\underline{z}'=z_1,\dots,z_{h-1}, z_{h+1},\dots,z_n$ *due successioni in* R, *tali che* $(z_1,\dots,z_h,\dots,z_n) = (z_1,\dots,z_{h-1},z_{h+1},\dots,z_n) = J$. *Allora, per ogni* $i\geq 0$, $H_i(\mathcal{M}(\underline{z},R)) \simeq H_i(\mathcal{M}(\underline{z}',R))$.

Dimostrazione. Segue dai Lemmi 1.6 e 1.9.

PROPOSIZIONE 1.11. *Si hanno i seguenti fatti:*

(i) $\underline{z} = 0,z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *è una* $(d+1,i)_{\mathcal{M}}$*- successione se e solo se* $\underline{z}' = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *è una* $(d,i)_{\mathcal{M}}$ *- successione.*

(ii) $\underline{z}'' = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n,0$ *è una* $(d,i)_{\mathcal{M}}$*-successione se e solo se* $\underline{z}' = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$, *è una* $(d,i)_{\mathcal{M}}$ *-successione.*

Dimostrazione. (i) Segue dalla definizione di $(d,i)_{\mathcal{M}}$ -successione, applicando l'isomorfismo $\bar{\Phi}_i^{(h)}$, con h=0, del Lemma 1.9.

(ii) Segue dalla definizione di $(d,i)_{\mathcal{M}}$ -successione, applicando l'isomorfismo $\bar{\Phi}_i^{(h)}$, con $h=n+1$, del Lemma 1.9.

TEOREMA 1.12. *Siano* $\underline{z}=z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *e* $\underline{z}'=z'_1,\dots,z'_{d'},\dots,z'_{n'}$ *due successioni tali che* $(\underline{z})=(\underline{z}')=J$ *e* $(z_{d+1},\dots,z_n)=(z'_{d'+1},\dots,z'_{n'})=I$. *Allora:* $\underline{z}$ *è una* $(d,i)_{\mathcal{M}}$*-successione se e solo se* $\underline{z}'$ *è una* $(d',i)_{\mathcal{M}}$ *-successione.*

Dimostrazione. Si procede come nella dimostrazione della Prop.1.9 di [M], sfruttando il Cor. 1.8, la Prop. 1.11 e la Prop. 1.7.

Il Teor. 1.12 mostra che il concetto di $(d,i)_{\mathcal{M}}$ -successione dipende solo dall'intero i e dalla coppia (J,I) di ideali; si può allora dare la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1.13. Siano J e I due ideali di R con $J \supseteq I$ e i un intero, $i \geq 0$. Si dice che la coppia di ideali (J,I) è una *i-coppia* se, per una successione $\underline{z}=z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ tale che $J=(\underline{z})$ e $I=(z_{d+1},\dots,z_n)$ (e quindi per ogni tale successione) si ha che $\underline{z}$ è una $(d,i)_{\mathcal{M}}$ -successione.

OSSERVAZIONE 1.14. Dalla def. 1.13 è ovvio che $(J,0)$ è una i-coppia se e solo se $H_i(\mathcal{M}(J)) = 0$.

N.2. In questo paragrafo si affronta lo studio del seguente problema: "Se (J,I) è una i-coppia di ideali in R, $(\bar{J},\bar{I})$ è una i-coppia di ideali in $\bar{R}=R/I$, e più in generale in R/I', con $I' \subseteq I$?".

Se $\underline{z}=z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ è una successione di elementi non invertibili in R, $J=(\underline{z})$, $I=(z_{d+1},\dots,z_n)$, e h è un intero con $d\leq h\leq n$, si indicano con $\mathbb{K}$ e con $\mathcal{M}$ rispettivamente il complesso di Koszul e il complesso approssimante relativi a $\underline{z}$ in R, e con $\bar{\mathbb{K}}$ e $\bar{\mathcal{M}}$ rispettivamente il complesso di Koszul e il complesso approssimante relativi a $\bar{\underline{z}} = \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h$ in ${}_h\bar{R} = R/(z_{h+1},\dots,z_n)$ (per h=d, ${}_h\bar{R}=\bar{R}=R/I$).

Per ogni i si denota con $\mathscr{C}_i(\mathscr{M})$ il sottomodulo di $\mathscr{M}_i$ costituito da elementi della forma $[\mathscr{U}]_{B_i}\otimes R[T]$ dove

$$\mathscr{U} \in (T_i^d \cap Z_i \otimes R[\underline{T}])+(Z_i \otimes (T_{d+1},\dots,T_n)R[\underline{T}]) \subseteq Z_i \otimes R[\underline{T}]$$

e con $\mathscr{Z}_i(\mathscr{M})$ e $\mathscr{Z}_i(\bar{\mathscr{M}})$ l'insieme dei cicli i-esimi di $\mathscr{M}_i$ e $\bar{\mathscr{M}}_i$, rispettivamente.

Consideriamo la seguente condizione relativa al morfismo $\varphi_i : \mathscr{M}_i \to \bar{\mathscr{M}}_i$:

(*) "Sia $\bar{\alpha} \in \mathscr{Z}_i(\bar{\mathscr{M}})$. Allora esistono $\alpha \in \mathscr{Z}_i(\mathscr{M})$ e $\gamma \in \mathscr{C}_i(\mathscr{M})$ tali che $\varphi_i(\alpha+\gamma) = \bar{\alpha}$".

Si osserva che se $\bar{\varphi}_i : H_i(\mathscr{M}) \to H_i(\bar{\mathscr{M}})$ è un morfismo suriettivo, allora vale la condizione (*); in particolare, tale condizione equivale proprio alla suriettività di $\bar{\varphi}_i$ nel caso in cui si consideri l'anello $\bar{R}=R/I$ e, in esso, la successione $\bar{\underline{z}} = \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_d$.

LEMMA 2.1. *Siano* $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *una* $(d,i)_{\mathscr{M}}$ *-successione in* R *ed* h *un intero,* $d \leq h \leq n$. *Allora, se è soddisfatta la condizione* (*), $\bar{\underline{z}} = \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h$ *è una* $(d,i)_{\mathscr{M}}$ *-successione in* $\bar{R}$.

Dimostrazione. Sia $\bar{\alpha} \in \mathscr{Z}_i(\bar{\mathscr{M}})$; poiché vale la condizione (*), esistono $\alpha \in \mathscr{Z}_i(\mathscr{M})$ e $\gamma \in \mathscr{C}_i(\mathscr{M})$ tali che $\varphi_i(\alpha+\gamma) = \bar{\alpha}$. Per l'ipotesi che $\underline{z}$ sia una $(d,i)_{\mathscr{M}}$-successione, esistono $\alpha' \in \mathscr{Z}_i(\mathscr{M}) \cap \mathscr{C}_i(\mathscr{M})$ e $\beta \in \mathscr{M}_{i+1}$ tali che $\alpha = \alpha' + \partial'_{i+1}\beta$. Pertanto: $\bar{\alpha} = \varphi_i(\alpha+\gamma) = \varphi_i(\alpha' + \partial'_{i+1}\beta + \gamma) = \varphi_i(\alpha') + \varphi_i(\gamma) + \partial'_{i+1}\varphi_{i+1}(\beta)$ e poiché $\varphi_i(\alpha') + \varphi_i(\gamma) \in \mathscr{C}_i(\bar{\mathscr{M}}) \cap \mathscr{Z}_i(\bar{\mathscr{M}})$, segue la tesi.

COROLLARIO 2.2. *Siano* $\underline{z} = z_1,\ldots,z_d,\ldots,z_n$ *una* $(d,i)_{\mathcal{M}}$*-successione in* R e h *un intero* $d \leq h \leq n$. *Allora, se il morfismo* $\bar{\varphi}_i : H_i(\mathcal{M}) \to H_i(\bar{\mathcal{M}})$ *è suriettivo,* $\bar{\underline{z}} = \bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_h$ *è una* $(d,i)_{\mathcal{M}}$*-successione in* ${}_h\bar{R}$.

TEOREMA 2.3. *Sia* (J,I) *una* i*-coppia di ideali in* R. *Allora* $(\bar{J},\bar{I})$ *è una* i*-coppia di ideali in* $R/I', I' \subseteq I$ *se vale la condizione* (*) *per il morfismo* $\varphi_i : \mathcal{M}_i(\underline{z}) \to \mathcal{M}_i(\bar{\underline{z}})$, $\underline{z}=z_1,\ldots,z_d,\ldots,z_h,\ldots,z_n$ *essendo una successione in* R *tale che* $(\underline{z}) = J$, $(z_{d+1},\ldots,z_n) = I$ *e* $(z_{h+1},\ldots,z_n) = I'$.

