Note di Matematica Vol. IX - Suppl., 1-16(1989)

FORME FONDAMENTALI DI APPLICAZIONI TRA VARIETA'. APPLICAZIONI DI GAUSS GENERALIZZATE E PROBLEMI DI IMMERSIONE

I. CATTANEO GASPARINI

Il titolo di questo seminario comprende tre diversi argomenti: forme fondamentali associate ad una applicazione tra varietà, applicazioni di Gauss e varietà immerse. Scopo di questa esposizione sarà quello di mettere in luce alcuni dei numerosi ed importanti legami che intercorrono tra questi diversi argomenti. Ad esempio la proprietà della forma fondamentale associata ad una applicazione di Gauss di una varietà M_m immersa isometricamente in $\mathbb{R}^{n+p}$ di essere nulla può dare qualche informazione sulla struttura topologica della varietà stessa? e la proprietà per l'applicazione di Gauss di essere armonica è legata ed in quale modo all'immersione e quindi alla curvatura media della varietà immersa?

La risposta a tali quesiti è stata data da E. Ruh [Ru], E. Ruh, J. Vilms [Ru.V] e J. Vilms [V].

In un lavoro fatto in collaborazione con G. Romani [C.R] in corso di pubblicazione sui Proceedings of the Royal Society of Edimburgh, partendo da una decomposizione del fibrato normale $N(M)$ associata ai valori delle classiche forme fondamentali di M di ordine $k(k \geq 0)$ e da una definizione di applicazione di Gauss generalizzata ν_k associata al k^0 piano normale, si dà una versione più fine e nello stesso tempo più generale dei risultati sopra citati.

Cercherò ora di dare un breve cenno storico dei problemi sopra enunciati.

Tutte le varietà e le applicazioni che si considerano si suppongono C^∞.

Nel 1965 Chern nel lavoro "Minimal surfaces in an euclidean space of N dimensions" [Ch] dimostrò che data una superficie Σ_2 dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ se l'immersione φ : $\Sigma_2 \to \mathbb{R}^{n+2}$ è minimale, la sua applicazione di Gauss è antiolomorfa.

Questo legame tra le superfici minimali e la teoria delle funzioni complesse ha permesso di ottenere, nel caso di dimensioni 2, molti risultati che non possono generalizzarsi in dimensione > 2, ed ha stimolato a cercare legami tra l'applicazione di Gauss e la curvatura media H.

Nel 1970 Ruh prendendo le mosse da un lavoro di Bompieri - De Giorgi - Giusti [B.Dg.G] nel quale si dimostrava che ipersuperficie complete minimali non parametriche, diverse da iperpiani, esistono in dimensioni > 7, e da un lavoro di De Giorgi [Dg], considerò non una superficie Σ_2, ma una ipersuperficie isometricamente immersa in $\mathbb{R}^n$ e dimostrò che se la curvatura media di questa ipersuperficie è *costante*, allora l'applicazione di Gauss $g : M_n \to S^n$ è *armonica*.

Si suppone quindi una condizione più debole per l'immersione, cioè di avere curvatura media H costante anziché nulla come è nel teorema di Chern, e si ottiene per l'applicazione di Gauss la condizione di essere armonica.

Questo punto di vista apre una strada nuova che ha dato luogo all'importante teorema di Ruh-Vilms (1971) che in seguito indicheremo più brevemente R.V.

Teorema. *Se M_n è una varietà immersa isometricamente in $\mathbb{R}^{n+p}$, l'applicazione di Gauss associata a questa immersione è armonica se e solo se M_n ha vettore di curvatura media parallelo.*

Se la codimensione è 1, si ha il teorema di Ruh.

Si deduce il seguente corollario:

Corollario. *L'applicazione di Gauss di una varietà n-dimensionale immersa isometricamente in $\mathbb{R}^{n+p}$ come sottovarietà minimale (quindi $H = 0$ e conseguentemente $\nabla H = 0$), è armonica.*

Si osservi che l'argomento delle applicazioni armoniche tra varietà, dopo il lavoro di Eells - Sampson del 1964 [E.S] veniva studiato in modo molto approfondito; d'altra parte la classe delle sottovarietà con vettore di curvatura media parallelo, naturale generalizzazione della classe delle ipersuperficie a curvatura media costante, aveva verso gli anni '70 particolare interesse.

L'importanza del Teorema di Ruh-Vilms consiste nell'avere trovato, attraverso l'applicazione di Gauss, un legame tra queste due nozioni.

Diamo un breve cenno della dimostrazione di questo teorema che sarà fondamentale per i nostri successivi sviluppi.

Sia $\varphi : M_n \to \mathbb{R}^{n+p}$ una immersione isometrica della varietà n-dimensionale M_n nello spazio euclideo $\mathbb{R}^{n+p}$ e sia g l'applicazione di Gauss associata a questa immersione: $g : M_n \to G(n,p)$ ove G è la Grassmanniana degli n-piani in $\mathbb{R}^{n+p}$. Indicato con $g^{-1}TG$ il pull-back del fibrato tangente ad un fibrato su M, e con $T(M)$ e $N(M)$ rispettivamente il fibrato tangente a M ed il fibrato normale a M in $\mathbb{R}^{n+p}$, si dimostra che il fibrato $g^{-1}TG$ è isomorfo al prodotto $T^*(M) \otimes N(M)$. Osservato poi che la seconda forma fondamentale di M è una sezione del fibrato $T^*(M) \otimes T^*(M) \otimes N(M)$ ne segue che tale fibrato può identificarsi con il fibrato $T^*(M) \otimes g^{-1}TG$.

