Note di Matematica Vol. IX - Suppl., 73-83(1989)

VARIETA' OMOLOGICHE, FIBRATI OMOLOGICI E NUMERI CARATTERISTICI

S. BUONCRISTIANO

1. Nel 1954 Thom ha dimostrato che una varietà C^∞ n-dimensionale chiusa non orientata M è bordo di un'altra varietà C^∞ se e solo se tutti i suoi numeri di Stiefel-Whitney si annullano (cfr. [T]). Equivalentemente, M è un bordo se e solo se l'applicazione classificante il fibrato vettoriale tangente stabile di M, indicata con $\tau_M : M \to B0$, è tale che $(\tau_M)_*|M| = 0$ in $H_n(B0; Z/2)$, dove $B0$ denota la Grassmanniana infinita e $|M|$ la classe fondamentale a coefficienti in $Z/2$.

Nel 1966, Browder, Liulevicius e Peterson (cfr. [B-L-P]) hanno esteso il risultato di Thom a varietà PL. Precisamente, se M è una varietà PL n-dimensionale chiusa, non orientata, allora M è il bordo di una varietà PL se e solo se, con ovvio significato dei simboli, $(\tau_M)_*|M| = 0$ in $H_n(BPL; Z/2)$ dove τ_M classifica il PL fibrato tangente stabile di M.

In [B-S] viene presentata una estensione dei risultati precedenti al caso di varietà omologiche. Sia M una Z-varietà omologica n-dimensionale chiusa non orientata e $\tau_M : M \to BH$ un'applicazione classificante per il fibrato tangente stabile omologico di M secondo Martin e Maunder.

Teorema principale. *M è bordo di una varietà omologica se e solo se $(\tau_M)_*[M] = 0$ in $H_n(BH; Z/2)$.* ∎

La maggior parte di questa relazione è dedicata ad un'esposizione del filo conduttore e delle idee principali che intervengono nella dimostrazione del teorema, rimandando il lettore all'articolo citato per i dettagli dimostrativi che, in alcuni punti, diventano molto tecnici.

Nei paragrafi 2 e 3 diamo tre semplici applicazioni del teorema in oggetto, una di esse riguardante un problema di risoluzione di singolarità nel contesto delle varietà omologiche.

Un poliedro compatto M si chiama una *varietà omologica n-dimensionale*se, per ogni $x \in M$ ed ogni triangolazione K di M avente x come vertice, l'omologia intera del link di x in K coincide con l'omologia (intera) della sfera $(n-1)$-dimensionale S^{n-1} o con quella del punto, $H_*(Link(x,K)) \cong H_*(S^{n-1})$ oppure $H_*(Link(x,K)) \cong H_*$ (punto).

Si ricordi che $Link(x,K)$ è il bordo della stella di x in K, cioè dell'intorno simpliciale di x in K, costituito da tutti quei simplessi di K che ammettono x come vertice. Il *bordo* di M, denotato ∂M, è l'insieme dei punti x di M il cui link ha l'omologia del punto. Si può dimostrare che ∂M è, a sua volta, una varietà omologica $(n-1)$-dimensionale, priva di bordo. Tutto questo risulta essere indipendente dalla triangolazione scelta. Una *sfera omologica* è una varietà omologica avente la medesima omologia (intera) di una sfera; analogamente si definisce un *disco omologico.* Un complesso di celle omologíche è, detto in breve, un complesso di coni le cui basi sono sfere o dischi omologici. La definizione precisa è la seguente: un *complesso di celle omologiche* K su un poliedro X è un ricoprimento $\{C\}$ di X mediante sottopoliedri compatti (le *celle* omologiche), insieme con sottopoliedri $\partial C \subset C$ tali che:

(i) per ogni $C \in K, \partial C$ è unione di elementi di K

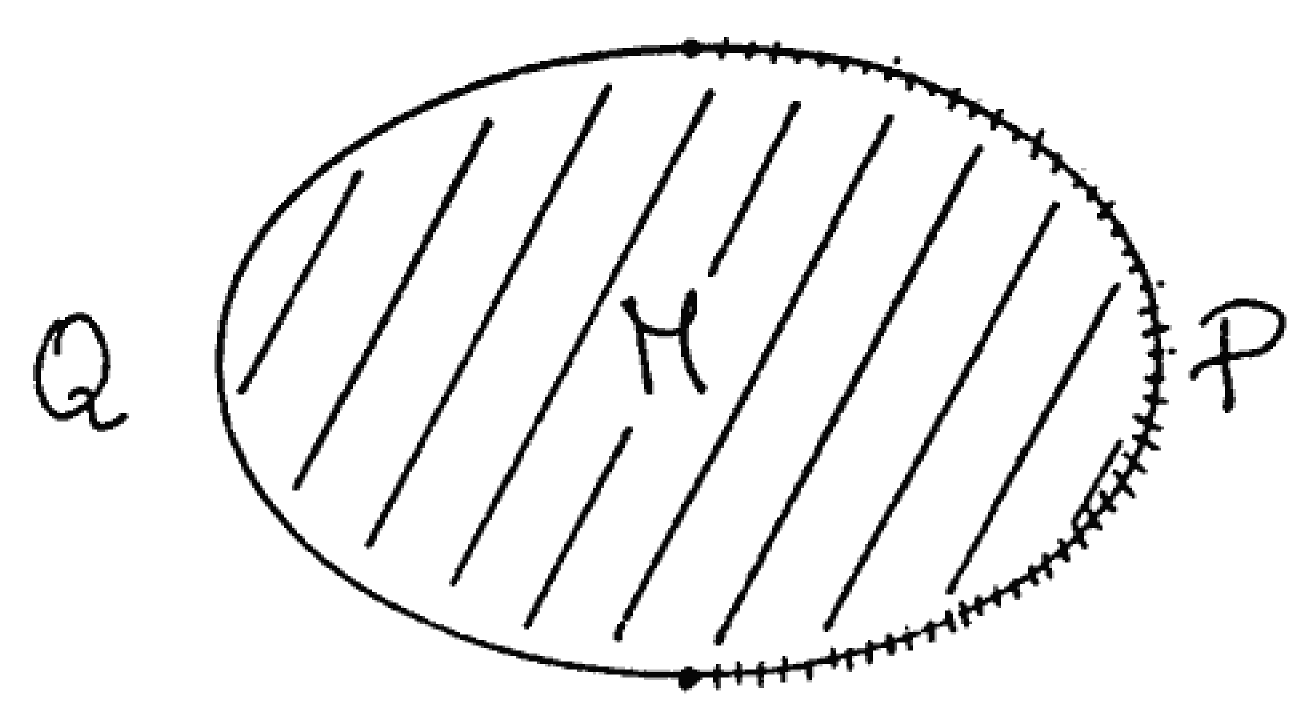
(ii) se C e C' sono elementi distinti di K, allora

$$(C - \partial C) \cap (C' - \partial C') = \phi$$

(iii) ∂C è una sfera omologica o una disco omologico.

Non è restrittivo pensare $|K|$ come sostegno di un complesso simpliciale, nel quale i poliedri C e ∂C siano sottocomplessi simpliciali.

Una *triade* (M, P, Q) consiste in una n-varietà omologica M ed $(n-1)$-varietà omologiche P, Q tali che $\partial M = P \cup Q$ e $\partial P = P \cap Q = \partial Q$.



Un cobordismo tra triadi disgiunte (M_+, P_+, Q_+) e (M_-, P_-, Q_-) è una varietà W insieme con sottovarietà $W(P) W(Q) W(P \cap Q)$ di ∂W tali che

$$\partial W = M_+ \cup M_- \cup W(P) \cup W(Q) \cup W(P \cap Q)$$

$$\partial W(P \cap Q) = P_+ \cap Q_+ \cup P_- \cap Q_-$$

$$\partial W(P) = P_+ \cup P_- \cup W(P \cap Q)$$

$$\partial W(Q) = Q_+ \cup Q_- \cup W(P \cap Q)$$

$$W(P) \cap W(Q) = W(P \cap Q)$$

W si dice un *cobordismo omologico* (di triadi), abbreviato H-cobordismo, se

$$H_*(W, M_\pm) = H_*(W(P), P_\pm) = H_*(W(Q), Q_\pm) = H_*(W(P \cap Q), \partial P_\pm) = 0$$

Si notino i casi in cui una o entrambe le varietà P, Q sono vuote.

Introduciamo ora il concetto di fibrato omologico, di importanza centrale nel seguito.

Sia K un complesso di celle omologiche su X. Sommariamente, dare un D^n-fibrato omologico su K significa dare una varietà omologica (blocco) $E(C)$ per ogni cella C di K, in modo tale che tutte queste varietà omologiche si "attacchino" tra loro come le celle sottostanti ed inoltre sia verificata una condizione di banalità locale che si esprime dichiarando ogni blocco omologicamente cobordante al prodotto $C \times D^n$.

La definizione precisa è la seguente.

Un *fibrato omologico* con fibra D^n su X è costituito da un poliedro E contenente X come sottopoliedro in modo che siano verificate le seguenti proprietà:

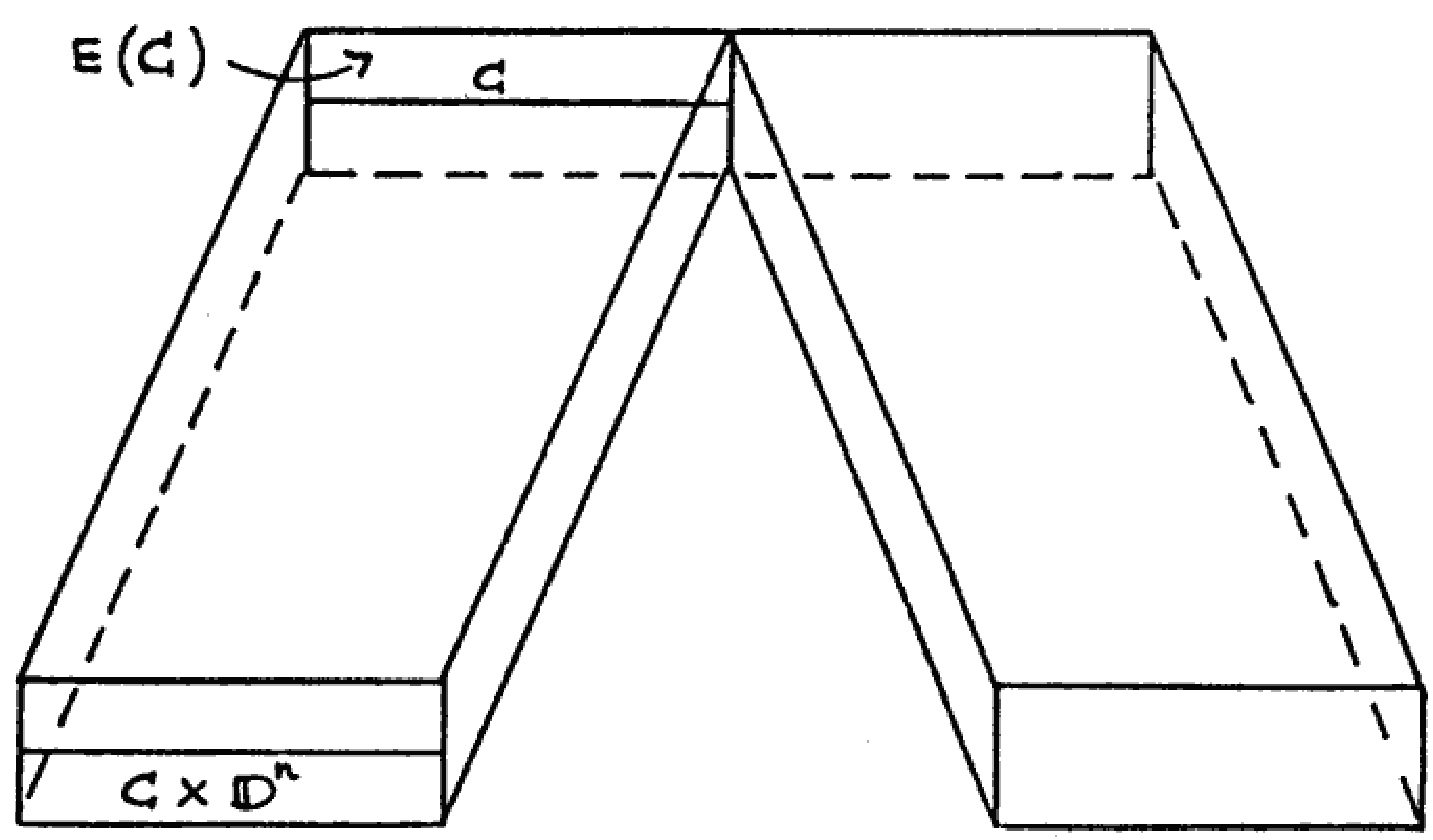
(i) per ogni cella p-dimensionale $C \in K$ è dato un sottopoliedro (*blocco*) $E(C) \subset E$ contenente C che risulta una $(n+p)$-varietà omologica.

(ii) E è l'unione dei blocchi $E(C)$ al variare di C in K.

(iii) Gli interni dei blocchi sono disgiunti.

(iv) $E(C) \cap E(D)$ è l'unione dei blocchi sopra le celle contenute in $C \cap D$.

(v) Per ogni $C \in K$ esiste un H-*cobordismo* $G(C)$ di triadi tra $(E(C), E(\partial C), \overline{\partial E(C) - E(\partial C)})$ e la triade standard $(C \times D^n, \partial C \times D^n, C \times S^{n-1})$. Qui $E(\partial C)$ indica l'unione dei vari blocchi $E(D)$ al variare di D in ∂C.



Notiamo che in generale, nei tipi di fibrati più usati (fibrati vettoriali, fibrati PL, block bondles, microbundles, etc.), siamo abituati a vedere la nozione di locale banalità come un omeomorfismo del tipo appropriato. Qui invece usiamo una nozione a priori molto più generale, che è quella dell' H-cobordismo. Vale allora la pena di osservare che un generico blocco $E(C)$ di un fibrato omologico, essendo una varietà omologica, può ben essere portatore di singolarità intrinseche, mentre il blocco standard $C \times D^n$ non ha singolarità se C è, per esempio, una cella genuina. Questo comporta che, in generale, ben difficilmente esisterà un omeomorfismo PL tra $E(C)$ e $C \times D^n$, laddove un H-cobordismo ha invece la possibilità di cancellare singolarità rivelandosi così, anche per questo motivo, la giusta nozione di locale banalità nel contesto dei fibrati omologici.

In genere le banalizzazioni locali non sono tra loro compatibili, cioè $G(C)$ e $G(C')$ non coincidono sulle celle di $C \cap C'$. Quando questo avviene per qualche scelta dei $\{G(C)\}$ allora si dice che il fibrato omologico è *banale*, o anche *isomorfo al fibrato standard.* Abbiamo così visto la nozione di isomorfismo tra fibrati omologici nel caso particolare in cui uno di essi sia quello standard. E' chiaro, a questo punto, che cosa dovrà intendersi per *isomorfismo* G tra due D^n-fibrati omologici E, F qualsiasi ($G(C) \cap G(D) = \cup G(B)$ con B che varia tra le celle di $C \cap D$).