In ciò che segue si dimostra che la suriettività di $\bar{\varphi}_i$ dipende solo dagli ideali J e $I_{(h)} = (z_{h+1},\ldots,z_n)$ e non dal loro sistema di generatori.

LEMMA 2.4. *Sia* $\underline{z} = z_1,\ldots,z_d,\ldots,z_n$. *Siano inoltre:*

$\underline{z}'=z'_1,\ldots,z'_d,\ldots,z'_n$ *dove* $(\underline{z})=(\underline{z}')$, $(z_{h+1},\ldots,z_n) = (z'_{h+1},\ldots,z'_n)$, *con* $d \leq h \leq n$;

$\underline{z}''=z_1,\ldots,z_d,\ldots,z_n,0$

$\underline{z}''' = 0,z_1,\ldots,z_d,\ldots,z_n$

Allora:

$\bar{\varphi}_i : H_i(\mathcal{M}(\underline{z})) \to H_i(\mathcal{M}(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_h))$ *è suriettiva se e solo se*

$\bar{\varphi}'_i : H_i(\mathcal{M}(\underline{z}')) \to H_i(\mathcal{M}(\bar{z}'_1,\ldots,\bar{z}'_h))$ *è suriettiva se e solo se*

$\bar{\varphi}''_i : H_i(\mathcal{M}(\underline{z}'')) \to H_i(\mathcal{M}(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_h))$ *è suriettiva se e solo se*

$\bar{\varphi}'''_i : H_i(\mathcal{M}(z''')) \to H_i(\mathcal{M}(\bar{0},\bar{z}_1,\ldots\bar{z}'_h))$ *è suriettiva.*

Dimostrazione. Segue dal Lemma 1.6, dal Cor. 1.10 e dalla commutatività dei seguenti diagrammi:

1)
$$\begin{array}{ccc} H_i(\mathcal{M}(\underline{z})) & \xrightarrow{\sim} & H_i(\mathcal{M}(\underline{z}')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_i(\mathcal{M}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h)) & \xrightarrow{\sim} & H_i(\mathcal{M}(\bar{z}'_1,\dots,\bar{z}'_h)) \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{ccc} H_i(\mathcal{M}(\underline{z}'')) & \xrightarrow{\sim} & H_i(\mathcal{M}(\underline{z})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_i(\mathcal{M}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h)) & \xrightarrow{id} & H_i(\mathcal{M}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h)) \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{ccc} H_i(\mathcal{M}(\underline{z}''')) & \xrightarrow{\sim} & H_i(\mathcal{M}\,\underline{z})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_i(\mathcal{M}(\bar{0},\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h)) & \xrightarrow{\sim} & H_i(\mathcal{M}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h)) \end{array}$$

Dal Lemma 2.4 segue:

PROPOSIZIONE 2.5. *Sia* $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$, *con* $J = (\underline{z})$ *e* $I_{(h)} = (z_{h+1},\dots,z_n)$, $d \le h \le n$ *e sia* $\bar{\varphi}_i : H_i(\mathcal{M}(\underline{z})) \to H_i(\mathcal{M}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h))$ *suriettivo, allora se la successione* $\underline{y}=y_1,\dots,y_{d'},\dots,y_{n'}$, *è tale che* $J = (\underline{y})$ *e* $I_{(h)} = (y_{h'+1},\dots,y_{n'})$, $d' \le h' \le n'$, *il morfismo* $\bar{\varphi}_i : H_i(\mathcal{M}(\underline{y})) \to H_i(\mathcal{M}(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_{h'}))$ *è suriettivo.*

Come immediata conseguenza dei risultati precedenti si ha:

PROPOSIZIONE 2.6. *Sia* (J,I) *una* i*-coppia di ideali in* R*. Allora* $(\bar{J},\bar{I})$ *è una* i*-coppia di ideali in* R/I', $I' \subseteq I$, *se il morfismo* $\bar{\varphi}_i : H_i(\mathcal{M}(J,R)) \to H_i(\bar{\mathcal{M}}(\bar{J},R/I'))$ *è suriettivo.*

Siano $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *una successione in* R, h *un intero,* $d \le h \le n$ *e* ${}_h\bar{R} = R/(z_{h+1},\dots,z_n)$; *i risultati seguenti mostrano che il morfismo* $\bar{\varphi}_i : H_i(\mathcal{M}(\underline{z})) \to H_i(\mathcal{M}(\bar{\underline{z}}))$ *non è, in generale, suriettivo, anche se il morfismo da cui deriva,* φ_i, *lo è.*

LEMMA 2.7. *Se* $\bar{\pi}_i : H_i(\mathbb{K}(\underline{z})) \to H_i(\bar{\mathbb{K}}(\bar{\underline{z}}))$, $i \geq 0$, *è un morfismo suriettivo, è suriettivo anche il morfismo indotto:*

$$\varphi_i : \mathcal{M}_i = H_i(\mathbb{K}) \otimes R[\underline{T}] \to \bar{\mathcal{M}}_i = (\bar{\mathbb{K}}) \otimes_h \bar{R}[\bar{\underline{T}}]$$

Dimostrazione. Segue dalla suriettività del morfismo $R[\underline{T}] \to {}_h\bar{R}[\bar{\underline{T}}]$ e dal fatto che le applicazioni tensoriali conservano la suriettività.

LEMMA 2.8. *Il morfismo* $\varphi_1 : H_1(\mathbb{K}) \otimes R[\underline{T}] \to H_1(\bar{\mathbb{K}}) \otimes_h \bar{R}[\bar{\underline{T}}]$ *è suriettivo.*

Dimostrazione. Dal Lemma 2.7 è sufficiente far vedere che $\bar{\pi}_1 : H_1(\mathbb{K}) \to H_1(\bar{\mathbb{K}})$ è un morfismo suriettivo; la tesi segue allora dalla prop. 2.5 di [M-R].

Costruiamo ora un esempio di morfismo $\bar{\varphi}_1 : H_1(\mathcal{M}) \to H_1(\bar{\mathcal{M}})$ non suriettivo, corrispondente alla presenza di una 1-coppia di ideali che non passa al quoziente.

ESEMPIO 2.9. Sia $A = k[\![X,Y,Z,T]\!]/(X^2+Y^2-TZ) \simeq k[\![x,y,z,t]\!]$. In A consideriamo la successione x,y,z e sia $J = (x,y,z)$ $(\neq \mathbf{m})$ e $I = (z)$. Dimostriamo che l'applicazione $\bar{\varphi}_1 : H_1(\mathcal{M}) \to H_1(\bar{\mathcal{M}})$ non è suriettiva.

Esaminiamo, infatti, l'elemento:

$\bar{\alpha} = (\bar{x}f_1 + \bar{y}f_2) \otimes 1$. Tale elemento appartiene a $Z_1(\bar{\mathbb{K}}) \otimes \bar{A}[\bar{\underline{T}}]$ (dove $\bar{A} = A/(z) \simeq k[\![X,Y,T]\!]/(X^2+Y^2)$), perché $\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{y}\cdot\bar{y} = \bar{x}^2+\bar{y}^2=0$. Inoltre $\partial_1' \bar{\alpha} = \bar{x}T_1+\bar{y}T_2 \in (\bar{x},\bar{y})\bar{A}[\bar{\underline{T}}]$, quindi $\bar{\alpha}$ è rappresentante di un elemento in $H_1(\bar{\mathcal{M}})$.

Facciamo vedere che non esiste un elemento in $H_1(\mathcal{M})$ la cui immagine in $\bar{\varphi}_1$ sia $[\ \bar{\alpha}\ ]$.

Osserviamo che un generico rimontamento α di $\bar{\alpha}$ in $\mathcal{M}_1$ ha la componente di grado 0 (come polinomio in T_1,T_2,T_3) così fatta:

$$\alpha_0 = ((x+\lambda_1 z)e_1+(y+\lambda_2 z)e_2+\lambda_3 e_3) \otimes 1, \text{ dove } \partial\alpha_0 = 0, \text{ ossia}$$

$$x^2+y^2+\lambda_3 z+(\lambda_1 x+\lambda_2 y)z = 0, \text{ cioé } (t+\lambda_3+\lambda_1 x+\lambda_2 y)z= 0.$$

Poiché $\mathrm{Ann}(z) = 0$ (infatti: $fz = 0 \leftrightarrow$ in $k[\![X,Y,Z,T]\!]$ $FZ = (X^2+Y^2-TZ)G$, per un certo $G \leftrightarrow (F+TG)Z = (X^2+Y^2)G \rightarrow$ per la fattorizzazione unica di $k[\![X,Y,Z,T]\!]$, $G = ZG_1$, per un certo G_1. Si ha allora $F = (X^2+Y^2-TZ)G_1$, ovvero $f=0$), la condizione diventa dunque:

$$(*) \qquad t + \lambda_3 + \lambda_1 x + \lambda_2 y = 0$$

Se risultasse $\alpha \in \mathcal{Z}_1(\mathcal{M})$, dovrebbe anche aversi $\alpha_0 \in \mathcal{Z}_1(\mathcal{M})$, ossia $\partial_1' \alpha_0 = (x+\lambda_1 z)T_1+(y+\lambda_2 z)T_2+\lambda_3 T_3 \in (x,y,z)A[\underline{T}]$; ma verrebbe $\lambda_3 T \in (x,y,z)A[\ \underline{T}\ ]$, ossia $\lambda_3 \in (x,y,z)$ e, per la (*), $t \in (x,y,z)$, il che è falso.