La seconda forma fondamentale S può quindi considerarsi come una 1 -forma a valori in $G^{-1}TG$, cioè come il differenziale della applicazione di Gauss:

$$g_* = S \tag{1.1}$$

$$\nabla g_* = \nabla S \tag{1.2}$$

ove ∇ è la derivata covariante indotta in $N(M)$.

Considerando la traccia dei due membri della (1.2), traccia rispetto alla metrica di TM, si ottiene, tenendo conto che la derivata covariante commuta con la contrazione,

$$tr\nabla g_* = \nabla trS = \nabla H \tag{1.3}$$

ove H è il vettore di curvatura media.

Facciamo ora una breve parentesi sulle applicazioni armoniche tra varietà per vedere il significato dell'espressione $tr\nabla g_*$ che compare al primo membro della (1.3).

Se (M,g) e (N,h) sono due varietà riemanniane di rispettive dimensioni n e m, e se $f:(M,g)\to(N,h)$ è una applicazione differenziabile, il differenziale f_* (che indicheremo anche df), può considerarsi come una sezione del fibrato $T^*(M)\otimes f^{-1}TN$, ove con $f^{-1}TN$ si indica il pull-back del fibrato TN tangente a N.

La struttura riemanniana di (N,h) induce una struttura riemanniana sopra $f^{-1}TN$. Seguendo Eells-Sampson [E.S] diamo la seguende definizione di *densità di energia* dell'applicazione f:

Definizione 1.1. *Si chiama densità di energia dell'applicazione f la quantità*

$$e(f) = \frac{1}{2}\,tr\cdot f^*h$$

(ove la traccia è calcolata nella metrica g).

Definizione 1.2. *Si chiama energia dell'applicazione f su un compatto $U\subset M$ il funzionale*

$$E(f) = \int_U e(f)\,dV$$

ove dV) la forma di volume di M.

Le equazioni di Eulero associate al funzionale $E(f)$ si scrivono

$$(\nabla df)^{\alpha}_{ij} = 0 \tag{1.4}$$

Definizione 1.3. *Si dice forma fondamentale dell'applicazione f e si indica $\beta(f_*)$ il primo membro della (1.4), cioè la quantità*

$$\beta(f_*) = \nabla df$$

Tale quantità è un tensore doppio covariante a valori in $f^{-1}TN$

Definizione 1.4. *Si dice campo di tensione dell'applicazione f e si indica $\tau(f)$ la traccia della forma fondamentale nella metrica g:*

$$\tau(f) = g^{ij}(\nabla df)^{\alpha}_{ij} \tag{1.5}$$

Una applicazione $f : (M, g) \to (N, h)$ si dice *armonica* se il suo campo di tensione è nullo. E' con ciò chiaro il significato dell'espressione $tr\nabla g_*$ nella (1.3):

$$tr\nabla g_* = \tau(g).$$

Si ha quindi il Teorema di R.V

$$\tau(g) = 0 \Leftrightarrow \nabla H = 0$$

Definiamo ora la forma fondamentale di una applicazione in un contesto un po' più generale che ci sarà utile nel seguito.

Anziché considerare una applicazione tra due varietà riemanniane consideriamo una applicazione ϕ tra due fibrati vettroriali E, E' dotati di connessioni ∇ e ∇' e definiti sulla stessa varietà M

$$\begin{tikzcd}
(E,\nabla) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (E',\nabla') \arrow[dl, "\pi'"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Definizione 1.5. *Si definisce forma fondamentale $\beta(\phi)$ dell'applicazione ϕ tra i due fibrati vettoriali dotati di connessione, la derivata covariante della sezione ϕ del fibrato $Hom(E, E')$. La sua espressione intrinseca (si veda Eells - Lemaire [E.L]) è*

$$\beta(\phi)(X,Y) = \nabla'_X\phi Y - \phi\nabla_X Y \tag{1.6}$$

con X sezione di TM e Y sezione di E. Indicheremo con ΓTM e ΓE le sezioni di TM ed E.

E' facile rendersi conto che la situazione esaminata precedentemente, (si veda la definizione (1.4)), rientra nel quadro ora visto, considerando $E' = f^{-1}TN$.

In particolare, se l'applicazione ϕ è una *immersione* tra due varietà riemanniane ϕ : $(M, g) \to (N, h)$, osservato che localmente una immersione può essere considerata un embedding e quindi in un opportuno aperto si può identificare ϕY con $Y, \forall Y \in \Gamma TM$, si ha

$$\beta(\phi_*)(X,Y) = \nabla^N_X Y - \nabla^M_X Y \tag{1.7}$$

ove con ∇^N e ∇^M si intendono le derivate covarianti in N e M.

Si tenga ora conto che $\forall p \in M \subset N$

$$T_pN = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

e che la derivata riemanniana su M è data dalla proiezione ortogonale $(\nabla_X^N Y)^M$ su M della derivata riemanniana fatta sulla varietà ambiente N: si ha dalla (1.7)

$$\beta(\phi_*)(X,Y) = (\nabla_X^N Y)^{TM^{\perp}} \tag{1.8}$$

cioè nel caso di una immersione $\phi : M \to N$, la forma fondamentale $\beta(\phi_*)$ coincide con la classica seconda forma fondamentale di M.

L'espressione intrinseca della forma fondamentale di una applicazione ϕ ha il vantaggio di darci subito informazioni su come sono legate le connessioni dei due fibrati (E, ∇) e (E', ∇').

Nel caso di connessioni simmetriche una applicazione f tra due varietà $f : (M, G) \to (N, h)$ è *totalmente geodetica*, ossia muta geodetiche di M in geodetiche di N se e solo se la forma fondamentale $\beta(F_*)$ dell'applicazone f è nulla, come si vede in modo immediato dalla 1.6.

