Note di Matematica Vol. VII, 271-309(1977)

SUL PROBLEMA DI DIRICHLET PER LE EQUAZIONI ELLITTICHE A COEFFICIENTI DISCONTINUI (*)

Maria TRANSIRICO - Mario TROISI

SUMMARY. - *This paper is concerned with the Dirichlet problem for second order, linear elliptic partial differential equations in nondivergence form with discontinuous coefficients in unbounded domains. We prove some existence and uniqueness theorems.*

INTRODUZIONE. Assegniamo, in un aperto Ω di R^n, l'operatore differenziale lineare del second'ordine:

$$(1) \qquad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au,$$

uniformemente ellittico, a coefficienti $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ e con opportune ipotesi di sommabilità sui coefficienti a_i $(i=1,\ldots,n)$ e a.

Sono noti nella letteratura diversi risultati relativi al problema di Dirichlet:

$$(2) \qquad \begin{gathered} u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega), \\ Lu = f, \; f \in L^2(\Omega), \end{gathered}$$

nel caso in cui non tutti i coefficienti a_{ij} sono continui in $\bar{\Omega}$ (se l'aperto Ω è limitato e n=2 cfr. G.Talenti [11]; se l'aperto Ω è limitato e $n \geq 3$ cfr., ad es., C.Miranda [8], A.A.Sharovskii

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

[9], G.Viola [16], M.Chicco [4]; se l'aperto Ω è non limitato cfr., ad es., [13]).

Ricordiamo che in [8] viene studiato il problema nell'ipotesi:

(3) $$a_{ij} \in W^{1,n}(\Omega)$$

per $i,j = 1,\dots,n$.

In [9] viene trattato il caso in cui:

(4) $$a_{ij} \in C^{\circ}(\bar{\Omega})$$

per $i,j = 1,\dots,n-1$, senza alcun'altra ipotesi sui rimanenti coefficienti a_{ij}.

In [16] si suppone che sia verificata la (3) solo per $i,j=1,\dots$ $\dots,n-1$.

In [4] è trattato il caso in cui esiste un intero $m\geq 0$ tale che:

$$(a_{ij})_{x_k} \in L^n(\Omega), \quad i\leq j, \ m+1\leq j\leq n-1; \ j\leq k\leq n,$$

e, se $m\geq 1$,

$$a_{ij} \in C^{\circ}(\bar{\Omega}), \qquad i,j = 1,\dots,m.$$

In [13] abbiamo studiato il problema in ipotesi che in un certo senso estendono quelle di [8] al caso di un aperto Ω non limitato.

Volendo precisare tali ipotesi, consideriamo io spazio $M^p(\Omega)$, $1\leq p\leq +\infty$, delle funzioni $f\in L^p_{loc}(\bar{\Omega})$ tali che:

(5) $$\sup_{x\in\Omega} \|f\|_{L^p(\Omega \cap B(x,d))} < +\infty,$$

dove d è un fissato numero reale positivo e $B(x,d)=\{y\in R^n \mid |y-x|<d\}$, e indichiamo con $M_o^p(\Omega)$ il sottospazio di $M^p(\Omega)$ costituito dalle f tali che:

$$(6) \qquad \lim_{|x|\to+\infty} \|f\|_{L^p(\Omega\cap B(x,d))} = 0$$

Osserviamo (cfr. il n.1 di [13]) che le (5) e (6) non dipendono da d.

Assegniamo $s,t\in R$ tali che:

$s>2$ se $n = 2$, $s = n$ se $n>2$,

$t = 2$ se $2 \leq n<4$, $t>2$ se $n = 4$, $t = \frac{n}{2}$ se $n>4$,

e fissiamo s_o,t_o tali che:

$s<s_o \leq +\infty$, $t<t_o \leq +\infty$.

In [13] abbiamo studiato il problema (2) supponendo che si abbia per ogni $i,j\in\{1,\dots,n\}$:

$$(a_{ij})_{x_k} \in M_o^s(\Omega) + M^{s_o}(\Omega), \qquad k = 1,\dots,n,$$

e supponendo inoltre che:

$$a_i \in M_o^s(\Omega) + M^{s_o}(\Omega), \quad i = 1,\dots,n,$$

$$a \in M_o^t(\Omega) + M^{t_o}(\Omega).$$

In questo lavoro studiamo ancora il problema (2), ma in ipotesi più deboli di quelle di [13] sui coefficienti a_{ij}. Infatti, manteniamo le ipotesi di [13] sui coefficienti a_i $(i=1,\dots,n)$ e a, supponiamo che per ogni $i,j\in\{1,\dots,n-1\}$ si abbia:

$$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$$

dove $(a'_{ij})_{x_k} \in M_o^s(\Omega) + M^{s_o}(\Omega)$, $k = 1,\dots,n$, e le funzioni a''_{ij} sono limitate ed uniformemente continue in Ω, mentre sui rimanenti coefficienti a_{ij} non facciamo nessun'altra ipotesi oltre a quella di essere misurabili e limitati.

Osserviamo che tali ipotesi, se riferite ad un aperto Ω limitato, sono una generalizzazione di quelle di [9] e di quelle di [16].

Stabiliamo delle limitazioni a priori per le soluzioni del problema, da cui si deducono dei teoremi di esistenza ed unicità e delle condizioni perché l'operatore associato al problema sia un operatore di Fredholm ad indice zero.

Vogliamo anche mettere in evidenza che le difficoltà che si presentano in questo lavoro rispetto al precedente [13] sono legate al fatto che nelle nuove ipotesi non è più possibile ricondurre, come in [13], il problema ad uno di tipo variazionale.

Nei nn.1 e 2 sono richiamate le definizioni degli spazi $M^p(\Omega)$ e $M_o^p(\Omega)$, introdotti in [13], e ne vengono studiate alcune proprieta.

Nel n.3 viene stabilita una limitazione a priori per il problema di Dirichlet in un aperto limitato del tipo di quelle di [9] e di [16].

I nn.4,5 e 6 sono dedicati allo studio delle limitazioni a priori per il problema (2): nel n.4 viene trattato il caso di un aperto a frontiera non necessariamente limitata; il n.5 riguarda limitazioni per funzioni a supporto compatto in Ω; il n.6 riguarda il caso di un aperto a frontiera limitata.

Nel n.7 vengono stabiliti i teoremi di esistenza.

1. GLI SPAZI $M^p(\Omega)$ e $M^p_o(\Omega)$.

Per comodità, richiamiamo alcune notazioni e definizioni introdotte in [13].

Assegniamo $r \in R_+$, $p \in [1,+\infty]$ e un sottoinsieme A di R^n misurabile secondo Lebesgue.

Indichiamo:

con $|A|$ la misura di Lebesgue di A;

con $\Sigma(A)$ la σ-algebra dei sottoinsiemi di A misurabili secondo Lebesgue

con $L^p_{loc}(\bar{A})$ la classe delle funzioni $f:A \to R$ tali che $\zeta f \in L^p(A)$ per ogni $\zeta \in \mathcal{D}(R^n)$

Poniamo per ogni $x \in R^n$:

$$B(x,r) = \{y \in R^n \mid |y-x| < r\},$$

per ogni $E \in \Sigma(A)$ e per ogni $f \in L^p(E)$:

$$|f|_{p,E} = \|f\|_{L^p(E)}.$$

Indichiamo con $M^p(A,r)$ lo spazio delle funzioni $f \in L^p_{loc}(\bar{A})$ tali che:

$$(1.1) \qquad \|f\|_{M^p(A,r)} = \sup_{x \in A} |f|_{p,A \cap B(x,r)} < +\infty,$$

munito della norma definita dalla (1.1).