Facciamo ora vedere che (J,I) è una 1-coppia in A.

Un elemento generico di $H_1(\mathcal{M}(J))$ è rappresentato da:

$$\alpha = \sum_j (a_1^j e_1+a_2^j e_2+a_3^j e_3) \otimes P_j(T_1,T_2,T_3) \quad \text{dove}$$

(i) per ogni j, $a_1^j x + a_2^j y + a_3^j z= 0$ e

(ii) $\partial_1' \alpha \in JA[\underline{T}]$, cioé $\sum_j (a_1^j T_1+a_2^j T_2+a_3^j T_3) \otimes P_j(T_1,T_2,T_3) \in (x,y,z)A[\underline{T}]$

Notiamo che, in (ii), non è restrittivo considerare i P_j tutti monomi, dello stesso grado, con coefficiente 1.

I caso: grado di $P_j = 0$.

In questo caso, si può supporre che ci sia un addendo solo, cioé:

$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ con

(i') $a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$ e (ii') $a_i \in (x,y,z)$, $i = 1,2,3$.

Si hanno i seguenti fatti:

a) per la relazione $x^2+y^2 - tz = 0$, si può supporre che nell'espressione di a_1,a_2,a_3, x compaia al più a primo grado;

b) poiché $\begin{cases} a\, z\, e_1 = a\partial_2(e_3 \wedge e_1) + a\, x\, e_3 \\ a\, z\, e_2 = a\, \partial_2(e_3 \wedge e_2) + a\, y\, e_3 \end{cases}$

si può anche supporre che a_1,a_2 non contengano addendi in cui compaia z, cioé che siano serie in x e y.

Da a) e b), segue allora che a_1,a_2,a_3 sono così esprimibili:

$$\begin{cases} a_1=a_{11}x+a_{12}y \\ a_2=a_{21}x+a_{22}y \\ a_3=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{cases}$$ dove: a_{ij} non contiene x, per ogni ij, e $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},a_{32}$ non contengono z.

La condizione (i') diviene, pertanto:

$a_{11}(-y^2+tz)+a_{12}xy+a_{21}xy+a_{22}y^2+a_{31}xz+a_{32}yz+a_{33}z^2=0$, che equivale a:

$$\begin{cases} (a_{12}+a_{21})y + a_{31}z = 0 \\ (-a_{11}+a_{22})y^2 + (a_{11}t+a_{32}y+a_{33}z)z = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha: $a_{12}+a_{21} = 0$ e $a_{31} = 0$; dalla seconda equazione si ottiene: $a_{22} = a_{11}$ e $a_{11}t+a_{32}y+a_{33}z=0$, ovvero $a_{33} = 0$, $a_{11} = ya'_{11}$, e $a_{32} = -ta'_{11}$. Si ha dunque:

$$(\cdot)\quad \begin{cases} a_1 = a'_{11}xy + a_{12}y \\ a_2 = -a_{12}x + a'_{11}y^2 \\ a_3 = -a'_{11}ty \end{cases} \qquad \text{da cui:}$$

$\alpha = a_{12}(ye_1 - xe_2) + a'_{11}(xye_1 + y^2e_2) + (-a'_{11}ty)e_3$; poiché $ye_1 - xe_2 =$ $= \partial_2(e_2 \wedge e_1)$ si può sostituire α con:

$\beta = a'_{11}(xye_1 + y^2e_2 - tye_3)$, o anche, trascurando il fattore a'_{11}, con:

$\gamma = xye_1 + y^2e_2 - tye_3$. Se si aggiunge a γ il bordo:

$$\tilde{\beta} = \partial_2[(-x+y^2+x^2)e_2 \wedge e_1 + (t-xt)e_2 \wedge e_3 + yte_3 \wedge e_1] =$$
$$= -xye_1 - y^2e_2 + c_3e_3$$

si ha:

$$\gamma + \tilde{\beta} = (-ty + c_3)e_3.$$

II caso: grado di $P_j = 1$.

In questo caso è:

$\alpha = \sum_{j=1}^{3}(a_1^je_1 + a_2^je_2 + a_3^je_3)\,T_j$ con

(i") $a_1^jx + a_2^jy + a_3^jz = 0$ per ogni j, e

(ii") $\partial'_1\alpha = a_1^1T_1^2 + (a_2^1+a_1^2)T_1T_2 + (a_3^1+a_1^3)T_1T_3 + (a_3^2+a_2^3)T_2T_3 + a_2T_2^2 +$ $+ a_3T_3^2 \in (x,y,z)\cdot A[\,\underline{T}\,]$, ovvero:

$a_1^1, a_2^2, a_3^3 \in (x,y,z)$ e $(a_j^i + a_i^j) \in (x,y,z)$ per ogni $i,j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$.

Facciamo vedere che per ogni i,j, $i \neq j$, $a_j^i \in (x,y,z)$ cosicché ci si riconduce al caso I.

Per le osservazioni fatte nel caso I, si ha:

$$(\cdot\cdot)\begin{cases} a_1^1=a_{11}x+a_{12}y \\ a_2^1=a_{21}x+a_{22}y+\alpha_{23}(t) \\ a_3^1=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+\alpha_{34}(t) \end{cases}$$

dove: a_{ij} non contiene x, per ogni ij, e $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}, a_{32}$ non contengono z.

da cui, sostituendo nell'espressione $a_1^1x+a_2^1y+a_3^1z=0$ si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} (a_{12}+a_{21})y+a_{31}z = 0 \\ a_{11}(-y^2+tz)+a_{22}y^2+\alpha_{23}(t)y+a_{32}yz+a_{33}z^2+\alpha_{34}(t)z = 0 \end{cases}$$

che equivale a:

$a_{12} = -a_{21}$, $a_{31}=0$ e $\begin{cases} (-a_{11}+a_{22})y+\alpha_{23}(t)=0, \text{ da cui } a_{11}=a_{22}, \alpha_{23}(t)=0. \\ a_{11}t+a_{32}y+a_{33}z+\alpha_{34}(t)=0 \end{cases}$

Pertanto, $a_2^1 \in (x,y,z)$, da cui $a_1^2 \in (x,y,z)$.

Analogamente si ha pure che:

$$(\cdot\cdot\cdot)\begin{cases} a_1^3=b_{11}x+b_{12}y+\beta_{12}(t) \\ a_2^3=b_{21}x+b_{22}y+\beta_{23}(t) \\ a_3^3=b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z \end{cases}$$

dove: b_{ij} non contiene x,per ogni ij, e $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{32}$ non contengono z.

e sostituendo nell'espressione $a_1^3x+a_2^3y+a_3^3z = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (b_{12}+b_{21})y+\beta_{12}(t)+b_{31}z=0 \\ (-b_{11}+b_{22})y+\beta_{23}(t)y+(b_{11}t+b_{32}y+b_{33}z)z = 0 \end{cases}$$

da cui si ha, in particolare: $b_{31} = 0$, $\beta_{13}(t) = 0$, $b_{12}+b_{21}=0$, e $b_{11}=b_{22}$, $\beta_{23}(t)=0$. Se ne conclude che: $a_1^3, a_2^3 \in (x,y,z)$ e quindi anche $a_3^1, a_3^2 \in (x,y,z)$.

III caso: grado di $P_j = n$, $n>1$.

