Note di Matematica Vol. IX - Suppl., 59-71(1989)

SU ALCUNI PROBLEMI COMUNI ALL'ANALISI E ALLA GEOMETRIA

E. DE GIORGI

INTRODUZIONE

In questa conferenza indicherò rapidamente un gruppo di problemi che, a mio avviso, meritano l'attenzione sia degli studiosi di Geometria che degli studiosi di Analisi e che potrebbero costituire un'interessante occasione di collaborazione tra gli studiosi di queste due discipline. Per comodità degli ascoltatori presenterò questi problemi in forma il più possibile autosufficiente anche se penso che alcuni degli argomenti trattati siano ben noti ad una parte dei presenti.

1. PROBLEMI DI PARTIZIONE. AMMASSI DI BOLLE DI SAPONE

In questi anni vi sono state in molti campi dell'Analisi e della Geometria tra loro apparentemente lontani ricerche in cui interviene la nozione di misura di Hausdorff e penso che ormai a tale misura spetti un ruolo privilegiato tra le varie misure geometriche finora proposte. In questa prima parte della mia conferenza ricorderò qualcuna delle prime proprietà di questa misura rinviando chi desidera informazioni più ampie al classico trattato di H. Federer [FH].

Indichiamo con $\mathscr{A}(\mathbb{R}^n)$ la famiglia degli aperti di $\mathbb{R}^n$ e per ogni $h \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^h, \rho > 0$, indichiamo con $B_\rho(x)$ la sfera $\{y \in \mathbb{R}^h; |y-x| < \rho\}$, e con ω_h la usuale misura di $B_1(x)$.

Infine, χ_E denoterà la funzione caratteristica dell'insieme E.

Definizione 1.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\mathscr{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Definiamo misura di Borel regolare una applicazione $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che*

1) *μ è numerabilmente subadditiva, cioè per ogni successione $(E_i)_i$ di sottoinsiemi di X risulta*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i);$$

2) *i boreliani di X sono misurabili secondo Carathéodory, cioè per ogni boreliano $B \subset X$ risulta*

$$\mu(E) = \mu(E \cap B) + \mu(E \setminus B)$$

per ogni $E \subset X$;

3) *per ogni $E \subset X$ risulta*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(B); \quad E \subset B, B \text{ boreliano}\}.$$

Definizione 1.2. *Sia* (X,δ) *uno spazio metrico, e sia* $h > 0$ *un numero reale. Definiamo la misura di Hausdorff* h*-dimensionale rispetto alla distanza* δ *ponendo per ogni* $E \subset X$

$$\mathscr{H}^h_\delta(E) = \omega_h \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{diamE_i}{2} \right)^h ; E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, diamE_i < \epsilon \right\} \right],$$

ove $diamE = \sup\{\delta(x,y); x, y \in E\}$, *e* $\omega_h = (2\Gamma(1/2)^h)/(h\Gamma(h/2))$, *essendo* $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ *per* $0 < s < +\infty$.

(Per h intero positivo si ritrova la misura della sfera unitaria).

Definiamo inoltre $\mathscr{H}^0_\delta$ come la misura che *conta i punti*, cioè

$$\mathscr{H}^0_\delta(E) = \begin{cases} \textit{numero degli elementi di } E & \text{se E e' finito} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$ rispetto alla distanza euclidea saranno, come è usuale, denotate semplicemente con $\mathscr{H}^h$.

Valgono i seguenti ben noti risultati.

1. Per $h \geq 0$ la misura $\mathscr{H}^h_\delta$ è una misura di Borel regolare.

2. Se (X,δ) è $\mathbb{R}^n$ munito della distanza euclidea allora $\mathscr{H}^n$ coincide con la misura esterna di Lebesgue n-dimensionale. Inoltre, per ogni h, la misura $\mathscr{H}^h$ è invariante per traslazioni e per ogni $r > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$ si ha $\mathscr{H}^h(rE) = r^h \mathscr{H}^h(E)$.

3. Se $0 < \mathscr{H}^h_\delta(E) < +\infty$ allora $\mathscr{H}^k_\delta(E) = 0$ per ogni $k > h$ e $\mathscr{H}^k_\delta(E) = +\infty$ per ogni $k < h$.