Martin e Maunder dimostrano il fatto, altamente non banale, che vi è una buona teoria dei fibrati omologici, la quale si può riassumere così: se $k_n(X)$ indica l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati, allora $k_n(X)$ ha una struttura di funtore controvariante rispetto ad applicazioni PL e tale funtore è, inoltre, rappresentabile, cioè naturalmente equivalente a $[X, BH(n)]$, dove $BH(n)$ è lo spazio classificante del Δ-semigruppo simpliciale $H(n)$, nel quale un i-simplesso è un isomorfismo di $\Delta^i \times D^n$ con se stesso (Δ^i è il simplesso standard i-dimensionale): $BH(n)$ viene costruito seguendo un metodo generale dovuto a Rourke e Sanderson [R-S] ed ammette una buona moltiplicazione esterna $\mu : BH(n) \times BH(m) \to BH(m+n)$.

In particolare $k_n(X)$ non dipende dalla cellularizzazione omologica scelta per X, ma solo dal sostegno $|X|$ e vi è una ben definita operazione di somma di Whitney tra fibrati omologici, che risulta invariante per isomorfismo, commutativa, naturale ed associativa. E' dunque possibile stabilizzare un fibrato omologico, ottenendo così l'insieme $k(X)$ delle classi di isomorfismi di fibrati stabili, il quale risulta un funtore omotopico rappresentato da $BH = \lim_n BH(n)$ dove ($BH(n) \subset BH(n+1)$ mediante somma di Whitney con il D^1-fibrato standard).

Martin e Maunder [M-M] dimostrano inoltre che la teoria dei fibrati omologici ha un forte contenuto geometrico rappresentato dal seguente teorema, di difficile dimostrazione.

Teorema dell'intorno tubolare. *Siano $M \subset Q$ varietà omologiche, per semplicità senza bordo. Un intorno regolare di M in Q è un fibrato omologico, unico a meno di isomorfismo.*

In virtù di tale teorema, possiamo parlare di *fibrato normale di M in Q* e, conseguentemente di *fibrato tangente* a una varietà omologica M, il quale si ottiene prendendo $Q = M \times M$ ed M uguale alla diagonale.

Esiste, dunque, una funzione classificante $\tau_M : M^n \to BH(n)$, ben definita a meno di omotopia, per il fibrato tangente di M ed una analoga funzione classificante $\tau_M : M \to BH$ per il fibrato tangente stabile di M.

Ora, M possiede certamente una classe fondamentale a coefficienti in $Z/2$, denotata con $[M] \in H_n(M; Z/2)$, la quale individua un elemento $(\tau_M)_*[M] \in H_n(BH; Z/2)$.

Teorema. *M circonda (cioè è a bordo di una varietà omologica) se e solo se* $(\tau_M)_*[M] = 0$.

Qui ci limitiamo a dare un breve sketch delle idee fondamentali per la dimostrazione di questo teorema, che, come si è detto, costituisce una estensione dell'analogo teorema di Thom per varietà C^∞ e del teorema di Browder et al. per varietà PL.

Primo Ingrediente. Poiché la dimostrazione usa la costruzione della proiettivizzazione di un fibrato, abbiamo bisogno di una teoria dei fibrati omologici $Z/2$-equivarianti, analoga a quella di Martin e Maunder.

La definizione di fibrato omologico $(Z/2)$*-equivariante (o con* $Z/2$ *-azione)* è facile da formularsi. Basta richiedere che lo spazio totale sia dotato di una $Z/2$-azione semilibera con insieme dei punti fissi costituito esattamente dalla base X. Si richiede inoltre che tale azione muti in sé ciascun blocco $E(C)$ e che ciascun H-cobordismo $G(C)$ (banalizzazione locale) abbia anche esso un'azione di $Z/2$ che si restringa all'azione data su $E(C)$ e all'azione antipodale su $C \times D^n$.

Con questa definizione, ripercorrendo, con le ovvie modifiche, le argomentazioni di Martin e Maunder, si arriva a stabilire senza difficoltà l'esistenza di uno spazio classificante $BH(Z/2, n)$ per fibrati omologici equivarianti con fibra D^n, avente proprietà del tutto analoghe a quelle di $BH(n)$.

Vi è, inoltre, una applicazione naturale $F_n : BH(Z/2, n) \to BH(n)$, che corrisponde a dimenticare l'azione di $Z/2$.

Per stabilizzazione, si ottengono poi $BH(Z/2)$ e $F : BH(Z/2) \to BH$. A questo punto sorge il seguente problema. E' possibile dotare di una struttura equivariante (cioè porre un'azione di $Z/2$) il fibrato tangente TM di una varietà omologica?