Si ha:

$$\alpha = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} (a_1^{(k_1,k_2,k_3)}e_1 + a_2^{(k_1,k_2,k_3)}e_2 + a_3^{(k_1,k_2,k_3)}e_3) T_1^{k_1} T_2^{k_2} T_3^{k_3}$$

dove:

(i''') per ogni (k_1,k_2,k_3), $a_1^{(k_1,k_2,k_3)}x + a_2^{(k_1,k_2,k_3)}y + a_3^{(k_1,k_2,k_3)}z = 0$

e

(ii''') $$\partial_1^{\prime}\alpha = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} (a_1^{(k_1,k_2,k_3)}T_1 + a_2^{(k_1,k_2,k_3)}T_2 + a_3^{(k_1,k_2,k_3)}T_3) T_1^{k_1} T_2^{k_2} T_3^{k_3} =$$

$$= \sum_{j_1+j_2+j_3=n+1} (a_1^{(j_1-1,j_2,j_3)} + a_2^{(j_1,j_2-2,j_3)} + a_3^{(j_1,j_2,j_3-1)}) T_1^{j_1} T_2^{j_2} T_3^{j_3} \in$$

$\in (x,y,z)A[\,\underline{T}\,]$, con $a_i^{(h_1,h_2,h_3)} = 0$ se uno degli h_1 è negativo, il che equivale a:

(*) $$a_1^{(j_1-1,j_2,j_3)} + a_2^{(j_1,j_2-1,j_3)} + a_3^{(j_1,j_2,j_3-1)} \quad \in (x,y,z).$$

Facciamo vedere che, per ogni j_1,j_2,j_3, $a_1^{(j_1-1,j_2,j_3)}$, $a_2^{(j_1,j_2-1,j_3)}$, $a_3^{(j_1,j_2,j_3-1)} \in (x,y,z)$ cosicché ci si riconduce al caso I.

Osserviamo che nei calcoli fatti sui sistemi (••) e (•••) l'unica ipotesi usata (oltre alle solite condizioni $a_1x+a_2y+a_3z=0$

e $x^2+y^2-tz=0$) è stata che $a_i^i \in (x,y,z)$, $i=1,2,3$. Questi stessi calcoli si possono allora ripetere sui sistemi seguenti, poiché da (*) si ha che

$$a_1^{(n,0,0)},\quad a_2^{(0,n,0)},\quad a_3^{(0,0,n)} \in (x,y,z):$$

$$\begin{cases} a_1^{(n,0,0)} = \dots \\ a_2^{(n,0,0)} = \dots \\ a_3^{(n,0,0)} = \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^{(0,n,0)} = \dots \\ a_2^{(0,n,0)} = \dots \\ a_3^{(0,n,0)} = \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^{(0,0,n)} = \dots \\ a_2^{(0,0,n)} = \dots \\ a_3^{(0,0,n)} = \dots \end{cases}$$

e si ottiene che:

$$a_2^{(n,0,0)},\ a_3^{(n,0,0)},\ a_1^{(0,n,0)},\ a_3^{(0,n,0)},\ a_1^{(0,0,n)},\ a_2^{(0,0,n)} \in (x,y,z);$$

da (*) segue quindi che:

(**) $a_1^{(n-1,1,0)}, a_1^{(n-1,0,1)},\ a_2^{(1,n-1,0)},\ a_2^{(0,n-1,1)},\ a_3^{(1,0,n-1)},\ a_3^{(0,1,n-1)}$

appartengono a (x,y,z).

Se si ripete il procedimento sui sistemi originati da ciascuno degli elementi di (**), si ha che:

$$\begin{aligned} &a_1^{(n-2,2,0)},\ a_1^{(n-2,1,1)},\ a_1^{(n-2,0,2)}, \\ &a_2^{(2,n-2,0)},\ a_2^{(1,n-2,1)},\ a_2^{(0,n-2,2)}, \\ &a_3^{(2,0,n-2)},\ a_3^{(1,1,n-2)},\ a_3^{(0,2,n-2)} \in (x,y,z), \end{aligned}$$

e quindi, se si continua in tal modo, operando sui nuovi sistemi che, di volta in volta, si originano, si ottiene che

$a_1^{(n-r,r-s,s)}$, $a_2^{(r-s,n-r,s)}$, $a_3^{(r-s,s,n-r)}$ $\in$ (x,y,z)

con $0 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq r$, cioé la tesi.

(J,I) è, pertanto, una 1-coppia di ideali in A, mentre $(\bar{J},\bar{I})$ non lo è in $\bar{A} = A/(z)$ $(H_1(\bar{\mathcal{M}}) \neq 0)$.

OSSERVAZIONE 2.10. Dalle Propp. 2.2 e 2.5 di [M-R], segue invece che se $\underline{z}$ è una (d,1)-successione in R, allora $\underline{z}$ è sempre una (d,1)-successione in ${}_h\bar{R}$.

In ciò che segue, si affronta lo studio della suriettività di $\bar{\varphi}_1$ e si ottengono risultati diversi a seconda che $\underline{z}$ sia, o non, un sistema di generatori per il massimale m di R.

PROPOSIZIONE 2.11. *Sia* $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *un insieme di elementi non invertibili di* R *che generano minimalmente il massimale* $\mathfrak{m}$ *di* R . *Allora il morfismo* $\bar{\varphi}_1 : H_1(\mathcal{M}) \to H_1(\bar{\mathcal{M}})$ *(dove* $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h, {}_h\bar{R})$, $d \leq h \leq n$, *è suriettivo.*

Dimostrazione. - Sia $\bar{\alpha} = \sum_j \sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i^{(j)} f_i \otimes \bar{P}^{(j)}(\underline{\bar{T}}) \in Z_1(\bar{\mathbb{K}}) \otimes_h \bar{R}[\underline{\bar{T}}]$ rappresentante di un elemento in $H_1(\bar{\mathcal{M}})$. Allora:

1) $\sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i^{(j)} \bar{z}_i = 0$, per ogni j, cioé, rimontando $\bar{a}_i^{(j)}$ in $a_i^{(j)} \in R$,

$$\sum_{i=1}^{h} a_i^{(j)} z_i = \sum_{k=h+1}^{n} b_k^{(j)} z_k, \text{ per } b_{h+1}^{(j)},\dots,b_n^{(j)} \in R.$$

2) $\sum_j \sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i^{(j)} T_i \bar{P}^{(j)}(\underline{\bar{T}}) \in B_0(\bar{K}) \otimes {}_h\bar{R}[\underline{\bar{T}}] = \bar{\mathfrak{m}}_h \bar{R}[\underline{\bar{T}}]$.

L'elemento:

$$\alpha = \sum_j \left(\sum_{i=1}^{h} a_i^{(j)} e_i - \sum_{k=h+1}^{n} b_k^{(j)} e_k\right) \otimes P^{(j)}(\underline{T}) \in Z_1(\mathbb{K}) \otimes R[\underline{T}]$$

dove $P^{(j)}(\underline{T})$ rimonta $\bar{P}^{(j)}(\underline{\bar{T}})$, è tale che

$$\varphi_1([\alpha]_{B_1(K)} \otimes R[\underline{T}]) = [\bar{\alpha}]_{B_1(\bar{K})} \otimes {}_h\bar{R}[\underline{\bar{T}}]$$

Se proviamo che $\partial_1'\alpha \in B_0(K) \otimes R[\underline{T}] = mR[\underline{T}]$ segue la suriettività di $\bar{\varphi}_1$. Si ha:

$$\partial_1'\alpha = \sum_j\left(\sum_{i=1}^{h} a_i^{(j)}T_i - \sum_{k=h+1}^{n} b_k^{(j)}T_k\right) \otimes P^{(j)}(\underline{T}),$$

dove

$$\sum_j\left(\sum_{i=1}^{h} a_i^{(j)}T_iP^{(j)}(\underline{T})\right) \in mR[\underline{T}], \text{ per la 2)}.$$

Resta da far vedere che $\sum_j\left(\sum_{k=h+1}^{n} b_k^{(j)}T_kP^{(j)}(\underline{T})\right) \in mR[\underline{T}]$

Dalla 1) segue che, per ogni k, $k \geq d+1$, $b_k^{(j)}z_k \in (z_1,\ldots,\check{z}_k,\ldots,z_n)$ e poiché, per ipotesi, $\underline{z}$ è un sistema minimale di generatori per $\mathbf{m}$, $b_k^{(j)}$ è non invertibile, quindi appartiene a $\mathbf{m}$.

OSSERVAZIONE 2.12. Se $\underline{z} = z_1,\ldots,z_d,\ldots,z_n$ è un sistema minimale di generatori per $\mathbf{m}$, e $\underline{z}' = z_1,\ldots,z_d,\ldots,z_n,0$, allora $\bar{\varphi}_1 : H_1(\mathcal{M}') \to H_1(\bar{\mathcal{M}}')$, dove $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(\underline{z}')$ e $\bar{\mathcal{M}}' = \mathcal{M}(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_h)$, $d \leq h \leq n$, è un morfismo suriettivo (si procede come nella dimostrazione della Prop. 2.11).

TEOREMA 2.13. *Sia* $\mathbf{m} = (z_1,\ldots,z_d,\ldots,z_n)$ *il massimale di* R *; allora il morfismo* $\bar{\varphi}_1 : H_1(\mathcal{M}) \to H_1(\bar{\mathcal{M}})$ *dove* $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_h)$, $d \leq h \leq n$, *è suriettivo.*

Dimostrazione. Si hanno due casi:

(i) $\underline{z} = z_1,\ldots,z_d,\ldots,z_n$ è un sistema minimale di generatori per

$\mathfrak{m}$: la tesi segue allora dalla Prop. 2.11.