L'uguaglianza $\nabla g_* = \nabla S$ ha portato a studiare quelle sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ aventi la seconda forma fondamentale parallela $(\nabla S = 0)$ tramite quelle la cui applicazione di Gauss è totalmente geodetica $(\nabla g_* = 0)$. E' quello che ha fatto Vilms nel lavoro [V].

Queste varietà sono state studiate successivamente anche da Dombrowski e da un altro punto di vista da Ferus.

Vilms ha dimostrato che condizione necessaria perché una varietà riemannana completa M_n ammetta una immersione isometrica in $\mathbb{R}^N$ con seconda forma fondamentale nulla $(\nabla S = 0)$ è che M_n sia diffeomorfa, con conservazione della connessione riemanniana, ad una sottovarietà totalmente geodetica della grassmanniana $G(n, N-n)$ o ad un fibrato su tale varietà, avente come fibra degli spazi euclidei. La varietà M inoltre ha curvatura non negativa ed è localmente simmetrica.

Successivamente Ferus [F, 1] e [F, 2] ha dimostrato che le varietà immerse isometricamente in $\mathbb{R}^N$ con seconda forma parallela sono caratterizzate in termini estrinseci come le sottovarietà di $\mathbb{R}^N$ trasformate localmente in se stesse tramite la simmetria di $\mathbb{R}^N$ rispetto allo spazio normale alla varietà e chiama sottovarietà R-simmetriche tali sottovarietà.

Egli studia da questo punto di vista estrinseco gli spazi simmetrici e dà una classificazione delle varietà con seconda forma fondamentale parallela. Tali varietà costituiscono una classe molto importante di sottovarietà e comprendono le sottovarietà totalmente geodetiche, i cilindri cioè i tubi di raggio costante attorno a sottovarietà totalmente geodetiche e le varietà di Veronese.

Nel lavoro fatto con Romani [C.R] l'idea fondamentale è stata di partire da una decomposizione del fibrato normale $TM^{\perp}$ associato ad una immersione isometrica di una varietà M in uno spazio euclideo $\mathbf{R}^{n+p}$, decomposizione introdottà da C.D. Allendoerfer nel lavoro del 1937 "Imbeddings of Riemann spaces in the large" [A] e ripresa da Dombrowski [Do], da Spivak [Sp] ed altri, e di definire una applicazione di Gauss ν_k che abbiamo chiamata applicazione di Gauss generalizzata normale di ordine $k = (k = 0, 1, \ldots, r)$, associata al k^0 piano normale. Questo ci ha permesso di esprimere una condizione necessaria e sufficiente affinché l'applicazione di Gauss ν_k sia totalmente geodetica $\nabla(\nu_k)_* = 0$ oppure armonica $(\tau\nu_k = 0)$ mediante una somma di termini vettoriali aventi tutti significato geometrico. In particolare per $k = 0$ il teorema si riduce al teorema di R.V. con una formulazione più precisa dovuta a questa decomposizione del fibrato normale.

Abbiamo poi dato condizioni necessarie perché una varietà *completa* M_n ammetta una immersione in $\mathbf{R}^{n+p}$ con $\nabla(\nu_k)_* = 0$ ed abbiamo fatto vedere che per $k = 0$ si ottengono per M le condizioni di Vilms, per $k = 1$ si hanno condizioni più deboli, ma la struttura differenziale topologica della varietà M è la stessa, per $k > 1$ le applicazioni di Gauss ν_k si riducono ad applicazioni costanti.

In un lavoro in corso di pubblicazione, Romani, riprendendo il punto di vista di Ferus, ha dimostrato che $\nabla(\nu_k)_* = 0$ se e solo se per ogni $p \in M$ la simmetria di $\mathbf{R}^n$ rispetto al primo normale N_1 trasforma localmente M in se stessa e chiama tali sottovarietà N_1-simmetriche. Le sottovarietà simmetriche di Ferus sono un caso particolare di queste varietà N_1-simmetriche, le quali a loro volta sono un caso particolare di certe varietà k-simmetriche, introdotte recentemente da Kowalski e Kulich [K.K.].

In un altro lavoro in corso di pubblicazione, A. Carfagna e G. Romani hanno studiato le sottovarietà 2-simmetriche nel senso di Kowalski ed hanno dimostrato che ogni sottovarietà totalmente geodetica S di una sottovarietà localmente simmetrica $C = M \times R$, con $\pi_*(T_x(S)) \subset T_{\pi(x)}M$ e π proiezione sul primo fattore, è una sottovarietà N_1-simmetrica. Inoltre hanno costruito altri esempi introducendo un arbitrario morfismo tra i gruppi di Lie associati alle immersioni standard di R-spazi simmetrici.

Mi sembra che l'impostazione data in [C.R.] possa offrire la possibilità di varie applicazioni e per questo motivo mi permetto ora di esporre brevemente i risultati del nostro lavoro.

Sia $M_n \to \mathbf{R}^{n+p}$ una immersione isometrica di M_n nello spazio euclideo $\mathbf{R}^{n+p}$.

La seconda forma fondamentale s relativa all'immersione è data da:

$$s : TM \times TM \to TM^{\perp}$$

Consideriamo ora nel generico punto $p \in M$ lo spazio che chiamiamo O_2 generato da T_pM e dai valori $s_p(X_pY_p)$ della seconda forma fondamentale, ove $X_p, Y_p \in T_pM$ e facciamo le seguenti classiche posizioni

$$(O_1)_p = T_pM$$

$$(O_2)_p = \{X_p, \nabla^{\mathbb{R}}_{(X_1)_p} X_2\}$$

con

$$X_p \in T_p M \quad e \quad X_2 \in \Gamma TM$$

....

$$(O_k)_p = \{(X_1)_p, \nabla^{\mathbb{R}}_{(X_1)_p} X_2, \ldots, \nabla^{\mathbb{R}}_{(X_1)_p} \nabla^{\mathbb{R}}_{(X_2)_p}, \ldots, \nabla^{\mathbb{R}}_{(X_{k-1})_p}, X_k\},$$

$$X_i \in \Gamma TM, i = 1, 2, \ldots, k$$

O_k si dice k^0 spazio osculatore a M in p.