Se A è non limitato, indichiamo con $M_0^p(A,r)$ il sottospazio di $M^p(A,r)$ costituito dalle $f\in M^p(A,r)$ tali che:

$$\lim_{|x|\to+\infty} |f|_{p,A\cap B(x,r)} = 0.$$

Fissato $d\in R_+$, poniamo:

$$A(x) = A\cap B(x,d),$$

$$M^p(A) = M^p(A,d),\ M_0^p(A) = M_0^p(A,d).$$

Per qualche proprietà degli spazi $M^p(A)$ e $M_0^p(A)$, rinviamo ai nn.1 e 2 di [13].

Assegniamo ora un sottoinsieme aperto e non limitato Ω di R^n e consideriamo gli spazi $M^p(\Omega)$ e $M_0^p(\Omega)$ sopra definiti.

Proviamo che:

LEMMA 1.1. *Assegnati* $\varepsilon\in R_+$, $p\in[1,+\infty[$, $f\in M_0^p(\Omega)$ *oppure* $f\in M^q(\Omega)$ *con* $p<q\le+\infty$, *esiste* $\delta_\varepsilon\in R_+$ *tale che:*

$$(1.2)\qquad E\in\Sigma(\Omega),\ \sup_{x\in E}|E(x)|\le\delta_\varepsilon \implies \|f\|_{M^p(E)}\le\varepsilon .$$

Nel caso $f\in M^q(\Omega)$, *si può scegliere* δ_ε *dato da:*

$$(1.3)\qquad \delta_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{\|f\|_{M^q(\Omega)}}\right)^{1/(1/p-1/q)}$$

Dim. Se $f\in M_0^p(\Omega)$ la tesi segue dal lemma 2.1 di [13]. Se $f\in M^q(\Omega)$ si ottiene, evidentemente, la tesi osservando che per ogni $E\in\Sigma(\Omega)$ risulta:

$$\|f\|_{M^p(E)} = \sup_{x\in E}|f|_{p,E(x)}$$

$$\leq \sup_{x\in E}|f|_{q,E(x)}\cdot|E(x)|^{1/p-1/q}$$

$$\leq \|f\|_{M^q(\Omega)}\,(\sup_{x\in E}|E(x)|)^{1/p-1/q}.$$

Per ogni $f\in M^p(\Omega)$ e per ogni $r\in R_+$ poniamo:

$$\sigma^r_{p,f} : t\in[0,1] \to \sup_{\substack{E\in\Sigma(\Omega)\\ \sup_{x\in E}|E(x)|\leq t}} \|f\|_{M^p(E,r)}.$$

Poniamo inoltre:

$$\sigma_{p,f} = \sigma^{2d}_{p,f}$$

LEMMA 1.2. *Assegnati* $r\in R_+$, $p\in[1,+\infty[$, $f\in M_0^p(\Omega)$ *oppure* $f\in M^q(\Omega)$ *con* $p<q\leq+\infty$, *la funzione* $\sigma^r_{p,f}$ *è continua in* 0.

Dim. La tesi è un'ovvia conseguenza della (1.2) di [13] e del lemma 1.1.

Riprendendo ancora delle notazioni di [13], se $f\in M^p(\Omega)$ e $x\in\Omega$ indichiamo con $\sigma_{p,f,x}$ un'assegnata funzione reale definita in $[0,1]$, continua in 0 e tale che:

$$\sup_{\substack{E\in\Sigma(\Omega(x))\\ |E|\le t}} |f|_{p,E} \le \sigma_{p,f,x}(t) \qquad \forall t\in[0,1].$$

Come in [13], chiamiamo *modulo di continuità* in $L^p(\Omega(x))$ di una funzione $f\in M^p(\Omega)$, il modulo di continuità in 0 di $\sigma_{p,f,x}$.

OSSERVAZIONE 1.1. Siccome:

$$\sup_{\substack{E\in\Sigma(\Omega(x))\\ |E|\le t}} |f|_{p,E} \le \sigma_{p,f}(t),$$

dal lemma 1.2 segue che: *se* $p\in[1,+\infty[$, $f\in M_0^p(\Omega)$ *oppure* $f\in M^q(\Omega)$ *con* $p<q\le+\infty$, *il modulo di continuità di* f *in* $L^p(\Omega(x))$ *risulta indipendente da* x *e dipende solo dal modulo di continuità di* $\sigma_{p,f}$ *in* 0.

2. ULTERIORI PROPRIETA' DEGLI SPAZI $M^p(\Omega)$.

Se $1\le p<q\le+\infty$ e $f\in M^q(\Omega)$, indichiamo con r_ε un numero positivo tale che:

$$(2.1)\qquad E\in\Sigma(\Omega),\ \sup_{x\in E}|E(x)|\le r_\varepsilon \implies \|f\|_{M^p(E,2d)}\le\varepsilon.$$

Osserviamo che l'esistenza di r_ε tale che sia vera la (2.1) segue dal lemma 1.2.

LEMMA 2.1. *Se* $1 \le p < q \le +\infty$, $f \in M^q(\Omega)$, $\varepsilon \in R_+$ *e* r_ε *soddisfa la* (2.1), *allora esiste* $f_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ *tale che:*

(2.2) $$\|f - f_\varepsilon\|_{M^p(\Omega)} \le \varepsilon \, ,$$

(2.3) $$|f_\varepsilon|_{\infty, \Omega} \le \left(\frac{\|f\|^p_{M^p(\Omega)}}{r_\varepsilon} \right)^{1/p}$$

Dim. Ragionando come per la dimostrazione del lemma 3.1 di [13], poniamo:

$$k_\varepsilon = \left(\frac{\|f\|^p_{M^p(\Omega)}}{r_\varepsilon} \right)^{1/p}$$

e:

$$\Omega_{k_\varepsilon} = \{ x \in \Omega \,|\, |f(x)| \ge k_\varepsilon \}.$$

Evidentemente risulta:

$$\sup_{x \in \Omega} |\Omega_{k_\varepsilon} \cap B(x,d)| \le r_\varepsilon$$

e quindi, per la (2.1), si ha:

(2.4) $$\|f\|_{M^p(\Omega_{k_\varepsilon}, 2d)} \le \varepsilon \, .$$

Indichiamo con X_{k_ε} la funzione caratteristica di Ω_{k_ε} e poniamo:

$$f_\varepsilon = (1 - \chi_{k_\varepsilon})\, f.$$

Evidentemente $f_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ e soddisfa la (2.3).

Inoltre si ha:

$$\|f-f_\varepsilon\|_{M^p(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |\chi_{k_\varepsilon} f|_{p,\Omega\cap B(x,d)}$$

$$= \sup_{x\in\Omega} |f|_{p,\Omega_{k_\varepsilon}\cap B(x,d)} \le \|f\|_{M^p(\Omega_{k_\varepsilon},2d)};$$

pertanto, per la (2.4), si ha la (2.2).

Nel seguito indicheremo con $W^m(\Omega)$, $m\in N$, l'usuale spazio di Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ e con $\overset{\circ}{W}{}^m(\Omega)$ la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^m(\Omega)$.

Indicheremo inoltre con $U^m(\Omega)$: lo spazio $W^m(\Omega)$ se Ω è dotato della proprietà di cono; lo spazio $\overset{\circ}{W}{}^m(\Omega)$ se Ω non è dotato della proprietà di cono.