(ii) $\underline{z}$ non è minimale: poiché un qualunque insieme di generatori di un ideale di un anello locale contiene una base minimale (cfr. [Sa]), esiste $k < n$ tale che $\underline{z}' = z_1,\dots,z_k$ è un sistema minimale di generatori per $\mathfrak{m}$. Indicati con $\mathcal{M}'$ e $\bar{\mathcal{M}}'$ i complessi relativi a $\underline{z}'$ e a $\bar{\underline{z}}'$, sistema di generatori di $\bar{J}$ in ${}_h\bar{R}$, $d \leq h \leq n$, dalla Prop. 2.11, il morfismo $\bar{\varphi}_1' : H_1(\mathcal{M}) \to H_1(\bar{\mathcal{M}}')$ è suriettivo. Dalla Prop. 2.5, segue allora la suriettività del morfismo $\bar{\varphi}_1 : H_1(\mathcal{M}) \to H_1(\bar{\mathcal{M}})$.

COROLLARIO 2.14. *Sia* $(\mathfrak{m},I)$ *una* 1*-coppia di ideali in* R *, allora* $(\bar{\mathfrak{m}},\bar{I})$ *è una* $\underline{1}$*-coppia di ideali in* $\bar{R}=R/I$ *e, più in generale, in* R/I' *, con* $I' \subseteq I$

COROLLARIO 2.15. *Sia* $(\mathfrak{m},I)$ *una* 1 *coppia di ideali in* R. *Allora* $\mathrm{Sym}_{\bar{R}}(\bar{J}) \simeq \mathcal{R}_{\bar{R}}(\bar{J})$.

Dimostrazione. Dal Cor. 2.14, in $\bar{R}$, $(\bar{\mathfrak{m}},\bar{I}) = (\bar{\mathfrak{m}},0)$ è una 1-coppia di ideali e quindi $H_1(\bar{\mathcal{M}}) = 0$; il risultato segue allora dall'Oss. 1.5(i).

Supponiamo ora che $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ sia un sistema di generatori per un ideale J di R (non necessariamente il massimale) e studiamo, anche in questo caso, la suriettività del morfismo $\bar{\varphi}_1$.

Un primo risultato è formato dalla proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 2.16. *Siano* $\underline{z}=z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *e* $J=(z_1,\dots,z_n)$. *Se* $\bar{\underline{z}}' = \bar{z}_{h+1},\dots,\bar{z}_n$ *con* h *intero,* $d \leq h \leq n$, *è una successione rego* *lare in* $R/(z_1,\dots,z_h)$, *allora il morfismo* $\bar{\varphi}_1 : H_1(\mathcal{M}(\underline{z})) \to H_1(\mathcal{M}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h))$ *è suriettivo.*

Dimostrazione. Con le notazioni della Prop. 2.11, la relazione $\sum_{i=1}^{d} a_i^{(j)} z_i = \sum_{k=h+1}^{n} b_k^{(j)} z_k$, letta in $R^* = R/(z_1,\dots,z_h)$, diviene

$\sum_{k=h+1}^{n} \bar{b}_k^{(j)} \bar{z}_k = 0$ e in $\bar{R}^* = R^*/(\bar{z}_{h+1},\dots,\check{\bar{z}}_k,\dots,\bar{z}_n)$, essa è della forma $\bar{b}_k^{*(j)} \bar{z}_k^* = 0$. Poiché $\bar{z}_k^*$ è regolare in $\bar{R}^*$, segue che $\bar{b}_k^{(j)} \in (\bar{z}_{h+1},\dots,\check{\bar{z}}_k,\dots,\bar{z}_n)$ cioé $b_k^{(j)} \in (z_1,\dots,\check{z}_k,\dots z_n) \subseteq J$. Con il procedimento usato nella Prop. 2.11, si ha la suriettività di $\bar{\varphi}_1$.

COROLLARIO 2.17. *Se* $J = (z_1,\dots,z_d,\dots,z_n)$ *e* $\underline{z} = z_1,\dots,z_n$ *è una successione regolare in* R *, allora* $\bar{\varphi}_1 : H_1(\mathcal{M}) \to H_1(\mathcal{M}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h))$, $d \le h \le n$ *, è suriettiva.*

COROLLARIO 2.18. *Sia* (J,I) *una* 1*-coppia di ideali in* R *per cui esiste una* $(d,1)_{\mathcal{M}}$*-successione* $\underline{z}$ *che soddisfa alle ipotesi della Prop. 2.16, allora* $(\bar{J},\bar{I})$ *è una* 1*-coppia di ideali in* R/I', $I' \subseteq I$.

In particolare, si ha $\mathrm{Sym}_{\bar{R}}(\bar{J}) \simeq \bar{\mathcal{R}}_{\bar{R}}(\bar{J})$.

Il risultato che segue fornisce un'altra condizione sufficiente per la suriettività di $\bar{\varphi}_1$.

TEOREMA 2.19. *Siano* $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *una successione in* R *ed* h *un intero,* $d \le h \le n$ *, tali che* $J = (\underline{z})$, $I_{(h)} = (z_{h+1},\dots,z_n)$ *e* $H_{(h)} = (z_1,\dots,z_h)$. *Supponiamo inoltre che valga la seguente proprietà:*

$$\text{(o)} \qquad H_{(h)} \cap I_{(h)} \subseteq H_{(h)} I_{(h)} + I_{(h)}^2$$

allora $\bar{\varphi}_1 : H_1(\mathcal{M}(\underline{z})) \to H_1(\mathcal{M}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_h))$ *è un morfismo suriettivo.*

Dimostrazione. Sia $\bar{\alpha} = \sum_j \sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i^{(j)} f_i \otimes \bar{P}^{(j)}(\underline{\bar{T}}) \in Z_1(\bar{K}) \otimes {}_h\bar{R}[\underline{\bar{T}}]$, rappresentante di una classe in $H_1(\bar{\mathcal{M}})$. Allora:

1) $\sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i^{(j)} \bar{z}_i = 0$, per ogni j;

2) $\sum_j \sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i^{(j)} T_i \bar{P}^{(j)}(\underline{\bar{T}}) \in B_0(\bar{K}) \otimes \bar{R}[\underline{\bar{T}}] = \bar{J}_h \bar{R}[\underline{\bar{T}}]$.

Dalla 1), segue che, per ogni j, $\sum_{i=1}^{h} a_i^{(j)} z_i \in I$, e quindi, dall'ipotesi fatta, esistono n-h elementi $b_{h+1}^{(j)}, \dots, b_n^{(j)} \in J$ tali che $\sum_{i=1}^{h} a_i^{(j)} z_i = \sum_{k=h+1}^{n} b_k^{(j)} z_k$.

Posto allora:

$$\alpha = \sum_j \Big(\sum_{i=1}^{h} a_i^{(j)} e_i - \sum_{k=h+1}^{n} b_k^{(j)} e_k \Big) \otimes P^{(j)}(\underline{T}), \text{ con } P^{(j)}(\underline{T})$$

rimontamento di $\bar{P}^{(j)}(\underline{T})$, si ha:

1') $\sum_{i=1}^{h} a_i^{(j)} z_i - \sum_{k=h+1}^{n} b_k^{(j)} z_k = 0$, per ogni j (cioé $\alpha \in Z_1(K) \otimes R[\underline{T}]$)

2') $\partial_1' \alpha = \sum_j \Big(\sum_{i=1}^{h} a_i^{(j)} T_i - \sum_{k=h+1}^{n} b_k^{(j)} T_k \Big) P^{(j)}(\underline{T}) \in J\, R[\underline{T}]$

Segue che α è rappresentante di un elemento di $H_1(\mathcal{M})$, la cui immagine tramite $\bar{\varphi}_1$ è la classe di equivalenza di $\bar{\alpha}$.

COROLLARIO 2.20. *Se* $I_{(h)} \cap J = J \cdot I_{(h)}$, *allora* $\bar{\varphi}_1$ *è un morfismo suriettivo.*

COROLLARIO 2.21. *Sia* (J,I) *una* 1-*coppia in* R *per cui esiste* *una* $(d,1)_{\mathcal{M}}$ *-successione* $\underline{z}$ *che soddisfa alle ipotesi del Teor.2.19, allora* $(\bar{J},\bar{I})$ *è una* 1*-coppia di ideali in* $\bar{R}/I'$, $I' \subseteq I$.

In particolare, si ha $\mathrm{Sym}_{\bar{R}}(\bar{J}) \simeq \mathcal{R}_{\bar{R}}(\bar{J})$.