Supponiamo che M sia "nicely curved" (Spivak) cioè che la dimensione di O_k sia costante per ogni k ed in ogni punto $p \in M$.

Vi sarà allora un intero l tale che $O_l = O_{l+1}$. Si ponga inoltre $O_0 = \{0\}$.

Si definisce k^0 spazio normale a M in p lo spazio $(N_k)_p$ ove

$$(O_{k+1})_p = (O_k)_p \oplus (N_1)_p.$$

Da $(O_1)_p = (O_0)_p + (N_0)_p = TM$ si ha $(N_0)_p = T_p M$, mentre $(N_1)_p$ è lo spazio definito dai valori della seconda forma fondamentale $s(X_p Y_p)$.

Poiché le dimensioni di O_k ed N_k sono costanti per ogni k, si hanno due fibrati

$$\begin{array}{ccc} N_k & & O_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & & M \end{array}$$

Per abbreviare l'esposizione mi occuperò solo del fibrato normale.

Per maggiori notizie si veda [C.R.].

La connessione su $\mathbb{R}^{n+p}$ induce una connessione su N_k tramite la

$$\nabla^{\mathbb{R}}_{X_p} \xi_k = (\nabla^{\mathbb{R}}_{X_p} \xi_k)^{N_k} \quad ove \quad \xi_k \in \Gamma N_k$$

e con $(\nabla^{\mathbb{R}}_{X_p} \xi_k)^{N_k}$ si indica la proiezione ortogonale $\mathbb{R}^{n+p}$ su N_k.

Nello Spivak [Sp] viene provato che se $\xi_k \in \Gamma N_k, \nabla^{\mathbb{R}}_{X_p} \xi_k$ si decompone nella somma di tre componenti appartenenti a N_{k-1}, N_k, N_{k+1}.

Più precisamente si ha la seguente formula di Frenet generalizzata

$$(2.1) \qquad \nabla^{\mathbb{R}}_{X_p} \xi_k = -A_k(X_p,)\xi_k)_p) + \nabla^{N_k}_{X_p} \xi_k + s_k(X_p, (\xi_k)_p)$$

Per $k = 0$, essendo $N_{-1} = 0$ si ha $A_0 = 0$ e la (2.1) diventa

$$\nabla^{\mathbb{R}}_{X_p}\xi_0 = \nabla^{N_0}_{X_p}\xi_0 + s_0(X_p,(\xi_0)_p)$$

Il primo addendo dà la componente tangenziale di $\nabla^{\mathbb{R}}_{X_p}\xi_0$, il secondo la componente verticale. s_0 fornisce quindi la classica seconda forma fondamentale dell'immersione $\varphi : M_n \to \mathbb{R}^{n+p}$. A_1 è la classica applicazione di Weingarten, giacché per quanto detto è definita dalla proiezione della $\nabla^{\mathbb{R}}\xi_1$ su T_pM :

$$(\nabla^{\mathbb{R}}_{X_p}\xi_1)^{N_0} = -A_1(X_p,\xi_0)$$

Queste considerazioni giustificano il nome di forme fondamentali di ordine k in senso classico per s_k e di applicazione di Weingarten di ordine k per A_k.

s_k è una applicazione bilineare di $TM \times N_k$ in N_{k+1}. Se si considerano su M il fibrato $TM \times N_k$ ed il fibrato N_{k+1}, si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} TM \times N_k \arrow[rr, "s_k"] \arrow[dr] & & N_{k+1} \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Dalla definizione data precedentemente sulle form:e fondamentali di una applicazione tra fibrati, si ha che la derivata covariante ∇s_k è la forma fondamentale dell'applicazione s_k : $\beta(s_k) = \nabla s_k$ e si ha

$$\beta(s_k)(X_p,Y_p,(\xi_1)_p) =$$

$$= \nabla^{N_{k+1}}_{X_p} s_k(y,\xi_k) - s_k(\nabla^M_{X_p}Y,(\xi_k)_p) - s_k(y_p,\nabla^M_{X_p}\xi_k)$$

Ci sarà particolarmente utile calcolare la $\beta(\nu_k)$ cioè la forma fondamentale relativa ad una applicazione di Gauss generalizzata che ora definiremo, cioè una applicazione nella quale anziché far corrispondere ad un generico punto $x \in M$ il piano tangente in x, si fa corrispondere il k^0 normale N_k. Si osservi che essendo $N_0 = TM$, si ha $\nu_0 = g$, quindi l'applicazione ν_k può essere considerata come una generalizzazione dell'applicazione di Gauss.

Il nostro scopo è ora di vedere se per le classiche forme fondamentali s_k e per le applicazioni di Gauss ν_k valgono risultati analoghi a quelli R-V:

$$g_* = s_0 \ (\textit{nelle notazioni sopra date } S \equiv s_0)$$

$$\nabla g_* = \nabla s_0$$

$$\tau(g_*) = tr\nabla s_0 = \nabla H$$

Allo scopo calcoliamo $\nabla \nu_k$ ove, indicate con n_k le dimensioni di N_k è

$$(\nu_k)_* : TM \to TG(n_k, N - n_k)$$

Lo spazio tangente alla Grassmanniana $G(n_k, N - n_k)$ è omeomorfo allo spazio $Hom(N_k, N_k^\perp)$; $(\nu_k)_*$ può allora essere considerato come una applicazione da $TM \times N_k$ in $N_k^\perp$ e può quindi considerarsi come una 2-forma su $TM \times N_k$ a valori in N_k.