Notiamo anche che la misura $\mathscr{H}^h$ coincide con ogni ragionevole definizione di misura h-dimensionale sulle sottovarietà regolari h-dimensionali di $\mathbb{R}^n$.

Alla luce del precedente risultato 3 ha senso porre la seguente

Definizione 1.3. *Si dice dimensione di Hausdorff dell'insieme* E *contenuto nello spazio metrico* (X,δ) *il numero reale*

$$\dim_{\mathscr{H}}(E) = \inf\{h \geq 0; \mathscr{H}^h_\delta(E) = 0\}.$$

Richiamiamo infine la definizione di insieme rettificabile data in [FH].

Definizione 1.4. *Sia* (X,δ) *uno spazio metrico, e siano* $E \subset X, h \in \mathbb{N}$.

Diciamo che E *è* h*-rettificabile se esiste una funzione lipschitziana che applica un insieme limitato di* $\mathbb{R}^h$ *su* E.

Diciamo che E è numerabilmente h-rettificabile se E è unione numerabile di insiemi h-rettificabili.

Diciamo che E è numerabilmente $(\mathscr{H}^h_\delta, h)$-rettificabile se esiste un insieme numerabilmente h-rettificabile F tale che $\mathscr{H}^h_\delta(E \backslash F) = 0$.

Diciamo che E è $(\mathscr{H}^h_\delta, h)$-rettificabile se E è numerabilmente $(\mathscr{H}^h_\delta, h)$-rettificabile e $\mathscr{H}^h_\delta(E) < +\infty$.

Vale la seguente caratterizzazione dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ numerabilmente $(\mathscr{H}^h, h)$-rettificabili.

Teorema 1.5. *Un sottoinsieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è numerabilmente $(\mathscr{H}^h, h)$-rettificabile se e solo se esiste una successione $(S_i)_i$ di varietà h-dimensionali di classe C^1 tale che*

$$\mathscr{H}^h \left(E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) = 0 .$$

Ricordiamo infine che vale la seguente formula dell'area.

Teorema 1.6. *Siano $h, n \in \mathbf{N}$ con $h \leq n$, sia $A \subset \mathbf{R}^h$ un aperto e $f \in (C^1(A))^n$. Detta $J(f)$ la matrice jacobiana di f e $J(f)^*$ la sua trasposta, risulta*

$$\int_A \sqrt{\det(J(f)^* J(f))}\, dy = \int_{\mathbf{R}^n} \mathscr{H}^0(f^{-1}(x))\, d\mathscr{H}^h(x) .$$

Se f è una corrispondenza biunivoca ritroviamo le formule usuali che danno la lunghezza di una curva, l'area di una superficie, ecc. Osserviamo inoltre che invece di una funzione f di classe C^1 si può considerare una funzione f lipschitziana. In tal caso la matrice jacobiana è definita in quasi tutti i punti di A e vale ancora la stessa formula.

Usando la misura di Hausdorff si possono formulare molti problemi interessanti sia per il Calcolo delle Variazioni, sia per la Geometria, sia per la Fisica Matematica. Come esempio indicherò alcuni problemi di partizione ispirati liberamente dalla considerazione di ammassi di bolle di sapone (cfr. [AT]). Pensando alle configurazioni di equilibrio di un ammasso costituito da un numero fissato di bolle di sapone di volumi assegnati ci si può porre il seguente

Problema 1.7 Dati $\nu \in \mathbf{N}$ e $a_1, \ldots, a_\nu$ numeri reali positivi, ricercare il

$$\min \left\{ \mathscr{H}^{n-1} \left(\bigcup_{i=1}^{\nu} \partial A_i \right) ; A_i \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n), \mathscr{H}^n(A_i) = a_i, A_i \cap A_j = \emptyset \right\} .$$

L'esistenza di tale minimo è stata provata, insieme con molti altri risultati, da F.J. Almgren in [AF]; per quanto riguarda la regolarità dei minimi F.J. Almgren ha dimostrato che i bordi degli insiemi A_i minimizzanti sono ipersuperficie analitiche a meno di insiemi di misura $\mathscr{H}^{n-1}$ nulla. Nel caso $n = 3$ J.E. Taylor (cfr. [TJ]) ha ottenuto una completa classificazione delle singolarità ammissibili, mentre per $n > 3$ il problema della classificazione delle singolarità sembra ancora aperto (il caso $n = 2$ si può discutere facilmente).