Il teorema seguente fornisce una condizione necessaria per la suriettività di $\bar{\varphi}_1$.

TEOREMA 2.22. *Siano* $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *una successione in* R *e* h *un intero,* $d \le h \le n$, *tali che* $J = (\underline{z})$, $I_{(h)}=(z_{h+1},\dots,z_n)$ *e* $H_{(h)} = (z_1,\dots,z_h)$. *Allora, se il morfismo* $\bar{\varphi}_1:H_1(\mathcal{M}(\underline{z})) \to H_1(\mathcal{M}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_H))$ *è suriettivo, vale la seguente condizione:*

(oo) $$H^2_{(h)} \cap I_{(h)} \subseteq H_{(h)}\, I_{(h)} + I^2_{(h)}\ .$$

Dimostrazione. Sia $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \in I_{(h)}$ e $a_i \in H_{(h)}$, per ogni i, allora l'elemento $\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i f_i \otimes 1$ è un rappresentante di una classe in $H_1(\mathcal{M})$, poiché:

1) $\sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i \bar{z}_i = 0$

2) $\sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i T_i \in \bar{J}\ {}_h\bar{R}[\underline{\bar{T}}]$

Per la suriettività di φ_1, esiste $\tilde{\alpha} \in Z_1(\mathbb{K}) \otimes R[\underline{T}]$ con $\partial_1' \tilde{\alpha} \in JR[\underline{T}]$, tale che $\varphi_1([\tilde{\alpha}]) = [\bar{\alpha}]$. Allora

$$\tilde{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{h} a_i e_i - \sum_{k=h+1}^{n} b_k e_k\right) \otimes 1 + \sum_{s} \sum_{k=h+1}^{n} c_k^{(s)} e_k \otimes P^{(s)}(\underline{T}) +$$
$$+ \sum_{r} \sum_{j=1}^{n} d_j^{(r)} e_j \otimes Q^{(r)}(T_{h+1},\dots,T_n)$$

dove, per ogni k e per ogni j, $P^{(s)}(\underline{T})$ e $Q^{(r)}(T_{h+1},\dots,T_n)$

sono polinomi di ordine $\geq$ 1 nelle indeterminate $T_1,\ldots,T_n$ e $T_{h+1},\ldots,T_n$, rispettivamente.

Scrivendo $\tilde{\alpha}$ in modo che le sue componenti siano ordinate secondo le potenze crescenti dei monomi in $T_1,\ldots,T_n$, si osserva che il pezzo tensorizzato per i monomi di grado 0 è dato da:

$$\tilde{\alpha}_0 = \sum_{i=1}^{h} a_i e_i - \sum_{k=h+1}^{n} b_k e_k \otimes 1.$$

Si ha allora:

$$\sum_{i=1}^{h} a_i z_i = \sum_{k=h+1}^{n} b_k e_k \in I_{(h)}.$$

Inoltre essendo

$$\partial_1' \tilde{\alpha} = (\sum_{i=1}^{h} a_i T_i - \sum_{k=h+1}^{n} b_k T_k) \otimes 1 + \sum_s \sum_{k=h+1}^{n} c_k^{(s)} T_k \otimes P^{(s)}(\underline{T}) +$$

$$+ \sum_r \sum_{j=1}^{n} d_j^{(r)} T_j \otimes Q^{(r)}(T_{h+1},\ldots,T_n) \in J\, R[\underline{T}],$$

considerato solo il termine di grado 1, si ha:

$\sum_{i=1}^{h} a_i T_i - \sum_{k=h+1}^{n} b_k T_k \in J\ R[\underline{T}]$ e poiché $\sum_{i=1}^{h} a_i T_i \in J\ R[\underline{T}]$, segue che $\sum_{k=h+1}^{n} b_k T_k \in J \cdot R[\underline{T}]$, da cui $b_k \in J$, per ogni $k \geq k+1$.

Si ha allora $\sum_{i=1}^{h} a_i z_i \in J \cdot I_{(h)} = (H_{(h)} + I_{(h)}) I_{(h)} = H_{(h)} I_{(h)} + I_{(h)}^2$, cioé la tesi.

OSSERVAZIONE 2.23. Notiamo che nell'esempio 2.9 non è soddisfatta la condizione (o) del Teor. 2.19. Considerando, infatti, l'elemento $x^2+y^2 \in A$, vediamo che: $x^2+y^2 = x \cdot x + y \cdot y =$

$= tz \in I$ e $x,y \in J$. Se fosse $tz \in IJ$, si avrebbe $tz=zj$ con $j \in J$, ovvero $z(t-j) = 0$. Rimontando in $k[\![X,Y,Z,T]\!]$ si otterrebbe $Z(T-J) = (X^2+Y^2-TZ)G$; per la fattorizzazione unica dell'anello delle serie formali, Z dovrebbe comparire come fattore nel secondo membro e, per l'irriducibilità di X^2+Y^2-TZ, dovrebbe dividere G, cioé:

$$Z(T-J) = (X^2+Y^2-TZ)G'Z \text{ da cui}$$

$$T-J \in (X^2+Y^2-TZ), \text{ ma ciò è assurdo.}$$

Il risultato che segue fornisce una condizione sufficiente per l'equivalenza delle proprietà (o) e (oo).

PROPOSIZIONE 2.24. *Siano* $\underline{z}$, J, $I_{(h)}$ *e* $H_{(h)}$ *come sopra. Supponiamo che in* ${}_h\bar{R}$, *la successione* $\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h$ *sia tale che* $\bar{z}_i$ *è regolare* $\mathrm{mod}(\bar{z}_1,\dots,\check{\bar{z}}_i,\dots,\bar{z}_n)$, $i=1,\dots,h$. *Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(o) $$H_{(h)} \cap I_{(h)} \subseteq H_{(h)}I_{(h)} + I^2_{(h)}$$

(oo) $$H^2_{(h)} \cap I_{(h)} \subseteq H_{(h)}\, I_{(h)} + I^2_{(h)}$$

Dimostrazione. E' ovvio che (o) $\rightarrow$ (oo) .

Supponiamo che valga (oo). Sia $\alpha \in H_{(h)} \cap I_{(h)}$, cioé $\alpha = \sum_{i=1}^{h} a_i z_i \in I_{(h)}$; passando al quoziente mod $I_{(h)}$ si ottiene:

$\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i \bar{z}_i = 0$ e quindi in $R_i^* = \bar{R}/(\bar{z}_1,\dots,\check{\bar{z}}_i,\dots,\bar{z}_h)$, si ha $\bar{a}_i^* \bar{z}_i^* = 0$, $i=1,\dots,h$. Dall'ipotesi fatta su $\bar{z}_i^*$, segue quindi

$\bar{a}_i \epsilon(\bar{z}_1,\dots,\check{\bar{z}}_i,\dots,\bar{z}_n) \subseteq J$. Per la condizione (oo), si ha allora $\alpha \epsilon H_{(h)} I_{(h)} + I^2_{(h)}$.

COROLLARIO 2.25. *Siano* $\underline{z}$, J, $I_{(h)}$ *e* $H_{(h)}$ *come sopra e sia* $\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h$ *una successione regolare in* ${}_h\bar{R}$. *Allora valgono le due condizioni equivalenti della Prop. 2.24.*

Dimostrazione. Poiché $\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h$ è una successione regolare, segue che $H_1(\mathbb{K}(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h))=0$ e quindi $\mathcal{M}_1(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h) = 0$ da cui $H_1(\mathcal{M}\ (\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h)) = 0$. Si ha allora la suriettività di $\bar{\varphi}_1$. Per il teor. 2.22 è pertanto soddisfatta la condizione (oo) e per la prop. 2.24 è soddisfatta anche la condizione (o).

N.3. Nel presente paragrafo si affronta il problema della conservazione delle i-coppie di ideali nel rimontamento da R/I', $I'\subseteq I$, a R.

Siano $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ una successione in R, h un intero, $d \leq h \leq n$, e ${}_h\bar{R}=R/(z_{h+1},\dots,z_n)$. Si indica con $\mathcal{M}$ il complesso approssimante relativo a $\underline{z}$ in R e con $\bar{\mathcal{M}}$ il complesso approssimante relativo a $\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h$ in ${}_h\bar{R}$.

LEMMA 3.1. *Sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(i) $\mathrm{Im}(\varphi_{i+1}) + \mathrm{Ker}\ \partial'_{i+1} = \bar{\mathcal{M}}_{i+1}$

(ii) $\bar{\mathcal{B}}_i = \varphi_i(\mathcal{B}_i)$, *dove* $\bar{\mathcal{B}}_i$ *e* $\mathcal{B}_i$ *rappresentano, rispettivamente, l'insieme dei bordi i-esimi di* $\mathcal{M}_i$ *e* $\bar{\mathcal{M}}_i$.