In [C.R.] si è dimostrato che

$$(\nu_k)_*(X_p, (\xi_k)_p) = (\nabla^{\mathbb{R}}_{X_p} \xi_k)^{N_k^\perp} \tag{2.2}$$

Teorema 2.1. *Vale per l'applicazione $(\nu_k)_*$ la seguente decomposizione*

$$(\nu_k)_* = s_k - A_k \tag{2.3}$$

Dim. Dalla (2.2) applicando la formula di Frenet generalizzata (2.1), si ha

$$(\nu_k)_*(X_p, (\xi_k)_p) \stackrel{def}{=} (\nabla^{\mathbb{R}}_{X_p} \xi_k)^{N_k^\perp} =$$

$$= [-A_k(X_p, \xi_k) + \nabla^{\mathbb{R}}_{X_p} \xi_k + s_k(X_p, \xi_k)]^{N_k^\perp} =$$

$$= -A_k(X_p, \xi_k) + s_k(X_p, (\xi_k)_p)$$

In particolare per $k = 0$ si ha $A_0 = 0, \nu_0 = g_*$ e la (2.3) dà la prima affermazione di R-V: $g_* = S$.

Il calcolo della forma fondamentale $\beta((\nu_k)_*)$ porta al seguente teorema:

Teorema 2.2. *Per la forma fondamentale $\beta((\nu_k)_*)$ relativa all'applicazione di Gauss generalizzata ν_k vale la seguente decomposizione*

$$\nabla(\nu_k)_* = \nabla s_k - \nabla A_k - \sigma_{k+1} + \alpha_{k+1}$$

ove

$$\sigma_{k+1}(X_p, Y_p, (\xi_k)_p) = s_{k+1}(X_p, s_k(X_p, (\xi_k)_p)$$

e

$$\alpha_{k+1}(X_p, Y_p, (\xi_k)_p) = A_{k+1}(X_p, A_k(Y_p; (\xi_k)_p)$$

Dim. Tenendo conto che $(\nu_k)_*$ *è una applicazione tra i fibrati vettoriali* $TM \times N_k$ *in* $N_k^{\perp}$ *entrambi su* M *, si ha*

$$\beta((\nu_k)_*) = (\nabla_{X_p}(\nu_k)_*)(Y_p, (\xi_k')_p) =$$

$$\nabla_{X_p}^{N_k}(\nu_k)_*(Y\xi_k) - (\nu_k)_*(\nabla_{X_p}^{M}Y, (\xi_k)_p) - (\nu_k)_*(Y_p, \nabla_{X_p}^{N_k}\xi_k)$$

Tenendo conto del risultato del Teorema precedente e della formula di Frenet generalizzata si ha:

$$\nabla_{X_p}^{N_k}((\nu_k)_*(Y, \xi_k)) = \tag{2.6}$$

$$= \nabla^{N_{k+1}}X_p s_k(Y, \xi_k) + s_{k+1}(X_p, s_k(Y_p, (\xi_k)_p) +$$

$$+ A_{k-1}(X_p, A_k(Y_p, (\xi_k)_p)) - \nabla^{N_{k+1}}X_p A_k(Y, \xi_k)$$

mentre l'applicazione della (2.3) agli ultimi due addendi della (2.6) dà

$$-(\nu_k)_*(\nabla_{X_p}^{M}Y, (\xi_k)_p) = A_k(\nabla_{X_p}^{M}Y, (\xi_k)_p) - s_k(\nabla_{X_p}^{M}Y, (\xi_k)_p) \tag{2.7}$$

$$-(\nu_k)_*(Y_p, \nabla_{X_p}^{N_k}\xi_k) = A_k(Y_p, \nabla_{X_p}^{N_k}\xi_k) - s_k(Y_p, \nabla_{X_p}^{N_k}\xi_k) \tag{2.8}$$

In definitiva la somma di (2.6), (2.7), (2.8), tenuto conto dell'espressione della ∇s_k *e della* ∇A_k*, dà:*

$$(\nabla_{X_p}(\nu_k)_*)(Y_p, (\xi_k)_p) = (\nabla_{X_p}^{N_{k+1}} s_k)(Y_p, (\xi_k)_p) - (\nabla_{X_p}^{N_{k-1}} A_k)(Y_p, (\xi_k)_p) +$$

$$+ s_{k+1}(X_p, s_k(Y_p, (\xi_k)_p)) + A_{k-1}(X_p, A_k(Y_p, (\xi_k)_p))$$

ossia la tesi.

Si osservi che i vari addendi del secondo membro appartengono rispettivamente a N_{k+1}, N_{k-1}, N_{k+2}, N_{k-2}.

La formula (2.4) fornendo una interpretazione geometrica alle varie componenti della forma fondamentale $\beta((\nu_k)_*)$ associata allo splitting del fibrato normale $TM^{\perp}$ permette di dare risultati più dettagliati di quelli di R-V nel caso $k = 0$, e più generali per $k > 0$. Il teorema che ora mostreremo però ci fa vedere che per $k > 0$ le uniche applicazioni totalmente geodetiche interessanti, si hanno per $k = 0$, e per $k = 1$. Vale infatti il

Teorema 2.3. *Sia $M_n \to \mathbb{R}^{n+p}$ una immersione isometrica.*

Le uniche applicazioni totalmente geodetiche per $k \geq 2$ sono le applicazioni costanti.

