

## LA DISCREPANCIA ENTRE EL RANGO Y EL GENERO DE HEEGAARD DE UNA 3-VARIEDAD \*

JOSÉ M. MONTESINOS-AMILIBIA \*\*

1. Sea  $M^3$  una 3-variedad cerrada y orientable. Toda descomposición celular de  $M^3$  con una sola 0-celda y una sola 3-celda proporciona una descomposición de Heegaard de  $M^3$ . Basta tomar un entorno regular  $V$  del 1-esqueleto. El cierre  $\overline{M - V}$  de su complemento en  $M^3$  es, al igual que  $V$ , un cuerpo con asas  $W$  de género el número de 1-celdas de la descomposición. Entre todas las posibles descomposiciones de Heegaard de  $M^3$  hay una de mínimo género. Este mínimo es por definición el *género de Heegaard* de  $M$  que denotaremos por  $H_g(M)$ .

La descomposición celular define además un *diagrama de Heegaard* de  $M^3$ . Esto son dos sistemas de  $v, w$ , cada uno de ellos formado de  $g$  curvas simples, disjuntos y orientables sobre  $F_g = \partial V = \partial W$ , en donde  $v$  es el borde de  $g$  discos propiamente contenidos en  $V$  y transversales a las 1-celdas, y  $w$  son las intersecciones de las 2-celdas con  $\partial V$ . La presentación de  $\pi_1(M)$  definida por el 2-esqueleto de la descomposición celular puede leerse a partir del diagrama de Heegaard  $(F_g; v, w)$ . Tiene  $g$  generadores  $\{v_1, v_2, \dots, v_g\} = v$  y  $g$  relaciones  $\{w_1, w_2, \dots, w_g\} = w$  en donde  $w_i$  es una palabra con los símbolos  $v_1^{\pm 1}, \dots, v_g^{\pm 1}$  que se obtiene al escribir las sucesivas intersecciones - con su signo - de  $w_i$  con el sistema  $v$ . La presentación de  $\pi_1(M)$  así obtenida

$$|v_1, \dots, v_g : w_1, \dots, w_g|$$

diremos que procede de un diagrama de Heegaard o que es *realizable*.

2. Se llama *rango* de  $M$ , y se denotará por  $rk(M)$ , al mínimo número de generadores de  $\pi_1(M)$ . Si  $\pi_1(M)$  es trivial diremos que  $rk(M)$  es cero.

Por lo que hemos dicho en el número 1 es claro que

$$rk(M) \leq H_g(M)$$

3. *F. Waldhausen [Ha]* preguntó si  $rk(M)$  es siempre igual a  $H_g(M)$ . La razón de su pregunta es que una respuesta afirmativa implica la conjetura de Poincaré. En efecto si  $rk(M) = 0$ , entonces  $H_g(M) = 0$  y  $M$  es  $S^3$ .

Tras varios años de esfuerzos se obtuvo la siguiente importante respuesta negativa:

---

\* Eso es el texto de una conferencia dada en Lecce el 23 de junio de 1989. Está basada en las referencias [M1] y [M3].

\*\* Organo financiador DGICYT, PB89-0105.

**4. Ejemplo de Boileau-Zieschang [B, Z].** *Existen infinitas 3-variedades (de Seifert) para las que el rango es dos pero el género de Heegaard es 3.*

La demostración consiste en hallar una descomposición de Heegaard de género tres (fácil), considerar la presentación de  $\pi_1(M)$  inducida y mediante una (difícil) manipulación *totalmente algebraica* deducir que el número de generadores se puede rebajar a dos. La demostración de que el género de Heegaard es tres es difícil pero no nos interesa en este artículo.

5. Interesa analizar brevemente en qué consiste la "manipulación algebraica" de la presentación, que acabamos de mencionar. Para ello recordemos ciertos conceptos.

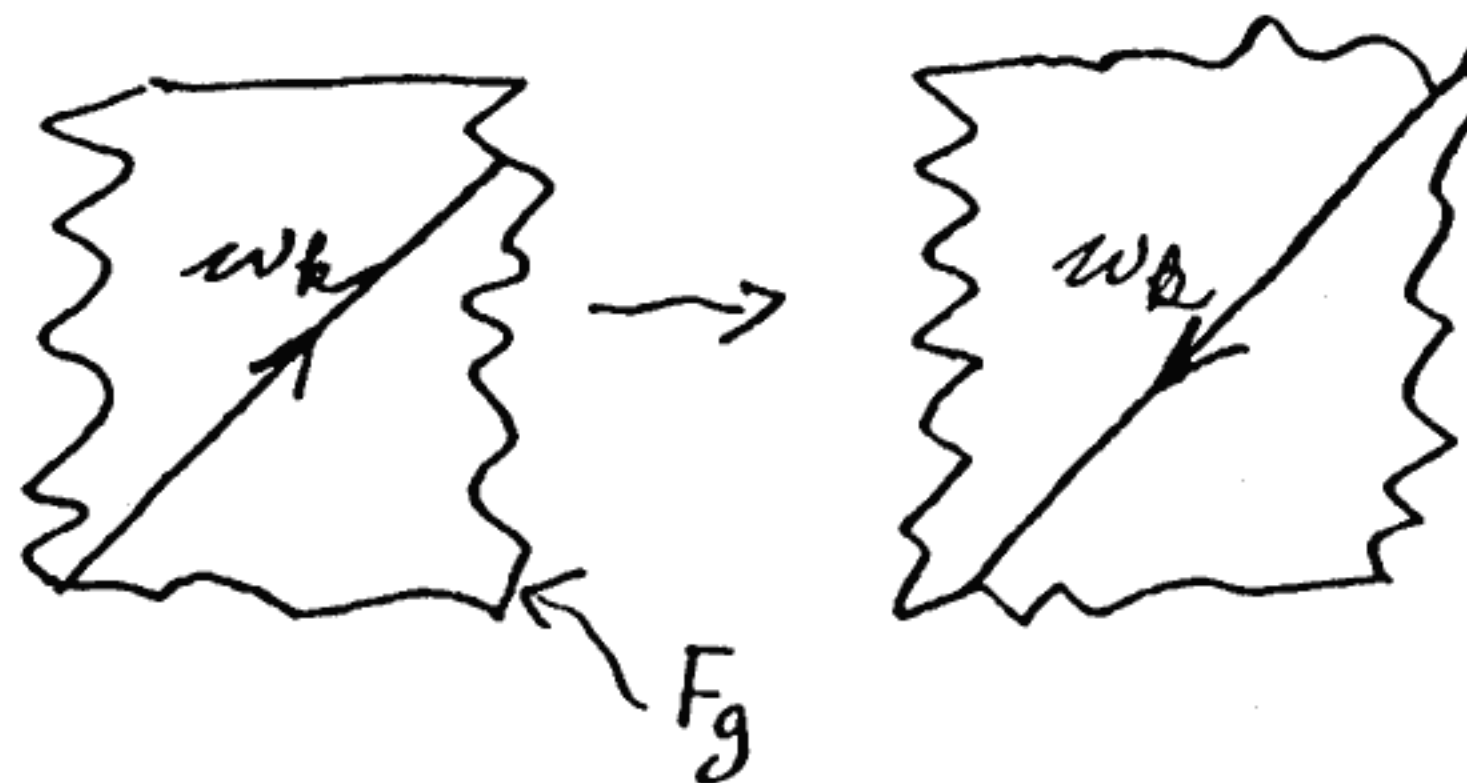
Una *jugada extendida de Nielsen* en una presentación  $|x_1, \dots, x_n : r_1, \dots, r_p|$  es una composición finita de *jugadas elementales* de los siguientes tipos:

1. Reemplazar algún  $r_k$  por  $r_k^{-1}$ .
2. Reemplazar algún  $r_k$  por  $r_k r_j, j \neq k$ .
3. Reemplazar algún  $r_k$  por  $\bar{x}_i^\epsilon r_k x_j^\epsilon$ , para algún  $j$  y algún  $\epsilon = \pm 1$ .
4. Reemplazar cada  $r_k$  por  $\lambda(r_k)$ , siendo  $\lambda$  algún automorfismo del grupo libre en los generadores  $x_1, \dots, x_m$ .
5. Añadir un nuevo generador  $x_{n+1}$  y una nueva relación  $r_{p+1} = x_{n+1}$ .
6. La inversa de 5, si puede aplicarse.

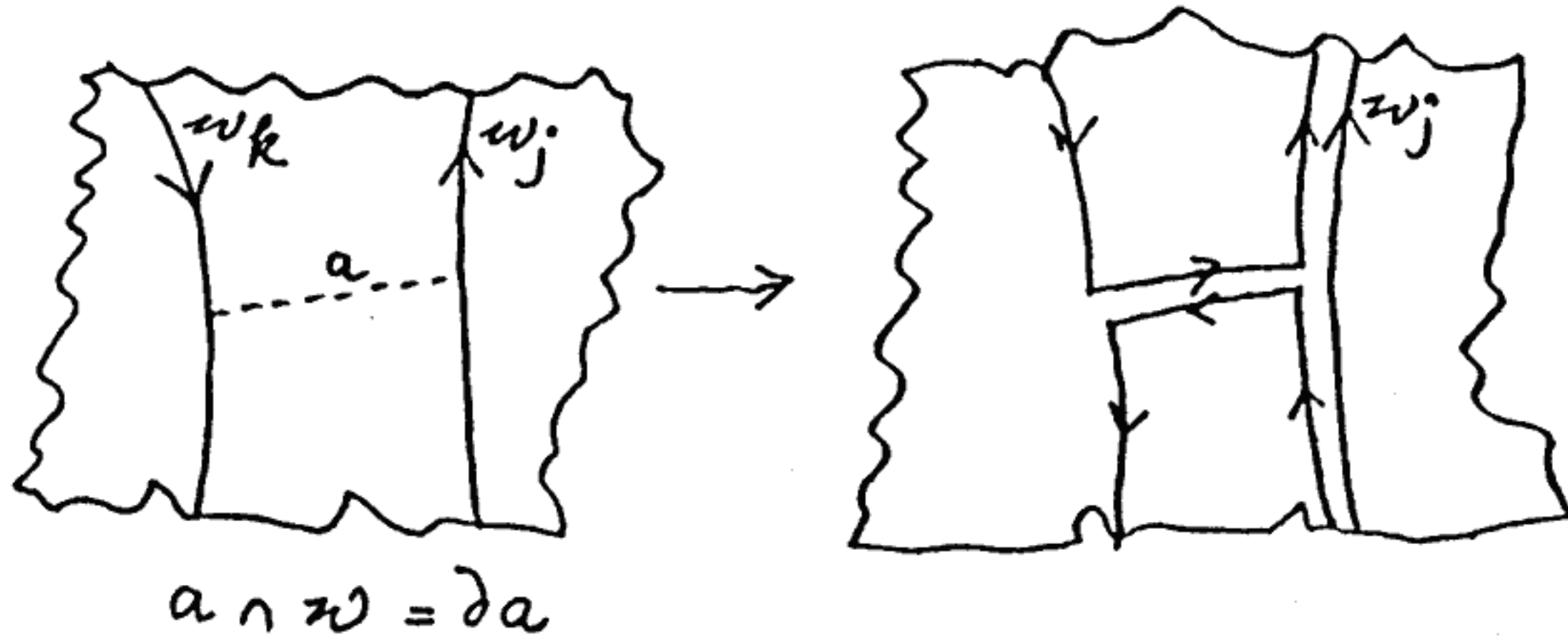
El origen de estas jugadas está en un teorema de Singer [S] que relaciona dos diagramas de Heegaard  $(F_g; v, w), (F'_h; v', w')$  de la misma variedad, mediante jugadas elementales realizadas en el diagrama. El siguiente cuadro muestra la correspondencia entre estas jugadas de Singer y las definidas antes de Nielsen:

<b>Singer</b>	<b>Nielsen</b>
<i>Diagrama de Heegaard</i>	<i>Presentación asociada</i>
$(F_g; v, w)$	$ v_1, \dots, v_g : w_1, \dots, w_g $

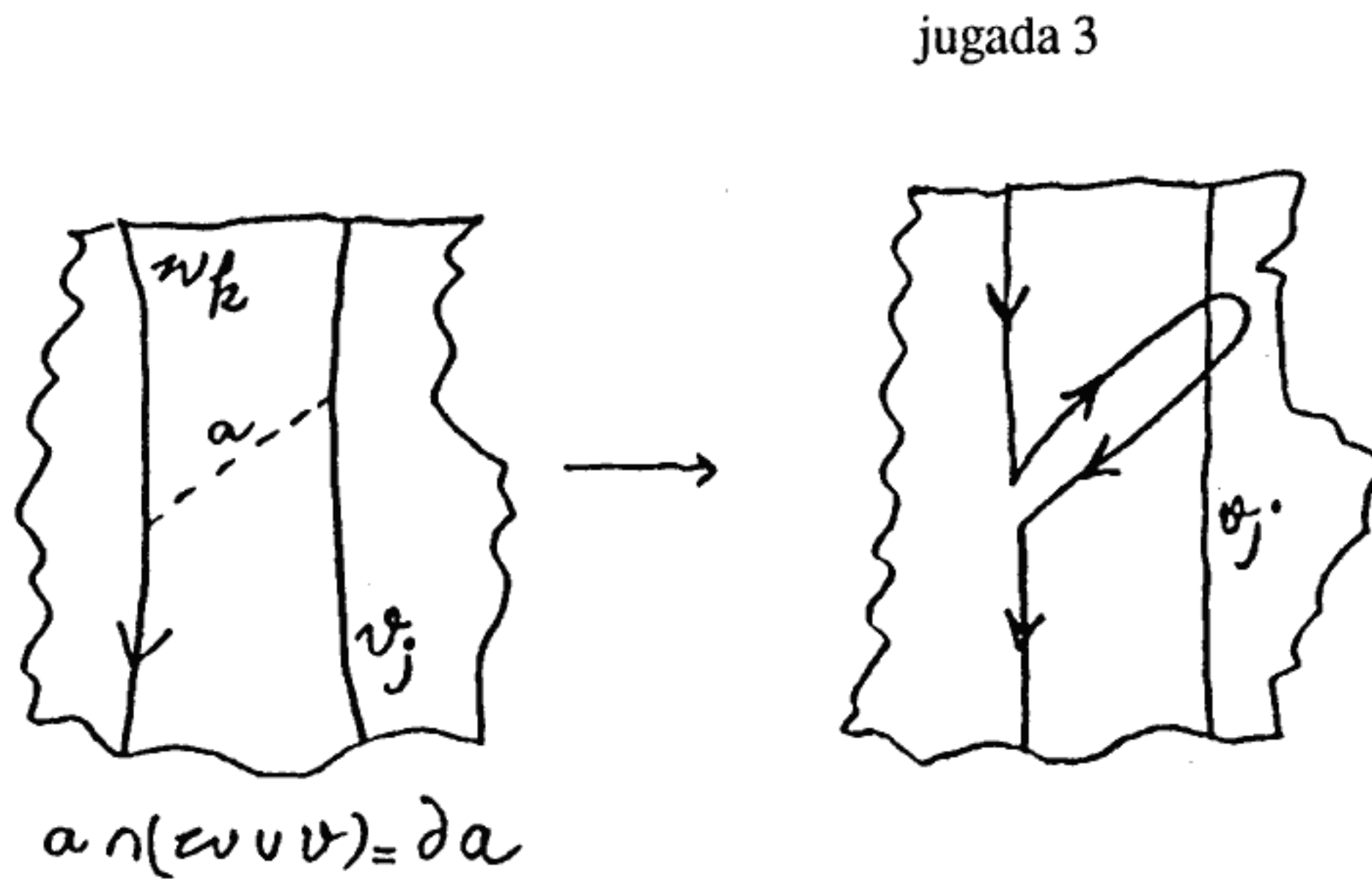
- |                                  |          |
|----------------------------------|----------|
| 1. cambio de orientación a $w_k$ | jugada 1 |
|----------------------------------|----------|



2. jugada banda:



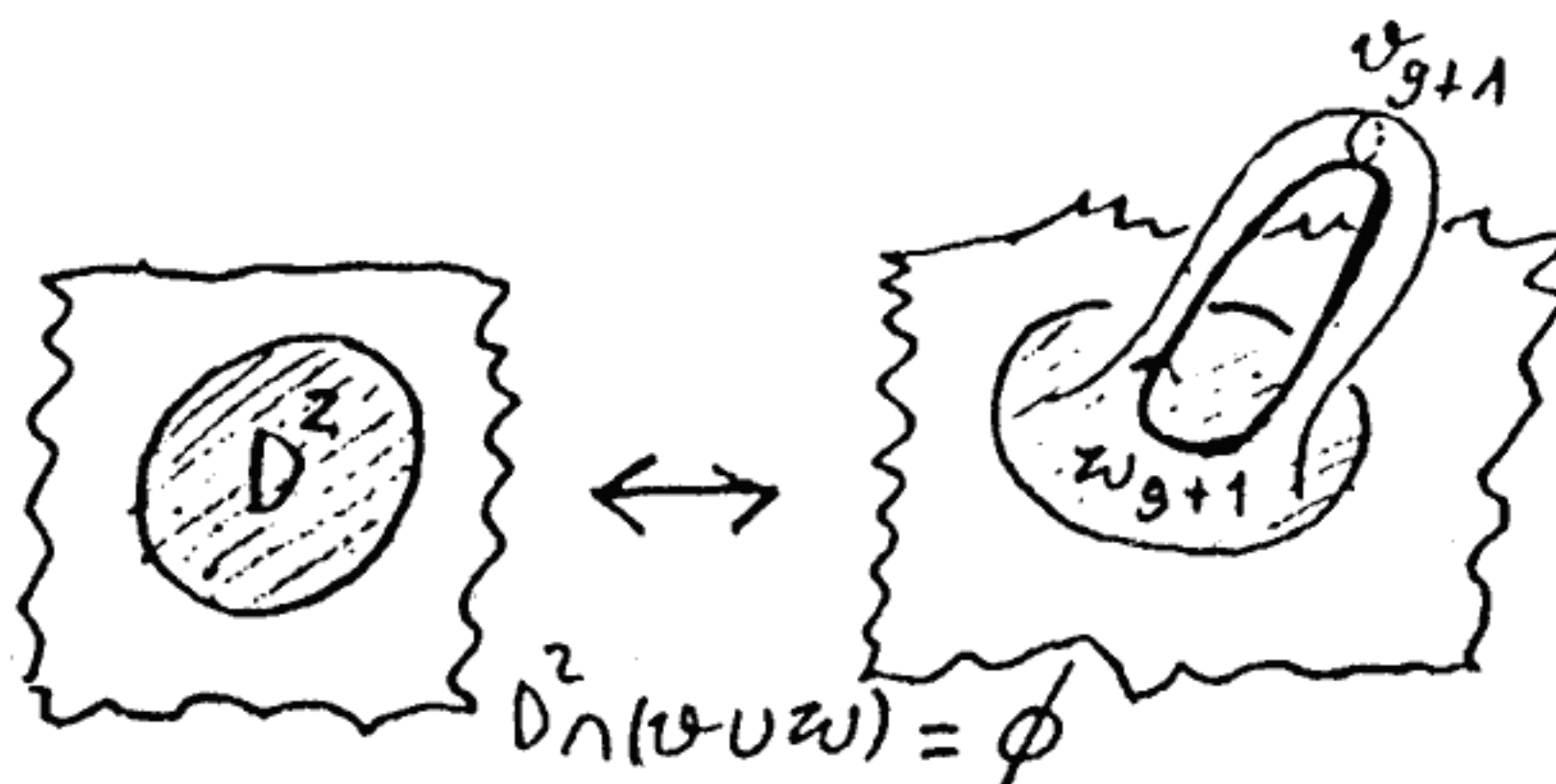
3. isotopia



4. cambiar v por otro v'

jugada 4

5 y 6



Singer [S] demuestra que dos diagramas de Heegaard de la misma variedad  $M$  están relacionados por una composición finita de sus jugadas. Se deduce de aquí que dos presentaciones de  $\pi_1(M)$  provenientes de diagrama de Heegaard están relacionadas mediante jugadas ex-

tendidas de Nielsen. Craggs [C] <sup>(1)</sup> propone llamar "género de Nielsen extendido" de  $M$ , denotado por  $EN(M)$ , al mínimo número de generadores entre todas las presentaciones de  $\pi_1(M)$  provenientes de presentaciones realizables mediante jugadas extendidas de Nielsen.

Claro es que se tiene

$$rk(M) \leq EN(M) \leq H_g(M)$$

Estamos ahora en condiciones de indicar en qué consiste la "manipulación algebraica" realizada por Boileau-Zieschang. Ocurre que si a las 6 jugadas de Nielsen antes mencionadas, añadimos la

7. Añadir (o quitar) la nueva relación 1.

La colección de jugadas 1 a 7 es entonces equivalente a las jugadas de Tietze *capaces de relacionar cualesquiera dos presentaciones del mismo grupo finitamente presentado*. La jugada 7 es muy fuerte (equivale a memorizar todas las relaciones anteriormente usadas) y no parece tener una contrapartida geométrica a nivel de diagramas de Heegaard.

Pues bien, Boileau-Zieschang usan de modo esencial la nueva jugada 7. Esto explica mi afirmación de que su procedimiento es una manipulación algebraica.

Por contraste, demostraré aquí que el género extendido de Nielsen de  $M$ ,  $EN(M)$ , es dos, para los ejemplos de Boileau-Zieschang, es decir que puede rebajarse un generador de la presentación mediante uso exclusivo de las jugadas extendidas de Nielsen:

**Teorema A.** *Los ejemplos de Boileau-Zieschang tienen  $EN(M) = 2$  pero  $Hg(M) = 3$ .*

Al examinar el cuadro anterior vemos que si bien toda jugada de Singer induce una de Nielsen, lo contrario puede no ser cierto. Por ejemplo, al tratar de realizar una jugada 2 puede que no haya disponible ningún arco  $\alpha$ , porque todos los posibles corten a miembros de  $w$  en su interior. Esto, ciertamente ocurre, como veremos en los ejemplos al final del artículo. Puede obviarse este inconveniente de dos maneras: ora admitiendo diagramas de Heegaard singulares, ora considerando el diagrama de Heegaard como una presentación en asas de la variedad  $M^* \times [-1, 1]$  donde  $M^*$  es  $M$  privado de una 3-celda. Pero sólo al final del artículo explicamos ligeramente estas posibilidades.