Pensando invece di aver assegnato la massa di gas contenuta in ciascuna bolla anziché il suo volume, si può formulare un analogo problema:

Problema 1.8. Dati $\nu \in \mathbb{N}$ e $p_1, \ldots, p_\nu$ numeri reali positivi, ricercare il

$$\min\left\{\mathscr{H}^{n-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\nu}\partial A_i\right) + p_0\sum_{i=1}^{\nu}\mathscr{H}^n(A_i) - \sum_{i=1}^{\nu}p_i\log\mathscr{H}^n(A_i) ; A_i \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^n), A_i \cap A_j = \emptyset\right\}.$$

Nell'ordine di idee del Problema 1.7, dato $a > 0$, ci si può domandare se esista il seguente limite:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}\left[\min\left\{\mathscr{H}^{n-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\nu}\partial A_i\right); A_i \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^n), \mathscr{H}^n(A_i) = a, A_i \cap A_j = \emptyset\right\}\right].$$

Per $n = 2$ si può pensare che il limite sia dato dalla metà del perimetro dell'esagono regolare di area a, mentre per $n \geq 3$ è difficile anche formulare una congettura plausibile sul valore del limite. (Questo è uno dei molti problemi noti come "packing problems").

Altri problemi di partizione sono stati recentemente considerati in connessione con alcuni problemi di informatica teorica ed in particolare di segmentazione di immagini (cfr. [MS]); a tale proposito citiamo alcuni risultati di esistenza e regolarità ottenuti nell'ordine d'idee delle questioni sopra considerate. Il seguente teorema di esistenza è provato in [CT].

Teorema 1.9. *Siano* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \Omega \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^n), 0 < \lambda < +\infty, 1 \leq p < +\infty, g \in L^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Allora esiste almeno una coppia* (K, u) *minimizzante il funzionale*

$$\mathscr{F}(K,u) = \lambda\int_{\Omega\setminus K}|u-g|^p dx + \mathscr{H}^{n-1}(K\cap\Omega) \tag{1}$$

definito per ogni K *chiuso e per ogni* $u \in C^1(\Omega \setminus K)$ *tale che* $\nabla u \equiv 0$ *in* $\Omega \setminus K$. *(In altri termini si considerano le* u *costanti in ogni componente connessa* N *di* $\Omega \setminus K$*).*

Per le coppie (K, u) minimizzanti il funzionale $\mathscr{F}$ studiato nel teorema 1.9 valgono i seguenti risultati di regolarità (cfr. [MT]).

Teorema 1.10. *Sia* (K, u) *un coppia minimizzante il funzionale (1); se* $x \in \Omega \cap \partial N$, *dove* N *è una componente connessa di* $\Omega \setminus K$, *allora* N *ha densità di volume positiva in* x.

Inoltre se C *è l'insieme dei punti di* Ω *appartenenti alla frontiera di almeno 3 componenti connesse distinte di* $\Omega \setminus K$, *allora* $\mathscr{H}^{n-1}(C) = 0$.

Teorema 1.11. *Sia* (K, u) *una coppia minimizzante il funzionale (1); allora per ogni* $x \in \Omega$ *esiste* $\rho > 0$ *tale che il numero di componenti connesse di* $\Omega \setminus K$ *che intersecano* $B_\rho(x)$ *è finito.*

2. ALCUNE CLASSI DI VARIETA' REGOLARI A TRATTI E PROBLEMI DI PLATEAU CON DISCONTINUITA' LIBERE

Mentre la formulazione dei problemi di partizione richiede solo la nozione di misura di Hausdorff, per presentare altri problemi riguardanti varietà di misura minima abbiamo bisogno di introdurre alcune definizioni e notazioni riguardanti le varietà regolari a tratti. Si tratta di nozioni largamente usate in Geometria che tuttavia richiamiamo per assicurare l'uniformità delle notazioni usate.

Per ogni $A \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^n)$ indichiamo con $C^\alpha(A)$ lo spazio delle funzioni reali continue in A con le loro derivate fino all'ordine α se $\alpha \in \mathbb{N}$, lo spazio delle funzioni reali indefinitamente derivabili in A se $\alpha = \infty$, lo spazio delle funzioni analitiche reali in A se $\alpha = \omega$.