Una prima considerazione sembrerebbe dare risposta affermativa a questa domanda. Infatti, ricordando che TM non è altro che un intorno regolare della diagonale Δ in $M \times M$ e che su $M \times M$ vi è l'ovvia azione semilibera, $T(x, y) = (y, z)$, che scambia i fattori, basterà triangolare $M \times M$ in modo che Δ sia un sottocomplesso e che l'azione T sia simpliciale per ottenere una decomposizione dell'intorno simpliciale di Δ in blocchi equivarianti (tali blocchi non sono altro che i complessi duali dei simplessi della triangolazione di Δ).

Tuttavia tale costruzione non rende TM un fibrato equivariante, poiché non assicura l'esistenza di banalizzazioni locali anch'esse equivarianti.

Non sembra esserci alcun motivo per ritenere che tali banalizzazioni esistano sempre, cioè che il fibrato tangente di M sia equivariante.

Questa difficoltà viene aggirata (in un modo sufficiente per i nostri scopi) stabilizzando. Precisamente, si può dimostrare il

Teorema. *Il fibrato tangente stabile di M è equivariante.* ∎

Tale teorema si generalizza dando luogo al *Secondo Ingrediente.* Esiste una sezione (splitting) $S : BH \to BH(Z/2)$ dell'applicazione naturale $F : BH(Z/2) \to BH$. In altri termini, ogni fibrato omologico è stabilmente equivariante. La dimostrazione è mutuata da [Mann-Miller], dove viene considerato il caso, più semplice, dei fibrati PL. Brevemente, sia E un fibrato omologico di base X ed N un intorno regolare di X in qualche spazio euclideo, $p: N \to X$ la proiezione. Allora, con ovvio significato dei simboli:

$$T(p^*E)|_X = (TN|_X) \oplus E = E \oplus \quad (fibrato\ banale)$$

poiché N è parallelizzabile per costruzione e quindi TN è banale. D'altronde, per il teorema precedente, $T(p^*E)$ è stabilmente equivariante. Questo conclude la dimostrazione e definisce S a livello di spazi classificanti, procedendo per induzione sugli scheletri.

Sorge allora la domanda: se si parte da un fibrato omologico E, già esso stesso equivariante e si pone sulla sua stabilizzazione l'azione sopra descritta, si riottiene così la (stabilizzazione della) azione data su E? In generale questo non sarà vero, ma nel caso particolare in cui E coincida con il fibrato tangente di una varietà, dalla costruzione di sopra, non è difficile convincersi che proprio così accade. Questo fatto si può sintetizzare dicendo che la composizione

$$M \xrightarrow{\tau_M} BH \xrightarrow{S} BH(Z/2)$$

classifica il fibrato tangente stabile equivariante di M. Chiamiamo $\tau_M(Z/2)$ tale composizione. Allora il nostro teorema principale è ricondotto al seguente

Teorema. *M circonda se e solo se $\tau_M(Z/2)_*|M| = 0$ in $H_n(BH(Z/2), Z/2)$.*

Infatti, $\tau_M(Z/2)_* = (S\tau_M)_* = S_*(\tau_M)_*$ ed S_* è un monomorfismo. ∎

Il senso di tutto questo è che, per dimostrare il teorema, basta farlo in $BH(Z/2)$, anziché in BH. Poiché questo semplifichi le cose dovrebbe apparire chiaro tra poco.

Terzo Ingrediente. Completamento della dimostrazione del teorema. Innanzitutto, in base a quanto appena stabilito, si prende in considerazione il fibrato tangente stabile equivariante di M e si lavora con questo in $BH(Z/2)$. La dimostrazione consiste in un procedimento di "dragging down" della funzione $\tau_M(Z/2)$ lungo gli scheletri di $BH(Z/2)$, seguito da una costruzione di trasversalità. E' sufficientemente complicata perché non giovi qui anche tentare di sintetizzarla, per cui il lettore interessato è rimandato a [B - H].

Più utile mi sembra, invece, considerare in dettaglio un caso particolare importante: quello in cui la nostra varietà M sia stabilmente parallelizzabile in senso equivariante, cioè $\tau_M(Z/2)$ sia omotopa a un'applicazione costante. Senz'altro una tale M comporta un $\tau_M(Z/2)_*|M|$ nullo e quindi deve risultare che M sia un bordo. Dimostriamolo, supponendo $n = dim M > 0$.

Il fibrato tangente stabile equivariante di M si presenta come l'intorno tubolare equivariante di $\Delta M \times \{0\}$ in $P = M \times M \times D^{\alpha-n+1}$ con α sufficientemente grande. Rimuoviamo l'interno di tale intorno tubolare e sia $\dot{N}$ la sua frontiera. Per l'ipotesi fatta su $M, \dot{N}$ è una varietà omologica cobordante a $M \times S^\alpha$ mediante un cobordismo W con azione libera di $Z/2$, che si restringe alle due azioni date su $\dot{N}$ e $M \times S^{\alpha-n}$. Sia $\widehat{P} = (P - Int N) \cup_{\dot{N}} W$. Per costruzione $\widehat{P}$ è una varietà omologica con un'azione libera θ di $Z/2$ e inoltre