Come ovvia conseguenza del lemma 3.2 di [13] e del lemma 2.1 si ha:

LEMMA 2.2. *Assegniamo* $m\in N$ *e* $p\in[2,+\infty[$ *tali che:*

(2.5) $\quad p=2$ *se* $n<2m$, $p>2$ *se* $n=2m$, $p=\frac{n}{m}$ *se* $n>2m$.

Se $p<q\le+\infty$, $f\in M^q(\Omega)$ *e* $\varepsilon\in R_+$, *allora esiste* $c(\varepsilon)\in R_+$ *tale che:*

(2.6) $\quad |f\,u|_{2,\Omega} \le \varepsilon\|u\|_{W^m(\Omega)} + c(\varepsilon)|u|_{2,\Omega} \qquad \forall u\in U^m(\Omega)$.

3. UNA LIMITAZIONE A PRIORI PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET IN UN APERTO LIMITATO.

Nel seguito useremo le notazioni:

$$u_x = \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad u_{xx} = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Inoltre, indicheremo con s e t due numeri reali tali che:

$s>2$ se $n=2$, $s=n$ se $n>2$,

$t=2$ se $2\le n<4$, $t>2$ se $n=4$, $t = \frac{n}{2}$ se $n>4$.

Sia G un sottoinsieme aperto e limitato di R^n, $n \geq 2$, di classe C^2.

Assegniamo in G l'operatore differenziale lineare del second'ordine:

$$(3.1) \qquad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au,$$

soddisfacente le seguenti condizioni:

$$(3.2) \qquad a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij} \in L^\infty(G), \quad i,j=1,\dots,n,$$

$$(3.3) \qquad a_i \in L^s(G), \quad i=1,\dots,n, \quad a \in L^t(G),$$

e la condizione di ellitticità:

$$(3.4) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2 \qquad \text{q.o. in } G, \quad \forall \xi \in R^n,$$

dove ν è un numero positivo indipendente da x e da ξ ; inoltre si ha:

$$(3.5) \qquad a_{ij} \in W^{1,s}(G) + C^{\circ}(\bar{G}), \quad i,j=1,\dots,n-1.$$

Assegniamo ancora una funzione $\beta : G \to R_+$ con la condizione:

$$(3.6) \qquad \beta \in L^{t}(G), \quad \exists \delta \in L^{s}(G) \quad \ni' \quad \beta_x \leq \beta * \delta.$$

Ad esempio:

$$\beta = 1 \text{ oppure } \beta(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{\alpha}}, \qquad \alpha \in R_+.$$

Poniamo:

$$(3.7) \qquad \mu = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|_{\infty,G} \quad ,$$

$$(3.8) \qquad a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}, \quad a'_{ij} \in W^{1,s}(G), \quad a''_{ij} \in C^{\circ}(\bar{G}), \quad i,j=1,\dots,n-1.$$

LEMMA 3.1. *Nelle ipotesi* (3.2) - (3.6), *esiste una costante* c *tale che:*

$$(3.9) \quad |u_{xx}|_{2,G} \leq c(|Lu+\lambda\beta u|_{2,G} + |u|_{2,G}) \quad \forall u \in W^{2}(G) \cap \mathring{W}^{1}(G) \text{ e } \forall \lambda \in [0,+\infty[.$$

La costante c *dipende solo: da* n; *da* ν; *dalla misura di* G; *dalle norme in* $L^{\infty}(G)$ *delle componenti delle funzioni collegate alla regolarità di* ∂G *e delle loro derivate prime e seconde; dalle* *norme in* $L^{\infty}(G)$ *dei coefficienti* a_{ij}; *dai moduli di continuità in* $L^{s}(G)$ *di* δ, *dei coefficienti* a_i *e delle derivate* $(a'_{ij})_{x_k}$ $(i,j = 1,\dots,n-1,\ k = 1,\dots,n)$; *dal modulo di continuità in* $L^{t}(G)$ *di* a; *dai moduli di continuità in* G *di* a''_{ij} $(i,j = 1,\dots,n-1)$.

Dim. Se $a_{ij} \in C^{\circ}(\bar{G})$, $i,j = 1,\dots,n-1$, il risultato è noto per $\lambda = 0$ ed è dovuto ad A.A.Sharovskii [9]. Se $a_{ij} \in W^{1,s}(G)$, $i,j=1,\dots$ $\dots,n-1$, il risultato è noto per $\beta = 1$ ed è dovuto a G.Viola [16].

Passiamo a provare il risultato nelle nostre ipotesi.

Poniamo:

$$L_o u = - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} .$$

Osserviamo (cfr. [16]) che è sufficiente provare che esiste $c \in R_+$ tale che:

$$(3.10)\quad |u_{xx}|_{2,G} \le c(|L_o u+\lambda\beta u|_{2,G}+|u|_{2,G}) \quad \forall u \in W^2(G)\cap \mathring{W}^1(G) \quad e \quad \forall \lambda \in [0,+\infty[.$$

Se $a_{ij} \in W^{1,s}(G)$, $i,j = 1,\dots,n-1$, e $\beta \neq 1$, la (3.10) si prova adattando al nostro caso la dimostrazione della proposizione 5 di [16]. Infatti, procedendo come in [16] e considerando $L_o u^r + \lambda\beta u^r$ in luogo di $L_o u^r + \lambda u^r$ si ha:

$$(3.11)\quad \int_{U_r} \Big(- \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u^r_{x_i x_j}\Big)^2 dx = \int_{U_r} \Big(- \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u^r_{x_i x_j} + \lambda\beta u^r\Big)^2 dx$$

$$-\lambda^2 \int_{U_r} \beta^2 (u^r)^2 dx + 2\lambda \int_{U_r} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \beta u^r u^r_{x_i x_j} \, dx.$$

Integrando per parti l'ultimo addendo, si ha:

$$(3.12)\quad 2\lambda\int_{U_r}\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\,\beta u^r u^r_{x_i x_j}\,dx = -2\lambda\int_{U_r}\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\beta u^r_{x_i} u^r_{x_j}\,dx$$

$$-2\lambda\int_{U_r}\sum_{i,j=1}^{n-1}(a_{ij})_{x_i}\beta u^r u^r_{x_j}\,dx-2\lambda\int_{U_r}\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\beta_{x_i} u^r u^r_{x_j}\,dx$$

$$\leq -2\lambda\nu\int_{U_r}\beta\sum_{i=1}^{n-1}(u^r_{x_i})^2dx+\frac{\lambda^2}{4}\int_{U_r}\beta^2(u^r)^2dx$$

$$+\,4(n-1)^2\int_{U_r}\sum_{i,j=1}^{n-1}(a_{ij})^2_{x_i}(u^r_{x_j})^2dx+\frac{\lambda^2}{4}\int_{U_r}\beta^2(u^r)^2dx$$

$$+\,4\mu^2(n-1)\int_{U_r}\delta^2\sum_{i=1}^{n-1}(u^r_{x_i})^2dx.$$

In tal modo, in luogo della (26) di [16], proviamo che per ogni $\varepsilon\in R_+$ si ha la limitazione:

$$(3.13)\quad \int_{U_r}\Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u^r_{x_i x_j}\Big)^2dx \leq \int_{U_r}\Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u^r_{x_i x_j}+\lambda\beta u^r\Big)^2dx$$

$$+\,\varepsilon|u^r_{xx}|^2_{2,U_r}+c(\varepsilon)|u^r|^2_{2,U_r}-\frac{\lambda^2}{2}\int_{U_r}\beta^2(u^r)^2dx,$$

dove $c(\varepsilon)$ è una costante dipendente solo: da ε; da n; dalla misura di G; dalle norme in $L^\infty(G)$ delle componenti delle funzioni collegate alla regolarità di ∂G e delle loro derivate prime e seconde; dalle norme in $L^\infty(G)$ dei coefficienti a_{ij}; dai moduli di continuità in $L^s(G)$ di δ e delle derivate $(a_{ij})_{x_k}$.