Dimostrazione. (i) $\rightarrow$ (ii). Sia $\partial'_{i+1}\bar{\beta}\in\bar{\mathcal{B}}_i$ con $\bar{\beta} \in \bar{\mathcal{M}}_{i+1}$; per la (i) possiamo supporre $\bar{\beta} = \varphi_{i+1}\beta$, $\beta \in \mathcal{M}_{i+1}$. Ma allora $\partial'_{i+1}\bar{\beta} =$

$\partial'_{i+1}(\varphi_{i+1}\beta) = \varphi_i(\partial'_{i+1}\beta) \in \varphi_i(\mathscr{B}_i)$, cioé $\bar{\mathscr{B}}_i \subseteq \varphi_i(\mathscr{B}_i)$. Poiché $\varphi_i(\mathscr{B}_i) \subseteq \bar{\mathscr{B}}_i$, segue l'uguaglianza.

(ii) $\to$ (i). Sia $\bar{\alpha} \in \bar{\mathscr{M}}_i$. Risulta allora, per la (ii):

$\partial'_{i+1}\bar{\alpha} = \varphi_i(\partial'_{i+1}\alpha) = \partial'_{i+1}(\varphi_{i+1}\alpha)$ e quindi $\partial'_{i+1}(\bar{\alpha}-\varphi_{i+1}\alpha) = 0$, da cui $\bar{\alpha} = \varphi_{i+1}(\alpha) + \bar{\alpha}_1$, dove $\bar{\alpha}_1 \in \operatorname{Ker} \partial'_{i+1}$. Segue $\bar{\mathscr{M}}_i \subseteq \operatorname{Im}\varphi_{i+1}+\operatorname{Ker}\partial'_{i+1}$ e poiché $\operatorname{Im}\varphi_{i+1} + \operatorname{Ker}\partial'_{i+1} \subseteq \bar{\mathscr{M}}_i$, vale l'uguaglianza.

Il risultato seguente dà una condizione sufficiente per il rimontamento delle $(d,i)_{\mathscr{M}}$-successioni.

PROPOSIZIONE 3.2. *Siano* $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *e* h *un intero con* $d \leq h \leq n$. *Supponiamo inoltre che* $\underline{\bar{z}} = \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h$ *sia una* $(d,i)_{\mathscr{M}}$ *-successicne in* ${}_h\bar{R}$ *. Allora, se:*

(i) $\bar{\mathscr{B}}_i = \varphi_i(\mathscr{B}_i)$ *(o equivalentemente,* $\bar{\mathscr{M}}_{i+1}=\operatorname{Im}\varphi_{i+1}+\operatorname{Ker}\partial'_{i+1}$ (cfr. Lemma 3.1));

(ii) $\bar{\mathscr{Z}}_i \subseteq \operatorname{Im}\varphi_i$, *dove* $\bar{\mathscr{Z}}_i$ *rappresenta l'insieme dei cicli i-esimi di* $\bar{\mathscr{M}}_i$ *, la successione* $\underline{z}$ *è una* $(d,i)_{\mathscr{M}}$ *-successione in* R.

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots \to & H_{i+1}(\mathbb{K}) \otimes R[\underline{T}] & \to & H_i(\mathbb{K}) \otimes R[\underline{T}] & \to & H_{i-1}(\mathbb{K}) \otimes R[\underline{T}] & \to \dots \\
& \downarrow \varphi_{i+1} & & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i-1} & \\
\dots \to & H_{i+1}(\mathbb{K}) \otimes_h\bar{R}[\underline{T}] & \to & H_i(\bar{\mathbb{K}}) \otimes_h\bar{R}[\underline{T}] & \to & H_{i-1}(\bar{\mathbb{K}}) \otimes_h\bar{R}[\underline{T}] & \to \dots
\end{array}$$

Sia $\alpha \in \mathscr{M}_i$ con $\partial'_i\alpha = 0$. Allora $\varphi_i\alpha$ è tale che $\partial'_i\varphi_i\alpha = 0$, e poiché $\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_h$ è una $(d,i)_{\mathcal{M}}$ -successione, esiste $\bar{\alpha}' \in \mathcal{X}_i$ che è combinazione di elementi del tipo:

$$\sum_{\substack{1\le j_1<\dots<j_i\le h\\ j_i>d}} \bar{c}_{j_1\dots j_i} f_{j_1}\wedge\dots\wedge f_{j_i} \otimes \bar{P}(\underline{T}) \quad \text{e}$$

$$\sum_{1\le j_1<\dots<j_i\le h} \bar{d}_{j_1\dots j_i} f_{j_1}\wedge\dots\wedge f_{j_i} \otimes \bar{P}'(T_{d+1},\dots,T_h), \text{ dove}$$

$\bar{P}'(T_{d+1},\dots,T_h)$ è un polinomio di ordine ≥ 1 in $T_{d+1},\dots,T_h$, con $\bar{\varphi}_i\alpha = \bar{\alpha}' + \partial'_{i+1}\bar{\beta}$. Per la (ii), esiste $\alpha' \in \mathcal{M}_i$ tale che $\varphi_i\alpha' = \bar{\alpha}'$ e quindi anche α' risulta essere una combinazione di elementi del tipo:

$$\sum_{\substack{1\le j_1<\dots<j_i\le n\\ j_i>d}} a_{j_1\dots j_i} e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_i} \otimes Q(\underline{T}) \quad \text{e}$$

$$\sum_{1\le j_1<\dots<j_i\le n} b_{j_1\dots j_1} e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_i} \otimes Q'(T_{d+1},\dots,T_n), \quad \text{dove}$$

$Q'(T_{d+1},\dots,T_n)$ è un polinomio di ordine ≥ 1 in $T_{d+1},\dots,T_n$.

Dalla (i), si ha che esiste $\beta \in \mathcal{M}_{i+1}$ con $\partial'_{i+1}\bar{\beta} = \partial'_{i+1}\ \varphi_{i+1}\beta = \varphi_i\,\partial'_{i+1}\beta$. Quindi $\varphi_i\alpha - \bar{\alpha}' = \varphi_i(\alpha-\alpha') = \varphi_i\partial'_{i+1}\beta$ e perciò $\alpha-\alpha' - \partial'_{i+1}\beta = \gamma$, con $\gamma \in \operatorname{Ker}\varphi_i$.

Poiché gli elementi di $\operatorname{Ker}\varphi_i$ sono generati da elementi del tipo:

$$\sum_{\substack{1=j_1<\dots<j_i\le n\\ j_i>d}} a'_{j_1,\dots,j_i} e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_i} \otimes S(\underline{T});$$

$\sum_{1\leq j_1<\dots<j_i\leq n} b'_{j_1,\dots,j_i} e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_i} \otimes S'(T_{d+1},\dots,T_n)$, dove

$S'(T_{d+1},\dots,T_n)$ è un polinomio di ordine ≥ 1 nelle indeterminate $T_{d+1},\dots,T_n$;

$$\sum_{1\leq j_1<\dots<j_i\leq d}\left(\sum_{t=d+1}^{n}(a'_{j_1,\dots,j_i} z_t e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_i}\right)) \otimes S''(\underline{T}),$$

la tesi segue tenendo presente che per ogni $k\neq j_1,\dots,j_i$ è:

$$z_k\, e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_i} = \partial_{i+1}(e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_i}) + \alpha \otimes e_k$$

per un $\alpha \in \Lambda^{i-1}R^n$.

Dai risultati precedenti segue:

TEOREMA 3.3. *Sia* $(\bar{J},\bar{I})$ *una i-coppia di ideali in* R/I', $I' \subseteq I$, *allora* (J,I) *è una i-coppia di ideali in* R , *se esiste una successione* $\underline{z}=z_1,\dots,z_d,\dots,z_h,\dots,z_n$ *in* R *con* $J = (\underline{z})$, $I = (z_{d+1},\dots,z_n)$, $I' = (z_{h+1},\dots,z_n)$ *tale che, indicato con* φ_i *il morfismo da* $\mathcal{M}_i(\underline{z},R)$ *a* $\mathcal{M}_i(\bar{\underline{z}},R/I')$, *si abbia:*

(i) $\bar{\mathcal{B}}_i = \varphi_i(\mathcal{B}_i)$ *(o, equivalentemente,* $\bar{\mathcal{M}}_{i+1}=\mathrm{Im}\varphi_{i+1}+\mathrm{Ker}\partial'_{i+1}$)

(ii) $\bar{\mathcal{Z}}_i \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi_i$.