Definizione 2.1. *Per* $h \in \mathbb{N}, h > 0$, *definiamo* $V_h C^\alpha(\Omega)$ *la classe degli insiemi* $E \subset \mathbb{R}^n$ *tali che* $E \cap \Omega = \overline{E} \cap \Omega$ *e per ogni* $x \in E \cap \Omega$ *esistono* $A \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^n), B \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^h), \varphi \in (C^\alpha(B))^n, \psi \in (C^\alpha(A))^h$ *tali che*

$$x \in A, \psi(\varphi(y)) = y \quad \textit{per ogni} \quad y \in B, \quad E \cap A = \varphi(B).$$

Inoltre poniamo $E \in V_0 C^\alpha(\Omega)$ *per ogni* α *se e solo se* E *è localmente finito in* Ω.

Osserviamo che $\emptyset \in V_h C^\alpha(\Omega)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, e per ogni α. Un elemento di $V_h C^\alpha(\Omega)$ è una varietà di classe C^α in Ω di dimensione h.

Definizione 2.2. *Definiamo* $F_h C^\alpha(\Omega)$ *la classe delle funzioni* w *tali che, per ogni* $x \in \Omega$ *esistono* $A \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^n), \nu \in \mathbb{N}, E_1, \ldots, E_\nu \in V_h C^\alpha(A)$ *per cui* $x \in A$ *e*

$$w(y) = \sum_{i=1}^{\nu} \chi_{E_i}(y)$$

per ogni $y \in A$.

Accanto alla definizione di varietà regolare su Ω, può essere interessante introdurre la nozione di varietà regolare con bordo regolare su Ω.

Definizione 2.3. *Per $h \in \mathbf{N}, h > 0$, definiamo $V_h BC^\alpha(\Omega)$ la classe degli insiemi $E \subset \mathbf{R}^n$ tali che $E \cap \Omega = \overline{E} \cap \Omega$ e per ogni $x \in E \cap \Omega$ esistono $A \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^n), B \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^h), \varphi \in (C^\alpha(B))^n, \psi \in (C^\alpha(A))^h$ e $z \in \mathbf{R}^h$ tali che*

$$x \in A, \psi(\varphi(y)) = y \quad \text{per ogni} \quad y \in B,$$
$$E \cap A = \{\varphi(y); y \in B, \langle y, z\rangle \geq 0\}.$$

Definizione 2.4. *Definiamo $F_h BC^\alpha(\Omega)$ la classe delle funzioni w tali che, per ogni $x \in \Omega$ esistono $A \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^n), \nu \in \mathbf{N}, E_1, \ldots, E_\nu \in V_h BC^\alpha(A)$ per cui $x \in A$ e*

$$w(y) = \sum_{i=1}^{\nu} \chi_{E_i}(y)$$

per ogni $y \in A$.

Dopo aver dato queste definizioni per varietà non orientate (che possono essere orientabili e non orientabili), diamo una nozione di bordo applicabile in entrambi i casi. Più in generale, questa definizione, ispirata alle idee di [ZW], può applicarsi ad un qualsiasi insieme misurabile rispetto ad una misura di Hausdorff.

Definizione 2.5. *Chiamiamo bordo $(h-1)$-dimensionale di un insieme $\mathscr{H}^h$-misurabile $E \subset \mathbf{R}^n$ l'insieme*

$$\partial(E; \mathscr{H}^h) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n;\ \text{vale} \lim_{\rho \to 0^+} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega_h \rho^h} \mathscr{H}^h(E \cap B_\rho(x))\right) = -1 \right\}.$$

Osservazione 2.6. Se $E \in V_h BC^\alpha(\Omega)$ e $\alpha \geq 1$ allora $\partial(E; \mathscr{H}^h)$ coincide con l'usuale bordo della varietà E ed appartiene a $V_{h-1}C^\alpha(\Omega)$. Più in generale, la nozione di bordo h-dimensionale appena introdotta è legata alla corrispondente nozione di bordo mod 2 nella teoria delle correnti mod 2 (cfr. [ZW]).

Dopo aver introdotto una conveniente nozione di bordo possiamo passare alla considerazione di un problema "tipo Plateau" con discontinuità libere, cioè una forma più debole del classico problema di Plateau, in cui non si impone a priori né la regolarità della soluzione né l'assunzione del dato al bordo. Altri problemi con discontinuità libere sono considerati in [DG].