$$\partial\widehat{P} = \partial P \sqcup (M \times S^\alpha).$$

Quozientando per θ otteniamo una varietà omologica Q con bordo $\partial Q = M \times P^{\alpha-n} \sqcup (M \times M \times S^{\alpha-n})/\theta$ (P indica spazio proiettivo). Sia $f : Q \to P^\beta$ (β grande) una applicazione classificante per l'involuzione θ. Poiché le proiezioni $M \times M \times S^{\alpha-n} \to S^{\alpha-n}$ e $M \times S^\alpha \to S^\alpha$ sono θ-equivarianti, e $n > 0$, possiamo assumere, a meno di omotopia, che $f((M \times M \times S^{\alpha-n})/\theta) \subseteq P^{\alpha-1} \subset P^\beta$ e $f|M \times P^\alpha$ sia la proiezione su $P^\alpha \subset P^\beta$. Ora prendiamo un sottospazio proiettivo complementare $P_1^{\beta-\alpha}$ che intersechi P^α trasversalmente in un punto e tale che $P_1 \cap P^{\alpha-1} = \phi$ e notiamo che $f|\partial Q$ è trasversa a P_1 con antimmagine M. Allora rendiamo f trasversa a P_1 modulo ∂Q in modo da avere una varietà omologica $f^{-1}(P_1)$ con bordo $f^{-1}(P_1 \cap P^\alpha) = M$. Quindi M circonda una varietà omologica come volevasi dimostrare.

2. BORDISMO DI VARIETA' OMOLOGICHE E DI VARIETA' TOPOLOGICHE TRIANGOLATE

Se nella definizione di cobordismo tra triadi (M, P, Q) prendiamo $P = Q = \phi$, otteniamo la nozione di bordismo tra varietà omologiche chiuse non orientate. Tale nozione generalizza quella di bordismo nella categoria delle varietà differenziabili e si vede facilmente essere una relazione di equivalenza. Indichiamo con Ω_n^H l'insieme delle classi di bordismo di varietà omologiche chiuse n-dimensionali. Lo *zero* è la classe $\{\phi\}$, cosicché $\{M\} = 0$ se e solo se M circonda una varietà. Qui $\{-\}$ indica classe di bordismo. In Ω_n^H possiamo introdurre, come al solito, un'operazione di somma + mediante l'unione disgiunta dei rappresentanti, cioè $\{M\} + \{N\} = \{M \sqcup N\}$. Con queste posizioni si verifica subito che la somma è ben posta e rende Ω_n^H un gruppo, nel quale l'elemento neutro è dato dalla classe zero, mentre l'inverso di un elemento è l'elemento stesso.

Ω_n^H dicesi il *gruppo di bordismo di Thom delle varietà omologiche n-dimensionali non orientate.*

Ciò posto, sia $t : \Omega_n^H \to H_n(BH; Z/2)$ la cosiddetta "applicazione di Hurewicz", che associa a $\{M\}$ l'elemento $(\tau_M)_*|M|$. Si vede subito che t è un omomorfismo ben posto e che il teorema principale da noi dimostrato si può rienunciare in un modo equivalente, affermando che t è *un monomorfismo.*.

Ora, una *TRI-varietà n-dimensionale* è una varietà topologica triangolata, cioè un complesso simpliciale K, il cui sostegno $|K|$ è una varietà topologica n-dimensionale.

Si dimostra in [G - S] 1.2 che una TRI-varietà è una varietà omologica e pertanto si ha un'applicazione naturale tra i rispettivi gruppi di bordismo $F : \Omega_n^{TRI} \to \Omega_n^H$, dove Ω_n^{TRI} è definito nel modo ovvio. Dai risultati di [G-S] segue che F è un monomorfismo per $n \geq 5$ e un epimorfismo per $n \geq 6$ (cfr. anche [Q]), cosicché la composizione

$$\Omega_n^{TRI} \xrightarrow{F} \Omega_n^H \to H_n(BH; Z/2)$$

è un monomorfismo per $n \geq 5$, il che mette in luce il fatto che anche le varietà topologiche triangolate sono determinate, a meno di bordismo, da numeri caratteristici coomologici. Non solo, ma in modo del tutto analogo al caso dei fibrati omologici si possono definire i *fibrati topologici triangolati* (con fibra D^n), richiedendo che ciascun blocco $E(C)$ sia una varietà topologica triangolata e che una banalizzazione locale sia un omeomorfismo (topologico) tra $(E(C), C)$ e il cono sulla coppia di sfere standard. Poi, un fibrato topologico triangolato con fibra D^n si può considerare con fibra D^{n+1} semplicemente prendendo il prodotto dello spazio totale con $D^1 = [-1, 1]$.

Usando il teorema di h-cobordismo e la congettura di Poincaré generalizzata, insieme con il celebre teorema di Edwards sulla doppia sospensione di una PL sfera omologica, Galewski e Stern dimostrano in [G - S] 2.2 che lo spazio classificante dei D^n-fibrati topologici triangolati, scritto $BTRI(n)$ e costruito con le solite tecniche semisimpliciali, è omotopicamente equivalente allo spazio classificante $BH(n)$ di Martin e Maunder, purché $n \geq 6$. In particolare, stabilmente $BTRI \approx BH$.