6. Pasemos ahora a la parte central de esta exposición que consiste en demostrar una generalización del teorema A.

**Lema 1.** *Sea la presentación*

$$P = |A, B, C; BA^{-1}BA^{-3}, CACA^{-1}, w(A, B, C)|$$

en donde  $w(A, B, C)$  es una palabra cualquiera en el alfabeto  $\{A, B, C, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}\}$ . Entonces empleando únicamente jugadas extendidas de Nielsen de tipos 1, 2, 3 es posible

<sup>(1)</sup> Ver también [C1], [C2].

realizar los siguientes cambios en la palabra  $w$ :

$$\dots A^{2a} B^\epsilon \dots \longleftrightarrow \dots B^\epsilon A^{2a} \dots$$

$$\dots A^{2a} C^\epsilon \dots \longleftrightarrow \dots C^\epsilon A^{2a} \dots$$

$$\dots A^\epsilon C^\eta \dots \longleftrightarrow \dots C^{-\eta} A^\epsilon \dots$$

$$\dots A^{-1} B \dots \longleftrightarrow \dots B^{-1} A^3 \dots$$

$$\dots AB^{-1} \dots \longleftrightarrow \dots BA^{-3} \dots$$

$$\dots AB \dots \longleftrightarrow \dots B^{-1} A^5 \dots$$

$$\dots A^{-1} B^{-1} \dots \longleftrightarrow \dots BA^{-5} \dots$$

donde  $\epsilon = \pm 1, \eta = \pm 1, a \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.*

(i)

$$A^2 B \rightarrow A^2 \bullet (AB^{-1} A^3 B^{-1}) \bullet B = A^3 B^{-1} A^3 \rightarrow A^3 B^{-1} \bullet (BA^{-3} BA^{-1}) \bullet A^3 = BA^2$$

$$A^2 B^{-1} \rightarrow A^2 B^{-1} \bullet (BA^{-3} BA^{-1}) = A^{-1} BA^{-1} \rightarrow A^{-1} B \bullet (B^{-1} AB^{-1} A^3) \bullet A^{-1} = B^{-1} A^2$$

$$A^{-2} B \rightarrow A^{-2} B \bullet (B^{-1} A^3 B^{-1} A) = AB^{-1} A \rightarrow AB^{-1} \bullet (BA^{-1} BA^{-3}) \bullet A = BA^{-2}$$

$$A^{-2} B^{-1} \rightarrow A^{-2} \bullet (A^{-1} BA^{-3} B) \bullet B^{-1} = A^{-3} BA^{-3} \rightarrow A^{-3} B \bullet (B^{-1} A^3 B^{-1} A) \bullet A^{-3} = B^{-1} A^{-2}$$

(ii)  $A^2 C \rightarrow A \bullet (C^{-1} AC^{-1} A^{-1}) \bullet AC = AC^{-1} A \rightarrow AC^{-1} \bullet (CA^{-1} CA) \bullet A = CA^2$

$$A^2 C^{-1} \rightarrow A \bullet (CAC A^{-1}) \bullet AC^{-1} = ACA \rightarrow AC \bullet (C^{-1} A^{-1} C^{-1} A) \bullet A = C^{-1} A^2$$

$$A^{-2} C \rightarrow A^{-1} \bullet (C^{-1} A^{-1} C^{-1} A) \bullet A^{-1} C = A^{-1} C^{-1} A^{-1} \rightarrow A^{-1} C^{-1} \bullet (CAC A^{-1}) \bullet A^{-1} = CA^{-2}$$

$$A^{-2} C^{-1} \rightarrow A^{-1} \bullet (CA^{-1} CA) \bullet A^{-1} C^{-1} = A^{-1} CA^{-1} \rightarrow A^{-1} C \bullet (C^{-1} AC^{-1} A^{-1}) \bullet A^{-1} = C^{-1} A^{-2}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad A^{-1}B &\rightarrow A^{-1}B \bullet (B^{-1}AB^{-1}A^3) \stackrel{\cong}{=} B^{-1}A^3 \\
AB^{-1} &\rightarrow AB^{-1} \bullet (BA^{-1}BA^{-3}) = BA^{-3} \\
AB &\rightarrow AB \bullet (B^{-1}A^{-1}A^4B^{-1}A) = A^4B^{-1}A \xrightarrow{(i)} B^{-1}A^5 \\
A^{-1}B^{-1} &\rightarrow A^{-1}B^{-1} \bullet (BAA^{-4}BA^{-1}) = A^{-4}BA^{-1} \xrightarrow{(i)} BA^{-5}
\end{aligned}$$

■

**Definición.** El peso de una letra (sea  $A$ ) en una palabra  $w(A, B, C)$  en el alfabeto  $\{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}\}$  es la suma de los exponentes de todas las apariciones de  $A$  en la palabra  $w(A, B, C)$ .

**Lema 2.** Sea la presentación

$$P = |A, B, C; BA^{-1}BA^{-3}, CACA^{-1}, w(A, B, C)|$$

en donde el peso de  $A$  en la palabra  $w(A, B, C)$  es impar. Entonces empleando únicamente jugadas extendidas de Nielsen de tipo 1, 2, 3 es posible cambiar  $w(A, B, C)$  en una palabra con una sola ocurrencia de  $A$  y ésta con exponente  $\pm 1$ .

*Demostración.* Usando el lema 1, puede ponerse  $w$  como  $\hat{w}(B, C) \bullet A^{2\alpha+1}$ .

Ahora, si  $2\alpha + 1 \geq 3$ , hacemos

$$\begin{aligned}
\dots A^{\alpha+1} &\rightarrow \dots BB^{-1}A^3A^{2\alpha-2} \rightarrow \dots BB^{-1}A^3 \bullet (A^{-3}BA^{-1}B) \bullet A^{2\alpha-2} = \\
&\dots BA^{-1}BA^{2\alpha-2} \rightarrow \dots BA^{2\alpha-3}B
\end{aligned}$$

Procediendo asílogramos que el exponente de  $A$  sea  $\pm 1$ . Se procede de modo análogo para  $2\alpha + 1 \leq 3$ . ■

Ahora obtenemos fácilmente el

**Teorema 3.** Sea  $(F_g; \partial v, \partial u)$  un diagrama de Heegaard de una variedad  $M$  cuya presentación asociada  $P$  contiene, entre otros, los generadores  $A, B, C$  y la relación  $w_1 w_2$  en donde:

(i)  $w_1$  es una palabra (que puede ser vacía) en la que no aparecen los generadores  $A, B, C$ .

(ii)  $w_2$  es una palabra en  $A^{\pm 1}, B^{\pm 1}, C^{\pm 1}$ , donde el peso de  $A$  es impar.

Además  $P$  contiene las relaciones  $BABA^{-1} = 1, CACA^{-1} = 1$ .

Entonces  $EN(M) \leq g - 1$ .

Para la prueba, pasamos primero de la presentación  $|A, B, C, \dots : BABA^{-1}, CACA^{-1}, \dots|$  a la  $|A, B, C, \dots : BA^{-1}BA^{-3}, CACA^{-1}, \dots|$  mediante una jugada del tipo 4, cuyo automorfismo  $\lambda$  tiene el efecto de reemplazar  $B$  por  $BA^{-2}$ . Esta, sin cambiar  $w_1$ , convierte a  $w_2$  en una palabra en  $A, B, C$  donde el peso de  $A$  es impar. Mediante jugadas de Nielsen de tipos 1, 2, 3 se puede conseguir (lema 1.6) que  $w_1$  no cambie y  $w_2$  contenga una sola aparición de  $A$  y ésta con exponente  $\pm 1$ . Ahora, una nueva jugada 4 y una 6, eliminan un generador y una relación. ■

7. Como aplicación de este teorema estudiamos ahora los ejemplos de Boileau-Zieschang. Para ello demos una descripción de los mismos adecuada a nuestros propósitos.

Los ejemplos de Boileau-Zieschang son variedades  $M(a, b)$  en donde  $a > 0$  y  $b$  es un entero cualquiera primo con  $2a + 1$ . Ellos demuestran que el género de  $M(a, b)$  es tres si y sólo si además

$$b \neq -a, -(a + 1)$$

He aquí nuestra descripción de  $M(a, b)$ . Consideramos primero la variedad  $W$  de la Figura 1.

Se tiene que  $W$  es

- (i) un "plumbing" de dos  $[0, 1]$ -fibrados con base una botella de Klein, o
- (ii) un  $T_0$ -fibrado sobre  $S^1$ , donde  $T_0$  es un toro con agujero y donde la monodromía tiene periodo dos.

*Demostración.* Es claro que  $W$  definida por (ii) es de Seifert con base  $D^2$  y tres fibras excepcionales de orden 2 correspondientes a los puntos fijos de la monodromía. ■