Congettura 2.7. Sia $\Omega \in \mathscr{A}(\mathbf{R}^n)$. Assegnati $\lambda > 0$ e un insieme chiuso $C \subset \mathbf{R}^n$ con $\mathscr{H}^h(C) < +\infty$, esiste

$$\mu(\Omega, C, \lambda) = \min_{L,E} \{\mathscr{H}^{h+1}(E \cap \Omega) + \lambda \mathscr{H}^h(L \cap \Omega)\},$$

al variare di L tra i sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$ e al variare di E nella classe $V_{h+1}BC^1(\mathbb{R}^n \backslash L)$ con la condizione $\Omega \cap (\partial(E; \mathscr{H}^{h+1}) \setminus L) = \Omega \cap (C \setminus L)$.

Osserviamo che esiste sempre il seguente limite:

$$\Lambda(\Omega, C) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \mu(\Omega, C, \lambda).$$

Sarebbe interessante trovare condizioni su Ω e su C affinché

$$\Lambda(\Omega, C) = 0 \Rightarrow \exists \overline{\lambda} > 0 \quad \textit{tale che} \quad \mu(\Omega, C, \lambda) = \mu(\Omega, C, \overline{\lambda}) \quad \forall \lambda \geq \overline{\lambda}.$$

Congettura 2.8. Assegnati $\lambda > 0$, un insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^n$ con $\mathscr{H}^h(C) < +\infty$ e un insieme $S \in V_{h+r}C^1(\mathbb{R}^n)$ con $r \geq 1$, esiste

$$\min_{L,E} \{\mathscr{H}^{h+1}(E) + \lambda \mathscr{H}^h(L)\},$$

al variare di L tra i sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$ e al variare di E nella classe $V_{h+1}BC^1(\mathbb{R}^n \backslash L)$ con le condizioni $E \subset S$ e $(\partial(E; \mathscr{H}^{h+1}) \setminus L) \cap S = (C \setminus L) \cap S$.

Sarebbe interessante anche considerare analoghi problemi di ambiente riemanniano (cfr. [PJ]) per numerosi risultati sul problema di Plateau classico su varietà riemanniane) od anche "quasi-riemanniano", cioè in spazi topologici che abbiano contemporaneamente una struttura metrica ed una "riemanniana" tra loro compatibili (cfr. il successivo capitolo).

3. SPAZI METRICI QUASI-FINSLERIANI E QUASI-RIEMANNIANI

Nei due capitoli precedenti l'attenzione è stata rivolta allo studio di varietà di classe C^α ed in particolare di classe C^1. E' probabile che molti risultati stabiliti per varietà di classe C^1 possano essere estesi alle varietà lipschitziane. Premessa per una tale estensione sembra essere uno studio sistematico che estenda, nei limiti del possibile, alle varietà lipschitziane i risultati classici della teoria delle varietà riemanniane e finsleriane. Le prime ricerche in questa direzione a me note sono state compiute da H. Whitney ([WH]), J. Luukkainen e J. Väisälä ([LV]), D. Sullivan ([SD]), N. Teleman ([TN]), G. De Cecco e G. Palmieri ([DCP1], [DCP2]).

In questa conferenza propongo una definizione generale di spazio metrico quasi-finsleriano (in breve q-F) e formulo alcune congetture la cui soluzione positiva o negativa individuerebbe comunque un quadro assai generale in cui inserire le ricerche citate.

Sia (X, δ) uno spazio metrico, e δ^* la *distanza di lunghezza* associata a δ, cioè

$$\delta^*(x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, x_{i+1}) ; x = x_1, \dots, x_{x+1} = y, \delta(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \right\} \right].$$

In generale $\delta \leq \delta^*$, con $\delta \neq \delta^*$, anzi le topologie definite da δ e δ^* possono essere distinte. Tuttavia se iteriamo il ragionamento su (X, δ^*) cadiamo nella stessa struttura di lunghezza (cfr. [GM]).