Dim. Dalla (2.4) si ha:

$$\nabla(\nu_k)_* = 0 \Leftrightarrow \nabla(s_k)_* = 0\,, \nabla(A_k)_* = 0\,, \sigma_{k-1} = 0\,, \alpha_{k-1} = 0$$

ma

$$\alpha_{k-1} = 0 \Leftrightarrow A_{k-1}(X_p, A_k(Y_p, (\xi_k)_p)) = 0$$

ossia

$$\langle A_{k-1}(X_p, A_k(Y, \xi_k)), \xi_{k-2}\rangle = 0$$

$\forall \xi_{k-2} \in \Gamma N_{k-2}$ ove $<>$ indica il prodotto interno.

Per le classiche relazioni tra le A_k e le s_k si ha

$$\langle s_{k-1}(Y_p, s_{k-2}(X_p, (\xi_{k-2})_p)), (\xi_k)_p\rangle = 0$$

$\forall \xi_k \in \Gamma N_k$, cioè $s_{k-1} = 0$. Poiché s_{k-1} assume i valori in N_k, si ha $N_k = 0$ e, tenuto conto che $\nu_k : p \to (N_k)_p, \forall p \in M$ si ha $\nu_k = 0$.

Esaminiamo allora nella (2.4) i casi $k = 0$ e $k = 1$.

Per $k = 0$ poiché $A_0 = 0$ e $\alpha = 0$, si ottiene

$$\nabla(\nu_0)_* = \nabla s_0 + s_1 \tag{2.9}$$

con $\nu_0 = g$. Il Teorema di R-V asserisce $\nabla g_* = \nabla s$ ove la derivata indica la derivata della seconda forma fondamentale considerata come 2-forma a valori in $(TM)^\perp$, nella (2.9) invece ∇s_0 indica la derivata della seconda forma fondamentale considerata come 2-forma a valori in N_1 si ha quindi una decomposizione di ∇g_* in una componente secondo N_1 ed una secondo N_2 data dal termine s_1.

La considerazione che $\nabla(\nu_0)_*$ sia totalmente geodetica è allora espressa dall'annullarsi delle due componenti:

$$\nabla(\nu_0)_* = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla s = 0 \\ s_1 = 0 \end{cases}$$

si ha quindi in tale caso che il fibrato normale coincide con N_1.

Osservazione. Se per la sottovarietà M di $\mathbb{R}^N$ si ha $\nabla(\nu_0)_* = 0$, non si ha splitting del fibrato normale.

Per $k = 1$, tenuto conto che $\alpha_0 = 0$ e che, per le classiche relazioni tra le applicazioni di Weingarten A_k e le forme fondamentali s_{k-1} (cfr. Spivak [Sp]), si ha per ogni $p \in M$

$$\langle A_1(X_p, (\xi_1)_p), (\xi_0)_p\rangle = \langle s_0(X_p, (\xi_0)_p)), (\xi_1)_p)\rangle$$

$\forall \xi_0 \in \Gamma N_0 \equiv TM, \forall \xi_1 \in \Gamma N_1$, risulta $A_1 = 0 \Leftrightarrow s_0 = 0$, quindi

$$\nabla(\nu_1)_* = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla s_1 = 0 \\ \nabla s_0 = 0 \\ s_2 = 0 \end{cases}$$

Queste condizioni sono ovviamente più deboli della condizione di R-V $\nabla g_* = 0$. Ad esempio in dimensione 1 le curve che soddisfano alla condizione $\nabla(\nu_1)_* = 0$ sono eliche circolari o cerchi o rette, quelle che soddisfano alla condizione $\nabla g_* = 0$ (od in modo equivalente $\nabla(\nu_0)_* = 0$) sono cerchi o rette.

Passiamo ora a considerare l'armonicità delle applicazioni ν_0 e ν_1, cioè annulliamo i rispettivi vettori di tensione.

Per $k = 0$ si ha

$$\tau(\nu_0) = tr\nabla((\nu_0)_*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tr\nabla s_0 = 0 \ \ ossia\ \nabla H = 0 \\ trs_1 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo anche qui una formulazione più precisa del teorema di R-V in quanto il vettore $\tau(\nu_0)$ viene decomposto in un componente secondo N_1 dati da ∇H ed in una componente secondo N_2 data da $tr.s_1$.

Sarebbe quindi interessante dare esempi di varietà la cui applicazione di Gauss g soddisfa ad una condizione più debole della condizione di armonicità ad esempio quella di annullare solo una delle due componenti del vettore di tensione.

Per $k = 1$ si ottiene

$$\tau(\nu_1) = tr\nabla((\nu_1)_*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tr\nabla s_1 = 0 \\ tr\nabla s_0 = 0 \\ trs_1 = 0 \end{cases}$$

Vediamo ora di dare condizioni necessarie affinché una sottovarietà M di uno spazio Euclideo R^N, varietà che supponiamo ora *completa*, abbia nulla la forma fondamentale della applicazione normale di Gauss ν_1 cioè $\beta((\nu_1)_*) = 0$. Il teorema che si ottiene è analogo al teorema di Vilms [V].

Teorema 3.1. *Sia M una varietà connessa, differenziabile, completa di dimensione n, se $i : M \to R^N$ è una immersione isometrica con $\beta((nu_1)_*) = 0$ allora*

i) se dimensione del $Ker\nu_1$ è 0, M è una sottovarietà totalmente geodetica, completa di $G(n_1, N - n_1)$ (ove n_1 è la dimensione di N_1)

ii) se $dim(Ker\nu_1) = r > 0, Ker\nu_1$ definisce una fibrazione con fibre che sono spazi euclidei di dimensione r.

Lo spazio delle foglie è una sottovarietà B totalmente geodetica e completa di $G(n_1, N-n_1)$.