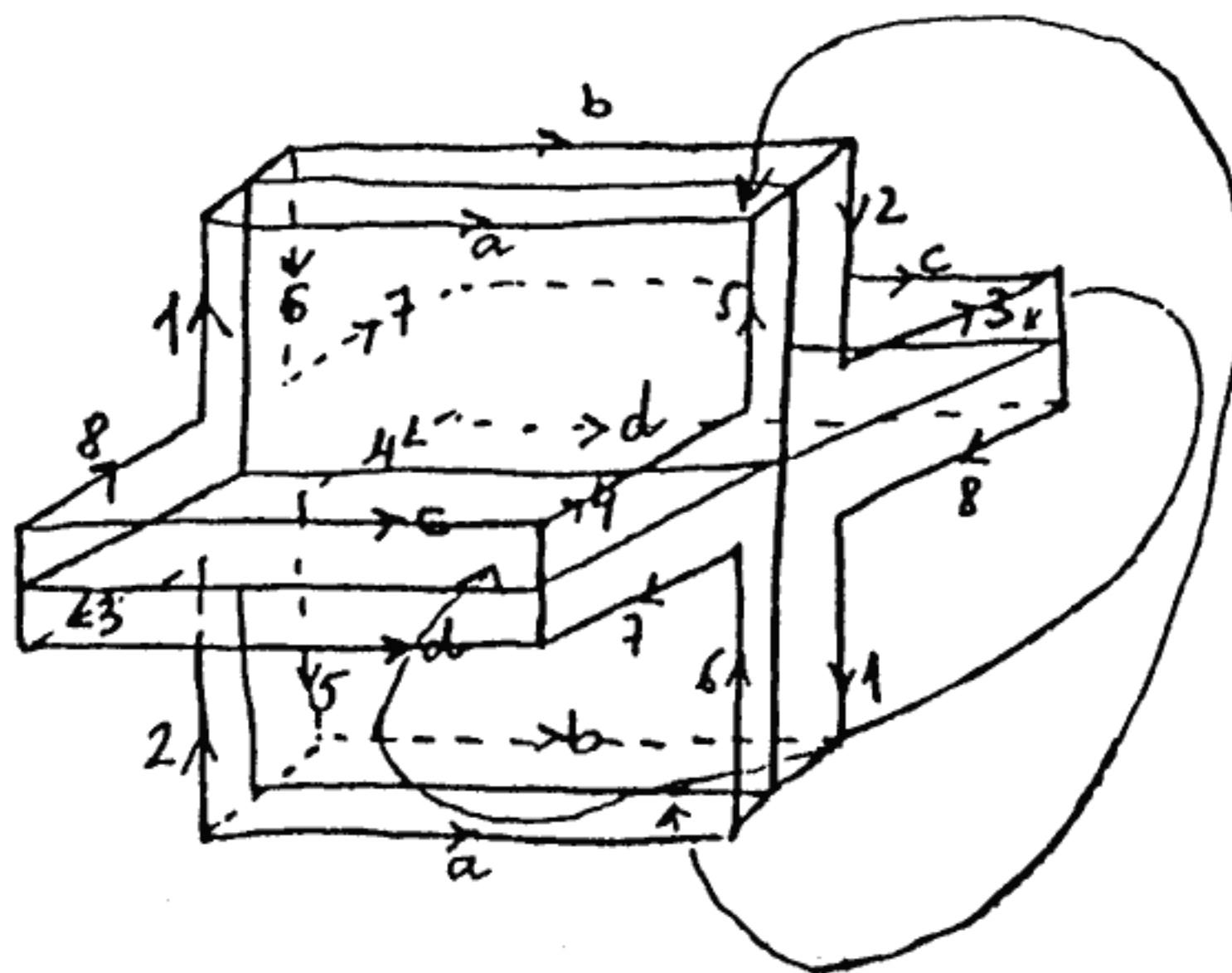


Figura 1

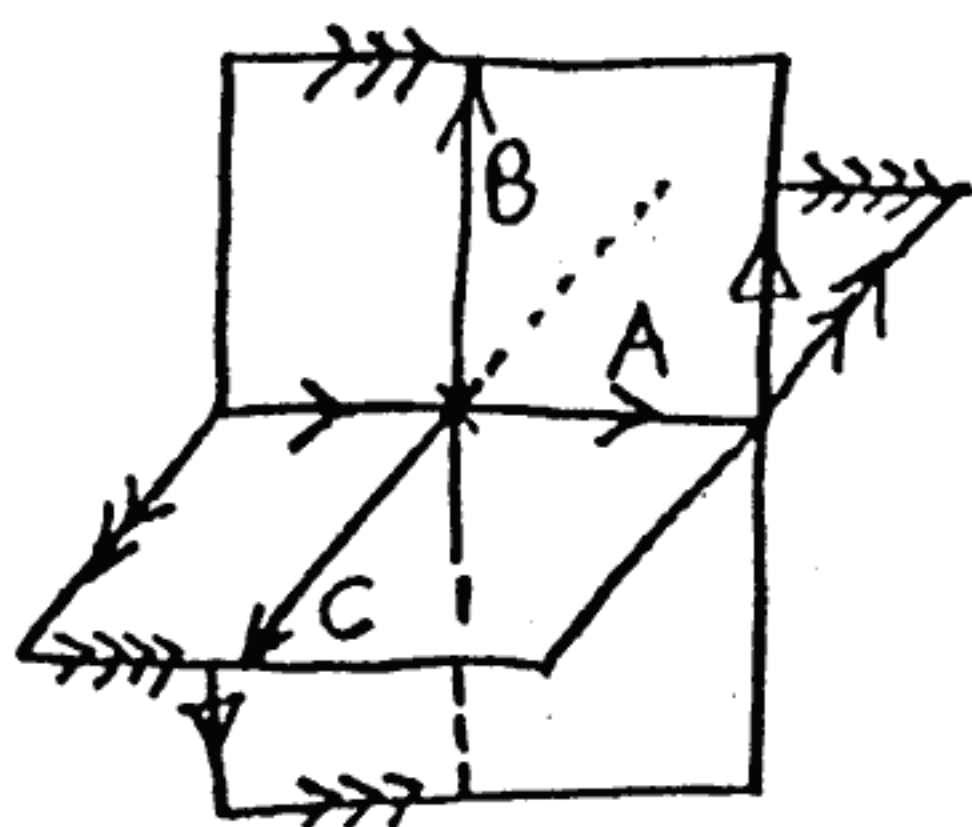


Figura 2

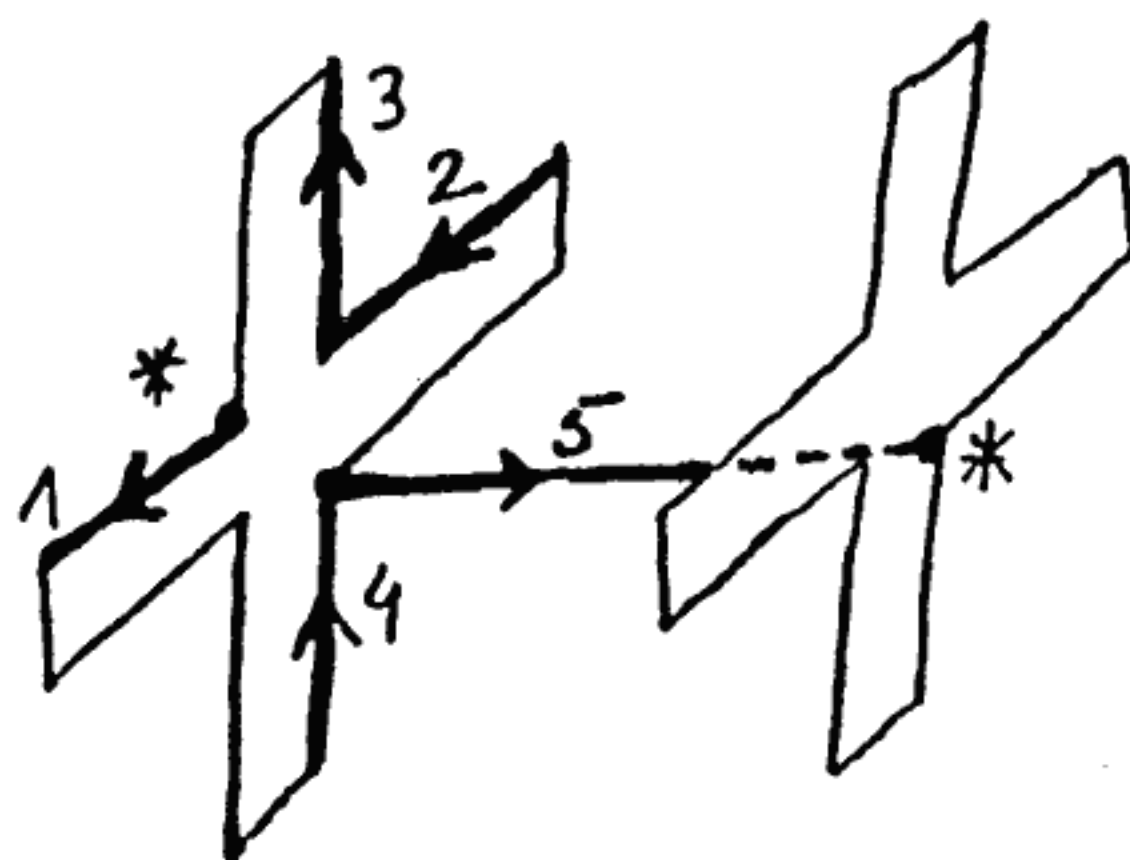


Figura 3

**Proposición 4.** Refiriéndonos a las Figuras 1 y 2 y tomando \* como punto base de  $W$ ,  $\pi_1(W, *)$  tiene la presentación

$$|A, B, C : ABA^{-1}B = 1, ACA^{-1}C = 1|$$

Además existe un sistema meridiano - longitud  $(Q, H)$ , en el toro  $\partial W$ , que representa  $(CBA, A^2)$ . Además  $H$  es la fibra de la fibración de Seifert.

*Demostración.* La primera parte es trivial. En la Figura 3 se ha dibujado  $Q$ . ■

**Proposición 5.** La variedad  $W$  admite el diagrama de Heegaard de la Figura 4. La presentación asociada al mismo es

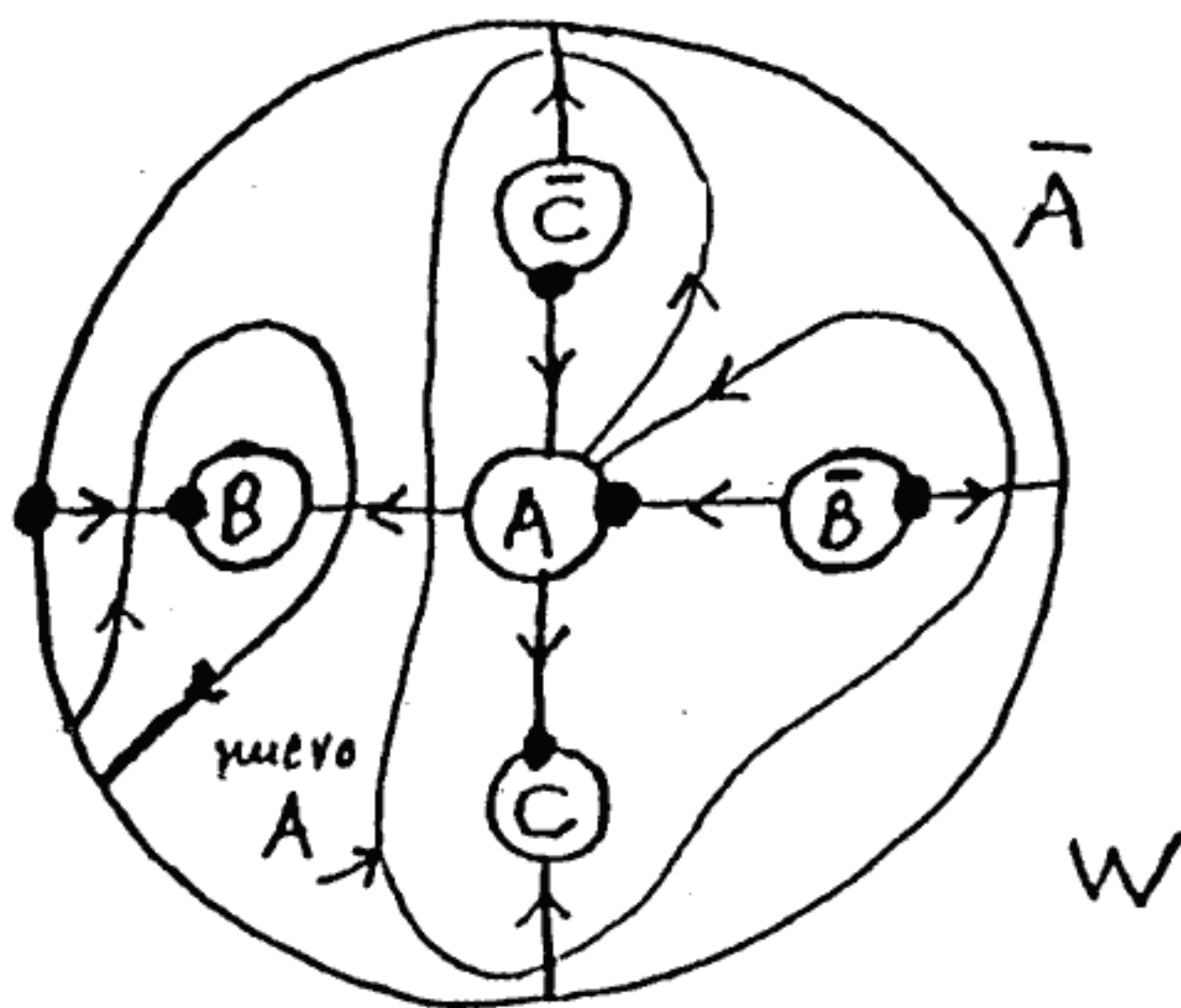


Figura 4





$$|A, B, C : BABA^{-1}, CACA^{-1}|$$

*Demostración.* Inmediata comparando Figuras 1 y 4. ■

**Teorema A.** *Los ejemplos de Boileau-Zieschang tienen  $EN(M) = 2 < 3 = Hg(M)$  :*

*Prueba.* Las variedades  $M$  de Boileau-Zieschang se obtienen pegando a  $W$  un toro sólido a lo largo de la frontera con meridiano

$$Q^{2a+1} H^b$$

que representa  $(CBA)^{2a+1} A^{2b}$  en  $\pi_1(W, *)$ . De la proposición 5 se deduce que hay un diagrama de Heegaard de  $M$  de género 3 que satisface las hipótesis del Teorema 3. Por tanto  $EN(M) \leq 2$ . Pero  $M$  no es una lente (por tener tres o más fibras excepcionales) luego  $EN(M)$  es dos. ■

**Nota.** Ver las referencias [M1], [M2].

8. El teorema 3 permite en principio crear una gran variedad de ejemplos para los que el rango es potencialmente menor que el género de Heegaard. No hemos explorado este terreno debido a las dificultades con que uno topa al tratar de determinar el género de Heegaard, pero es un campo abierto para la especulación y parece natural creer que el fenómeno de la discrepancia entre el género de Heegaard y el rango de una 3-variedad es un fenómeno muy común, en absoluto reducido a los pocos ejemplos hasta ahora conocidos (los de Boileau-Zieschang).