Se $\delta = \delta^*$ si dice che (X, δ) è uno *spazio con lunghezza o dotato di metrica interna.*

Definizione 3.1. *Sia ora A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e d la distanza euclidea su $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $d^*(x, y; A)$ la distanza geodetica euclidea su A.*

Diciamo che $\delta : A \times A \to \mathbb{R}$ è una distanza quasi-finsleriana (in breve $q - F$) su A se
1) Esistono $p, q \in \mathbb{R}$ con $0 < p \leq q < +\infty$ tali che

$$p\delta(x, y) \leq d^*(x, y; A) \leq q\delta(x, y)$$

2) Posto

$$\varphi(x, y) = \limsup_{t \to 0^+} \frac{\delta(x, x + ty)}{t}$$

$$\varphi^*(x, z) = \sup_y \{\langle z, y\rangle; \varphi(x, y) \leq 1\} \tag{2}$$

dove $\langle , \rangle$ è l'usuale prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$, si ha
(3)

$$\delta(y, z) = \lim_{p \to +\infty} \left[\inf \left\{ \left(\int_A |\varphi^*(x, \nabla u(x))|^p dx\right) u \in Lip(A), u(y) = 0, u(z) = 1 \right\}\right]^{-\frac{1}{p}}.$$

Definizione 3.2. *Se nelle ipotesi della definizione 3.1 si può trovare una forma quadratica $\Sigma a_{hk}(x) z_h z_k$ verificante per quasi ogni $x \in A$ e per ogni $z \in \mathbb{R}^n$ la condizione $[\varphi^*(x, z)]^2 = \Sigma a_{hk}(x) z_h z_k$ allora diremo che la distanza δ è una distanzia quasi-riemanniana (in breve q-R).*

Nell'ambito delle varietà q-F si può formulare la seguente congettura.

Congettura 3.3. Se δ è una distanza q-F, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ e per q.o. $x \in A$ risulta

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, -y) = \lim_{t \to 0} \frac{\delta(x, x + ty)}{t} = \sup_z \{\langle z, y\rangle; \varphi^*(x, z) \leq 1\}.$$

Osservazione 3.4. Dalla congettura precedente seguirebbe che la funzione $\varphi(x, \cdot)$ è convessa, simmetrica, positivamente omogenea di grado 1 per q.o. $x \in A$.

Osservazione 3.5. Nel caso di distanze q-R dalla congettura 3.3 seguirebbe $[\varphi(x,y)]^2 = \Sigma b_{hk}(x) y_h y_k$, dove (b_{hk}) è la matrice inversa di (a_{hk}).

Notiamo che nel caso in cui δ sia q-R e φ e φ^* siano continue in tutti i loro argomenti, ritroviamo l'espressione $ds^2 = \Sigma b_{hk}(x) dy_h dy_k$ che dà l'usuale elemento di lunghezza riemanniano (cfr. [DCP1]). Per quanto riguarda le possibili estensioni al caso quasi finsleriano di alcuni risultati in [DCP1] si può formulare la seguente congettura.

Congettura 3.6. Sia $\tau : A \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un'applicazione misurabile verificante le seguenti condizioni:

1) esistono $p, q \in \mathbb{R}$ con $0 < p \leq q < +\infty$ tali che

$$p|y| \leq \tau(x,y) \leq q|y|$$

2) $\tau(x,\cdot)$ è convessa, positivamente omogenea di grado 1. Allora esiste il limite

$$\delta_\tau(y,z) = \lim_{p\to+\infty} \left[\inf\left\{\left(\int_A |\tau(x,\nabla u(x))|^p dx\right) u \in Lip(A), u(y) = 0, u(z) = 1\right\}\right]^{-\frac{1}{p}}.$$

e δ_τ risulta una distanza q-F.

Congettura 3.7. Se $\tau(x,y)$ è continua, allora costruendo δ_τ come nella congettura 3.6 e φ^* come nella definizione 3.1 risulta $\tau = \varphi^*$.

Notiamo che le congetture precedenti non escludono che, nel caso di τ discontinua rispetto ad x, la funzione φ^* definita partendo da δ_τ sia diversa da τ. Poniamo anzi la seguente

Congettura 3.8. Esistono funzioni $\tau(x,y)$ verificanti le ipotesi e la tesi della congettura 3.6 tali che $[\tau(x,y)]^2 = \Sigma a_{hk}(x) y_h y_k$ mentre δ_τ è una distanza q-F ma non q-R.