L'applicazione ν_1 può fattorizzarsi in una submersione totalmente geodetica $\pi : M \to B$ ed in una immersione totalmente geodetica $j : B \to G(n_1, N-n_1)$. Più precisamente B è una sottovarietà immersa totalmente geodetica di G e la sua connessione coincide con quella indotta da j. La fibrazione $M \to B$ ammette una connessione piatta con foglie orizzontali totalmente geodetiche.

iii) M ha curvatura non negativa ed è localmente simmetrica.

Dim. Essendo per ipotesi $\beta((\nu_1)_*) = 0$, ν_1 è una applicazione totalmente geodetica. Ricordiamo infatti che

$$(3.1) \quad (\beta(\nu_1)_*(X,Y) = (\nabla(\nu_1)_*)(X,Y) = \nabla^G_X(\nu_1)_*Y - (\nu_1)_*\nabla^M_X Y \forall X,Y \in \Gamma TM$$

quindi da $\nabla(\nu_1)_* = 0$ segue che se Y è parallelo secondo la connessione di M, $(\nu_1)_*Y$ è parallelo secondo la connessione di G.

Se si suppone $ker\nu_1 = 0$, ν_1 definisce allora una *immersione totalmente geodetica* di M in $G(n_1, N-n_1)$.

Se dim.ker $\nu_1 = r$ con $r > 0$, la distribuzione su M definita da $Ker\nu_1$ è *invariante per parallelismo,* infatti se $Y \in ker\nu_1$ cioè $(\nu_1)_*Y = 0$, si ha $\nabla_X(\nu_1)_*Y = 0$ e quindi dalla (3.1) essendo $\nabla(\nu_1)_* = 0$ si ha $(\nu_1)_*\nabla^M_X Y = 0$ cioè $\nabla^M_X Y \in ker(\nu_1)_*$.

Se $p, q \in M$ con $p \neq q$, la derivata covariante ∇ definisce una isometria tra $(ker(\nu_1)_*)_p$ e $(ker(\nu_1)_*)_q$ e quindi la distribuzione definita da $ker(\nu_1)_*$ è di dimensione *costante* r. Essa definisce quindi un sottofibrato di TM.

Inoltre il sistema definito da $ker(\nu_1)_*$ è *integrabile* perché definito da un differenziale. Si sa che in tal caso nell'intorno del generico punto p, M si decompone nel prodotto $V_1 \times V_2$ con V_1 sottovarietà di dimensione r e V_2 di dimensione $n-r$. Si può allora trovare su M una carta avente coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_n)$ tale che assegnate le $n-r$ $y_i (i = 1, \ldots, n-r)$ si ha una varietà integrale del sistema o foglia e tale foliazione è regolare.

Possiamo inoltre osservare che le foglie di questa foliazione F sono varietà totalmente geodetiche: infatti se L è una foglia di F, la seconda forma fondamentale $s_{0(L)}$ di F soddisfa l'equazione

$$s_{0(L)}(X,Y) = \nabla^M_X Y - \nabla^L_X Y \qquad \forall X,Y \in L$$

ma poiché L è variante per ∇^M, $s_{0(L)}(X,Y) = 0$. Le foglie sono quindi sottovarietà totalmente geodetiche di M.

Inoltre la distribuzione Q perpendicolare alla foliazione F è invariante per la connessione ∇^M ed è integrabile: infatti $\forall Y \in (ker(\nu_1)_*)^\perp$ e $X \in ker(\nu_1)_*$ e $Z \in \Gamma TM$, si ha

$$0 = Z\langle X,Y\rangle = \langle\nabla^M_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla^M_Z Y\rangle$$

tenuto conto che $\nabla^M_Z X \in L$ perché $\nabla^M = \nabla^L$ su L, si ha $\langle X, \nabla^M_Z Y\rangle = 0$ cioè $\nabla^M_Z Y \in (ker(\nu_1)_*)^{\perp}$.

Tale distribuzione inoltre è integrabile dato che per la nullità della torsione riemanniana si ha

$$[X,Y] = \nabla^M_X Y - \nabla^M_Y X \qquad \forall X, YTM^{\perp}$$

segue allora, per l'invarianza della distribuzione Q, che $[X,Y] \in TM^{\perp}$. Indichiamo con Q la foliazione relativa alla distribuzione Q; la seconda forma fondamentale di Q è nulla a causa della invarianza di Q rispetto a ∇^M dato che

$$s_{0(Q)}(X,Y) = \nabla^M_X Y - \nabla^Q_X Y.$$

Q è allora una foliazione totalmente geodetica di M, foliazione che chiameremo orizzontale.

M è localmente isometrica al prodotto di due insiemi aperti: $U \times V$ con U aperto che giace sulla foglia verticale e V aperto che giace su quella orizzontale, e tale metrica è "bundle like".

Dalla decompoosizione locale si può passare a quella globale. Chiamiamo B lo spazio delle foglie; poiché M si suppone completa, lo spazio delle foglie B è di Hausdorff.

Poiché la foliazione F è regolare, si può introdurre in B una struttura di varietà differenziabile indotta da quella di M.

L'applicazione $\pi : M \to B$ è una submersione riemanniana, ove s'intende per submersione riemanniana una applicazione che sia una isometria tra $\pi/(ker(\nu_1)_*)^{\perp}$ e TB. In tali condizioni vale il teorema di Hermann che qui ricordiamo.

Teorema di Hermann. *Se M è una varietà riemanniana completa e $\pi : M \to B$ è una submersione riemanniana anche B è completa e π definisce localmente un fibrato banale. Se inoltre le fibre di π sono sottovarietà totalmente geodetiche di M allora $\pi : M \to B$ è un fibrato avente come gruppo strutturale (cioè gruppo operantę sulle fibre), il gruppo delle isometrie della fibra.*

Si ha allora la seguente fattorizzazione della applicazione ν_1 in applicazioni totalmente geodetiche $\nu_1 = j.\pi$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\nu_1"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G(n_1, N - n_1) \\
& B \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Tramite l'applicazione j, la metrica su G induce una metrica su B, proviamo ora che la connessione ∇^M che si ha su $B \subset M$ coincide con la connessione indotta su B da quella di G tramite j.