COROLLARIO 3.4. *Sia* $(\bar{J},\bar{I})$ *una i-coppia di ideali in* $\bar{R}=R/I$, *allora* (J,I) *è una i-coppia di ideali in* R , *se esiste una successione* $\underline{z}$ *in* R *per cui è soddisfatta una delle due condizioni equivalenti al Lemma 3.1.*

Dimostrazione. Per l'Oss. 1.14, si ha che $H_i(\bar{\mathcal{M}}) = 0$, ovvero $\bar{\mathscr{Z}}_i = \bar{\mathscr{B}}_i$, e quindi la tesi segue dal teor.3.3.

COROLLARIO 3.5. *Sia* (J,I) *una* i-*coppia di ideali in* R/I', I' $\subseteq$ I, *allora* (J,I) *è una* i-*coppia di ideali in* R *se esiste una successione* $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_h,\dots,z_n$ *in* R *con* $J=(\underline{z})$, $I = (z_{d+1},\dots,z_n)$, $I' = (z_{h+1},\dots,z_n)$ *tale che:*

(i') $\bar{\pi}_{i+1} : H_{i+1}(\mathbb{K}(\underline{z},R)) \to H_{i+1}(\bar{\mathbb{K}}(\bar{z},R/I'))$ *sia un morfismo suriettivo;*

(ii) $\bar{\mathscr{Z}}_i \subseteq \operatorname{Im}\varphi_i$.

In particolare, la (i') è una condizione sufficiente per il rimontamento delle i-coppie di ideali da $\bar{R}=R/I$ a R.

Dimostrazione. Dal lemma 2.7, il morfismo $\varphi_{i+1}: \mathscr{M}_{i+1} \to \bar{\mathscr{M}}_{i+1}$ è suriettivo, ed è quindi soddisfatta la (i) del lemma 3.1. Il risultato segue dal Teor. 3.3.

Dai Corr. 2.14 e 3.5, nell'ipotesi in cui l'ideali J sia il massimale $\mathbf{m}$, si hanno i seguenti fatti:

1) $\underline{z}$ è una $(d,1)_{\mathscr{M}}$ -successione in R $\to$ $\bar{\underline{z}}$ è una $(d,1)_{\mathscr{M}}$ -successione in $\bar{R}=R/I$.

2) $\bar{\underline{z}}$ è una $(d,1)_{\mathscr{M}}$ -successione in $\bar{R}$ e $\bar{\pi}_2 : H_2(\mathbb{K}) \to H_2(\bar{\mathbb{K}})$ è un morfismo suriettivo $\to$ $\underline{z}$ è una $(d,1)_{\mathscr{M}}$ -successione in R.

Ci chiediamo se, in questo caso, possa valere un enunciato del genere: "$\underline{z}$ è una $(d,1)_{\mathscr{M}}$ -successione in R se e solo se $\bar{\underline{z}}$ è una $(d,1)_{\mathscr{M}}$ -successione in $\bar{R}$; in tal caso, $\bar{\pi}_2$ è un morfismo suriettivo".

I risultati seguenti danno una risposta affermativa.

PROPOSIZIONE 3.6. *Sia* $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *un sistema minimale di generatori per il massimale* $\mathfrak{m}$ *, allora:*

$\underline{z}$ *è una* $(d,1)_{\mathcal{M}}$ *- successione* $\leftrightarrow$ $\underline{z}$ *è una* $(d,1)$*- successione.*

Dimostrazione, $\leftarrow$ Segue dall'Osserv. 1.5(ii).

$\rightarrow$ Sia $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in Z_1(K)$, e quindi $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i = 0$. Poiché $\underline{z}$ è un sistema minimale di generatori per $\mathfrak{m}$, si ha che $a_i \in \mathfrak{m}$, per ogni i. Posto, allora, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \otimes 1$, α è un rappresentante di un elemento in $H_1(\mathcal{M})$, in quanto si ha:

$\partial'(\alpha) = \partial'(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n} a_i T_i \in \mathfrak{m}R[\,\underline{T}\,]$. Per essere $\underline{z}$ una $(d,1)_{\mathcal{M}}$-successione, segue che esiste β,

$$\beta = \sum_k \sum_{h=d+1}^{n} b_n^{(k)} e_h\, P^{(k)}(\underline{T}) + \sum_{k'} \sum_{j=1}^{n} c_j^{(k')} c_j^{(k')} e_j \otimes Q^{(k')}(T_{d+1},\dots,T_n)$$

con $[\alpha] = [\beta]$ e ordine di $Q^{(k')} \geq 1$. Ma allora $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{h=d+1}^{n} b_h e_h$, e quindi $\underline{z}$ è $(d,1)$-successione.

COROLLARIO 3.7. *Sia* $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *un sistema minimale di generatori per il massimale* $\mathfrak{m}$, *allora:*

$\underline{z}$ *è* $(d,1)_{\mathcal{M}}$ *-successione* $\rightarrow$ $\bar{\pi}_2 : H_2(\mathbb{K}) \rightarrow H_2(\bar{\mathbb{K}})$ *è un morfismo suriettivo.*

Dimostrazione. Dalla Prop. 3.6. segue che $\underline{z}$ è una $(d,1)$-successione in R, quindi $\bar{\underline{z}} = \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_d$ è una $(d,1)$-successione in $\bar{R}$ (cfr. Prop. 2.6 di [M-R]). Dalla Prop. 2.22 di [M] e dalla Prop. 2.2 di [M-R], segue allora la suriettività di $\bar{\pi}_2$.

PROPOSIZIONE 3.8. *Sia* $\underline{z} = z_1,\dots,z_d,\dots,z_n$ *un sistema minimale di generatori del massimale* $\mathfrak{m}$ *di* R. *Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti*

(i) $\underline{z}$ *è una* $(d,1)_{\mathcal{M}}$ *-successione in* R;

(ii) $\underline{z}$ *è una* $(d,1)$ *-successione in* R;

(iii) $\bar{\underline{z}} = \bar{z}_1,\dots,\bar{z}_d$ *è una* $(d,1)_{\mathcal{M}}$ *-sucessione in* $\bar{R}$ *(ovvero* $H_1(\bar{\mathcal{M}}) = 0$) *è il morfismo* $\bar{\Pi}_2 : H_2(\mathbb{K}) \to H_2(\bar{\mathbb{K}})$ *è suriettivo;*

(iv) $\bar{\underline{z}}$ *è una* $(d,1)_{\mathcal{M}}$ *-successione in* $\bar{R}$;

(v) $\mathrm{Sym}_{\bar{R}}(\bar{\mathfrak{m}}) \simeq \mathcal{R}_{\bar{R}}(\bar{\mathfrak{m}})$.

Dimostrazione. (i) $\leftrightarrow$ (ii) Segue dalla Prop. 3.6.
(i) $\leftrightarrow$(iii) Segue dai Corr. 2.10 e 3.7 e dal Cor. 3.5.
(iii) $\to$ (iv) Ovvio.
(iv) $\to$ (v) Segue dall'Oss. 1.5(i).
(v) $\to$ (iii) Da [H-S-V], Prop. 2.8 e dall'ipotesi di minimalità fatta su $\underline{z}$, segue che;

$\mathrm{Sym}_{\bar{R}}(\bar{\mathfrak{m}}) \simeq \mathcal{R}_{\bar{R}}(\bar{\mathfrak{m}}) \to \bar{\mathfrak{m}}$ è generato da una successione regolare (è ben noto che vale anche l'implicazione inversa). Da [M-R], Prop. 2.6, si hanno le seguenti equivalenze: $\bar{\mathfrak{m}}$ è generato da una successione regolare $\leftrightarrow$ $\bar{\underline{z}}$ è una $(d,1)$-successione $\leftrightarrow$ $\underline{z}$ è una $(d,1)$-successione. Dall'Oss. 1.5(ii), segue, infine, la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[H-S-V] S.HERZOG, A.SIMIS,W.V.VASCONCELOS, Approximation complexes of blowing-up rings,*J.of Algebra* (in corso di pubblicazione)

[M] C.MASSAZA, On a concept of relative depth.*Rend.Sem.Mat.Univ. e Politec. Torino* (in corso di stampa).

[M-R] C.MASSAZA, A.RAGUSA, Some conditions on the homology groups of the Koszul Complex, *Pacific J.Math.* (in corso di stampa).

[Sa] J.D.SALLY, *Numbers of generators of ideals in local rings*, Lecture notes in Pure and Appl.Math.,Vol.35,M.Dekker Inc.,1978

[S-V] A.SIMIS, W.V.VASCONCELOS, On the dimension and integrality of symmetric algebras,*Math.Zeit.*177(1981) 341-358.

[W] J.WEYMAN, Resolutions of the exterior and symmetric powers of a module,*J.Algebra* **58** (1979) 333-341.

Ricevuto il 6/4/1984

Dipartimento di Matematica
Università
Via del Capitano, 15
53100 S I E N A