3. UN'APPLICAZIONE ALLA RISOLUZIONE DI SINGOLARITA'

Se X è uno spazio topologico qualsiasi, il *gruppo di bordismo n-dimensionale* $\Omega_n^H(X)$ si costruisce come nel caso differenziabile o PL, usando come prototipi varietà omologiche non orientate in luogo di varietà differenziabili o PL. Dunque $\Omega_n^H(X)$ non è altro che applicazioni continue di varietà omologiche (chiuse) $f : M^n \to X$ modulo la solita relazione di bordismo.

$\Omega_n^H(X, A)$ si definisce analogamente, partendo da varietà con bordo $f : M, \partial M \to X, A$ modulo la relazione di bordismo relativo. Non è difficile verificare che le varietà omologiche posseggono sufficienti proprietà affinché $\Omega_n^H(X, A)$ dia luogo a una teoria omologica generalizzata. La più importante di tali proprietà è quella che assicura la validità dell'assioma di escissione e suona così: se $f : M \to K$ è un'applicazione simpliciale da una varietà omologica M a un complesso simpliciale K, allora $f^{-1}(x)$ è anch'esso una varietà omologica, purché x sia nell'interno di un simplesso di K avente dimensione massima.

Una classe di bordismo $\{f : M, \partial M \to X, A\}$ sarà spesso denotata semplicemente con $\{f\}$. Per una qualsiasi coppia topologica X, A consideriamo l'applicazione $t : \Omega_*^H(X, A) \to H_*(X \times BH, A \times BH)$, la quale associa all'elemento $\{f : M, \partial M \to X, A\}$ l'elemento $(f, \tau_M)_*|M|$, dove (f, τ_M) è la composizione

$$M \xrightarrow{\Delta} M \times M \xrightarrow{f \times \tau_M} X \times BH.$$

Come già osservato nel paragrafo precedente, il teorema principale afferma che $t : \Omega_*$ (punto) $\to H_*(BH)$ è un monomorfismo.

Lemma. *Sia X un CW complesso e $\{f\} \in \Omega_n(X^k)$. Se $\{f\}$ va a zero in $\Omega_n(X)$, allora $\{f\}$ va a zero in $\Omega_n(X^{k+1})$.*

(Qui X^k denota ovviamente il k-scheletro di X).

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega_n(X) \arrow[r, "t"] & H_n(X \times BH) \arrow[r] & H_n(X \times BH, X^{k-1} \times BH) \\
\{f\} \arrow[d] & \Omega_n(X^k) \arrow[u] \arrow[d] & & \\
C(f) \arrow[rrr, bend right=60, "\varphi"'] & \Omega_n(X^k, X^{k-1}) \arrow[r, dash] & H_n(X^k \times BH, X^{k-1} \times BH) \arrow[uur] & H_k(X, X^{k-1}) \otimes H_{n-k}(BH) \arrow[uu, "\text{mono } (Kunneth)"'] \\
 & \Omega_k(X^k, X^{k-1}) \otimes \Omega_{n-k} \arrow[u, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & H_k(X^k, X^{k-1}) \otimes H_{n-k}(BH) \arrow[u, "\times"'] & H_k(X^{k+1}, X^k) \otimes H_{n-k}(BH) \arrow[u] \\
 & & H_k(X^k, X^{k-1}) \otimes \Omega_{n-k} \arrow[u, "1 \otimes t"'] \arrow[r, dash] & H_k(X^{k+1}, X^{k-1}) \otimes \Omega_{n-k} \arrow[u, "1 \otimes t"']
\end{tikzcd}$$

Lasciamo al lettore stabilire che, per dimostrare il lemma, basta provare che $C(f)$ appartiene al nucleo del morfismo φ tra $\Omega_n(X^k, X^{k-1})$ e $H_k(X^{k+1}, X^{k-1}) \otimes \Omega_{n-k}$. (Si verifichi che, se $C(f)$ appartiene a tale nucleo, allora $i_*\{f\} \in Im\Omega_n(X^k)$, dove $i : X^k \subset X^{k+1}$ è l'inclusione e si proceda poi per induzione decrescente fino a $k = 0$).

Poiché tutti i morfismi verticali all'estrema destra sono monomorfismi, basta allora assicurarci che $C(f)$ va in zero in $H_n(X \times BH, X^{k-1} \times BH)$. Ma questo è vero, considerando la parte superiore del diagramma, dal momento che per ipotesi $\{f\}$ va in zero in $\Omega_n(X)$. ∎

Sia P una pseudovarietà $(n+1)$-dimensionale con singolarità SP, di dimensione k, tale che $P - SP$ risulti una varietà omologica non orientata (non compatta in generale).

Definizione. Un *Blow-up generalizzato di P di rango $k+1$* è una applicazione PLf : $M \to P$ per la quale siano verificate le seguenti proprietà:

(i) M è una varietà omologica ottenuta unendo lungo il bordo comune altre due varietà omologiche M_1, M_2, cioè $M = M_1 \cup_\partial M_2$

(ii) $dim f(M_1) \leq k+1$

(iii) f si restringe a un isomorfismo PL tra $Int M_2$ e $P - SP$.