Inoltre, moltiplicando per $-u^r_{x_n x_n}$ l'uguaglianza

$$L_o u^r+\lambda\beta u^r=-\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u^r_{x_i x_j}-a_{nn}u^r_{x_n x_n}-2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}u^r_{x_i x_n}+\lambda\beta u^r$$

si ottiene:

$$(3.14)\quad \int_{U_r} -(L_o u^r+\lambda\beta u^r)u^r_{x_n x_n}dx$$

$$\geq \nu\int_{U_r}\sum_{i=1}^{n}(u^r_{x_i x_n})^2dx+\int_{U_r}\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(u^r_{x_i x_j}u^r_{x_n x_n}-u^r_{x_i x_n}u^r_{x_j x_n})dx$$

$$-\lambda\int_{U_r}\beta u^r\, u^r_{x_n x_n}dx.$$

D'altra parte si ha

$$(3.15)\quad \lambda\int_{U_r}\beta u^r u^r_{x_n x_n}dx=-\lambda\int_{U_r}\beta(u^r_{x_n})^2dx-\lambda\int_{U_r}\beta_{x_n}u^r u^r_{x_n}dx$$

$$\leq -\lambda\int_{U_r} \beta_{x_n} u^r u^r_{x_n} dx \leq \lambda\int_{U_r} \beta\delta|u^r u^r_{x_n}|dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\lambda^2 \int_{U_r} \beta^2(u^r)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{U_r} \delta^2(u^r_{x_n})^2 dx.$$

Dalle (3.14) e (3.15) otteniamo, in luogo dell'ultima formula della dimostrazione della proposizione 5 di [16], la seguente:

$$\int_{U_r} (-L_o u^r - \lambda\beta u^r) u^r_{x_n x_n} dx \tag{3.16}$$

$$\geq \nu\int_{U_r} \sum_{i=1}^{n} (u^r_{x_i x_n})^2 dx + \int_{U_r} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(u^r_{x_i x_j} u^r_{x_n x_n} - u^r_{x_i x_n} u^r_{x_j x_n}) dx$$

$$- \frac{\varepsilon}{2}\lambda^2 \int_{U_r} \beta^2(u^r)^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{U_r} \delta^2(u^r_{x_n})^2 dx.$$

Dalle (3.13) e (3.16), procedendo come in [16], si ottiene la tesi.

Consideriamo ora il caso in cui, nella decomposizione (3.8), non tutti gli a''_{ij} sono nulli.

Osserviamo che è sufficiente provare che, fissato $x_o \in \bar{G}$, esistono $c, r \in R_+$ tali che:

$$|(\phi u)_{xx}|_{2,G} \leq c(|L_o(\phi u) + \lambda\beta\phi u|_{2,G} + |\phi u|_{2,G}) \tag{3.17}$$

$$\forall u \in W^2(G) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(G),\ \forall\lambda \in [0,+\infty[\text{ e } \forall\phi \in \mathcal{D}(R^n) \text{ con } \operatorname{supp}\phi \subset B(x_o, r).$$

Fissato $x_o \in \bar{G}$, poniamo:

$b_{ij}(x) = a'_{ij}(x)+a''_{ij}(x_o)$, $i,j=1,\dots,n-1$, $b_{in}=a_{in}$, $i=1,\dots,n$,

$$L'_o u = -\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_{x_i x_j}.$$

In corrispondenza di $\varepsilon \in]0,\frac{\nu}{2}]$, fissiamo $r_\varepsilon \in R_+$ tale che:

$$(3.18) \qquad \sum_{i,j=1}^{n-1} |a''_{ij}(x) - a''_{ij}(x_o)| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in G \cap B(x_o,r_\varepsilon).$$

Da quanto sopra stabilito si deduce evidentemente che esiste $c \in R_+$ tale che:

$$(3.19) \qquad |(\phi u)_{xx}|_{2,G} \leq c(|L'_o(\phi u)+\lambda\beta\phi u|_{2,G}+|\phi u|_{2,G})$$

$$\forall u \in W^2(G) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(G),\ \forall\lambda \in [0,+\infty[\text{ e } \forall\phi \in \mathcal{D}(R^n) \text{ con } \operatorname{supp}\phi \subset B(x_o,r_\varepsilon).$$

Da (3.18) e (3.19) si deduce la (3.17) e quindi si ha la tesi.

4. LIMITAZIONI A PRIORI IN APERTI A FRONTIERA NON NECESSARIAMENTE LIMITATA.

In questo numero indichiamo con Ω un sottoinsieme aperto e non limitato di R^n dotato della proprietà di *uniforme* C^2-*regolarità* nel senso del n.4.6 di R.A.Adams [1].

Tale ipotesi implica evidentemente che si ha:

i_o) Esistono $r_o \in R_+$ e, per ogni $z \in \partial\Omega$, un diffeomorfismo

$\psi^z : B(z,r_o) \to B(0,1)$ di classe C^2 tali che:

$$\psi^z(\Omega \cap B(z,r_o)) = \{ x \in B(0,1) \mid x_n > 0 \}$$

e

$$\psi^z(\partial\Omega \cap B(z,r_o)) = \{x \in B(0,1) \mid x_n = 0\} ;$$

inoltre le componenti di ψ^z e di $(\psi^z)^{-1}$ sono limitate insieme con le loro derivate prime e seconde da una costante indipendente da z.

Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r \in R_+$ poniamo:

$$\Omega(x,r) = \Omega \cap B(x,r),$$

$$\alpha_r = \inf_{x \in \Omega} |\Omega(x,r)|, \quad \beta_r = \sup_{x \in \Omega} |\Omega(x,r)|.$$

Osserviamo che la condizione i_o) implica:

$$\alpha_r > 0 \qquad \forall r \in R_+.$$

Si ha (cfr. [13], lemma 4.1):

LEMMA 4.1. *Fissato* $r \in R_+$, *risulta* $f \in L^1(\Omega)$ *se e solo se* $f \in L^1_{loc}(\bar{\Omega})$ e $(x \in \Omega \to |f|_{1,\Omega(x,r)}) \in L^1(\Omega)$; *inoltre:*

$$(4.1) \quad \alpha_r \int_\Omega |f(x)|dx \le \int_\Omega |f|_{1,\Omega(x,r)} dx \le \beta_r \int_\Omega |f(x)|dx \quad \forall f \in L^1(\Omega).$$

Assegniamo in Ω l'operatore differenziale lineare del second'ordine:

(4.2) $$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au$$

supponendo che:

i_1) risulta:

(4.3) $$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

ed è verificata la condizione di uniforme ellitticità:

(4.4) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \text{q.o. in } \Omega\ , \ \forall\xi\in R^n,$$

dove ν è una costante positiva indipendente da x e da ξ; inoltre esistono $s_o\in]s,+\infty]$ e $t_o\in]t,+\infty]$ tali che:

(4.5) $$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}\ , \ i,j = 1,\dots,n-1,$$

dove le a'_{ij} hanno derivate (nel senso delle distribuzioni) $(a'_{ij})_{x_k}\in M_o^s(\Omega)+M^{s_o}(\Omega)$, $k=1,\dots,n$, e le a''_{ij} sono limitate e uniformemente continue in Ω;

(4.6) $$a_i\in M_o^s(\Omega) + M^{s_o}(\Omega), \quad i = 1,\dots,n;$$

(4.7) $$a \in M_o^t(\Omega) + M^{t_o}(\Omega)\ .$$

Proviamo il seguente

TEOREMA 4.1. *Se sono verificate le condizioni* i_o) *e* i_1), *allora esiste* $c\in R_+$ *tale che:*

$$|u_{xx}|_{2,\Omega} \leq c(|Lu+\lambda u|_{2,\Omega} + |u|_{2,\Omega}) \tag{4.8}$$

$$\forall u \in W^2(\Omega)\cap \mathring{W}^1(\Omega) \quad e \quad \forall\lambda\in[0,+\infty[.$$

Dim. Fissiamo $u\in W^2(\Omega)\cap \mathring{W}^1(\Omega)$ e $\lambda\in[0,+\infty[$.