Infatti poiché j è totalmente geodetica, $\nabla j_* = 0$ e, considerando il pull-back del fibrato TG sopra la varietà B, si ha:

$$0 = (\nabla^G_X j_*)Y = \nabla^G_X(j_*Y) - j_*\nabla^B_X Y.$$

Se indichiamo con $\nabla^{B'}$ la connessione Riemanniana in B indotta da j, aggiungendo e sottraendo la stessa quantità $j_*\nabla^{B'}_X Y$, osserviamo che $\nabla^G_X j_* Y - j_*\nabla^{B'}_X Y'$ è il valore della forma fondamentale dell'applicazione j_* tra i fibrati TB e $j^{-1}TG$ entrambi su B calcolata sui vettori $X, Y \in TB$. Tale forma assume i valori in $(TB)^\perp$ mentre la quantità $j_*(\nabla^{B'}_X Y - \nabla^B_X Y)$ appartiene a j_*TB.

La nullità di ∇_{j_*} implica l'annullarsi dei due addendi.

L'annullarsi dei primo addendo implica che jB è una sottovarietà totalmente geodetica di G quando si usa su B la metrica indotta da quella di G, mentre l'annullarsi del secondo addendo implica che le due connessioni su B coincidono.

Quanto osservato permette di concludere che B essendo una sottovarietà completa totalmente geodetica rispetto alla metrica della grassmanniana G ha curvatura non negativa ed è uno spazio compatto e globalmente simmetrico.

Nel caso generale $(dimker(\nu_1)_* > 0)$, si è visto che la metrica di M è il prodotto della metrica della base e delle fibre che hanno rispettivamente curvatura non negativa e zero, (per questo si veda (C.R.)), quindi la curvatura di M è non negativa.

Per dimostrare la locale simmetria di M si osservi che delle equazioni di Gauss che danno le relazioni tra la curvatura di $\mathbb{R}^{n+p}$ e di M, si ha

$$0 = \langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle \dot{s}(X,Z), \dot{s}(Y,W)\rangle - \langle \dot{s}(Y,Z), \dot{s}(X,W)\rangle$$

ove R è la curvatura di M, tenendo conto che $\nabla \dot{s} = 0$ si ha $\nabla R = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[A] C.D. ALLENDORFER, *Imbedding of Riemann spaces in the large*, Duke Math. J. 3 (1937) 317-333.

[B.Dg.G] E. BOMPIERI, E. De GIORGI, E. GIUSTI, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. 7 (1969) 243-268.

[CAR-R] A. CARFAGNA, G. ROMANI, *Generalized 2-symmetric submanifolds*, In corso di stampa.

[C.R] I. CATTANEO GASPARINI, G. ROMANI, *Normal and osculating maps for submanifolds of* $\mathbb{R}^N$, , Proceedings Royal Society of Edimburgh.

[Ch] S.S. CHERN, *Minimal surfaces in an euclidean space of N dimensions*, Symp. Differential and Combinatorial Topology in honor of M. Morse, 187-198, Princeton Univ. Press, 1965.

[Dg] E. De GIORGI, *Una estensione del teorema di Bernstein*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 19 (1965) 79-85.

[Dò] P. DOMBROWSKI, *Differential maps into riemannian manifolds of constant stable osculating rank*, J. reine angew. Math. 274/275 (1975) 310-341.

[E.L] J. EELLS, L. LEMAIRE, *Selected topics in harmonic maps*, Regional conference series in Mathematics 1980. Published for Conference Board of the Math. Sci. by Am. Math. Soc. n. 50.

[E.S] J. EELLS, H. SAMPSON, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109-160.

[F, 1] D. FERUS, *Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform* , Beispiele und nicht Beispiele, Manuscripta math. 12 (1974) 153-162.

[F, 2] D. FERUS, *Symmetric submanifolds of euclidean space* , Math. Ann. 247 (1980) 81-93.

[H] R. HERMANN, *A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifold be a fibre bundle* , Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1980) 236-242.

[K, N] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry* , Vol. I and II, Interscience New York 1963, 1969.

[K, K] O. KOWALSKI, I. KÜLICH, *Generalized symmetric sub-manifolds of Euclidean space* , (Math. Amm. 277, 67-78, 1987).

[Re] B.L. REINHART, *Foliated manifolds with bundle like metrics* , Annals of Mathematics 69. 1959. 113-132.

[R] G. ROMANI, *N -symmetric submanifolds*, In corso di stampa.

[Ru] E.A. RUH, *Asymptotic behaviour of non-parametric minimal hypersurfaces* , J. Diff. Geometry 4 (1970) 509-513.

[Ru.V] E.A. RUH, J. VILMS, *The Tension field of the Gauss map* , Transaction of the America Mathematical Society, Vol. 149, June 1972, 569-573.

[Sp] M. SPIVAK, *A comprensive introduction to differential geometry* , Publish of Perish Inc. 1979.

[St] W. STRÜBING, *Symmetric submanifolds of Riemannian manifolds* , Math. Ann. 245 (1979) 37-44.

[V] J. VILMS, *Submanifolds of Euclidean space with parallel fundamental form* , Procedding Am. Math. Soc. Vol. 32, 1. March 1972.

[W] J.A. WOLF, *Spaces of constant curvature* , McGraw-Hill, New York, 1967.

Ida Cattaneo Gasparini
Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate
Università degli Studi
Via Antonio Scarpa 10
00161 Roma