Notemos ahora la siguiente

**Proposición 6.** *La presentación*

$$P = |A, B, C; BA^{-1}BA^{-3}, CACA^{-1}|$$

*es realizable.*

*Demostración.* Sustituyendo  $A$  en la Figura 4 por la curva "nueva  $A$ ", se obtiene el diagrama de la Figura 5, que realiza nuestra presentación  $P$ . ■

**Nota.** Esto último es una realización geométrica de una jugada de Nielsen de tipo 4. Hemos visto en el lema 2 que la presentación realizable

$$P = |A, B, C; BA^{-1}BA^{-3}, CACA^{-1}|$$

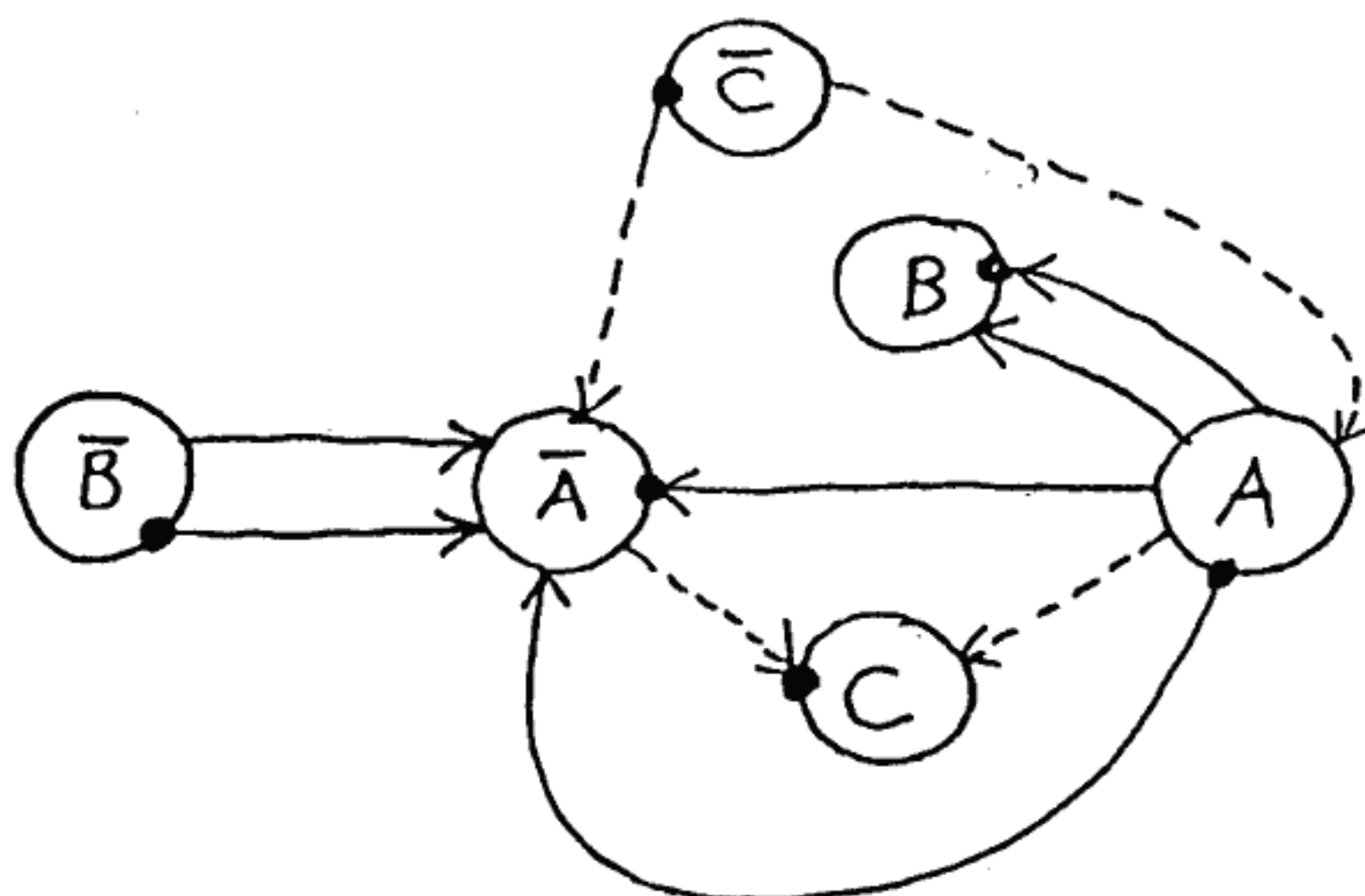


Figura 5

tiene la propiedad de "reducir" cualquier palabra  $w(A, B, C)$  con peso en  $A$  impar, a una palabra en la que  $A$  aparece una sola vez y con exponente igual a  $\pm 1$ , usando únicamente jugadas extendidas de Nielsen de tipos 1, 2 y 3. Una cuestión interesante es hallar (¿y clasificar?) otras presentaciones realizables reductoras similares.

### 9. El gran género de una 3-variedad (ver [M1]).

Conviene introducir ahora el concepto de gran género  $Bg(M)$  de una 3-variedad  $M$ . Es el entero  $r$  más pequeño tal que, si  $M_*$  denota  $M \setminus (\text{Interior } B^3)$ , entonces  $M_* \times [0, 1]$  tiene una descomposición en asas

$$H_0 \cup rH_1 \cup rH_2$$

con una 0-asa, y el mismo número de 1-asas que de 2-asas. Se tiene claramente:

$$Bg(M) \leq Hg(M)$$

**Pregunta 7.** *Es  $rk(M) = Bg(M)$ , para toda  $M$ ?*

Si la respuesta es afirmativa y  $rk(M) = 0$ , entonces  $Bg(M) = 0$  implica  $\partial(M_* \times [0, 1]) = S^3$  y por tanto  $M_*$  es una bola. Así pues la respuesta afirmativa a la pregunta 7 todavía implica la conjetura de Poincaré. Vemos pues que la pregunta de Waldhausen (que se responde negativamente) puede afinarse (Pregunta 7) manteniéndose la consecuencia importante de una respuesta afirmativa (la conjetura de Poincaré). Creemos pues que investigar 7 es muy importante.

La pregunta 7 se puede partir en dos problemas:

$$? \text{ 'Es } rk(M) = EN(M)?, \quad y \quad ? \text{ 'es } EN(M) = Bg(M)?$$

La primera pregunta generaliza la conjetura de Andrews-Curtis para ciertas presentaciones "geométricas" (ver [MZ]).

Con respecto a la segunda pregunta Craggs ha investigado si  $EN(M) \geq Bg(M)$  en [C], pero como hay cierta dificultad en su lema 5.3, la cuestión permanece aún abierta. Podemos tratar de comprobar esta segunda pregunta mediante los ejemplos de Boileau-Zieschang para los que  $EN(M) = 2$  y  $Hg(M) = 3$ .

Tomemos la variedad  $M(1, 1)$  dada mediante el diagrama de Heegaard de la Figura 6. Este diagrama se obtiene de la Figura 5 al dibujar la curva  $Q^3 H$ . La presentación asociada a la Figura 6 es

$$(1) \quad P = |A, B, C; BA^{-1}BA^{-3}, CACA^{-1} = 1, (CBA^{-1})^3 A^2 = 1|$$

Usando los métodos de los lemas 1 y 2 vamos a modificar esta presentación mediante jugadas extendidas de Nielsen como sigue:

$$CBA^{-1}CBA^{-1}CBA$$

$$CBA^{-1}C \bullet C^{-1}AC^{-1}A^{-1} \bullet BA^{-1}CBA = CBC^{-1}A^{-1}BA^{-1}CBA,$$

$$CBC^{-1}A^{-1}B \bullet B^{-1}AB^{-1}A^3 \bullet A^{-1}CBA = CBC^{-1}B^{-1}AACBA,$$

$$CBC^{-1}B^{-1}AAC \bullet C^{-1}A^{-1}C^{-1}A \bullet BA = CBC^{-1}B^{-1}AC^{-1}ABA,$$

$$CBC^{-1}B^{-1}AC^{-1} \bullet CA^{-1}CA \bullet ABA = CBC^{-1}B^{-1}CAABA,$$

$$CBC^{-1}B^{-1}CAA \bullet AB^{-1}A^3B^{-1} \bullet BA = CBC^{-1}B^{-1}CAAAB^{-1}AAAA,$$

$$CBC^{-1}B^{-1}CA^3B^{-1} \bullet BA^{-3}BA^{-1} \bullet A^4 = CBC^{-1}B^{-1}CBA^3,$$

$$CBC^{-1}B^{-1}CBA^2 \bullet A^{-2}BA^{-1}BA^{-1} \bullet A = CBC^{-1}B^{-1}CB^2A^{-1}B$$

Obtenemos así la presentación de  $\pi_1(M(1, 1), *)$  siguiente:

$$(2) \quad |A, B, C, : BA^{-1}BA^{-3} = 1, CACA^{-1} = 1, BCBC^{-1}B^{-1}CB^2 = A|.$$

Esto ilustra muy bien el teorema 3.

Ahora realizamos geoméricamente las jugadas de Nielsen, acabadas de usar, mediante jugadas banda realizadas en la presentación  $M(1, 1)^* = H_0 \cup 3H_1 \cup 3H_2$  dibujada también en Figura 6. Esta presentación en asas debe de interpretarse como sigue. El dibujo está en  $S^3$  con pares  $\{A, \bar{A}; B, \bar{B}; C, \bar{C}\}$  de bolas extraídas de  $S^3$  e identificados sus bordes con el fin de obtener  $3S^1 \times S^2 = \partial(H_0 \cup 3H_1)$ . Las esferas de pegado de las 2-asas  $3H_2$  son las curvas del diagrama de Heegaard de Figura 6 y sus "framings" se suponen dados por curvas