In conseguenza delle ipotesi sui coefficienti a_i, a, del lemma 3.3 di [13] e del lemma 2.2 si ha per ogni $\varepsilon\in R_+$:

$$|a_i\, u_{x_i}|_{2,\Omega} \leq \varepsilon|u_{xx}|_{2,\Omega} + c_1(\varepsilon)|u|_{2,\Omega} \quad ,$$

$$|a\, u|_{2,\Omega} \leq \varepsilon|u_{xx}|_{2,\Omega} + c_2(\varepsilon)|u|_{2,\Omega} \quad ,$$

dove $c_1(\varepsilon)$, $c_2(\varepsilon)$ sono due costanti positive indipendenti da u.

Possiamo perciò limitarci a stabilire la (4.8) per l'operatore L_o definito da:

$$L_o u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} \tag{4.9}$$

in luogo di L.

Ragionando come per la dimostrazione del teorema 4.1 di [13], indichiamo con ζ una funzione di classe $\mathcal{D}(R^n)$ tale che:

$$0 \leq \zeta \leq 1,\quad \zeta = 1 \quad \text{in } B(0,\tfrac{d}{2}),\ \text{supp}\,\zeta \subset B(0,d)$$

e, fissato $y\in\Omega$, poniamo:

$$\theta = \theta_y : x \in \Omega \to \zeta(x-y).$$

Dal lemma 3.1, dalle condizioni i_o), i_1) e dall'osservazione 1.1 si deduce facilmente che si ha la limitazione

$$(4.10) \qquad |(\theta u)_{xx}|_{2,\Omega(y)} \leq c_o(|L_o(\theta u)+\lambda\theta u|_{2,\Omega(y)}+|\theta u|_{2,\Omega(y)})$$

con una costante c_o indipendente da u,λ e y.

Osserviamo che risulta:

$$(4.11) \qquad L_o(\theta u) = \theta L_o u - 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \theta_{x_j} + u\, L_o\theta \,.$$

Dalle (4.10) e (4.11) si deduce, con note considerazioni, la limitazione:

$$(4.12) \quad |u_{xx}|_{2,\Omega(y,\frac{d}{2})} \leq c_1(|L_o u+\lambda u|_{2,\Omega(y)}+|u_x|_{2,\Omega(y)}+|u|_{2,\Omega(y)}),$$

dove c_1 è una costante indipendente da u,λ e y.

Dalla (4.12), usando il lemma 4.1, segue che:

$$(4.13) \qquad |u_{xx}|_{2,\Omega} \leq c_2(|L_o u + \lambda u|_{2,\Omega} + |u_x|_{2,\Omega} + |u|_{2,\Omega}),$$

dove c_2 è una costante indipendente da u e da λ.

Dalla (4.13) si deduce la tesi.

COROLLARIO 4.1. *Nelle stesse ipotesi del teorema 4.1, esistono* λ_o, $c \in R_+$ *tali che:*

(4.14) $\quad \|u\|_{W^2(\Omega)} \leq c|Lu+\lambda u|_{2,\Omega} \quad \forall u\in W^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega)$ e $\forall\lambda\in[\lambda_o,+\infty[$.

Dim. La tesi si deduce dal teorema 4.1 con gli stessi ragionamenti tenuti in [13] per dedurre dal teorema 4.1 il corollario 4.1.

5. LIMITAZIONI A PRIORI PER SOLUZIONI A SUPPORTO COMPATTO.

Assegniamo, in un aperto non limitato Ω di R^n, l'operatore differenziale L_o definito dalla (4.9) supponendo che siano verificate l'ipotesi i_1) e la condizione:

i_2) risulta:

(5.1) $$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,n-1,$$

dove

(5.2) $$(a'_{ij})_{x_k} \in M_o^s(\Omega), \quad k = 1,\dots,n,$$

e

(5.3) $$a''_{ij}\in C^\circ(\bar{\Omega}), \quad \lim_{|x|\to+\infty} a''_{ij}(x) = (a''_{ij})^\circ.$$

Assegniamo inoltre una funzione b tale che:

i_3) $\quad b = b_1 + b_2, \quad b_1\in L^\infty(\Omega),\ b_2\in M^t(\Omega),$

$$(b_1)_{x_n}\in M_o^t(\Omega), \quad \lim_{|x|\to+\infty} b_2(x)=b_2^\circ, \quad b_1(x)+b_2^\circ \geq \nu \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Porremo:

$$b_{ij}=a'_{ij}+(a''_{ij})^{\circ},\ i,j=1,\dots,n-1,\ b_{in}=a_{in},\quad i=1,\dots,n,$$

$$L'_o u = -\sum_{i,j=1}^{n} b'_{ij} u_{x_i x_j},$$

$$e(x) = b_1(x) + b_2^{\circ} .$$

Porremo inoltre $\forall r \in R_+$

$$B_r = B(0,r).$$

LEMMA 5.1. *Se sono verificate le ipotesi* $i_1) - i_3)$, *allora esistono* $c, r \in R_+$ *tali che:*

(5.4) $\quad \|u\|_{W^2(\Omega)} \le c|L_o u+bu|_{2,\Omega} \quad \forall u\in\mathscr{D}(\Omega)$ *con* supp $u \subset \Omega \setminus B_r$.

Dim. In corrispondenza di $\varepsilon_1 \in]0,\frac{\nu}{2}]$, fissiamo $r_1=r(\varepsilon_1)\in R_+$ tale che:

(5.5) $$\sum_{i,j=1}^{n-1} |a''_{ij}(x) - (a''_{ij})^{\circ}| \le \varepsilon_1 \qquad \forall x\in\Omega\setminus B_{r_1},$$

(5.6) $$|b_2(x) - b_2^{\circ}| \le \varepsilon_1 \qquad \forall x\in\Omega\setminus B_{r_1}.$$

Dalle (5.5) e (5.6) segue che per ottenere la tesi basta dimostrare che esistono $c_o, r_o \in R_+$ tali che:

(5.7) $\quad \|u\|_{W^2(\Omega)} \le c_o|L'_o u+eu|_{2,\Omega} \quad \forall u\in\mathscr{D}(\Omega)$ con supp $u\subset \Omega\setminus B_{r_o}$.

Osserviamo che in conseguenza della (5.5) si ha:

$$(5.8) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \ge \frac{\nu}{2}|\xi|^2 \quad \text{q.o. in } \Omega\setminus B_{r_1}, \quad \forall\xi\in R^n.$$

Assegnato un $r\in[r_1,+\infty[$, fissiamo $u\in\mathcal{D}(\Omega)$ con supp $u \subset \Omega\setminus B_r$.

Nel seguito di questa dimostrazione indicheremo con $c_1,\dots,c_8$ delle costanti positive indipendenti da u e da r.