La congettura precedente afferma, in sostanza, che, anche partendo da una forma quadratica definita positiva, si può, attraverso la costruzione indicata nella congettura 3.6, pervenire a una distanza δ_τ q-F ma non q-R.

Le congetture seguenti riguardano alcune interessanti condizioni di massimalità delle distanze q-F.

Congettura 3.9. Se δ e φ^* verificano le condizioni della definizione 3.1, allora δ è la massima tra le distanze β verificanti le diseguaglianze

$$p\beta(x,y) \leq d^*(x,y;A) \leq q\beta(x,y)$$

$$\varphi^*(x, \nabla_x \beta(x,y)) \leq 1 \quad q.o.\ x \in A, \forall y \in A.$$

La successiva congettura riguarda la massimalità di φ^*.

Congettura 3.10. Se δ e φ^* verificano le condizioni della definizione 3.1; se $\theta : A \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è una funzione tale che $\theta(\cdot, y)$ è misurabile in A e $\theta(x, \cdot)$ è convessa e positivamente omogenea di grado 1, e verifica la condizione

$$\theta(x, \nabla_x \delta(x,y)) \leq 1 \quad q.o.\ x \in A, \forall y \in A,$$

allora per q.o. $x \in A$ e per ogni $y \in \mathbf{R}^n$ risulta $\theta(x,y) \leq \varphi^*(x,y)$.

Osservazione 3.11. Le proprietà di massimalità indicate nella congettura 3.9, 3.10 potrebbero forse essere usate per una definizione alternativa delle distanze q-F sostituendo la proprietà della congettura 3.10 alla (2) e quella della congettura 3.9 alla (3).

In generale il significato della funzione φ considerata nella definizione 1 è chiarito dalla congettura 3.12.

Congettura 3.12. Se δ e φ verificano le ipotesi della definizione 3.1, $u \in Lip([0,1], A)$ e $C = ([0,1], u)$, allora la lunghezza della curva C rispetto alla distanza δ è data da

$$\mathscr{L}(C, \delta) = \int_0^1 \varphi(u(t), u'(t))\, dt.$$

Osservazione 3.13. La congettura precedente può essere confrontata con i risultati in [DCP2].

Dopo aver trattato il problema della lunghezza di una curva relativa ad una distanza q-F conviene trattare sia le misure di Hausdorff n-dimensionali associate a tale distanza, sia la pendenza di una funzione u. A tale scopo cominciamo col definire il determinante di una funzione ψ convessa e positivamente omogenea di grado 1.

Definizione 3.14. *Sia $\psi : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty)$ è una funzione convessa positivamente omogenea di grado 1, poniamo*

$$det\psi = \omega_n [\mathscr{H}^n(\{x : \psi(x) \leq 1\})]^{-1},$$

ove $\omega_n = \mathscr{H}^n(\{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leq 1\})$.

Osserviamo che se $\psi(x) = \sqrt{\Sigma a_{hk} x_h x_k}$ allora $det\psi = \sqrt{det(a_{hk})}$.

Si può porre allora la congettura 3.15.

Congettura 3.15. Nelle ipotesi della definizione 3.1, per ogni insieme di Borel B contenuto in A si ha

$$\mathscr{H}^n_\delta(B) = \int_B det\varphi(x,\cdot)\,dx.$$

Per quanto riguarda invece la pendenza di una funzione $u \in Lip(A)$ possiamo formulare la

Congettura 3.16. Nelle ipotesi della definizione 3.1, per ogni $u \in Lip(A)$ quasi ovunque in A vale

$$\varphi^*(x, \nabla u(x)) = \limsup_{y\to x} \frac{|u(y) - u(x)|}{\delta(x,y)}.$$

Molto importante nella teoria delle metriche q-F sarebbe la loro stabilità rispetto a trasformazioni bilipschitziane. A tale proposito si può enunciare la congettura 3.17.

Congettura 3.17. Sia $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^h, (h \leq n)$ e $\tau \in Bilip(B, A)$. Se δ è una metrica q-F su A, posto

$$\overline{\delta}(x,y) = \delta(\tau(x), \tau(y)) \quad x, y \in B$$

allora $\overline{\delta}^*$, la distanza di lunghezza associata a $\overline{\delta}$, è una metrica q-F su B.