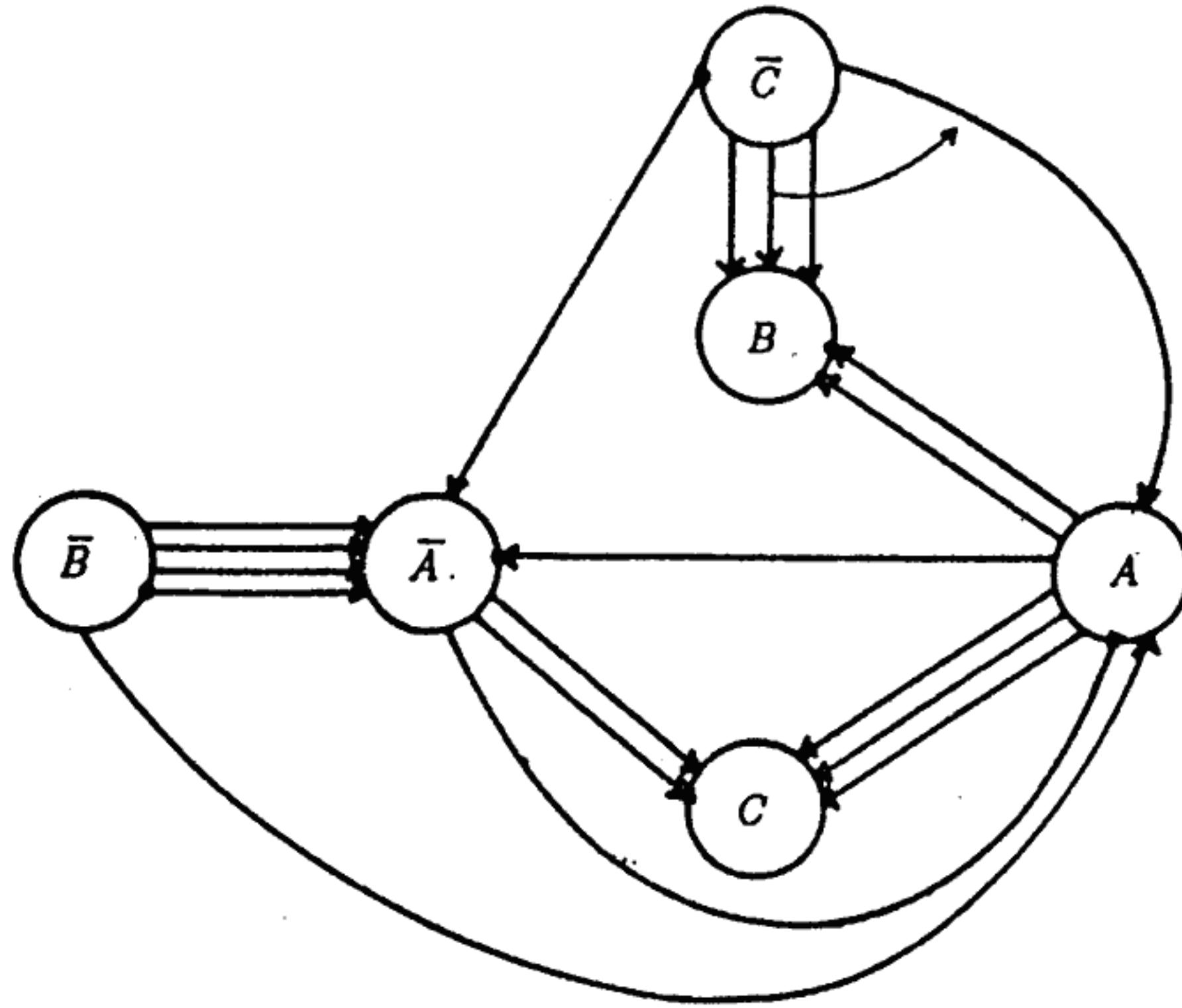


Figura 6

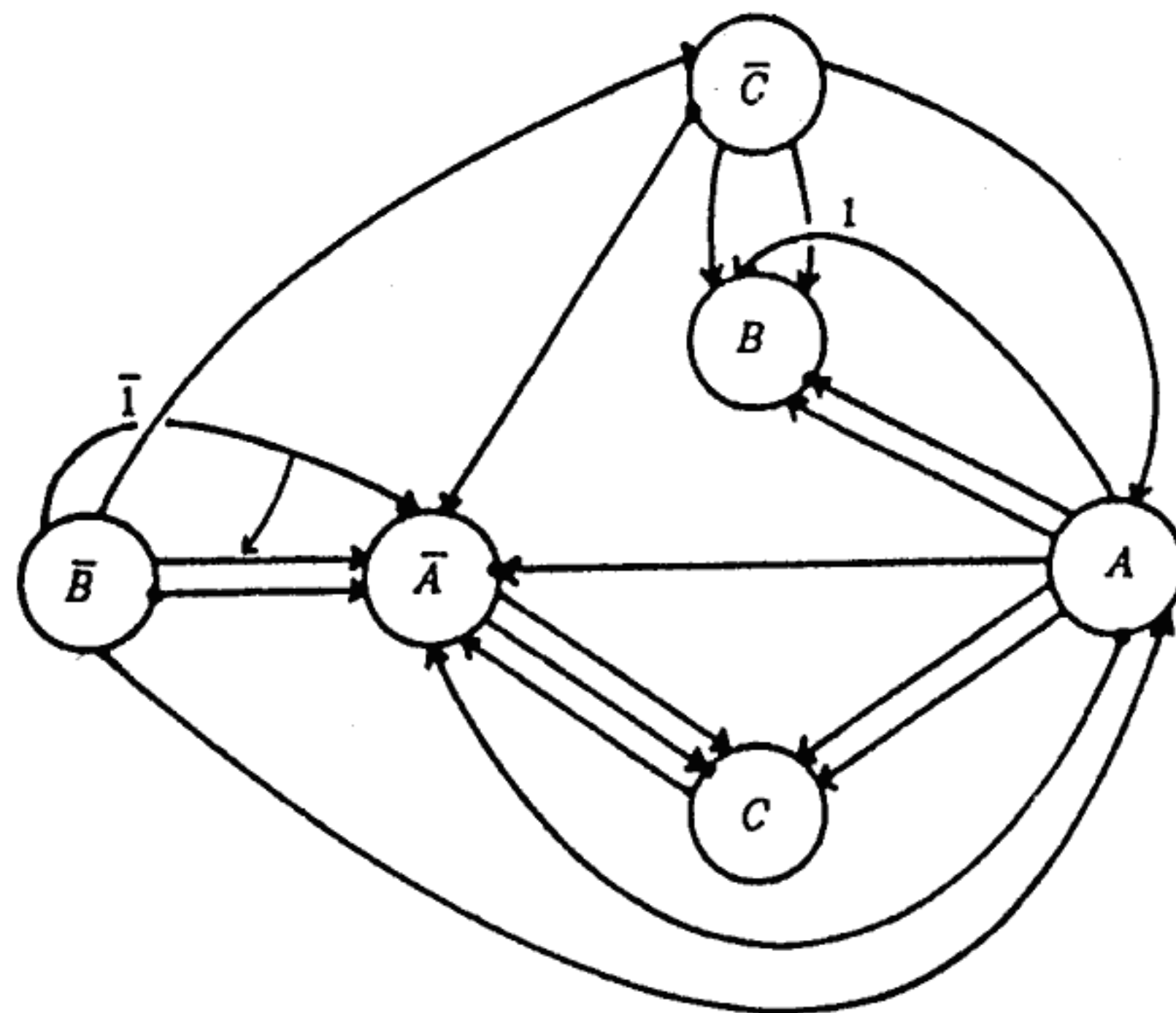


Figura 7

paralelas situadas sobre el papel (ver [M2]). La contrapartida geométrica de las jugadas de Nielsen son las jugadas-banda explicadas en [M2].

Las Figuras 6 hasta 13 deben interpretarse como sigue. Cada figura viene de la anterior al realizar la jugada banda esbozada mediante una flecha y al realizar isotopías. La última figura realiza la presentación (2). Podemos isotopar un poco mas la Figura 13 para eliminar dos lazos obvios (Figura 14) pero el resto de la figura resulta tan complicado que pronto se aprecia la imposibilidad de conseguir que aparezca un par de asas,  $(H_1, H_2)$ , cancelante, debido al - asíllamado - "fenomeno de Mazur".

Todo este proceso depende de elecciones y puede ser realizado de infinitas maneras distintas. Lo hecho aqui responde a una minimización experimental de complicaciones. He hecho todo esto de otras maneras distintas y parece que debe existir una obstrucción que mida la imposibilidad experimental de cancelar asas.

Mi conjetura es que  $Bg(M(1, 1)) = 3$ .

Los dibujos 6 a 13 tienen todavía otra interpretación. Proyectándolos sobre el papel proporcionan diagramas de Heegaard singulares. Los números han sido puestos para ayudar al lector interesado a encontrar las singularidades entre discos meridianos. Sin embargo la manipulación del diagrama singular es muy delicada y debe de hacerse con cuidado.