Con un procedimento del tipo di quello tenuto nel n.4 di [16], si ha:

$$(5.9) \qquad \int_\Omega \frac{1}{e}\Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u_{x_ix_j}\Big)^2 dx = \int_\Omega \frac{1}{e}\Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u_{x_ix_j}+eu\Big)^2 dx$$

$$- \int_\Omega eu^2dx + 2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u\, u_{x_ix_j}dx$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{e}\Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u_{x_ix_j}+eu\Big)^2 dx - \int_\Omega e\, u^2dx$$

$$-2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u_{x_i}u_{x_j}dx - 2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} (a'_{ij})_{x_i}\; u\, u_{x_j}dx.$$

Ora, per il lemma 3.2 di [13] si ha:

$$(5.10) \qquad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} |(a'_{ij})_{x_i} u\, u_{x_j}|dx$$

$$\le \frac{\nu}{4}\int_\Omega u^2dx + \frac{(n-1)^2}{\nu}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} (a'_{ij})^2_{x_i}\; u^2_{x_j}dx$$

$$\leq \frac{\nu}{4} \int_\Omega u^2 dx + c_1 \|u\|^2_{W^2(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{n-1} \|(a'_{ij})_{x_i}\|^2_{M^s(\Omega \setminus B_r)}$$

Da (5.9) e (5.10) segue:

$$(5.11) \quad \int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} u_{x_i x_j}\Big)^2 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n-1} u^2_{x_i} dx + \int_\Omega u^2 dx$$

$$\leq c_2 \Big(\int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} u_{x_i x_j} + eu\Big)^2 dx + \|u\|^2_{W^2(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{n-1} \|(a'_{ij})_{x_i}\|^2_{M^s(\Omega \setminus B_r)}\Big).$$

D'altra parte dalla (4.8), per noti risultati (cfr., ad es., [6] pp.152-153), si deduce

$$\Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} u_{x_i x_j}\Big)^2 \geq \frac{\nu^2}{4} \sum_{i,j=1}^{n-1} u^2_{x_i x_j}$$

$$+ \sum_{i,j,k,l=1}^{n-1} b_{ij} b_{kl} \big((u_{x_i} u_{x_k x_l})_{x_j} - (u_{x_i} u_{x_j x_l})_{x_k}\big);$$

da cui, per il lemma 3.2 di [13], segue:

$$(5.12) \qquad \int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} u_{x_i x_j}\Big)^2 dx$$

$$\geq c_3\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} u^2_{x_i x_j}\,dx - \|u\|^2_{W^2(\Omega)} \sum_{i,j,k=1}^{n-1} \|(a'_{ij})_{x_k}\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_r)}\right).$$

Da (5.11) e (5.12) si ha:

$$(5.13)\quad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} u^2_{x_i x_j}\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n-1} u^2_{x_i}\,dx + \int_\Omega u^2\,dx$$

$$\leq c_4\left(\int_\Omega \left(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} u_{x_i x_j} + eu\right)^2 dx + \|u\|^2_{W^2(\Omega)} \sum_{i,j,k=1}^{n-1} \|(a'_{ij})_{x_k}\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_r)}\right).$$

Inoltre,

$$(5.14)\qquad \int_\Omega (-L'_o u - eu) u_{x_n x_n}\,dx$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_{x_i x_n} u_{x_j x_n}\,dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}(u_{x_i x_j} u_{x_n x_n} - u_{x_i x_n} u_{x_j x_n})dx$$

$$+ \int_\Omega e\, u^2_{x_n}\,dx + \int_\Omega (b_1)_{x_n} u\, u_{x_n}\,dx.$$

Ora, usando ancora il lemma 3.2 di [13], si ha:

$$(5.15)\quad \int_\Omega |(b_1)_{x_n} u\, u_{x_n}|\,dx \leq \frac{\nu}{2}\int_\Omega u^2_{x_n}\,dx + c_5\|u\|^2_{W^2(\Omega)} \|(b_1)_{x_n}\|^2_{M^t(\Omega\setminus B_r)}$$

e

$$(5.16)\quad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}(u_{x_i x_j} u_{x_n x_n} - u_{x_i x_n} u_{x_j x_n})dx$$

$$= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} (a'_{ij})_{x_j} u_{x_i} u_{x_n x_n} dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} (a'_{ij})_{x_n} u_{x_i} u_{x_j x_n} dx$$

$$\le \frac{\nu}{4} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i x_n} dx + c_6 \|u\|^2_{W^2(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \|(a'_{ij})_{x_k}\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_r)} .$$

Dalle (5.14), (5.15) e (5.16) si ha:

$$(5.17)\quad \int_\Omega (-L'_o u - eu) u_{x_n x_n} dx$$

$$\ge c_7 \Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i x_n} dx + \int_\Omega u^2_{x_n} dx$$

$$- \|u\|^2_{W^2(\Omega)} \big(\|(b_1)_{x_n}\|^2_{M^t(\Omega\setminus B_r)} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \|(a'_{ij})_{x_k}\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_r)} \big)\Big).$$

Da (5.13) e (5.17) si ha:

$$(5.18)\quad \|u\|^2_{W^2(\Omega)} \le c_8 \Big(|L'_o u + eu|^2_{2,\Omega}$$

$$+ \|u\|^2_{W^2(\Omega)} \big(\|(b_1)_{x_n}\|^2_{M^t(\Omega\setminus B_r)} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \|(a'_{ij})_{x_k}\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_r)} \big)\Big).$$

Ma, in conseguenza della (2.2) di [13], fissato $\varepsilon \leq \frac{1}{2c_8}$, esiste $r_o \geq r_1$ tale che:

$$\|(b_1)_{x_n}\|^2_{M^t(\Omega\setminus B_{r_o})} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \|(a'_{ij})_{x_k}\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_{r_o})} \leq \varepsilon . \tag{5.19}$$

Dalle (5.18) e (5.19) si deduce la (5.7) e perciò si ha la tesi.

Assegniamo ora una funzione $\beta : \Omega \to R_+$ tale che:

$i_4)$ $\quad \beta \in M^t(\Omega)$ ed $\exists\ \delta \in M^s_o(\Omega) \ \ni' \ \beta_x \leq \beta \cdot \delta$.

Ad esempio:

$$\beta = 1 \quad \text{oppure} \quad \beta(x) = \frac{1}{(1+|x|)^\alpha}, \alpha \in R_+ .$$

LEMMA 5.2. *Se sono verificate le ipotesi* $i_1)$-$i_4)$, *allora esistono* $c, r \in R_+$ *tali che:*

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leq c\,|L_o u + bu + \lambda\beta u|_{2,\Omega} \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \ \textit{con}\ \mathrm{supp}\, u \subset \Omega\setminus B_r \ \text{e}\ \forall\lambda \in [0,+\infty[. \tag{5.20}$$

Dim. Procedendo come nella dimostrazione del lemma 5.1, fissiamo, in corrispondenza di $\varepsilon_1 \in]0,\frac{\nu}{2}]$, $r_1 = r(\varepsilon_1) \in R_+$ tale che valgano le (5.5) e (5.6).

Osserviamo che per ottenere la tesi basta dimostrare che esistono $c_o, r_o \in R_+$ tali che:

(5.21) $\|u\|_{W^2(\Omega)} \le c_0 |L_0' u + bu + \lambda\beta u|_{2,\Omega}$ $\forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$ con supp $u \subset \Omega \setminus B_{r_0}$ e $\forall \lambda \in [0,+\infty[$.