Teorema. *Data comunque P esiste un blow-up generalizzato di rango $k+1$.*

Dimostrazione. Si prenda $M_2 = P - Int N$ dove N è un intorno regolare di SP in P; $\partial M_2 = \dot{N}$ è una varietà omologica n-dimensionale e possiamo assumere che $f|\partial M_2$ sia la proiezione $\dot{N} \to SP$. Basta allora dimostrare che $f|\partial M_2$ è bordante a zero nello scheletro $(k+1)$-dimensionale di una qualsiasi triangolazione di (P, SP). Ma questo segue immediatamente dal Lemma precedente assumendo lì $X = P$ e $\{f\} = \{f|\partial M_2\}$. ■

Come ultima cosa, applichiamo alle varietà omologiche (non orientate) un argomento dovuto a Gottlieb per varietà differenziabili, riguardante il "transfer" parziale.

Sia $f : M \to N$ un'applicazione PL tra varietà omologiche connesse chiuse e sia F la fibra di f. Con questo intendiamo quanto segue. Triangoliamo $f : M \to N$ e poniamo $F = f^{-1}(x)$, dove x è un qualsiasi punto interno a un simplesso di dimensione massima di N. Un semplice calcolo dimostra che $f^{-1}(x)$ è una varietà omologica di dimensione $m-n$, dove $m = dim M, n = dim N$ ed inoltre le coordinate baricentriche intorno as x forniscono una banalizzazione del fibrato normale di $f^{-1}(x)$ in M. Al variare di x varierà il tipo di PL isomorfismo di $f^{-1}(x)$, ma è un piacevole esercizio dimostrare che la classe di bordismo resta invariata e non dipende dalle triangolazioni scelte.

Nella terminologia, confonderemo F con la classe di bordismo $\{f^{-1}(x)\}$ e la chiameremo la *fibra di f*.

Il teorema che vogliamo stabilire è il seguente

Teorema. *Se la fibra F non è la classe nulla, allora $f_* : H_q(M) \to H_q(N)$ è suriettiva per ogni q (coefficienti $Z/2$).*

Dimostrazione. Per ipotesi, $(\tau_F)_*|F| \neq 0$ in $H_{m-n}(BH)$ e pertanto esiste una classe $\gamma \in H^{m-n}(BH)$, tale che $\langle \tau_F^* \gamma, [F] \rangle = 1$ (prodotto di Kronecker). Consideriamo allora $\tau_M^* \gamma$ e $\tau_M^*(\gamma) \cap |M| = a$. Usando il fatto che $f^{-1}(x)$ ha fibrato normale banale in M, non è difficile verificare che $\underline{a}$ interseca ciascuna fibra $f^{-1}(x)$ omologicamente in un punto e pertanto $f_*(a) = |N|$. Sia ora $x \in H_q(N)$ e $y = (\cap|N|)^{-1}(x)$. Affermo che la classe $a \cap f^*(y)$ viene mandata in x tramite f_*, dimostrando così che la f_* è suriettiva.

Infatti $f_*(a \cap f^*(y)) = f_*(a) \cap y = |N| \cap y = (\cap|N|) \circ (\cap|N|)^{-1} x = x$ come volevasi dimostrare. ■

Naturalmente, essendo a coefficienti in $Z/2$, abbiamo equivalentemente che $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ è un monomorfismo.

BIBLIOGRAFIA

[B-L-P] W. BROWDER, A. LIULEVICIUS, F. PETERSON, *Cobordism Theories*, Ann. of Math. 84 (1966), 91-101.

[B-H] S. BUONCRISTIANO, D. HACON, *Characteristic numbers for homology manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[G-S] D.E. GALEWSKI, R.J. STERN, *Classification of simplicial triangulations of topological manifolds*, Ann. of Math. 111 (1980), 1-34.

[Q] A. QUINTERO, *Algunos Resultados sobre el bordismo de varedades de homologia*, Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Tomo LXXXI, cuad. 1 (1987), 73-85.

[M-M] N. MARTIN, C.R.F. MAUNDER, *Homology Cobordism Bundles*, Topology 10 (1971), 93-110.

[M] C.R.F. MAUNDER, *On the Pontryagin classes of homology manifolds*, Topology 10 (1971), 111-118.

[Mann-Miller] B.M. MANN, E.I. MILLER, *On Mapping Tori and Projective Bundle constructions in PL Cobordism*, Indiana Univ. Math. J., 31 (1982), 225-271.

[R-S] C.P. ROURKE, B.J. SANDERSON, Δ *-Sets I, II*, Quarterly J. Math. Oxford 22 (1971).

[T] R. THOM, *Quelques proprietés globales des variétés differentiables*, Comm. Math. Helv. 28 (1954), 17-86.

Sandro Buoncristiano
Dipartimento di Matematica
2ª Università
Via Fontan. di Carcaricola
00133 Roma