Osservazione 3.18. La precedente congettura può anche essere interpretata dicendo che le varietà lipschitziane immerse in un aperto A "ereditano" le metriche q-F.

Congettura 3.17 bis. Nelle ipotesi della congettura 3.17, se δ è quasi-riemanniana allora anche $\overline{\delta}^*$ è quasi-riemanniana.

Infine vogliamo ricordare una congettura che riguarda il reticolo di tutte le distanze q-F su A.

Congettura 3.19. La famiglia $QF(A)$ delle distanze q-F su A, ordinate con la relazione $\leq$ su tutte le coppie, è un reticolo completo, cioè se $E \subset QF(A)$ ed esiste $\alpha \in QF(A)$ tale che $\alpha \geq \sigma$ per ogni $\sigma \in E$, allora esiste il minimo

$$QFsup(E) = \min\{\delta \in QF(A) : \delta \geq \sigma, \forall\sigma \in E\}.$$

Dalla considerazione delle distanze su un singolo aperto di $\mathbf{R}^n$, possiamo passare alla considerazione di spazi quasi riemanniani e quasi finsleriani, generalizzazione delle varietà riemanniane e finsleriane, attraverso la seguente definizione.

Definizione 3.20. *Uno spazio metrico quasi finsleriano di dimensione n è uno spazio metrico (X, δ) tale che per ogni punto esiste un intorno che può essere messo in corrispondenza bilipschitziana con un aperto di $\mathbb{R}^n$ e la distanza geodetica indotta su A da tale corrispondenza è una distanza q-F.*

Se poi tale distanza risulta q-F (vedi in proposito la congettura 3.17 bis) allora (X, δ) sarà detto spazio metrico quasi riemanniano di dimensione n.

BIBLIOGRAFIA

[AF] F.J. ALMGREN, *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Mem. Am. Math. Soc. **165** 1976.

[AT] F.J. ALMGREN, J.E. TAYLOR, *Geometry of soap films*, Sci. Am. **235** (1976), 82-89.

[CT] G. CONGEDO, I. TAMANINI, *On the existence of solutions to a problem in image segmentation*, in stampa su Ann. Poincarè (1991).

[DCP1] G. De CECCO, G. PALMIERI, *Integral Distance on a Lipschitz Riemannian Manifold*, Math. Zeit. 207 (1991), 223-243.

[DCP2] G. De CECCO, G. PALMIERI, *Length of curves on LIP manifolds*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. s. 9, v. 1, 215-221.

[DG] E. De GIORGI, *Free Discontinuity Problems in Calculus of Variations*, Proc. Int. Meeting in honor of J.L. Lions, Paris, June 6-10, 1988, in stampa.

[GM] M. GROMOV, (rédigé par J. Lafontaine, P. Pansu), *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic-Nathan, Paris (1981).

[LV] J. LUUKKAINEN, J. VÄISÄLÄ, *Elements of Lipschitz Topology*, Ann. Ac. Sc. Fennicae **3** (1977), 85-122.

[FH] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin, 1969.

[MS] D. MUMFORD, J. SHAH, *Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 577-685.

[MT] U. MASSARI, I. TAMANINI, *Regularity properties of optimal segmentations,*, preprint, Un. Trento.

[PJ] J.T. PITTS, *Existence and Regularity of Minimal Surfaces on Riemannian Manifolds*, Princeton University Press, 1981.

[RW] W. RINOW, *Die innere Geometrie der metrischen Räume*, Springer (1961).

[SD] D. SULLIVAN, *Hyperbolic Geometry and Homeomorphisms*, Geometric Topology, Proc. Georgia Topology Conference, Athens, Georgia, J.C. Cantrell ed., Academic Press, 1979, pp. 543-555.

[TJ] J.E. TAYLOR, *The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces*, Ann. of Math. **103** (1976), 489-524.

[TN] N. TELEMAN, *The Index of Signature Operators on Lipschitz Manifolds*, Publ. Math. IHES **58** (1983), 261-290.

[WH] H. WHITNEY, *Geometric Integration Theory*, Princeton University Press, (1957).

[ZW] W.P. ZIEMER, *Integral Currents mod 2*, Trans. AMS, **105** (1962), 496-524.

Ennio De Giorgi
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7
I-56100 Pisa