Assegnato un $r \in [r_1,+\infty[$, fissiamo $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ con supp $u \subset \Omega \setminus B_r$ e $\lambda \in [0,+\infty[$.

Indicheremo con $c_1,\dots,c_5$ delle costanti positive indipendenti da u, r e λ.

Si ha:

$$(5.22)\quad \int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} u_{x_i x_j} + eu\Big)^2 dx = \int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} u_{x_i x_j} + eu + \lambda\beta u\Big)^2 dx$$

$$-\lambda^2 \int_\Omega \beta^2 u^2 dx + 2\lambda \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}\ \beta u u_{x_i x_j} dx - 2\lambda \int_\Omega e\beta u^2 dx .$$

D'altra parte risulta:

$$(5.23)\quad \lambda \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}\ \beta u u_{x_i x_j} dx = -\lambda \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}\ \beta u_{x_i} u_{x_j}\ dx$$

$$-\lambda \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij}')_{x_i} \beta u u_{x_j} dx - \lambda \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} \beta_{x_i} u u_{x_j}\ dx$$

$$\le -\lambda \frac{\nu}{2} \int_\Omega \beta \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i}^2 dx + \frac{\lambda^2}{8} \int_\Omega \beta^2 u^2 dx + c_1 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij}')^2_{x_i} u^2_{x_j}\ dx$$

$$+ \frac{\lambda^2}{8} \int_\Omega \beta^2 u^2 dx + c_2 \int_\Omega \delta^2 \sum_{i=1}^{n-1} u^2_{x_i}\ dx .$$

Dalle (5.13), (5.22) e (5.23) si ha:

$$(5.24)\quad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n-1} u^2_{x_i x_j}\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n-1} u^2_{x_i}\,dx + \int_\Omega u^2\,dx$$

$$\le c_3\Big(\int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} u_{x_i x_j} + eu + \lambda\beta u\Big)^2 dx - \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega \beta^2 u^2 dx$$

$$+ \|u\|^2_{W^2(\Omega)}\Big(\sum_{i,j,k=1}^{n-1} \|(a'_{ij})_{x_k}\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_r)} + \|\delta\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_r)}\Big)\Big).$$

Inoltre, per la (5.17) si ha:

$$(5.25)\quad \int_\Omega (-L'_o u - eu - \lambda\beta u) u_{x_n x_n}\,dx$$

$$\ge c_4\Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i x_n}\,dx + \int_\Omega u^2_{x_n}\,dx$$

$$- \|u\|^2_{W^2(\Omega)}\Big(\|(b_1)_{x_n}\|^2_{M^t(\Omega\setminus B_r)} + \sum_{i,j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \|(a'_{ij})_{x_k}\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_r)}\Big)\Big)$$

$$- \lambda \int_\Omega \beta u u_{x_n x_n}\,dx,$$

mentre risulta per ogni $\varepsilon \in R_+$

$$(5.26)\quad \lambda\int_\Omega \beta u u_{x_n x_n}\,dx = -\lambda\int_\Omega \beta u^2_{x_n}\,dx - \lambda\int_\Omega \beta_{x_n} u u_{x_n}\,dx$$

$$\leq \lambda \int_\Omega \beta\delta |u u_{x_n}| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\lambda^2 \int_\Omega \beta^2 u^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega \delta^2 u^2_{x_n}\, dx .$$

Dalle (5.24), (5.25) e (5.26) si ottiene:

$$(5.27)\quad \|u\|^2_{W^2(\Omega)} \leq c_5(|L'_o u+eu+\lambda\beta u|^2_{2,\Omega}$$

$$+ \|u\|^2_{W^2(\Omega)} (\|(b_1)_{x_n}\|^2_{M^t(\Omega\setminus B_r)} + \sum_{i,j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \|(a'_{ij})_{x_k}\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_r)}$$

$$+ \|\delta\|^2_{M^s(\Omega\setminus B_r)})) .$$

Dalla (5.27), procedendo come nella dimostrazione del lemma 5.1, segue la (5.21) e perciò si ha la tesi.

6. LIMITAZIONI A PRIORI IN APERTI A FRONTIERA LIMITATA.

Consideriamo ancora un aperto non limitato Ω di R^n, supponendo ora che sia verificata la seguente ipotesi:

i_5) Ω è di classe C^2 e la sua frontiera $\partial\Omega$ è limitata.

Assegniamo in Ω l'operatore differenziale L definito dalla (4.2) supponendo che siano verificate le ipotesi i_1), i_2), la condizione

$$(6.1)\qquad a_i \in M^s_o(\Omega), \qquad i = 1,\dots,n,$$

e la condizione:

$$(6.2)\qquad a = a' + b$$

dove

$$(6.3) \qquad a' \in M_o^t(\Omega)$$

e b soddisfa l'ipotesi i_3).

TEOREMA 6.1. *Se sono verificate le* (6.1) - (6.3) *e le ipotesi* $i_1)-i_5)$, *allora esistono* $c \in R_+$ *e un aperto limitato* $\Omega_o \subset \Omega$ *tali che:*

$$(6.4) \quad \|u\|_{W^2(\Omega)} \leq c(|Lu+\lambda\beta u|_{2,\Omega}+|u|_{2,\Omega_o}) \quad \forall u\in W^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) \text{ e } \forall\lambda\in[0,+\infty[.$$

Dim. Osserviamo che, in conseguenza del lemma 3.3 di [13], è sufficiente dimostrare il teorema per l'operatore L_o+b in luogo dell'operatore L.

Indichiamo, per ogni $r\in R_+$, con ζ_r una funzione di classe $\mathscr{D}(R^n)$ tale che:

$$0 \leq \zeta_r \leq 1, \quad \zeta_r|_{B_r} = 1, \quad \operatorname{supp}\zeta_r \subset B_{2r}.$$

Siccome $\partial\Omega$ è limitata, per il lemma 5.2 esiste $r\in R_+$ tale che:

$$(6.5) \quad \|(1-\zeta_r)u\|_{W^2(\Omega)} \leq c|L_o((1-\zeta_r)u)+b(1-\zeta_r)u+\lambda\beta(1-\zeta_r)u|_{2,\Omega} \qquad \forall u \in W^2(\Omega) \text{ e } \forall\lambda\in[0,+\infty[.$$

Dalla (6.5) segue che:

$$(6.6) \quad \|(1-\zeta_r)u\|_{W^2(\Omega)} \leq c(|L_ou+bu+\lambda\beta u|_{2,\Omega}+|u_x|_{2,\Omega\cap B_{2r}}+|u|_{2,\Omega\cap B_{2r}}) \qquad \forall u\in W^2(\Omega) \text{ e } \forall\lambda\in[0,+\infty[.$$

D'altra parte, per il lemma 3.1 si ha:

$$(6.7) \qquad \|\zeta_r u\|_{W^2(\Omega)} = \|\zeta_r u|_{W^2(\Omega\cap B_{2r})}$$

$$\leq c(|L_o(\zeta_r u) \quad b\,\zeta_r u + \lambda\beta\,\zeta_r u|_{2,\Omega\cap B_{2r}} + |\zeta_r u|_{2,\Omega\cap B_{2r}})$$

$$\leq c(|L_o u + bu + \lambda\beta u|_{2,\Omega} + |u_x|_{2,\Omega\cap B_{2r}} + |u|_{2,\Omega\cap B_{2r}})$$

$$\forall u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) \text{ e } \forall\lambda \in [0,+\infty[.$$

Dalle (6.6) e (6.7) segue:

$$(6.8) \quad \|u\|_{W^2(\Omega)} \leq c(|L_o u + bu + \lambda\beta u|_{2,\Omega} + |u_x|_{2,\Omega\cap B_{2r}} + |u|_{2,\Omega\cap B_{2r}})$$

$$\forall u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) \text{ e } \forall\lambda \in [0,+\infty[.$$

Dalla (6.8) segue in modo ovvio la tesi.