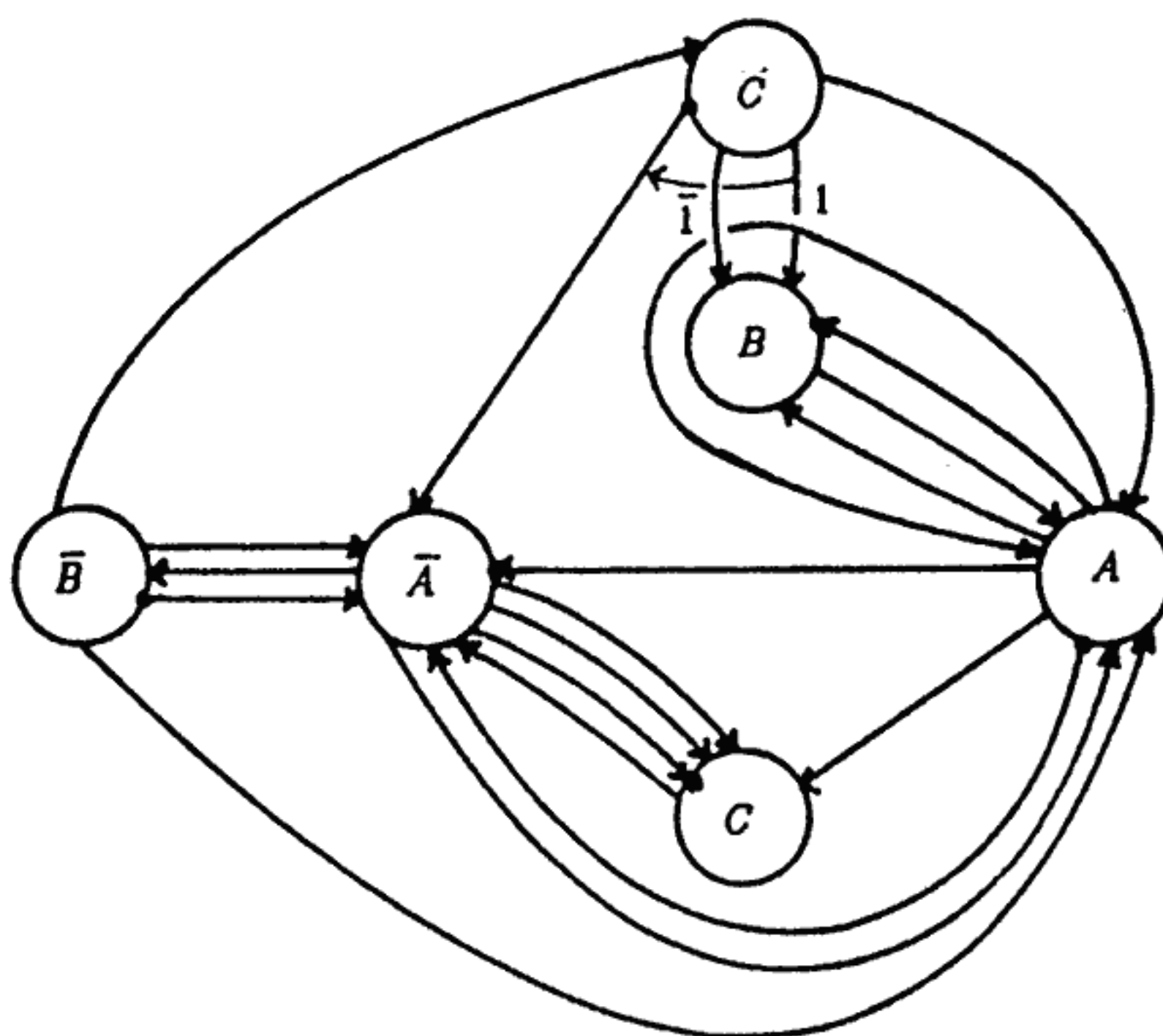


Figura 8

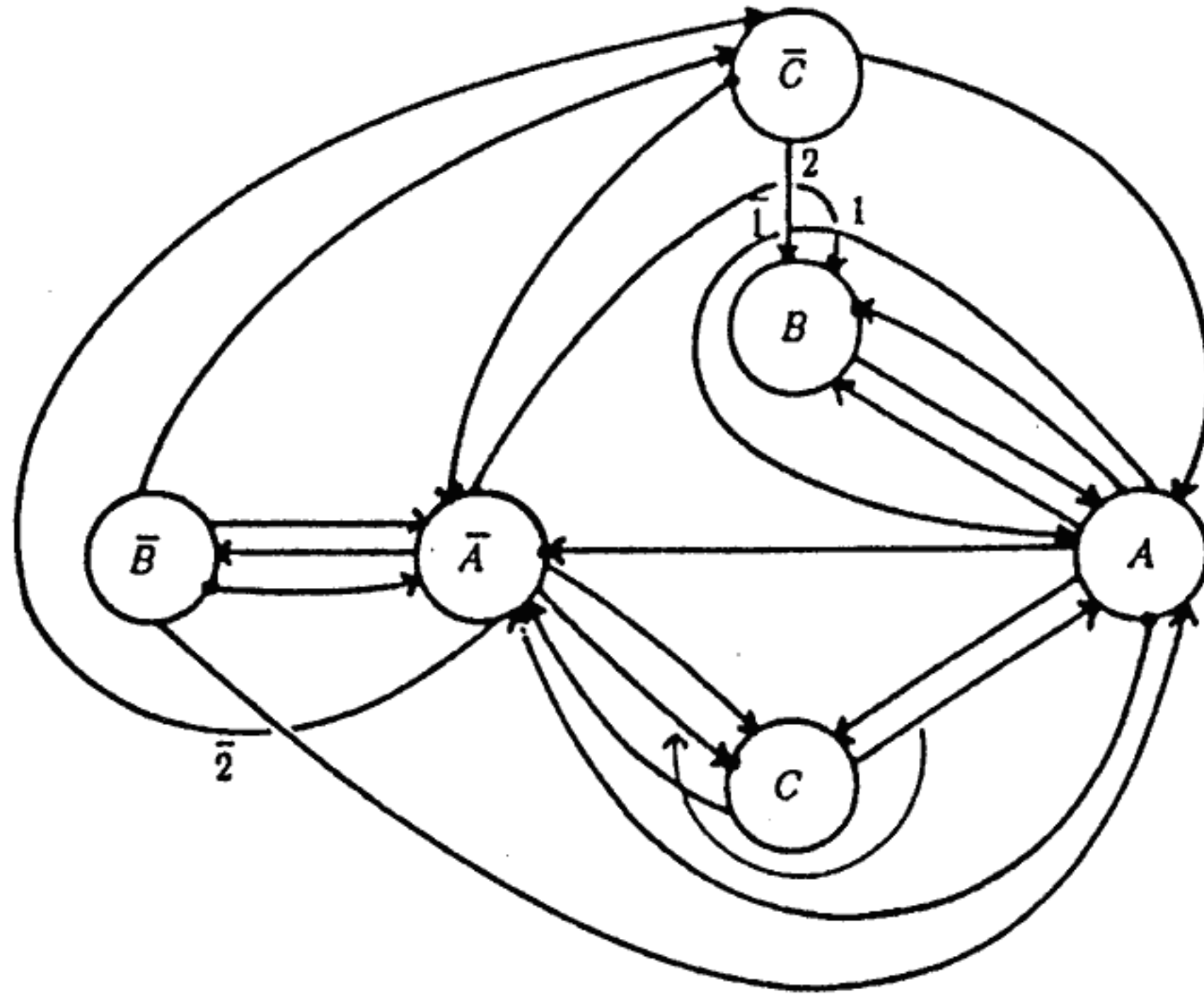


Figura 9

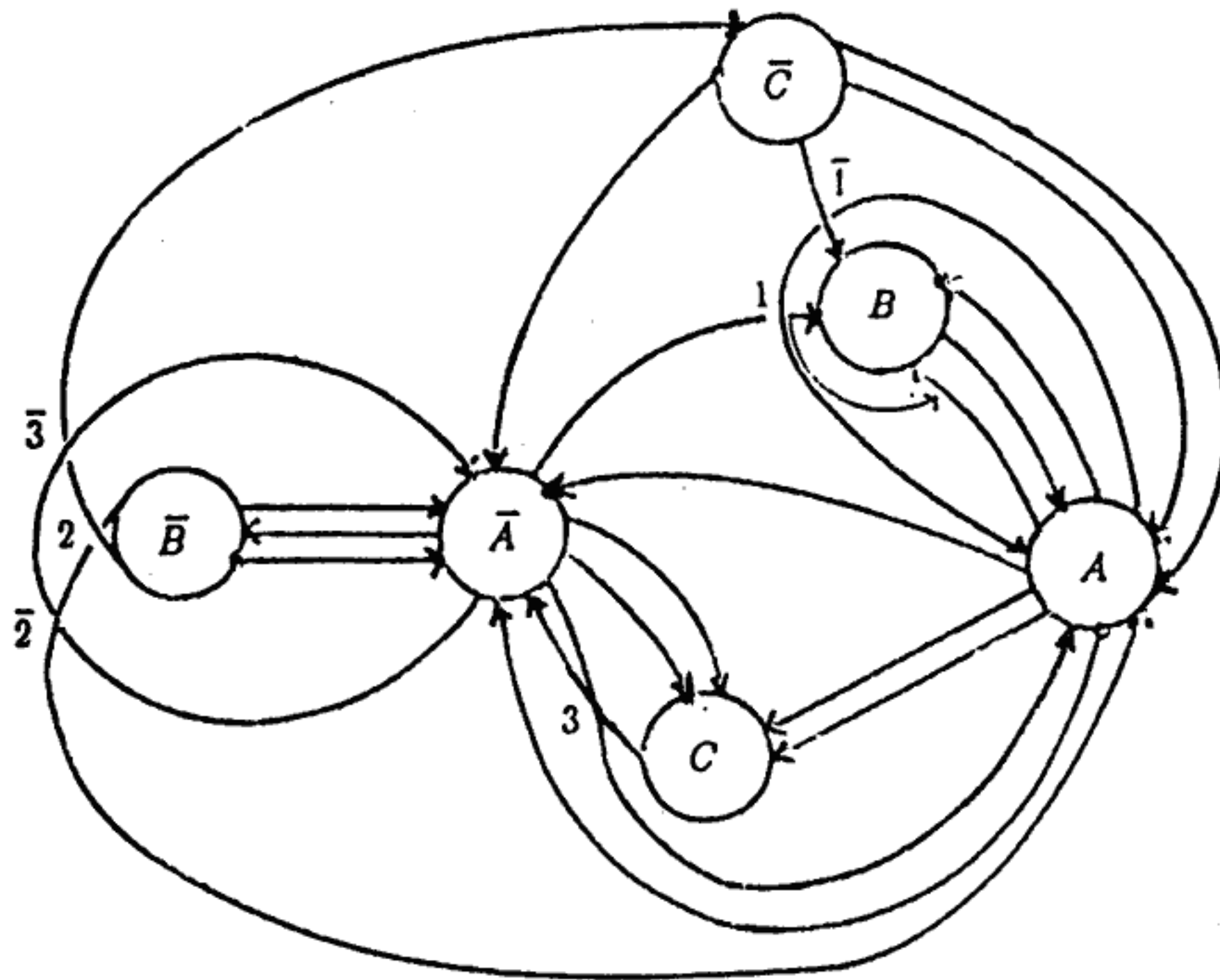


Figura 10

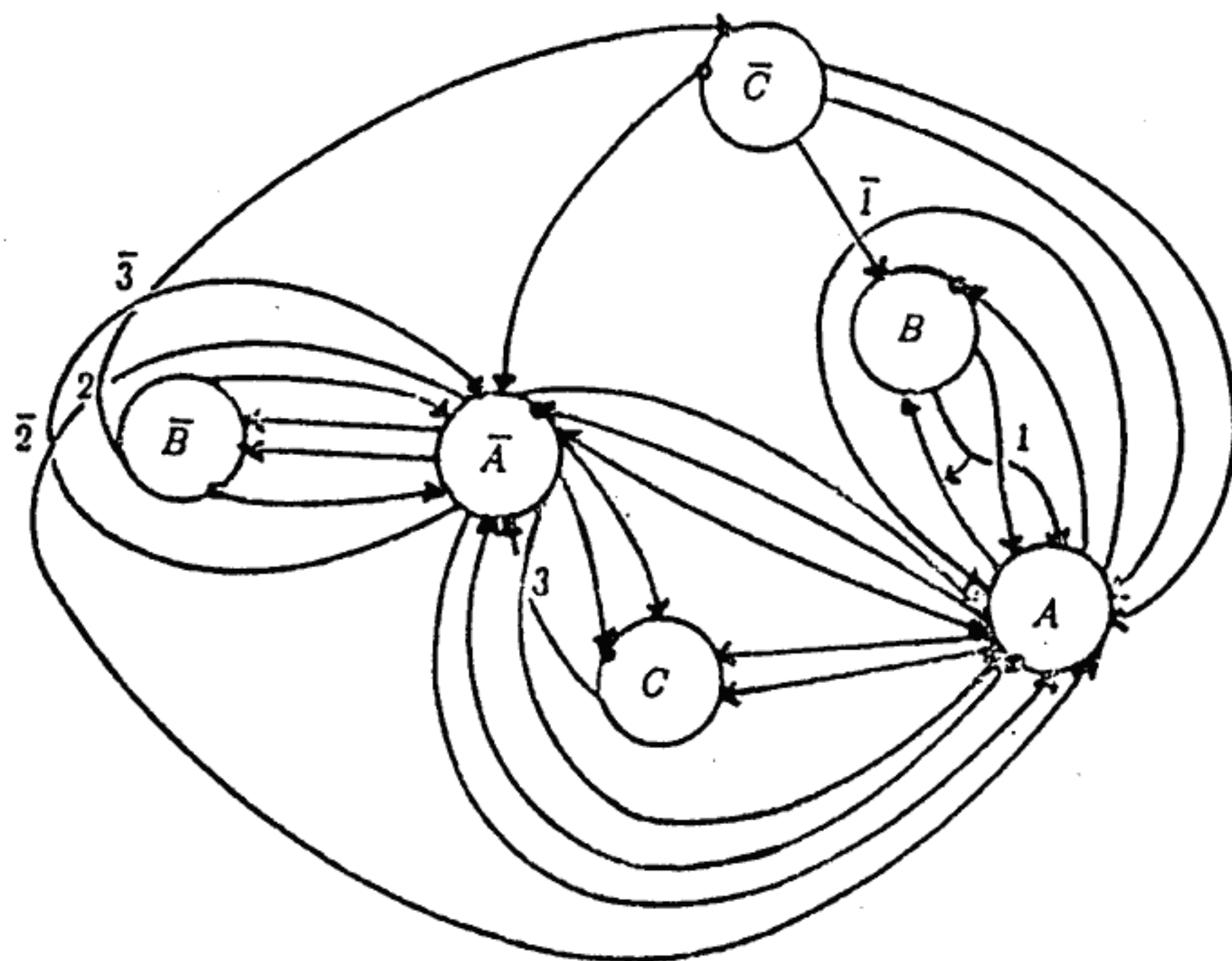


Figura 11

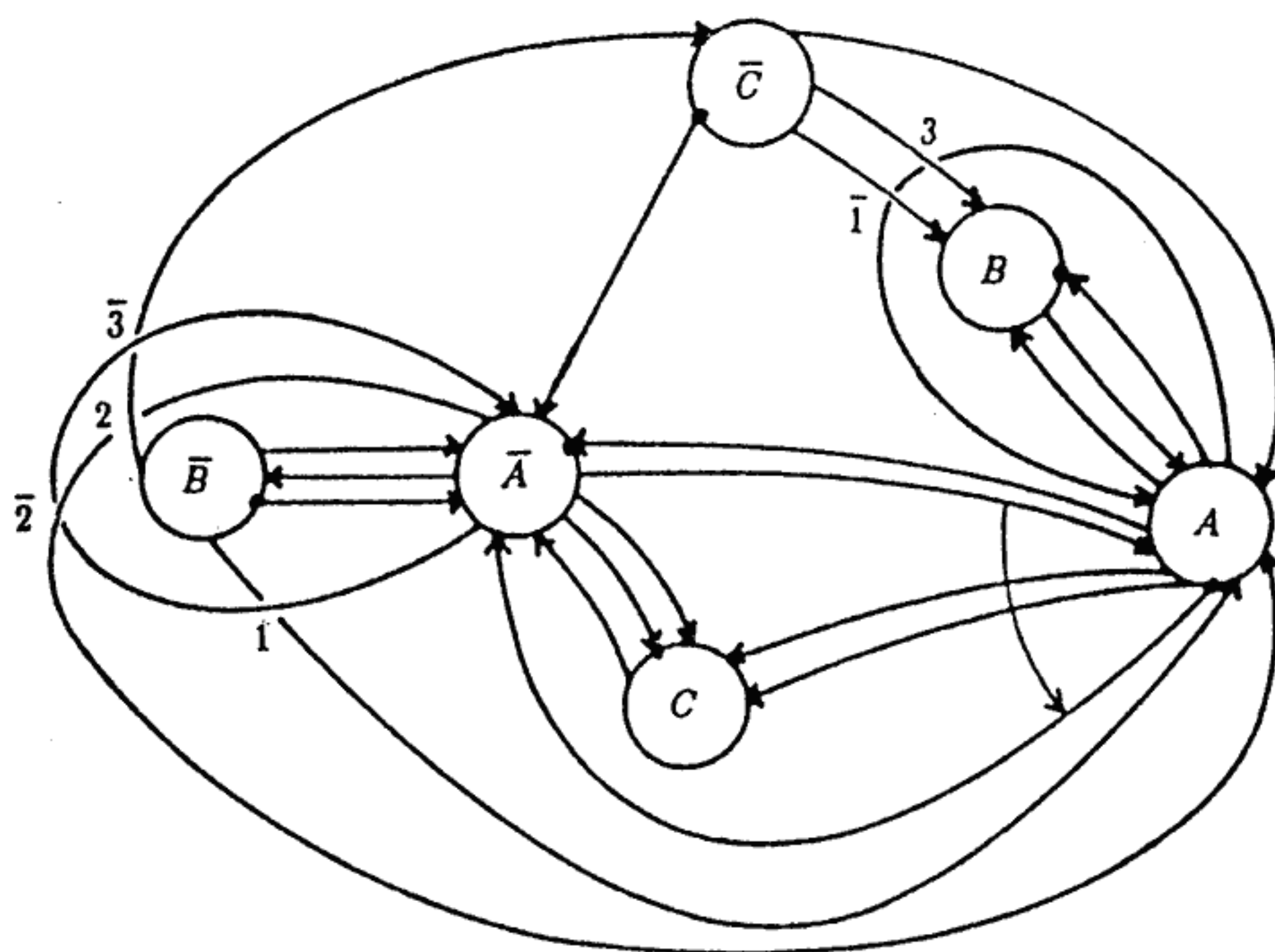


Figura 12

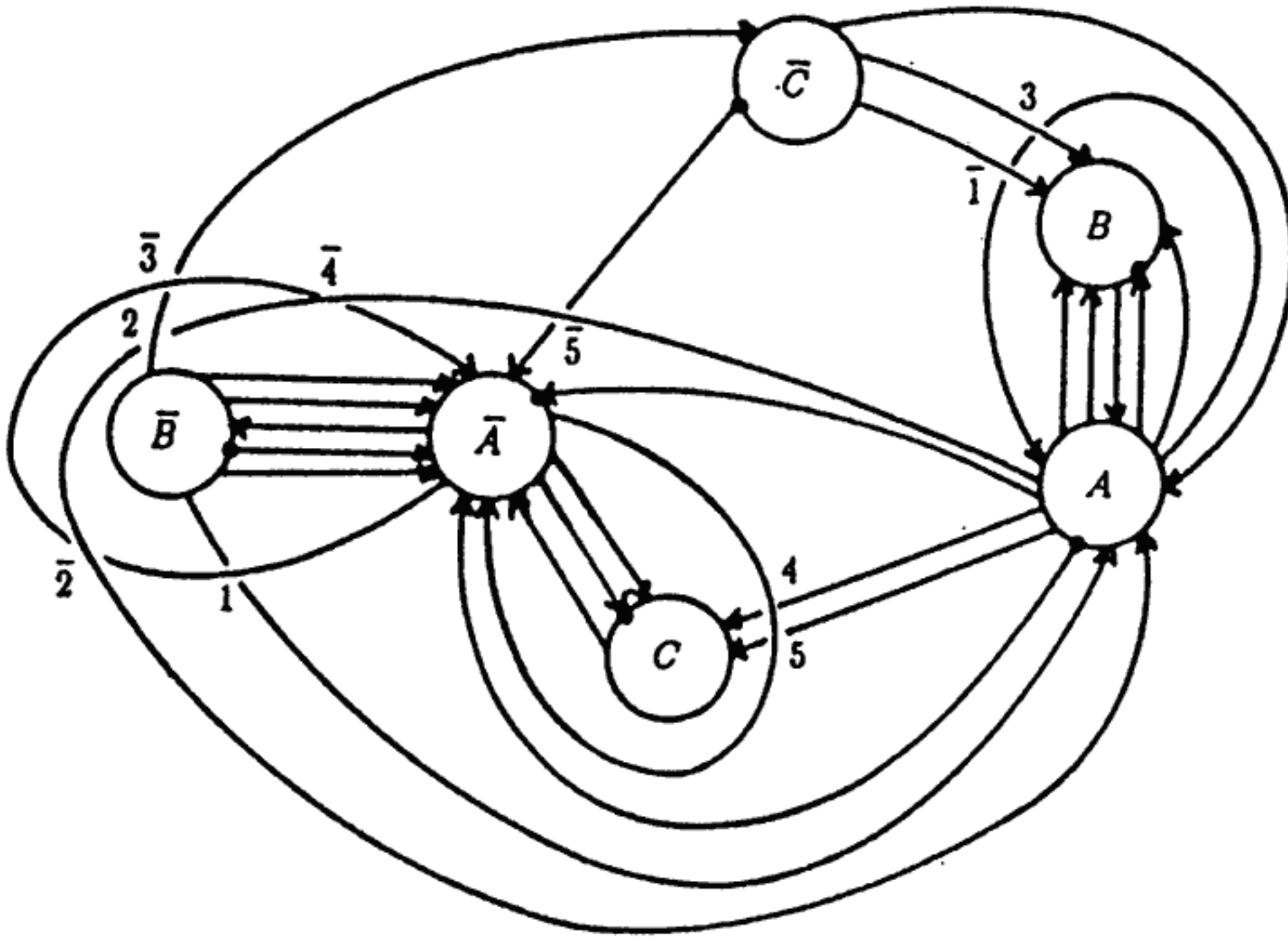


Figura 13

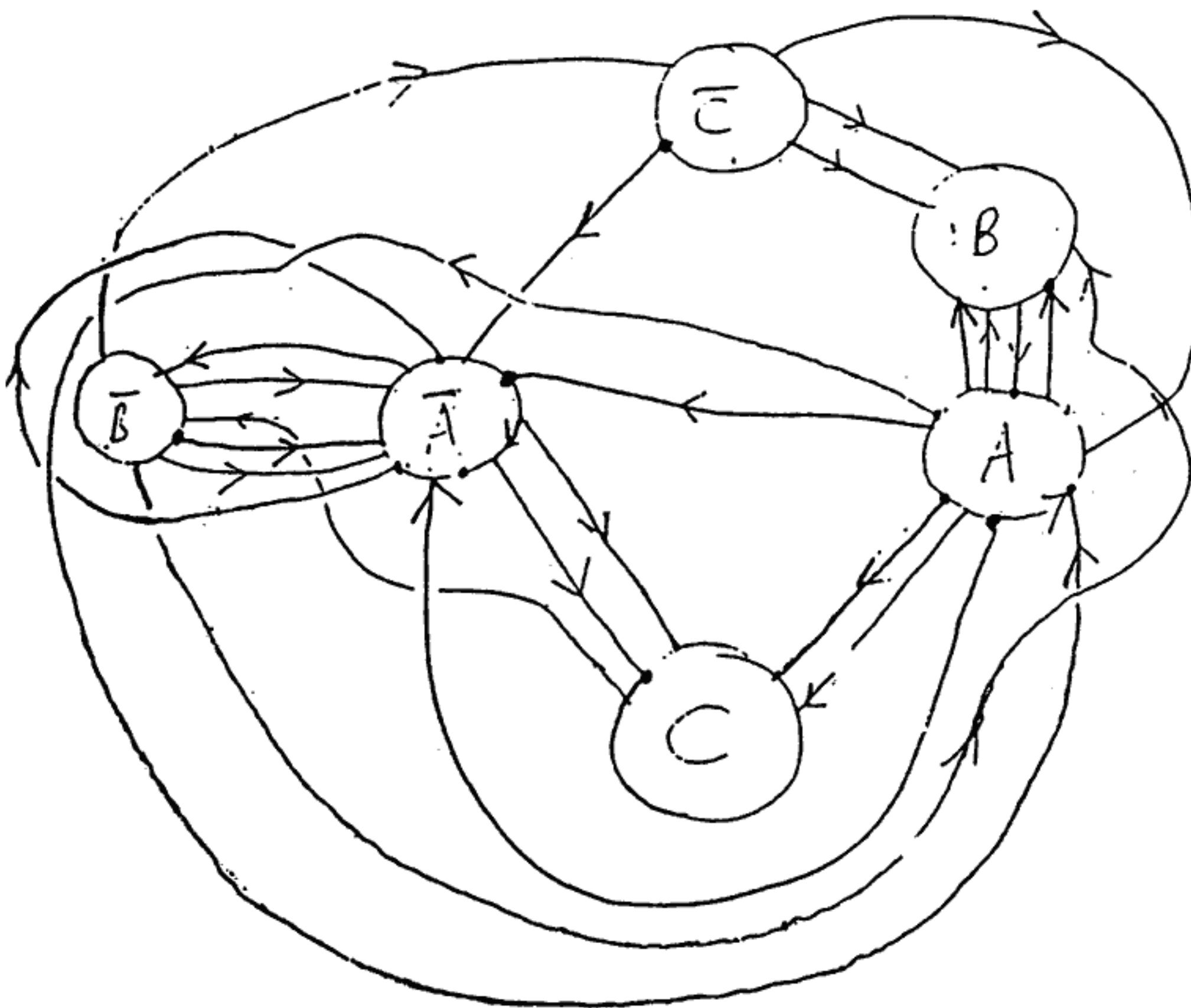


Figura 14



## REFERENCIAS

- [BZ] M. BOILEAU, H. ZIESCHANG, *Heegaard genus of closed orientable Seifert manifolds*, Invent. Math. 76 (1984) 455-468.
- [C] R. CRAGGS, *The Poincaré conjecture is equivalent to a restricted form of the Andrews-Curtis conjecture*, (preprint).
- [C1] R. CRAGGS, *Freely reducing groups reading for 2-complexes in 4-manifolds*, Topology 28 (1989) 247-271.
- [C2] R. CRAGGS, *On links in 3-manifolds as obstructions in free reduction problems*, (preprint).
- [HA] W. HAKEN, *Various aspects of the 3-dimensional Poincaré problem*. *Topology of Manifolds*, Proc. Inst. Univ. of Georgia, Athens. Ga. (1969) 140-152, Markham, Chicago 1970.
- [M1] J.M. MONTESINOS, *Note on a result of Boileau-Zieschang*, Lectures Notes Series of the London Math. Soc., 112 (1986), 241-252.
- [M2] J.M. MONTESINOS, *Heegaard diagrams for closed 4-manifolds*, Geometric Topology, J.C. Cantrell, ed. Proc. Inst. Univ. of Georgia, Athens, Ga, (1977), 219-237, Academic Press, New York (1979).
- [M3] J.M. MONTESINOS, *Género de Heegaard y rango de una 3-variedad*, Libro homenaje a A. Plans Zaragoza (1989).
- [MZ] W. METZLER, *Über den Homotopietyp zweidimensionaler CW-Komplexe und Elementartransformationen bei Darstellungen von Gruppen durch Erzeugende und definierende Relationen*, J. Reine angew. Math. 235 (1976) 7-23.
- [S] J. SINGER, *Three dimensional manifolds and their Heegaard diagrams*, Trans. AMS 35 (1933) 88-111.
- [W] F. WALDHAUSEN, *Some problems on 3-manifolds*, Proc. of Symposia in Pure Math. 32 (1978) 313-322.