TEOREMA 6.2. *Se sono verificate le ipotesi del teorema* 6.1 *e la condizione* $\beta^{-1} \in L^\infty_{loc}(\bar\Omega)$, *allora esistono* $c, \lambda_o \in R_+$ *tali che:*

$$(6.9) \quad \|u\|_{W^2(\Omega)} \leq c|Lu + \lambda\beta u|_{2,\Omega} \qquad \forall u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) \quad e \quad \forall\lambda \in [\lambda_o,+\infty[.$$

Dim. La tesi si deduce dal teorema 6.1 con gli stessi ragionamenti tenuti in [13] per dedurre dal teorema 4.4 il corollario 4.2.

7. TEOREMI DI ESISTENZA.

TEOREMA 7.1. *Se sono verificate le condizioni* i_0) *e* i_1), *allora esiste* $\lambda_0 \in R_+$ *tale che per ogni* $\lambda \geq \lambda_0$ *il problema*

$$(7.1)\qquad \begin{aligned} &u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega), \\ &Lu + \lambda u = f, \quad f \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

è univocamente risolubile.

Dim. In conseguenza di noti risultati (cfr., ad es., il teorema 5.4 di [13]) si ha che per ogni $\lambda \in R_+$ il problema

$$(7.2)\qquad \begin{aligned} &u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega), \\ &-\Delta u + \lambda u = f, \quad f \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

è univocamente risolubile.

Per ogni $\tau \in [0,1]$, poniamo

$$L_\tau = (1-\tau)(-\Delta+\lambda) + \tau(L+\lambda) = -(1-\tau)\Delta + \tau L + \lambda .$$

Evidentemente per L_τ sono soddisfatte le ipotesi del corollario 4.1 uniformemente rispetto a $\tau \in [0,1]$; quindi si ha per λ sufficientemente grande

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leq c\,|L_\tau u|_{2,\Omega} \qquad \forall u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega) ,$$

dove c è una costante indipendente da τ e da u.

Applicando pertanto il metodo di prolungamento per continuità lungo un parametro, si ottiene la tesi.

TEOREMA 7.2. *Se sono verificate le* (6.1) - (6.3), *le ipotesi* i_1)- i_5) *e la condizione* $\beta^{-1} \in L^{\infty}_{loc}(\bar{\Omega})$, *allora esiste* $\lambda_0 \in R_+$ *tale che per ogni* $\lambda \geq \lambda_0$ *il problema*

$$(7.3)\qquad \begin{aligned} & u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega), \\ & Lu + \lambda\beta u = f, \ f \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

è univocamente risolubile.

Dim. Osserviamo che (si tenga presente la (1.6) di [13]):

$$b_2 - b_2^o \in M_o^t(\Omega), \ b = b_2 - b_2^o + b_1 + b_2^o,$$

$$\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} (b_1 + b_2^o) \geq \nu > 0.$$

Applicando allora il teorema 5.2 di [13] si ha che, per λ sufficientemente grande, il problema

$$(7.4)\qquad \begin{aligned} & u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega), \\ & -\Delta u + bu + \lambda\beta u = f, \quad f \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

è univocamente risolubile.

Per ogni $\tau \in [0,1]$, poniamo:

$$L_\tau = (1-\tau)(-\Delta + b + \lambda\beta) + \tau(L + \lambda\beta) = -(1-\tau)\Delta + \tau(L-b) + b + \lambda\beta.$$

Per L_τ sono soddisfatte le ipotesi del teorema 6.2 uniformemente rispetto a $\tau\in[0,1]$; ne segue che per λ sufficientemente grande si ha:

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leq c\,|L_\tau u|_{2,\Omega} \qquad \forall u\in W^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega),$$

dove c è una costante indipendente da τ e da u.

Facendo uso del metodo di prolungamento per continuità lungo un parametro, si ottiene la tesi.

TEOREMA 7.3. *Se sono verificate le* (6.1) - (6.3) *e le ipotesi* $i_1)$-$i_3)$ *e* $i_5)$, *allora:*

$$u \in W^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) \to Lu \in L^2(\Omega)$$

è un operatore di Fredholm ad indice zero.

Dim. Assegniamo una funzione $\beta:\ \Omega \to R_+$ soddisfacente l'ipotesi $i_4)$ e le condizioni:

$$\beta \in M_o^t(\Omega), \qquad \beta^{-1} \in L^\infty_{loc}(\bar\Omega).$$

Ad esempio:

$$\beta(x) = \frac{1}{(1+|x|)^\alpha}\ , \qquad \alpha\in R_+\ .$$

In corrispondenza di tale funzione β, fissiamo un λ tale che il problema (7.3) sia univocamente risolubile.

Ponendo:

$$L = (L+\lambda\beta) - \lambda\beta$$

ed osservando che, per il lemma 3.4 di [13], l'operatore:

$$u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) \to \lambda\beta u \in L^2(\Omega)$$

è compatto, in conseguenza di ben noti risultati si ha la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.A.ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1971.

[2] G.F.BOTTARO - M.E.MARINA, Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (4) 8 (1973), 46-56.

[3] M.CHICCO, Solvability of the Dirichlet problem in $H^{2,p}(\Omega)$ for a class of linear second order elliptic partial differential equations, *Boll. Un. Mat. Ital.*,(4) 4 (1971), 374-387.

[4] M.CHICCO, Su una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine in forma non variazionale, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (6) 4 (1985), 487-495.

[5] D.GILBARG - N.S.TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Second Edition, Springer, Berlin, 1983.

[6] O.A.LADYZHENSKAJA-N.N.URAL'TSEVA, *Equations aux derivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris, 1966.

[7] P.L.LIONS, Remarques sur les équations linéaires elliptiques du second ordre sous forme divergence dans les domaines non bornées I e II, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Fis.* - S. VIII : (5) 78 (1985), 205-212; (6) 79 (1985), 178-183.

[8] C.MIRANDA, Sulle equazioni ellittiche di tipo non variazionale a coefficienti discontinui, *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4) 63 (1963), 353-386.

[9] A.A.SHAROVSKII, On a second order elliptic equation with discontinuous coefficients, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 24 (1969), 56-62.

[10] G.STAMPACCHIA, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier*, 15 (1965), 189-258.

[11] G.TALENTI, Equazioni lineari ellittiche in due variabili, *Le Matematiche*, 21 (1966), 339-376

[12] M.TRANSIRICO-M.TROISI, Equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui e di tipo variazionale in aperti non limitati, *Boll.Un.Mat.Ital.*, in corso di stampa.

[13] M.TRANSIRICO - M. TROISI, Equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale in aperti non limitati, *Ann. Mat. Pura Appl.*, in corso di stampa.

[14] M.TROISI, Su una classe di spazi di Sobolev con peso, *Rend. Accad. Naz. Scienze*, **104** (1986), Vol.X, 177-189.

[15] N.S.TRUDINGER, Linear elliptic operators with measurable coefficients, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (3) 27 (1973), 265-308.

[16] G.VIOLA, Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti non regolari, *Rend. Mat.*- S.VII, (4) 4(1984), 617-632.

Ricevuto il 5/10/1987

Istituto di Matematica
Facoltà di Scienze
Università di Salerno
84100 SALERNO